

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Génie Mécanique
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: هندسة ميكانيكية
المرجع:.....

Thèse présentée en vue de l'obtention
du diplôme de
Doctorat en Sciences en : Génie Mécanique

Option : Génie Mécanique

**Modélisation numérique des solides par éléments
finis volumiques basés sur le concept SFR
(Space Fiber Rotation)**

Présentée par :
Kamel MEFTAH

Soutenue publiquement le 02/06/2013

Devant le jury composé de :

Pr. Belounar Lamine	Professeur	Président	Université de Biskra
Pr. Hecini Mabrouk	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Pr. Ayad Rezak	Professeur	Co-Rapporteur	Université de Reims Champagne-Ardenne (France)
Pr. Batoz Jean Louis	Professeur	Examineur	Université de Technologie de Compiègne (France)
Pr. Guenfoud Mohamed	Professeur	Examineur	Université de Guelma
Dr. Kebir Hocine	Maitre de Conférences, HDR	Examineur	Université de Technologie de Compiègne (France)
Dr. Zouari Wajdi	Maitre de Conférences	Invité	Université de Reims Champagne-Ardenne (France)

*À mes parents et mes frères et sœurs,
ma famille
et mes amis.*

REMERCIEMENTS

Les travaux de thèse présentés ici sont le fruit d'un travail d'équipe. Je tiens donc à souligner la qualité de l'encadrement qui m'a permis d'effectuer mes premiers pas de chercheur dans d'excellentes conditions. Professeur Rezak AYAD a proposé un sujet de recherche passionnant et original. Sa pédagogie et sa rigueur scientifique ont rendu très constructives les années passées ensemble. Je tiens en particulier à le remercier pour sa motivation et son enthousiasme constants à nous faire partager ses connaissances, son expérience et ses projets.

Je remercie également mon directeur de thèse, Professeur Mabrouk HECINI, de la confiance qu'il nous a donné à travailler en toute autonomie.

J'adresse mes vifs remerciements aux Professeurs Lamine BELOUNAR (président du jury), Jean Louis BATOZ et Mohamed GUENFOUD, ainsi qu'à Messieurs Hocine KEBIR et Wajdi ZOUARI, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant d'être membres du jury.

J'adresse également mes remerciements aux membres du Laboratoire d'Ingénierie et de Sciences des Matériaux (LISM) pour leur accueil et leur sympathie en particulier Professeur Jean-Paul CHOPART.

Je remercie tous mes amis pour la motivation que leur amitié m'a apportée. Leur soutien, leur enthousiasme et leur sens de l'humour m'ont permis d'aller au bout de cette aventure qu'est la thèse.

Des remerciements chaleureux vont aussi à mon ami Lakhdar SEDIRA, pour son pragmatisme, son dynamisme et son optimisme communicatif. Dans les nombreux projets que l'on a partagés, il a su me rappeler l'intérêt des applications, et l'orientation vers le concret d'une partie de mes travaux lui doit certainement beaucoup.

Je tiens aussi à remercier Wajdi de l'université de Reims pour m'avoir aidé sur une partie numérique de ce travail.

Enfin et avant tout, je tiens à remercier du fond du cœur ma famille, qui a su me donner sans cesse soutien, amour, encouragement et l'envie d'apprendre encore plus. Elle était et continuera d'être, je le sais, un soutien sans faille.

Table des Matières

Table des Matières	i
Liste des Figures	v
Liste des Tableaux	ix
Notations	xi
Introduction générale	1
Aspects généraux et intérêt de la modélisation 3D volumique	1
Motivations	2
Travail développé	3
Plan de la thèse	4
Chapitre 1. Etude bibliographique	6
1.1. Introduction	6
1.2. Généralités sur la MMC et la MEF	7
1.2.1. Etude de la mécanique des milieux continus	7
1.2.1.1. Tenseur des déformations linéarisées	8
1.2.1.2. Tenseur des contraintes	9
1.2.1.3. Relations contraintes-déformations	10
1.2.1.4. Lois d'équilibre	11
1.2.1.5. Problèmes d'élasticité 3D	11
1.2.2. Principe des travaux virtuels	12
1.2.3. Discrétisation par éléments finis	13
1.3. Synthèse des éléments finis volumiques existants	15
1.3.1. Eléments volumiques standards et génération du maillage	15
1.3.2. Eléments volumiques avec degrés de liberté de rotation	20
1.3.2.1. Eléments hexaédriques	20
1.3.2.2. Eléments tétraédriques	21
1.3.2.3. Eléments prismatiques	24
1.3.3. Eléments volumiques de premier ordre à précision améliorée	24
1.3.3.1. Méthode de déformations postulées améliorées « Enhanced Assumed Strain »	24
1.3.3.2. Méthode de contraintes postulées « Assumed Stress Method »	26
1.3.4. Eléments volumiques d'ordre supérieur	29
1.3.5. Autres formulations existantes d'éléments volumiques	32
1.3.5.1. Formulation basée sur les fonctions Papcovitch-Neuber	32
1.3.5.2. Méthode des coordonnées volumiques	32
1.3.5.3. Eléments volumiques non-conformes	33
1.3.5.4. Fonctions surfaciques et volumiques de type « bulle »	34
1.3.5.5. Approche des moindres carrées pondérée	35

1.3.6. Éléments volumiques non linéaires	36
1.3.7. Techniques d'intégration réduite avec contrôle des modes parasites	39
1.3.8. Éléments volumiques composites	41
1.4. Conclusion	48
Chapitre 2. Éléments finis volumiques basés sur le concept de rotation d'une fibre spatiale (modèle SFR : Space Fiber Rotation)	50
2.1. Introduction	50
2.2. Formulation variationnelle	51
2.3. Principe du modèle SFR	53
2.4. Approximation du champ des déplacements	53
2.5. Calcul des contraintes	57
2.6. Cas particulier du modèle SFR en 2D : éléments FRT et FRQ	57
2.7. Intégration numérique	58
2.7.1. Calcul des matrices élémentaires	58
2.7.2. Formules d'intégration pour l'élément SFR6	59
2.7.3. Formules d'intégration pour l'élément SFR8	60
2.7.4. Examen du rang de la matrice de rigidité élémentaire	62
2.8. Contrôle des modes parasites	62
2.8.1. Élément SFR8	62
2.8.1.1. Contrôle des modes parasites cinématiques	63
2.8.1.2. Contrôle des modes de « Hourglass »	65
2.8.2. Élément SFR6	66
2.8.2.1. Contrôle des modes parasites cinématiques	67
2.8.2.2. Contrôle des modes de « Hourglass »	69
2.8.2.3. Matrice angulaire fictive	70
2.9. Matrices de masse des éléments SFR	72
2.10. Modèle non conforme SFR8I avec trois modes incompatibles	73
2.11. Conclusion	75
Chapitre 3. Validation numérique des éléments SFR	76
3.1. Introduction	76
3.2. Validation de l'élément SFR6	79
3.2.1. Patchs tests 3D	79
3.2.2. Flexion plane d'une poutre encastrée	80
3.2.3. Panneau fuselé	82
3.2.4. Plaque circulaire sous chargement uniforme	83
3.2.5. Plaque biaise à 30°	85
3.2.6. Poutre vrillée	87
3.2.7. Hémisphère sous charges diamétralement opposées	88
3.2.8. Cylindre pincé avec diaphragmes	89
3.2.9. Poutre encastrée	91

3.2.10. Plaque carrée simplement supportée	92
3.3. Validation des éléments SFR8 et SFR8I	94
3.3.1. Patchs tests 3D	94
3.3.2. Analyse des valeurs propres	98
3.3.3. Flexion plane d'une poutre encastrée	98
3.3.4. Poutre courbée	100
3.3.5. Poutre encastrée	102
3.3.6. Poutre vrillée	103
3.3.7. Plaque carrée simplement supportée soumise à une charge concentrée	105
3.3.8. Plaque carrée encastrée soumise à une charge concentrée	106
3.3.9. Panneau fuselé	107
3.3.10. Cylindre pincé avec diaphragmes	110
3.3.11. Toit cylindrique soumis à son poids propre (Scordelis-Lo roof)	111
3.4. Validation des éléments SFR en vibrations libres	113
3.4.1. Vibrations libres d'une poutre libre/encastrée	113
3.4.2. Vibrations libres d'une aube de compresseur	116
3.5. Conclusion	119
Chapitre 4. Adaptation du modèle SFR aux structures composites	121
4.1. Introduction	121
4.2. Adaptation du modèle SFR aux composites multicouches. Approche par couche orthotrope élémentaire	123
4.2.1. Déduction de la matrice de rigidité pour le modèle SFR Orthotrope	123
4.2.2. Matrice d'élasticité pour une couche orthotrope élémentaire	123
4.2.3. Validation numérique des éléments SFR Orthotropes	125
4.2.3.1. Plaque carrée avec une couche (0°) orthotrope soumise à une charge uniforme	127
4.2.3.2. Plaque carrée stratifiée à 3 et à 4 couches soumise à une charge uniforme	128
4.2.3.3. Plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à une charge sinusoïdale	130
4.2.3.4. Plaque carrée stratifiée à 2 couches soumise à différentes conditions aux limites	131
4.2.3.5. Plaque carrée stratifiée à 3 couches simplement supportée sous chargement sinusoïdal	133
4.3. Formulation des éléments SFR Multicouches	135
4.3.1. Matrice de rigidité élémentaire	135
4.3.2. Calcul des contraintes	137
4.3.2.1. Contraintes planes	137
4.3.3. Validation numérique des éléments SFR Multicouches	137
4.3.3.1. Plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	138
4.3.3.2. Plaque rectangulaire stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	143
4.3.3.3. Plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)	145
4.3.3.4. Cylindre orthotrope sous pression interne	148
4.3.3.5. Poutre encastrée	149
4.4. Conclusion	151

Chapitre 5. Formulation du modèle SFR Non linéaire géométrique	152
5.1. Introduction	152
5.2. La description Lagrangienne	153
5.3. Formulation non linéaire géométrique des éléments SFR	154
5.3.1. Principe des travaux virtuels	154
5.3.2. Formulation Lagrangienne totale	154
5.3.3. Approximation des champs de déplacements et de déformations	156
5.4. Méthodes numériques de résolution	159
5.5. Validation numérique des éléments SFR non linéaires	161
5.5.1. Poutre console soumise à un effort tranchant	161
5.5.2. Coque cylindrique sans diaphragmes soumise à une force ponctuelle	164
5.5.3. Panneau cylindrique soumis à une charge concentrée	167
5.5.4. Coque sphérique soumise à une force ponctuelle	172
5.6. Conclusion	177
Conclusion générale et perspectives	178
Conclusion	178
Perspectives	180
Annexes	181
Annexe A. Fonctions de forme des éléments finis volumiques	181
Annexe B. Passage du repère global vers le repère local d'une face de l'élément SFR	185
Annexe C. Comportement d'un matériau orthotrope	187
Annexe D. Élément volumique tétraédrique à 4 nœuds SFR4	189
D.1. Formulation de l'élément SFR4	189
D.2. Formules d'intégration pour l'élément SFR4	190
D.3. Contrôle des modes parasites pour l'élément SFR4	191
D.4. Validation : Flexion plane d'une poutre encastree	192
Références Bibliographiques	193

Liste des Figures

Figure 1.1. Déformation d'un milieu continu	7
Figure 1.2. Forces au sein d'un solide 3D	10
Figure 1.3. Composantes du tenseur des contraintes	10
Figure 1.4. Les quatre types d'éléments volumiques	16
Figure 1.5. Éléments tétraédrique à 10 nœuds, pyramide à 13 nœuds et hexaédrique à 20 nœuds	17
Figure 1.6. Fonctions de forme des éléments volumiques standards : (a) tétraédrique à 4 nœuds; (b) prismatique à 6 nœuds ; (c) pyramide à 5 nœuds ; et (d) hexaédrique à 8 nœuds	18
Figure 1.7. Élément hexaédrique composé de 6 tétraèdres	18
Figure 1.8. Transition de l'élément hexaédrique aux éléments tétraédriques à travers un élément pyramide [30]	19
Figure 1.9. Élément hexaédrique hybride à 12 nœuds HS12 [86]	27
Figure 1.10. Élément HS18 [87]	28
Figure 1.11. Modes parasites de Hourglass dans une poutre encastree dû à l'intégration réduite $2 \times 2 \times 2$ [105]	30
Figure 1.12. Élément hexaédrique à 20 nœuds avec 14 points d'intégration [104]	30
Figure 1.13. Éléments hexaédriques avec 9 et 21 points d'intégration [105]	30
Figure 1.14. Élément solide de transition avec des nœuds variables de 8 à 27 [134]	33
Figure 1.15. Fonction « bulle » volumique dans un élément tétraédrique [137]	34
Figure 1.16. Illustration de la fonction « bulle » surfacique \bar{N}^4 et les points \bar{P}^i où les fonctions sont maximales [143]	35
Figure 1.17. Éléments hexaédriques de transition à 21 nœuds [175] et à 28 nœuds [176]	38
Figure 1.18. Éléments d'interface à 18 et à 32 nœuds [175, 176]	38
Figure 1.19. Modes de Hourglass selon la direction x avec un point d'intégration [69]	40
Figure 1.20. Élément hexaédrique iso-paramétrique à 20 nœuds [201]	42
Figure 1.21. Illustration d'un maillage éléments finis 3D pour déterminer les contraintes inter-laminaires [212]	43
Figure 1.22. Raffinement du maillage 3D pour l'étude des plaques trouées [215]	44
Figure 1.23. Élément brique à 20 nœuds et élément singulier à 15 nœuds [211]	44
Figure 1.24. Etudes du problème de bord libre par EF 3D [211]	45
Figure 1.25. Élément brique mixte à 18 nœuds [217]	45
Figure 1.26. Discrétisation d'une plaque stratifiée avec des éléments hybrides d'interface et des éléments standards [221]	46
Figure 1.27. Élément d'interface [222, 223]	46
Figure 2.1. Corps solide 3D	52
Figure 2.2. Géométrie d'une fibre spatiale élémentaire	53
Figure 2.3. Élément de référence SFR6 et ses points d'intégration (1×2 et 3×3 PGH)	60
Figure 2.4. Élément de référence SFR8 et ses points d'intégration ($2 \times 2 \times 2$ PG)	61
Figure 2.5. Modes parasites cinématiques pour un élément hexaédrique	62
Figure 2.6. Modes parasites d'Hourglass pour un élément hexaédrique	63
Figure 2.7. Modes parasites dans une face de l'élément hexaèdre	63
Figure 2.8. Modes parasites cinématiques pour un élément prismatique	66
Figure 2.9. Modes parasites de Hourglass pour un élément prismatique	67

Figure 2.10. Modes parasites dans une face de l'élément prismatique	67
Figure 3.1. Patch test 3D : élément hexaèdre distordu composé de 2 éléments prismatiques	80
Figure 3.2. Poutre en flexion plane ($E = 10^7, \nu = 0.3$)	81
Figure 3.3. Panneau fuselé ($E = 1.0, \nu = 1/3$). Données et maillage avec $(2 \times 2 \times 1) \times 2$ éléments SFR6	82
Figure 3.4. Maillage 3D d'un quart de la plaque circulaire	84
Figure 3.5. Convergence du déplacement normalisé du centre de la plaque circulaire avec $R/h = 50$	85
Figure 3.6. Plaque biaise à 30° simplement supportée (conditions aux limites : $w = 0$) soumise à une charge uniforme ($q = 1.0$)	86
Figure 3.7. Convergence du déplacement normalisé au centre de la plaque biaise à 30° ($R/h = 1000$)	86
Figure 3.8. Poutre vrillée maillée avec $(12 \times 2 \times 1) \times 2$ éléments SFR6	87
Figure 3.9. Hémisphère sous charges diamétralement opposées	89
Figure 3.10. Hémisphère sous charges diamétralement opposées. Convergence du déplacement normalisé en fonction du nombre total de ddl (échelle logarithmique)	89
Figure 3.11. Cylindre pincé avec diaphragmes. Données	90
Figure 3.12. Cylindre pincé avec diaphragmes. Convergence du déplacement normalisé en fonction de nombre total de ddl (échelle logarithmique)	91
Figure 3.13. Poutre encastree, maillage 3D avec 8 éléments SFR6	91
Figure 3.14. Plaque simplement supportée soumise à une charge répartie	93
Figure 3.15. Plaque simplement supportée soumise à une charge répartie : Convergence de la déflexion centrale normalisée en fonction de l'élancement L/h	93
Figure 3.16. Patch test pour les solides 3D	94
Figure 3.17. Patch test (Cas B)	96
Figure 3.18. Résultats numériques des contraintes aux points de Gauss (Cas C)	97
Figure 3.19. Maillages plans utilisés	99
Figure 3.20. Maillages 3D utilisés	99
Figure 3.21. Poutre courbée. Géométrie, chargement et conditions aux limites	101
Figure 3.22. Poutre encastree	102
Figure 3.23. Poutre vrillée. Maillage composé de $12 \times 2 \times 1$ éléments SFR8	104
Figure 3.24. Plaque carrée simplement supportée	105
Figure 3.25. Plaque carrée encastree soumise à une charge ponctuelle	106
Figure 3.26. Panneau fuselé. Données du problème	108
Figure 3.27. Panneau fuselé. Effet du maillage distordu sur la convergence des éléments volumiques	109
Figure 3.28. Cylindre pincé. Convergence du déplacement normalisé en fonction du nombre total de ddl	111
Figure 3.29. Toit cylindrique soumis à son poids propre (Scordelis-Lo roof)	112
Figure 3.30. Vibrations libres d'une poutre encastree	114
Figure 3.31. Modes propres de la poutre encastree obtenus avec un maillage consistant en $30 \times 3 \times 1$ éléments SFR8	115
Figure 3.32. Vibrations libres d'une aube de compresseur	116
Figure 3.33. Modes propres d'une aube de compresseur encastree obtenus avec un maillage consistant en $8 \times 8 \times 1$ éléments SFR8	118
Figure 4.1. Modélisation cinématique des structures composites stratifiées avec différents modèles [256, 259]	122

Figure 4.2. Systèmes d'axes local (1,2,3) et global (x,y,z) pour un stratifié plan	123
Figure 4.3. Tenseur des contraintes dans une couche, en coordonnées locales	124
Figure 4.4. Plaque carrée stratifiée à 2, 3 et 4 couches	126
Figure 4.5. Modèles SFR Multicouches (SFR8M et SFR6M)	136
Figure 4.6. Plaque stratifiée avec N couches	Erreur ! Signet non défini.
Figure 4.7. Plaque stratifiée simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale	138
Figure 4.8. Effet de l'élancement $S = L/h$ sur la déflexion centrale \bar{w} pour une plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0$) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR8M	139
Figure 4.9. Effet de l'élancement $S = L/h$ sur la déflexion centrale \bar{w} pour une plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0$) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR6M	140
Figure 4.10. Effet de l'élancement $S = L/h$ sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0$) soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR8M	141
Figure 4.11. Effet de l'élancement $S = L/h$ sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0$) soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR6M	141
Figure 4.12. Distribution de la contrainte plane $\bar{\sigma}_x$ suivant l'épaisseur de la plaque stratifiée à 4 couches soumise à une charge sinusoïdale ($S = 4$). Élément SFR8M	142
Figure 4.13. Plaque rectangulaire stratifiée à 4 couches. Géométrie du problème	144
Figure 4.14. Distribution de la contrainte plane $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur pour une plaque rectangulaire à 4 couches soumise à une charge sinusoïdale ($S = 5$). Élément SFR8M	144
Figure 4.15. Distribution de la contrainte plane $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur pour une plaque rectangulaire à 4 couches soumise à une charge sinusoïdale ($S = 5$). Élément SFR6M	145
Figure 4.16. Déplacement \bar{w} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR8M	146
Figure 4.17. Déplacement \bar{w} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR6M	146
Figure 4.18. Variation de la contrainte plane $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur pour une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à une charge sinusoïdale ($S = 4$). Élément SFR8M	147
Figure 4.19. Variation de la contrainte plane $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur pour une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à une charge sinusoïdale ($S = 4$). Élément SFR8M	147
Figure 4.20. Cylindre orthotrope. Géométrie et données du problème [278]	148
Figure 4.21. Poutre encastree avec des maillages distordus	149
Figure 5.1. Configurations initiale, intermédiaire et finale d'un corps solide (D.L)	153
Figure 5.2. Poutre console en non linéaire géométrique. Données du problème [285]	162
Figure 5.3. Poutre console en non linéaire géométrique. Résultats de l'élément SFR6	163
Figure 5.4. Poutre console en non linéaire géométrique. Résultats de l'élément SFR8	163
Figure 5.5. Configuration initiale ($P = 0$) et déformée ($P = P_{\max}$) de la poutre console soumise à une charge linéique	164
Figure 5.6. Coque cylindrique soumise à une force ponctuelle. Géométrie, chargement et conditions aux limites [285]	164

Figure 5.7. Déflexion W_A de la coque cylindrique soumise à une charge ponctuelle. Résultats de l'élément SFR6	165
Figure 5.8. Déflexion W_A de la coque cylindrique soumise à une charge ponctuelle. Résultats de l'élément SFR8	166
Figure 5.9. Configuration initiale et déformée du quart de la coque cylindrique soumise à une charge maximale $P_{\max} = 18000$	166
Figure 5.10. Panneau cylindrique soumis à une force ponctuelle	167
Figure 5.11. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique épais ($t = 12.7 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR6	168
Figure 5.12. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique épais ($t = 12.7 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR8	169
Figure 5.13. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR6 (pilotage en déplacement)	170
Figure 5.14. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR8 (pilotage en déplacement)	170
Figure 5.15. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR6 (pilotage en longueur d'arc)	171
Figure 5.16. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR8 (pilotage en longueur d'arc)	171
Figure 5.17. Coque sphérique soumise à une charge concentrée	172
Figure 5.18. Courbes charge/déplacement de la coque sphérique. Résultats de l'élément SFR6 (pilotage en charge)	173
Figure 5.19. Courbes charge/déplacement de la coque sphérique. Résultats de l'élément SFR8 (pilotage en charge)	173
Figure 5.20. Courbes charge/déplacement de la coque sphérique. Résultats de l'élément SFR6 (pilotage en déplacement)	174
Figure 5.21. Courbes charge/déplacement de la coque sphérique. Résultats de l'élément SFR8 (pilotage en déplacement)	175
Figure 5.22. Maillage initial du quart de la coque sphérique ($P = 0$)	175
Figure 5.23. Maillage déformé du quart de la coque sphérique soumise à une charge $P =$ 46.56 kN	176
Figure 5.24. Maillage déformé du quart de la coque sphérique soumise à une charge maximale $P_{\max} = 57.79 \text{ kN}$	176
Figure A.1. Eléments volumiques iso-paramétriques hexaédrique à 8 nœuds et prismatique à 6 nœuds dans le système des coordonnées naturelles	181
Figure A.2. Eléments hexaédrique à 8 nœuds et prismatique à 6 nœuds dans le système des coordonnées physiques	182
Figure B.1. Elément hexaédrique dans le repère global (X, Y, Z) et une face de l'hexaèdre dans le repère local ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$)	185
Figure C.1. Repère local et repère globale (orientation des fibres)	188
Figure D.1. Géométrie nodale de l'élément SFR4	190
Figure D.2. Elément de référence SFR4 et ses points d'intégration (4 PH)	191
Figure D.3. Les quatre modes parasites dans l'élément SFR4	191
Figure D.4. Un mode parasite par une face triangulaire de l'élément SFR4	191
Figure D.5. Maillages 3D utilisés	192

Liste des Tableaux

Tableau 1 .1. Comparaison des éléments tétraédriques avec ddl de rotation	23
Tableau 2 .1. Formules d'intégration numérique de Gauss-Hammer pour des prismes	60
Tableau 2 .2. Formules d'intégration numérique de Gauss pour des hexaèdres	61
Tableau 3 .1. Liste des cas-tests (benchmarks) utilisés pour valider l'élément SFR6	77
Tableau 3 .2. Liste des cas-tests (benchmarks) utilisés pour valider l'élément SFR8	77
Tableau 3 .3. Liste des éléments de comparaisons	78
Tableau 3 .4. Patch tests 3D : Les coordonnées nodales (x, y, z), les déplacements, les forces et les moments aux huit nœuds	79
Tableau 3 .5. Contraintes homogènes obtenues aux points d'intégration de l'élément SFR6	80
Tableau 3 .6. Résultats de la poutre en flexion plane	82
Tableau 3 .7. Déplacement V_C et contraintes principales $\sigma_{A \max}$ et $\sigma_{B \min}$	83
Tableau 3 .8. Données de géométrie, chargement et de matériau de la plaque circulaire	83
Tableau 3 .9. Déplacement au centre de la plaque circulaire	84
Tableau 3 .10. Déplacement normalisé au centre de la plaque biaise à 30°	86
Tableau 3 .11. Données de géométrie, chargement et de matériau de la poutre vrillée	87
Tableau 3 .12. Déplacement normalisé au point A de la poutre vrillée	88
Tableau 3 .13. Résultats de l'hémisphère sous charges diamétralement opposées	88
Tableau 3 .14. Déplacement vertical du point C de cylindre pincé	90
Tableau 3 .15. Les résultats normalisés de la déflexion au point C de la poutre encastree	92
Tableau 3 .16. Déflexion centrale normalisée de la plaque simplement supportée	93
Tableau 3 .17. Coordonnées nodales et déplacements imposés (état stable)	94
Tableau 3 .18. Patch test (Cas A) : Mouvement d'un corps rigide (rotation et translation)	95
Tableau 3 .19. Patch test (Cas B) : Cisaillement et traction	96
Tableau 3 .20. Patch test (Cas C) : Déplacements analytiques et numériques	97
Tableau 3 .21. Les valeurs propres de l'élément SFR8	98
Tableau 3 .22. Résultats de la poutre en flexion plane	100
Tableau 3 .23. Déplacements normalisés de la poutre courbée	101
Tableau 3 .24. Résultats normalisés de la poutre encastree	103
Tableau 3 .25. Déplacements normalisés de la poutre vrillée. Chargement dans le plan	104
Tableau 3 .26. Déplacements normalisés de la poutre vrillée. Chargement hors plan	104
Tableau 3 .27. Plaque carrée simplement supportée. Déplacement transverse normalisé au centre de la plaque	105
Tableau 3 .28. Plaque carrée encastree. Déplacement transverse normalisé au centre	107
Tableau 3 .29. Panneau fuselé. Déplacements transverses normalisés au point C	107
Tableau 3 .30. Panneau fuselé (figure 3.26). Déplacement transverse normalisé au point C avec un maillage distordu ($2 \times 2 \times 1$ éléments)	109
Tableau 3 .31. Panneau fuselé. Résultats des contraintes principales $\sigma_{A \max}$ et $\sigma_{B \min}$	110
Tableau 3 .32. Cylindre pincé. Déplacement vertical normalisé	110
Tableau 3 .33. Toit cylindrique (Scordelis-Lo roof). Déplacement vertical normalisé du point A	112
Tableau 3 .34. Fréquences propres de la poutre encastree	114

Tableau 3 .35. Aube de compresseur. Données [18]	117
Tableau 3 .36. Fréquences propres d'une aube de compresseur	117
Tableau 4 .1. Plaque carrée multicouche. Données du problème	127
Tableau 4 .2. Plaque carrée stratifiée avec une seule couche (0°) orthotrope simplement supportée sous chargement uniforme. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximales	128
Tableau 4 .3. Plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement supportée sous chargement uniforme. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximales	129
Tableau 4 .4. Plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement supportée sous chargement uniforme. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximales	130
Tableau 4 .5. Plaque carrée stratifiée à 4 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximales.	131
Tableau 4 .6. Plaque carrée stratifiée à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) sous chargement doublement sinusoïdal. Déplacement transversal et contraintes maximales ($h/L = 0.2$)	132
Tableau 4 .7. Plaque carrée stratifiée à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) sous chargement doublement sinusoïdal. Déplacement transversal et contraintes maximales ($h/L = 0.1$)	132
Tableau 4 .8. Plaque carrée stratifiée simplement supportée. Données du problème	133
Tableau 4 .9. Plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison des déplacements et des contraintes maximales	134
Tableau 4 .10. Plaque carrée stratifiée à 4 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes planes maximales	143
Tableau 4 .11. Plaque rectangulaire stratifiée à 4 couches sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes planes	145
Tableau 4 .12. Cylindre orthotrope sous pression interne. Flèche maximale au point D	148
Tableau 4 .13. Déplacements normalisés de la poutre encastree	150
Tableau 5 .1. Poutre console en non linéaire géométrique : Solution de référence [285]	162
Tableau 5 .2. Résultats des déflexions U et W de la poutre console en non linéaire géométrique	162
Tableau 5 .3. Panneau cylindrique épais ($t = 12.7 \text{ mm}$) soumis à une charge concentrée. Forces P pour différents déplacements W_A	168
Tableau D .1. Formules d'intégration numérique de Hammer pour des tétraèdres	190
Tableau D .2. Résultats de la poutre en flexion plane	192

Notations

Notation matricielle

$[x]$	Matrice
$\{x\}$	Vecteur colonne
$\langle x \rangle$	Vecteur ligne
$[x]^T$	Transposée d'une matrice
$[x]^{-1}$	Inverse d'une matrice
$\det([x])$	Déterminant d'une matrice

Symboles spéciaux

Ω	Domaine de définition
$\partial\Omega$	Frontière du domaine Ω
$\partial\Omega_u, \partial\Omega_t$	Frontières à condition de bord respectivement essentielle et naturelle
Ω_0	Configuration initiale
Ω_t	Configuration courante
\vec{U}_d	Vecteur des déplacements imposés
\vec{f}_s	Vecteur des forces surfaciques imposées
\vec{f}_v	Vecteur des forces volumiques imposées
$[\sigma]$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$[S]$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce
$[E]$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
\vec{T}	Vecteur des contraintes
\vec{n}	Normale locale
\vec{X}	Vecteur position
\vec{X}_0	Vecteur position initiale
\vec{U}	Vecteur des déplacements
$[F]$	Tenseur gradient de déformations
J	Jacobien
$[L]$	Tenseur gradient de déplacements
$[\delta D]$	Tenseur virtuel des déformations
$[\lambda]$	Matrice de passage de repère global au repère local
$[H], [C]$	Loi matériau
C_{ijkl}	Composantes de la matrice de comportement en élasticité linéaire
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson

λ, G	Coefficients de Lamé
W_{int}	Travail virtuel interne
W_{ext}	Travail virtuel externe
$\{R\}$	Vecteur de forces résiduelles (hors-équilibres)
π	Energie potentielle totale
π^e	Energie potentielle élémentaire
P	Terme de pénalité
« * »	Grandeur virtuelle
$\frac{\partial}{\partial x}$ ou « ,x » ...	Dérivation partielle par rapport à x
dx	Différentielle ou incrément
δx	Variation
Δx	Accroissement

Algèbre

δ_{ij}	Symbole de Kronecker
$a \cdot b$	Produit scalaire des vecteurs a et b
$a \wedge b$	Produit vectoriel des vecteurs a et b
$a : b$	Produit contracté des tenseurs a et b
i, j, k, l	Indices latins prennent des valeurs 1, 2, 3

Discrétisation par éléments finis

N_{elt}	Nombre d'éléments de la structure
N_{bn}	Nombre de nœuds de la structure
N_{ddl}	Nombre de degrés de liberté par élément
n_d	Nombre de nœuds par élément
ddl	Degrés de liberté
IE	Intégration exacte
IR	Intégration réduite
x_i, y_i, z_i	Coordonnées du nœud i
$\{u_i\}$	Vecteur des degrés de liberté
N_i	Fonctions d'interpolation
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
u_i, v_i, w_i	Degrés de liberté de déplacements
$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$	Degrés de liberté de rotations
ξ, η, ζ	Coordonnées naturelles d'un élément fini
ξ_i, η_i, ζ_i	Coordonnées naturelles du nœud i
V_e	Volume de l'élément fini (e)
$[K]$	Matrice de rigidité
$[K_L]$	Matrice linéaire incrémentielle des déplacements
$[K_{NL}]$	Matrice non linéaire incrémentielle des déplacements
$[K_T]$	Matrice tangente
$[M]$	Matrice masse

λ	Valeur propre
ω	Fréquence propre
ρ	Masse volumique

Matériaux composites

E_1, E_2, E_3	Modules d'Young dans les directions d'orthotropie 1, 2 et 3
G_{12}, G_{13}, G_{23} ...	Modules de cisaillement dans les plans 1-2, 1-3 et 2-3
$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	Coefficients de Poisson
h_k	Epaisseur de la couche k
N_C	Nombre de couches par élément
σ_{ij}^k	Contraintes de la couche k
ε_{ij}^k	Déformations de la couche k

Autres

MMC	Mécanique des Milieux Continus
MEF	Méthode des Eléments Finis
SFR	Space Fiber Rotation
SFR-O	Space Fiber Rotation-Orthotrope
SFR-M	Space Fiber Rotation-Multicouche
CT	Cisaillement Transversal
FSDT	First Order Shear Deformation Theory
HSDT	Higher-Order Plate Theory
HOSNDPT	Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theory
MLPG	Meshless Local Petrov-Galerkin
RBF	Radial Basis Function
MQ	Multiquadrics
TPS	Thin Plate Splines
EFG	Element-Free Galerkin
FEM	Finite Element Method
EAS	Enhanced Assumed Strain,
HR	Hellinger-Reissner
PN	Papcovitch-Neuber
HVCM	Hexahedral Volume Coordinate Method
CP	Cosserat Point
IRS	Intégration Réduite Sélective
IRD	Intégration Réduite Directionnelle

Introduction générale

Sommaire

Aspects généraux et intérêt de la modélisation 3D volumique	1
Motivation	2
Travail développé	3
Plan de la thèse	4

Aspects généraux et intérêt de la modélisation 3D volumique

Depuis les dernières décennies, la méthode des éléments finis est largement utilisée pour réaliser de véritables études d'ingénierie dans tous les domaines, non seulement parce qu'elle peut réduire considérablement le coût de la conception, mais aussi parce qu'elle peut établir les phénomènes physiques complexes. Elle aide les ingénieurs à mieux comprendre les processus de déformation et de contrôler la qualité de produits. L'application de cette méthode dans une classe importante de problèmes exige des outils numériques appropriés et robustes pour une mise en œuvre souple et efficace. Dans ce cadre et afin de répondre à ces exigences, il est essentiel de choisir et de développer des éléments finis appropriés pour accélérer les processus de conception et de réduire les coûts de calcul pour ces problèmes.

La plupart des problèmes d'ingénierie dans les solides et les structures sont naturellement en trois dimensions. Comme les données de la géométrie et d'autres données du problème sont généralement complexes, la structure est mieux analysée par la méthode des éléments finis. Par exemple, si la structure est mince dans une direction et longue dans les deux autres directions un modèle mathématique de plaque ou coque « *shell* » est approprié, et le problème est résolu efficacement en utilisant les éléments finis de plaques ou coques. Cependant, si les longueurs de la structure sont similaires dans toutes les directions, et le chargement est général, il n'y a pas d'autre choix que de résoudre le problème en utilisant les éléments finis volumiques tridimensionnels. D'autres nécessités d'utilisations les éléments finis volumiques ou massifs citons en particuliers pour la plasturgie [1], l'emboutissage de matériaux métalliques ou de composites multicouches et pour les structures piézoélectriques [2], ces éléments nous permis de tenir compte des effets 3D à travers l'épaisseur. Ainsi l'hypothèse de la non-variation de l'épaisseur, adoptée pour développer les éléments plaques et coques, peut conduire à des résultats erronés même pour des structures minces [1, 2]. Ils peuvent être mis en défaut car les théories approchées utilisées pour leur formulation ne permettent plus de reproduire les phénomènes physiques tels que la plasticité, la propagation d'ondes et le problème de contact. De plus, les éléments volumiques ont beaucoup d'autres avantages, ils évitent le recours à des cinématiques complexes de type plaques et coques, utilisent des lois de comportement générales tridimensionnelles et permettent de reproduire les phénomènes puisqu'ils sont formulés à partir de la théorie de l'élasticité 3D. En particulier, ils permettent de suivre la variation d'épaisseur à travers le calcul des composantes de déformation dans cette direction et enfin, ils autorisent des conditions de contact naturelles sur les deux faces de la structure.

Si à cela on ajoute le fait que les développements actuels dans les domaines de la génération de maillage qui permettent de générer de façon automatique les maillages nécessaires aux calculs des structures tridimensionnelles avec n'importe quel type d'élément volumique soit hexaèdre, tétraèdre, prisme ou pyramide, on obtient un outil qui mène directement, et de façon autonome, depuis la conception jusqu'au calcul d'une structure.

La majorité des éléments finis volumiques 3D sont formulés sur la base des approches des éléments 1D et 2D. Il y a trois types de base d'éléments volumiques :

- (i) Hexaèdre (également connu sous le nom brique) à 8 nœuds (tri-linéaire) avec 24 degrés de liberté (ddl) et à 20 nœuds (quadratique) avec 60 ddl ;
- (ii) Tétraèdre à 4 nœuds (linéaire) avec 12 ddl et à 10 nœuds (quadratique complet) avec 30 ddl ;
- (iii) Prisme (pentaèdre) à 6 nœuds (linéaire) avec 18 ddl et à 15 nœuds (quadratique) avec 45 ddl.

Les éléments hexaédriques sont généralement utilisés dans la modélisation numérique tridimensionnelle des solides et ils ont été également le facteur de motivation pour le développement d'éléments finis de type coques volumiques « *solid-shell element* ». Les éléments tétraédriques sont principalement utilisés dans la génération et le raffinement du maillage. Les éléments prismatiques sont relativement utilisés dans l'analyse des structures de type coques épaisses et ils sont convients pour le maillage des plaques circulaires ou des hémisphères avec une combinaison des deux types d'éléments prismes et briques, où les éléments prismatiques sont utilisés dans la couche adjacente au centre.

Le cadre général de ce travail de recherche est d'apporter des nouveaux éléments finis de type volumiques dits « à valeur ajoutée », avec degrés de liberté de rotation, pour la modélisation numérique des problèmes de mécanique des solides et des structures. Ces éléments sont formulés sur la base du concept de rotation d'une fibre matérielle dans l'espace (concept SFR : Space Fiber Rotation). Trois points nous ont plus particulièrement intéressés : la mise au point d'un outil de simulation numérique pour les structures tridimensionnelles isotropes en élasticité linéaire, pour des cas de chargement statique et dynamique (vibration libre). Cet outil devra être doté d'éléments finis robustes en termes de précision sur les déformations et les contraintes. Le deuxième point consiste au développement des éléments finis volumiques composites basés sur le concept SFR, servant à l'analyse des structures composites stratifiées et le troisième point sera aussi la formulation des éléments SFR en non linéaire géométrique pour les problèmes des grands déplacements et petites déformations des structures tridimensionnelles.

Motivations

La motivation générale pour le développement des modèles volumiques SFR avec degrés de liberté de rotation est la réussite d'application des ddl de rotation aux éléments membranaires 2D. Un grand nombre d'éléments membranaires, plaques et coques, utilisant la rotation d'Allman [3] sont présentés dans les références : Allman [3, 4], Bergan et Felippa [5], Cook [6] et MacNeal et Harder [7]. Une autre formulation simple pour ces éléments 2D avec ddl de rotation qui utilise l'approche hybride est étudiée dans les références : Cook [8] et Yunus [9]. Plus tard, une très récente approche pour les éléments membranaires est développée par Ayad [10] qui utilise une fibre virtuelle plane liée au niveau des nœuds. Cette fibre rotatoire est représentée par un degré de liberté de rotation fictive à chaque nœud de l'élément. Deux éléments sont développés par l'application de

cette approche : (i) un élément triangulaire à 3 nœuds (FRT) qui ne possède pas des modes parasites de Hourglass (sabliers). Les modes parasites dus aux rotations égales sont éliminés par l'utilisation de la technique de stabilisation de MacNeal et Harder [7] ; et (ii) un élément quadrilatéral à 4 nœuds (FRQ) possède deux modes parasites qui sont aussi supprimés facilement à l'aide de la technique de stabilisation de MacNeal et Harder [7]. Le concept de la fibre rotatoire plane est aussi utilisé par Ghomari *et al.* [11] pour améliorer les résultats de l'élément quadrilatéral standard à 4 nœuds dans le processus de formage des corps plastiques. Ce concept exploite l'intégration réduite avec l'utilisation des techniques de stabilisation pour éliminer les modes parasites et obtenir des résultats performants.

D'après les premières études effectuées par Ayad [12] sur l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8 (initial) basé sur le concept SFR, les modes parasites dus à l'intégration réduite disparaissent après assemblage de deux ou plusieurs éléments. Cependant, et après une analyse détaillée du rang de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément SFR8, nous avons observé que l'intégration réduite peut conduire à une singularité de la matrice de rigidité globale pour certaines conditions aux limites. Cette déficience du rang de la matrice de rigidité doit donc être comblée en rajoutant à la rigidité élémentaire une matrice dite de stabilisation. Le nombre des modes à énergie nulle, obtenus par cette technique de stabilisation, doit se réduire à six modes correspondants aux mouvements de corps rigides.

Une autre motivation a été la nécessité de compléter la famille d'éléments finis volumiques SFR par un élément prismatique afin de pouvoir mailler facilement et automatiquement des formes géométriques quelconques. En effet, avec l'avènement d'outils libres de génération de maillage ne générant pas que des hexaèdres, et pour être capable de mailler des structures arbitrairement complexes, le développement d'éléments volumiques à base triangulaire est requis.

Travail développé

A partir d'une idée originale de Ayad, proposée dès 2002 [12, 13], antérieurement aux autres modèles définis sur un principe analogue par d'autres chercheurs : Zouari *et al.* [14] ; Ghomari *et al.* [15], le développement de la famille d'éléments volumiques SFR s'est déroulé en trois grandes étapes ayant chacune des objectifs différents. Chaque étape a conduit parallèlement à la formulation d'une famille d'éléments finis volumiques de type SFR :

Première formulation : la première famille d'éléments finis volumiques SFR a eu pour objectif d'introduire dans des éléments finis volumiques standards tridimensionnels (hexaèdre à huit nœuds et prisme à six nœuds) le modèle SFR. Deux éléments finis solides tridimensionnels, l'un est un élément prismatique à 6 nœuds SFR6 et l'autre est un élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8 sont développés. Une version non conforme de ce dernier baptisé SFR8I avec trois modes incompatibles est également formulée. Ces éléments sont implantés dans le code de calcul par éléments finis Reflex [16-18]. Le but était d'améliorer la précision des éléments finis linéaires classiques. En exploitant la rotation d'une fibre matérielle élémentaire dans l'espace, ce nouveau modèle crée de la valeur en enrichissant la définition du champ des déplacements qui devient quadratique, tout en maintenant le nombre de nœuds des éléments linéaires. Ces éléments volumiques SFR pallient à des inconvénients que rencontrent les éléments finis volumiques standards telles que leur sensibilité aux maillages distordus et les phénomènes de verrouillages numériques.

Deuxième formulation : le deuxième objectif a été d'adapter les éléments volumiques SFR aux structures composites stratifiées. Deux techniques sont utilisées, l'une de type monocouche (approche par couche orthotrope élémentaire) et l'autre de type multicouche. Implantées ainsi dans le code de calcul Reflex. L'un des avantages de ces modèles est d'éviter l'introduction de facteurs de correction du cisaillement transversal (CT) pour les structures stratifiées, utilisés par des éléments finis de plaques et de coques épaisses. Ces facteurs étant nécessaires pour palier au problème de distribution constante des contraintes de CT à travers l'épaisseur, induite par l'utilisation de l'hypothèse cinématique de Mindlin.

Troisième formulation : Toujours dans le cadre du code de calcul par éléments finis Reflex, le troisième objectif a été de formuler les éléments SFR en non linéaire géométrique en grands déplacements et petites déformations, utilisant la description lagrangienne totale associée à la méthode de résolution de Newton-Raphson.

Ces formulations seront explicitées en détail dans les chapitres 2, 4 et 5. Des cas tests numériques classiques en élasticité linéaire des matériaux isotropes et composites avec stratifications et des cas tests en non linéaire géométrique montreront l'intérêt et la validité de ces éléments volumiques SFR ainsi que leur efficacité dans la modélisation numérique tridimensionnelle des solides et des structures 3D.

Plan de la thèse

Concrètement, ce travail de recherche consiste à développer une nouvelle génération d'éléments finis tridimensionnels basés sur le modèle SFR (Space Fiber Rotation), issu d'un modèle déjà existant développé par Ayad [10] pour les éléments finis membranaires 2D. Ces modèles reposent sur une technique originale.

Cette étude a abouti à la rédaction de ce manuscrit que nous avons décidé de scinder en cinq chapitres, précédés par une **introduction générale** et clôturés par une conclusion générale et des perspectives. Après avoir établi, dans le **premier chapitre**, une description générale des problèmes de mécanique des milieux continus et le principe général de la méthode des éléments finis, nous présenterons une synthèse des éléments finis volumiques existants, appliqués aux calculs des solides et des structures isotropes et composites dans le domaine linéaire et non linéaire. Elle est surtout axée autour de la capacité de chaque modèle à modéliser les solides tridimensionnels. Enfin, on donne une vision globale sur les tendances actuelles.

Ensuite, nous présenterons dans le **deuxième chapitre** la formulation théorique du modèle SFR à travers deux éléments volumiques : hexaèdre à 8 nœuds SFR8 et prisme à 6 nœuds SFR6. Les éléments considérés sont linéaires avec six degrés de liberté par nœud, ont réussi à modéliser les structures tridimensionnelles et à éviter les blocages connus dans la littérature, *à priori*, les verrouillages numériques de cisaillement et de membrane. De par leur formulation, les éléments SFR sont capables *à priori* d'une part, d'améliorer la précision des éléments finis volumiques standards et d'autre part, d'obtenir des gains de temps de calcul appréciables. Une analyse détaillée du rang des matrices de rigidité élémentaire des éléments SFR intégrées exactement et sous-intégrées est exposée. En premier lieu, nous rappelons les différents schémas utilisés pour intégrer les matrices de rigidité élémentaire. Deux principales classes de schémas sont ainsi retenues : les schémas d'intégrations numériques exactes et les schémas d'intégrations réduites. Une attention particulière est accordée à l'intégration réduite car ses performances sont bien reconnues, notamment en termes de précision et de temps de calcul. Ensuite, on a déduit un moyen de stabilisation en ajoutant des matrices de pénalités à la matrice de rigidité élémentaire,

tandis que la performance de la technique SFR n'est pas trop altérée par ce traitement. Finalement et après l'évaluation de matrices de masse des éléments SFR6 et SFR8, une version non conforme de l'élément SFR8 sera présentée afin d'éviter *à priori* le verrouillage de Poisson ou d'épaisseur. Cet élément baptisé SFR8I est formulé en utilisant la méthode de modes incompatibles.

Le **troisième chapitre** sera l'occasion de présenter les résultats des simulations numériques obtenus avec les modèles éléments finis volumiques SFR présentés dans le deuxième chapitre. Après les avoir validé sur des Patch-tests des solides 3D, un certain nombre de cas-tests numériques linéaires tant académiques que pratiques ont été analysés pour des cas de chargement statiques et dynamiques (en vibrations libres). Les résultats obtenus sont comparés à des solutions de référence d'origine numérique, théorique ou expérimentale. Ces résultats nous ont permis de vérifier la performance et la fiabilité de ces éléments volumiques SFR ainsi qu'ils ne sont pas endommagés par les méthodes de stabilisation pour éliminer les modes parasites.

Le **quatrième chapitre** concerne plus particulièrement l'adaptation des éléments finis volumiques basés sur le modèle SFR aux structures composites stratifiées. On présentera, dans ce chapitre, deux modèles numériques. Le premier modèle s'appuie sur l'utilisation d'un élément solide SFR dans chaque couche de la structure stratifiée (approche par couche orthotrope élémentaire). Cela nous amène à décrire deux éléments SFR Orthotropes appelés SFR8O et SFR6O. Le second modèle consiste à intégrer l'empilement de plusieurs couches directement dans un seul élément dans l'épaisseur de l'élément solide. La construction du modèle est fondée sur le concept SFR. Ce dernier consiste aussi à formuler deux éléments volumiques multicouches baptisés SFR8M et SFR6M. Ainsi, chaque modèle décrit dans ce chapitre est validé à travers de nombreux tests en élasticité linéaire des matériaux composites stratifiés.

Enfin, le **cinquième et dernier chapitre** est consacré à la formulation des éléments volumiques SFR en non linéarité géométrique de grands déplacements et petites déformations. Deux éléments non linéaires (prisme à 6 nœuds et hexaèdre à 8 nœuds) basés sur le concept SFR sont formulés en intégrant les effets non linéaires géométriques. Nous établissons les équations gouvernantes du problème de grands déplacements en utilisant la formulation lagrangienne totale associée à la méthode de résolution de Newton-Raphson. Ce chapitre se termine aussi par une présentation de cas tests en grands déplacements permettant de valider les éléments finis volumiques SFR en non linéarité géométrique.

Il est à noter que chaque chapitre est clôturé par une conclusion partielle. A la fin du document, une **conclusion générale** tire le bilan de ce travail en termes d'efficacité et de fiabilité des modèles numériques mis en œuvre et présente également quelques **perspectives** de développement liées à l'approche utilisée.

Afin d'assurer la lisibilité du manuscrit, un ensemble d'informations de fond ont été ajoutées sous forme d'**annexes**. Ces informations, bien que relativement importantes, ne sont pas indispensables à la compréhension générale du travail présenté.

Chapitre 1.

Etude bibliographique

Sommaire

1.1. Introduction	6
1.2. Généralités sur la MMC et la MEF	7
1.2.1. Etude de la mécanique des milieux continus	7
1.2.2. Principe des travaux virtuels	12
1.2.3. Discrétisation par éléments finis	13
1.3. Synthèse des éléments finis volumiques existants.	15
1.3.1. Eléments volumiques standards et génération du maillage	15
1.3.2. Eléments volumiques avec degrés de liberté de rotation	20
1.3.3. Eléments volumiques de premier ordre à précision améliorée	24
1.3.4. Eléments volumiques d'ordre supérieur	29
1.3.5. Autres formulations existantes d'éléments volumiques.	32
1.3.6. Eléments volumiques non linéaires	36
1.3.7. Techniques d'intégration réduite avec contrôle des modes parasites	39
1.3.8. Eléments volumiques composites	41
1.4. Conclusion	48

1.1. Introduction

Deux axes principaux ont composé le fil de ce chapitre. Dans une première partie, nous rappellerons les notions fondamentales concernant la mécanique des milieux continus (MMC) et la méthode des éléments finis (MEF). Ensuite, le reste du chapitre sera consacré à l'étude bibliographique sur la modélisation des solides et des structures tridimensionnelles, visant à décrire certaines techniques de développement des éléments finis volumiques. Cette étude bibliographique sur les modèles d'élément solide 3D existants réalisées le long des deux dernières décennies, nous donne une vision globale des hypothèses de base, des méthodes de formulation, des avantages et des inconvénients de chaque modèle. Dans un premier temps, on liste les différents éléments finis volumiques standards et le principe de génération du maillage. On aborde ensuite les récents développements des modèles éléments finis volumiques à partir des différentes formulations dans le domaine élastique linéaire. L'utilisation des éléments volumiques dans le domaine non linéaire fait ensuite l'objet d'une discussion. Puis, on présentera quelques schémas d'intégration numérique notamment l'intégration réduite associés aux différents éléments solides ainsi que les méthodes de contrôle des modes parasites comme les modes de Hourglass. Enfin, pour conclure cette étude bibliographique, nous synthétiserons certains avantages et inconvénients inhérentes à une modélisation numérique des solides 3D par éléments finis volumiques, ce qui nous permettra alors d'introduire les développements apportés tout au long de cette thèse pour mettre au point des éléments volumiques fiables et performants.

1.2. Généralités sur la MMC et la MEF

Dans cette section, nous allons présenter les principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus (MMC), ainsi qu'un rappel sur quelques notions de base de la méthode des éléments finis (MEF). D'une façon générale, cette section est une généralité inspirée des références suivantes : Batoz et Dhatt [16], Craveur [19], Dhatt et Touzot [20], Trinh [21], Lemosse [22].

1.2.1. Etude de la mécanique des milieux continus

Notre étude est basée sur l'analyse d'un problème des milieux continus. On considère un corps solide déformable représenté dans la figure 1.1, où Ω_0 représente la position occupée par le solide étudié à l'état initial appelé configuration initiale. Ce solide, sous l'action des forces extérieures volumiques f_v et surfaciques f_s imposées, se déplace au cours du temps t en Ω_t appelé configuration actuelle.

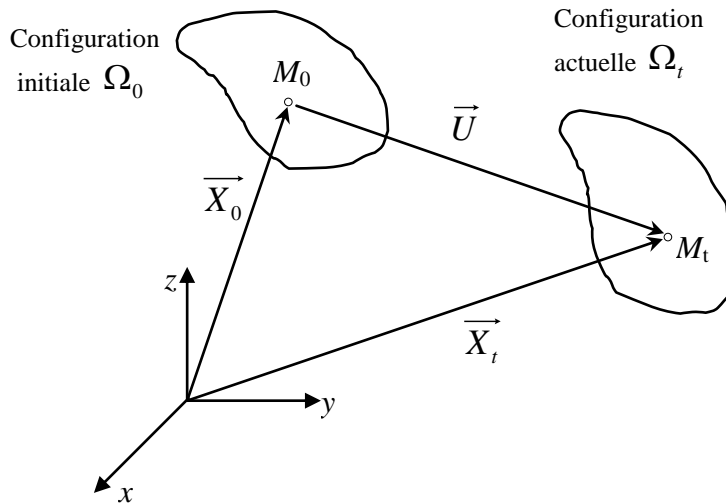


Figure 1.1. Déformation d'un milieu continu

Nous considérons M_0 un point dans la configuration initiale est définie par les coordonnées (x_0, y_0, z_0) . A l'instant t , le point M_0 devient un nouveau point M_t sur la configuration courante Ω_t est définie par les coordonnées (x_t, y_t, z_t) telles que :

$${}^tX_i = {}^0X_i + {}^tU_i \quad (1.1)$$

avec : tU_i est le déplacement du point M entre l'état initiale et l'état courante (actuelle).

On peut écrire l'équation (1.1) sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Dans le repère global, on définit le tenseur gradient de transformation $[F]$ par :

$$\{dX\} = [F]\{dX_0\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+u_{,x_0} & u_{,y_0} & u_{,z_0} \\ v_{,x_0} & 1+v_{,y_0} & v_{,z_0} \\ w_{,x_0} & w_{,y_0} & 1+w_{,z_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

On peut écrire le tenseur gradient de transformation $[F]$ sous la forme suivante :

$$[F] = [I] + [L_0] \quad (1.4a)$$

avec :

$$[L_0] = \begin{bmatrix} u_{,x_0} & u_{,y_0} & u_{,z_0} \\ v_{,x_0} & v_{,y_0} & v_{,z_0} \\ w_{,x_0} & w_{,y_0} & w_{,z_0} \end{bmatrix} \quad (1.4b)$$

Le tenseur $[L_0]$ qui est non symétrique peut être décomposé en un tenseur symétrique $[D_0]$ et un tenseur antisymétrique $[W_0]$:

$$[L_0] = [D_0] + [W_0] \quad (1.4c)$$

Le tenseur des déformations linéaires, ou petites déformations est :

$$[D_0] = \frac{1}{2}[L_0 + L_0^T] = \begin{bmatrix} u_{,x_0} & \frac{1}{2}(u_{,y_0} + v_{,x_0}) & \frac{1}{2}(u_{,z_0} + w_{,x_0}) \\ & v_{,y_0} & \frac{1}{2}(v_{,z_0} + w_{,y_0}) \\ Sym. & & w_{,z_0} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$[W_0] = \frac{1}{2}[L_0 - L_0^T] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\text{où } \theta_x = \frac{1}{2}(w_{,y_0} - v_{,z_0}); \theta_y = \frac{1}{2}(u_{,z_0} - w_{,x_0}); \theta_z = \frac{1}{2}(v_{,x_0} - u_{,y_0})$$

Les rotations infinitésimales θ_x, θ_y et θ_z autour des axes x, y et z ne produisant aucune déformation.

1.2.1.1. Tenseur des déformations linéarisées

Le tenseur des déformations, dite de Green-Lagrange est défini en fonction de tenseur gradient des transformations par :

$$[E] = \frac{1}{2}[F^T \cdot F - I] \quad (1.7a)$$

$[I]$: tenseur identité

Dans la théorie linéaire classique de l'élasticité, les gradients des déplacements sont supposés petits. Les produits et les carrés des premières dérivées sont négligeables :

$$[E] \approx [D_0] = \frac{1}{2} [L_0 + L_0^T] \quad (1.7b)$$

Dans le cas de l'hypothèse de linéarité géométrique, c'est-à-dire de petites rotations et de petites déformations, on définit les déformations ε_{ij} par la formule classique de la mécanique linéaire, u_k est le déplacement dans la direction k :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.8)$$

Les déformations sont symétriques du fait de la commutativité de l'addition des nombres réels.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (1.9)$$

En mécanique linéaire, la quantité $2\varepsilon_{ij}$ (distorsion angulaire) représente la variation d'angle entre les directions i et j . C'est le double de la déformation angulaire ε_{ij} . On définit le tenseur des déformations en un point par :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ Sym. & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.10a)$$

Le tenseur des déformations est lui aussi entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement par :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (1.10b)$$

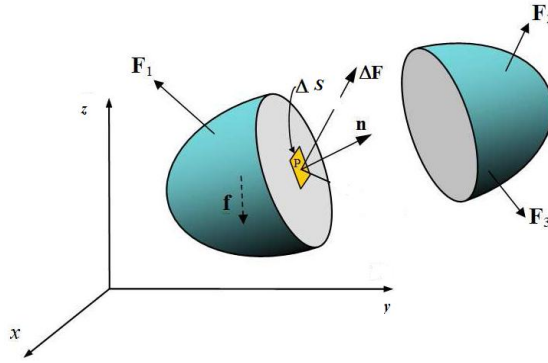
où $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$, $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$ et $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$.

1.2.1.2. Tenseur des contraintes

Considérons un solide subissant des forces surfaciques F et volumiques f et divisé en deux par un plan imaginaire (voir figure 1.2). Un élément de surface ΔS autour de point P et de vecteur normal n subit une force résultante ΔF . Si ΔS est infiniment petit, le rapport $\Delta F / \Delta S$ devient dF / dS . Le vecteur dF / dS est par définition le vecteur de contrainte $T^{(n)}$ au point P associé au plan de vecteur normal n :

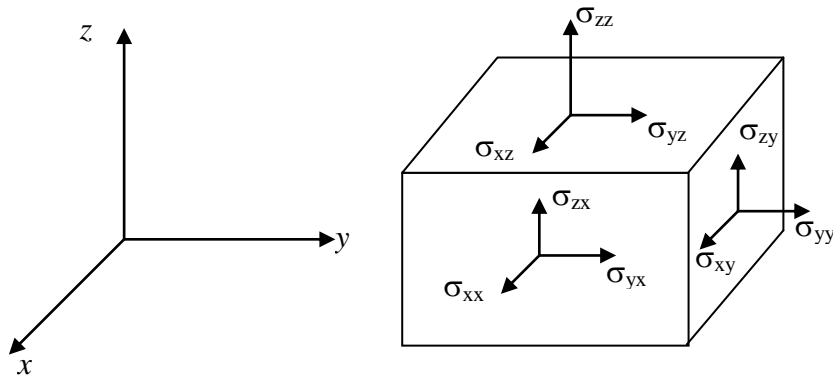
$$T^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (1.11)$$

Le vecteur de contrainte $T^{(n)}$ n'est pas nécessairement colinéaire à n et peut donc être scindé en trois composantes. L'état de contrainte en un point peut être défini par tous les vecteurs de contrainte $T^{(n)}$ associés à tous les plans qui intersectent ce point. On se satisfait dans la pratique de la connaissance des vecteurs de contrainte associés aux plans orthogonaux de vecteurs normaux e_1 , e_2 et e_3 .


Figure 1.2. Forces au sein d'un solide 3D

La décomposition des vecteurs de contrainte $T^{(e_1)}$, $T^{(e_2)}$ et $T^{(e_3)}$ selon les directions des axes de coordonnées cartésiennes (voir figure 1.3) est:

$$\begin{aligned} T^{(e_1)} &= \sigma_{xx}e_1 + \sigma_{xy}e_2 + \sigma_{xz}e_3 \\ T^{(e_2)} &= \sigma_{yx}e_1 + \sigma_{yy}e_2 + \sigma_{yz}e_3 \\ T^{(e_3)} &= \sigma_{zx}e_1 + \sigma_{zy}e_2 + \sigma_{zz}e_3 \end{aligned} \quad (1.12)$$


Figure 1.3. Composantes du tenseur des contraintes

Le tenseur de Cauchy $T^{(e_i)} = \sigma_{ij}e_j$ est symétrique ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). La matrice $[\sigma]$ est la matrice des contraintes au point P . Le tenseur des contraintes, symétrique, est entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T \quad (1.13)$$

1.2.1.3. Relations contraintes-déformations

En se limitant ici au domaine élastique linéaire, les contraintes varient proportionnellement en fonction des déformations. La relation de comportement ou la loi constitutive qui relie les deux vecteurs de contraintes et de déformations s'écrit sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (1.14)$$

où $[C]$ est un tenseur de comportement d'ordre 4 dont les composantes font intervenir les caractéristiques physiques du matériau et $\{\sigma_0\}$ est le tenseur de contraintes à l'état initial.

Les composantes C_{ijkl} du tenseur $[C]$ s'écrivent simplement (où $\sigma_0 = 0$ pour simplifier l'écriture) :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1.15)$$

En raison des symétries des tenseurs de déformations et de contraintes, ces tenseurs de rang 2 et de dimension (3×3) peuvent être réduits en tenseurs de rang 1 et de dimension (6×1) , c'est-à-dire des vecteurs-colonne. De même, le tenseur de raideur de rang 4 et de dimension $(3 \times 3 \times 3 \times 3)$ peut être réduit en un tenseur de rang 2 et de dimension (6×6) . L'expression (1.15) se simplifie alors :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

Enfin, comme il est d'usage dans la littérature, nous utilisons la notation de Voigt qui convertit les 2-uplets i, j en un 1-uplet k :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

1.2.1.4. Lois d'équilibre

Le solide dans la configuration courante Ω_t est soumis à des sollicitations comme des forces surfaciques \vec{f}_s appliquées sur une partie de la frontière $\partial_T \Omega_t$, des déplacements imposés \vec{U}_d appliqués sur une partie de la frontière $\partial_u \Omega_t$, et des forces volumiques \vec{f}_v (qui peut contenir des termes d'inertie). L'union des deux parties $\partial_T \Omega_t$ et $\partial_u \Omega_t$ ($\partial \Omega_t = \partial_T \Omega_t \cup \partial_u \Omega_t$) représente le contour fermé de Ω_t . L'équilibre du système s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{Div}(\sigma) + \vec{f}_v = \vec{0} & \forall M \in \Omega_t & (a) \\ \vec{U}(M) = \vec{U}_d & \forall M \in \partial_u \Omega_t & (b) \\ [\sigma] \vec{n} = \vec{f}_s & \forall M \in \partial_T \Omega_t & (c) \end{cases} \quad (1.18)$$

1.2.1.5. Problèmes d'élasticité 3D

Résoudre un problème d'élasticité 3D consiste à déterminer, en tout point de la structure en équilibre, 15 grandeurs :

$$\begin{array}{ll} \text{Six contraintes :} & \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \\ \text{Six déformations :} & \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \end{array}$$

Trois déplacements: u, v, w

Ces grandeurs doivent vérifier :

Trois relations d'équilibre : $\sigma_{ij,i} + F_j = 0$ dans Ω_t

Six relations contraintes/déformations : $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$ dans Ω_t

Six relations déformations/déplacements : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ dans Ω_t ; $\forall i, j \in 1,2,3$

Auxquelles il convient d'ajouter les conditions aux limites de type déplacement imposé, nul ou non : $u_i = u_{di}$ sur $\partial_u \Omega_t$

et les conditions aux limites de type équilibre : $\sigma_{ij} n_j = f_{si}$ sur $\partial_T \Omega_t$

1.2.2. Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels consiste à satisfaire l'équation d'équilibre local (1.18) sous forme intégrale, on dit aussi sous forme « faible » :

$$W = \int_{\Omega_t} \delta u \cdot (\text{div}(\sigma) + f_v) \cdot dV = 0 \quad \forall \delta u \quad (1.19)$$

où δu représente un ensemble de fonctions test : les déplacements virtuels.

L'intégration par parties permet de transformer la forme intégrale comme suit :

$$\int_{\Omega_t} \delta u \cdot \text{div}(\sigma) \cdot dV = \int_{\Omega_t} \delta u \cdot \sigma_{ij,j} \cdot dV = \oint_{\partial \Omega_t} \delta u_i \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot dS - \int_{\Omega_t} \delta u_{i,j} \cdot \sigma_{ij} \cdot dV \quad (1.20)$$

On sépare le contour sous la forme $\partial \Omega_t = \partial_T \Omega_t \cup \partial_u \Omega_t$. Afin de réduire le nombre d'inconnues du problème, on choisit le champ des déplacements virtuels nul sur $\partial_u \Omega_t$.

$$\int_{\partial_u \Omega_t} \delta u_i \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot dS = 0 \quad (1.21)$$

Cette hypothèse revient à vérifier de façon forte l'équation (1.18b). La condition en effort (1.18c) est vérifiée de façon faible, c'est-à-dire :

$$\int_{\partial_T \Omega_t} \delta u_i \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot dS = \int_{\partial_T \Omega_t} \delta u \cdot f_s \cdot dS \quad (1.22)$$

On obtient finalement la forme faible de l'équilibre du système dans la configuration actuelle Ω_t :

$$\begin{cases} W_{\text{int}} = \int_{\Omega_t} \text{Tr}([\delta D] : [\sigma]) dV \\ W_{\text{ext}} = \int_{\Omega_t} \delta u \cdot f_v \cdot dV + \int_{\partial_T \Omega_t} \delta u \cdot f_s \cdot dS \\ W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \delta u \end{cases} \quad (1.23a)$$

$$\begin{cases} u = u_d \quad \text{sur} \quad \partial_u \Omega_t \\ \delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_u \Omega_t \end{cases} \quad (1.23b)$$

avec

$$[\delta D] = \text{Sym}([\nabla \delta u]) = \begin{bmatrix} \delta u_{,x} & \frac{1}{2}(\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) & \frac{1}{2}(\delta u_{,z} + \delta w_{,x}) \\ & \delta v_{,y} & \frac{1}{2}(\delta v_{,z} + \delta w_{,y}) \\ \text{Sym.} & & \delta w_{,z} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

On peut écrire le principe des travaux virtuels sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{cases} W_{\text{int}} = \int_{\Omega_t} \langle \delta D \rangle \cdot \langle \sigma \rangle dV \\ W_{\text{ext}} = \int_{\Omega_t} \langle \delta u \rangle \cdot \langle f_v \rangle dV + \int_{\partial_T \Omega_t} \langle \delta u \rangle \cdot \langle f_s \rangle dS \\ W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \langle \delta u \rangle \end{cases} \quad (1.25a)$$

$$\begin{cases} \langle u \rangle = \langle u_d \rangle \quad \text{sur} \quad \partial_u \Omega_t \\ \langle \delta u \rangle = \langle 0 \rangle \quad \text{sur} \quad \partial_u \Omega_t \end{cases} \quad (1.25b)$$

avec en coordonnées cartésiennes globales :

$$\begin{cases} \langle \delta u \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle \\ \langle \delta D \rangle = \langle \delta u_{,x} \quad \delta v_{,y} \quad \delta w_{,z} \quad \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \quad \delta u_{,z} + \delta w_{,x} \quad \delta v_{,z} + \delta w_{,y} \rangle \\ \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \rangle \\ \langle f_v \rangle = \langle f_{vx} \quad f_{vy} \quad f_{vz} \rangle \\ \langle f_s \rangle = \langle f_{sx} \quad f_{sy} \quad f_{sz} \rangle \end{cases} \quad (1.26)$$

1.2.3. Discrétisation par éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique numérique qui, à partir de la forme variationnelle continue, permet d'aboutir un système matriciel d'équations traduisant l'équilibre sous une forme discrète. Les inconnues de ce système sont les degrés de liberté nodaux.

Approximation nodale par sous-domaines : Le domaine de volume V sur lequel une solution est cherchée, est divisé en sous-domaines V_e , aussi appelés éléments finis, tels que :

$$V = \sum_e V_e \quad \text{avec} \quad \bigcap_e V_e = \emptyset \quad (1.27)$$

A l'intérieur de chaque élément V_e , défini par des nœuds de coordonnées x_i^e , la position de tout point x est repérée par :

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \quad (1.28)$$

où (ξ, η, ζ) sont les coordonnées paramétriques et N_i sont les fonctions de forme en variables paramétriques.

L'ordre polynomial des fonctions de forme, ainsi que le nombre de nœuds par élément (n_d) sont déterminés par le choix du type d'élément fini fait par l'utilisateur.

La fonction solution u s'écrit sur chaque élément par la relation suivante :

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta)u_i ; \quad u^*(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta)u_i^* \quad (1.29)$$

où \bar{N}_i sont les fonctions d'interpolation, u^* est la fonction virtuelle, u_i sont les inconnues nodales caractérisant la fonction solution et u_i^* sont les inconnues nodales virtuelles. Dans le cas d'une représentation iso-paramétrique, les fonctions d'interpolation sont égales aux fonctions de forme, soit $N \equiv \bar{N}$. Il est à noter que ce choix est le plus courant dans la méthode des éléments finis.

La forme variationnelle discrétisée sur chaque élément en fonction de u_e et u_e^* est :

$$W_e = u_e^{*T} \cdot (k_e \cdot u_e - f_e) \quad (1.30)$$

où k_e est la matrice de rigidité élémentaire, f_e est le vecteur élémentaire des sollicitations.

Après l'assemblage de la forme variationnelle, on obtient :

$$W = \sum_e W_e = \sum_e u_e^{*T} \cdot (k_e \cdot u_e - f_e) = U^{*T} \cdot (K \cdot U - F) = 0 \quad \forall U^* \quad (1.31)$$

Soit :

$$K \cdot U = F \quad (1.32)$$

où K , F , U et U^* sont respectivement la matrice de rigidité globale, le vecteur global des sollicitations, l'ensemble des variables nodales et l'ensemble des variables nodales virtuelles obtenus par assemblage de matrices élémentaires.

Pour évaluer les quantités relatives à chaque élément on doit résoudre le problème linéaire $K \cdot U = F$ ($U = K^{-1} \cdot F$) en tenant compte des conditions aux limites. Puis, extraire u_e de U et calculer les déformations, les contraintes ...

Pour des problèmes non linéaires géométriques, l'état de la configuration à l'instant $t + 1$ dépend de celui à l'instant t . Donc, la matrice de rigidité dépend également des variables que l'on cherche. Le problème ne peut donc pas être résolu explicitement. L'approche générale pour résoudre les problèmes non linéaires en utilisant la technique de solution incrémentielle itérative et la description lagrangienne, comprend en général trois étapes principales :

1. **Etape de prédiction** : Evaluer la rigidité globale de la structure et trouver les déplacements incrémentiels ;
2. **Etape de correction** : Déterminer les forces nodales exactes de chaque nœud ;
3. **Etape de détection** : Comparer les forces nodales avec les forces appliquées pour trouver les forces résiduelles dans la configuration déformée et vérifier la condition d'équilibre pour voir si l'on a encore besoin d'itérations.

1.3. Synthèse des éléments finis volumiques existants

La méthode des éléments finis (MEF) a été d'abord décrite par Turner *et al.* [23] avant que Clough [24] n'établisse sa terminologie. Plus de détails sur les grandes étapes de l'histoire de la MEF peuvent être trouvés dans [25, 26]. Après plus de 50 ans de développement, la MEF est devenue l'un des outils les plus puissants et populaires pour des simulations numériques dans les différents domaines des sciences naturelles et d'engineering. Les logiciels commerciaux disponibles sont maintenant largement utilisés dans la conception technique des structures en raison de leur polyvalence pour les solides et les structures de géométrie complexe et de leur applicabilité pour de nombreux types de problèmes linéaires et non linéaires. Théoriquement, les chercheurs tentent d'améliorer le développement actuel des logiciels de calcul par éléments finis en les enrichissant par des éléments finis robustes et performants.

Dans cette étude bibliographique, nous essayons de résumer les progrès importants réalisés pendant les deux dernières décennies dans le développement d'éléments finis volumiques. Des travaux antérieurs à cette période ont été résumés dans la référence [27]. Nous avons essayé de fournir une étude approfondie de la littérature et une synthèse aussi complète que possible. Cependant, en raison de la disponibilité insuffisante des références bibliographiques sur le sujet des éléments finis volumiques (solides 3D), cette étude ne peut pas être complète. Dans la littérature, il existe beaucoup d'approche de formulation. Il est difficile d'effectuer une classification détaillée qui tienne compte de tous les modèles existants. Afin d'organiser cette étude, nous avons classé en général les différentes approches disponibles dans la littérature sur la formulation des éléments finis volumiques comme suit : (i) éléments finis volumiques standards basés sur la formulation 3D du principe des travaux virtuels et utilisant des approximations de premier et deuxième ordre ; (ii) éléments volumiques avec ddl de rotation ; (iii) éléments volumiques de premier ordre à précision améliorée basés sur les formulations mixtes et les méthodes de déformations postulées améliorées ; (iv) éléments volumiques d'ordre supérieur ; (v) autres formulations existantes d'éléments volumiques ; (vi) éléments volumiques non linéaires ; (vii) techniques d'intégration réduite avec contrôle des modes parasites ; et (viii) éléments volumiques composites. Il faut noter que tous les éléments volumiques efficaces sont les éléments qui sont formulés à partir de combinaison de deux ou plus des techniques décrites ci-dessous. Par conséquent, ces approches sont discutées en général d'une manière indépendante et peut être pas assez approfondi. Néanmoins, afin de garder une organisation acceptable, nous choisissons d'utiliser nos discrétions de jugement pour la désignation des catégories particulières des éléments. Nous devons préciser que ces désignations sont en aucun cas être considérées comme irrévocable.

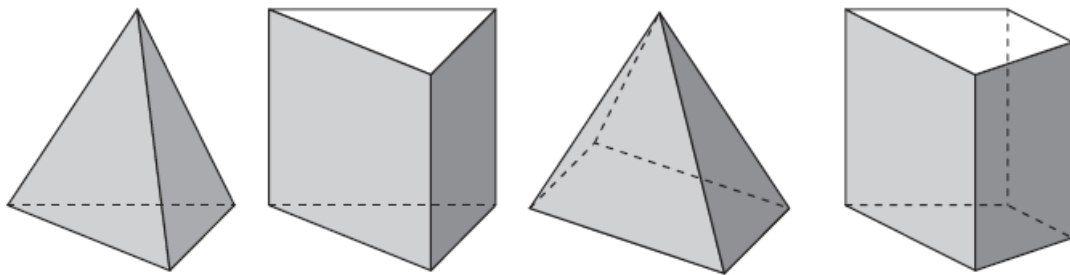
Un bilan de toute cette revue bibliographique sera fait à la fin du chapitre permettant ainsi de poser le problème et de définir le cadre de notre étude.

1.3.1. Eléments volumiques standards et génération du maillage

La méthode des éléments finis classique, basée sur la formulation tridimensionnelle du principe des travaux virtuels et utilisant des approximations du premier et deuxième ordre, conduit à une variété d'éléments volumiques standards. On distingue trois grands types d'éléments finis volumiques fréquemment utilisés : (i) les éléments finis de Lagrange qui reposent sur des bases polynomiales complètes et différents types de géométries ; (ii) les éléments finis de type Serendip, qui sont des éléments finis de Lagrange avec des bases polynomiales incomplètes ; et (iii) les éléments finis d'Hermite, de haute précision, qui utilisent les inconnues nodales et leurs dérivées.

La figure 1.4 illustre la famille d'éléments finis volumiques de base ; ces éléments ne possèdent que des degrés de liberté en translation à chaque nœud. On appelle cette famille (éléments de type Lagrange) car les champs de déplacements sur lesquels ils sont formulés sont obtenus par interpolation de Lagrange. Les éléments les plus simples de la famille, possèdent des champs de déplacements linéaires, entièrement définis à l'aide de degrés de liberté localisés aux sommets. Lorsque l'on passe à des champs quadratiques et cubiques, on introduit des nœuds intérieurs comme le montre la figure 1.5 : ces nœuds intérieurs peuvent être éliminés à l'aide du procédé de condensation statique, ou on peut également construire des fonctions de déformée exprimées en fonction des seuls nœuds extérieurs en opérant directement sur les fonctions d'interpolation de Lagrange.

On peut également formuler les éléments volumiques en prenant pour degrés de liberté les dérivées des déplacements aux sommets de l'élément, par l'intermédiaire de l'interpolation de Hermite. L'élément de base de cette famille requiert des champs de déplacements cubiques [28].



(a) Élément tétraèdre (b) Élément prisme (c) Élément pyramide (d) Élément hexaèdre

Figure 1.4. Les quatre types d'éléments volumiques

Un maillage volumique se compose généralement de quatre types d'éléments volumiques standards : tétraédrique, hexaédrique, prismatique et pyramide de la figure 1.4. Chaque type d'élément se comporte différemment dans la simulation par éléments finis. Si nous avons par exemple deux types de maillages : un composé uniquement par des éléments tétraédriques et l'autre constitué d'un seul élément hexaédrique, d'une façon d'avoir une résolution similaire (nombre similaire de nœuds), la solution d'éléments finis obtenue avec le maillage d'un élément hexaédrique est plus précise que la solution obtenue à partir du maillage d'éléments tétraédriques [29]. Il n'existe pas de théories consistantes qui expliquent clairement la raison pour laquelle les deux types de maillages se comportent différemment dans la simulation numérique par éléments finis. L'un des potentiels des explications est basé sur la différence de l'ordre des fonctions de forme, qui interpolent la quantité physique à l'intérieur de l'élément. La quantité physique dans un élément est interpolée en tant qu'une combinaison linéaire des fonctions de forme, où les fonctions de forme d'ordre supérieur peuvent donner une approximation d'une solution élément fini complexe mieux que les fonctions de forme d'ordre inférieur. Les fonctions de forme d'un élément hexaédrique à 8 nœuds possèdent des termes tri-linéaires, bilinéaires et linéaires comme le montre la figure 1.6d, alors que celles des éléments pyramide à 5 nœuds et prisme à 6 nœuds contiennent des termes bilinéaire et linéaire comme indiqué dans les figures 1.6c et 1.6b, et celles de l'élément tétraédrique sont composées uniquement de termes linéaires comme le montre la figure 1.6a.

Il est possible d'utiliser des éléments tétraédriques à 10 nœuds (figure 1.5), qui ont un nœud supplémentaire au milieu de chacune des arêtes avec des fonctions de forme ayant des termes quadratiques. La solution obtenue à partir d'un élément tétraédrique à 10 nœuds est donc plus précise que celle d'un élément tétraédrique à 4 nœuds. L'ordre des fonctions de forme d'autres éléments peut également être augmenté en ajoutant un nœud au milieu de chacune des arêtes (par exemple, les éléments hexaédrique à 20 nœuds et prismatique à 15 nœuds). Les fonctions de forme de l'élément prismatique à 15 nœuds et l'élément hexaédrique à 20 nœuds ont des termes d'ordre supérieur que ceux d'un élément tétraédrique à 10 nœuds. Par conséquent, un élément hexaédrique donne une solution plus précise et il est préférable dans les maillages lorsqu'il est disponible pour une analyse par éléments finis. Cependant, cette explication n'aborde pas pourquoi les fonctions d'approximation tri-linéaire d'une grandeur physique sont mieux que les fonctions linéaires. Par exemple, un volume rempli d'un seul élément hexaédrique à 8 nœuds peut également être rempli avec cinq ou six éléments tétraédriques à 4 nœuds (figure 1.7). La quantité physique à l'intérieur du volume est ainsi approximée par un seul élément hexaédrique tri-linéaire ou cinq/six éléments tétraédriques linéaires. L'explication ci-dessus n'exclut pas la possibilité qu'une fonction linéaire par morceaux avec cinq ou six éléments donne moins d'erreur qu'une simple tri-linéaire [30]. Néanmoins, une fonction tri-linéaire est avantageuse qu'une fonction linéaire par morceaux dans la plupart des cas à cause de sa souplesse.

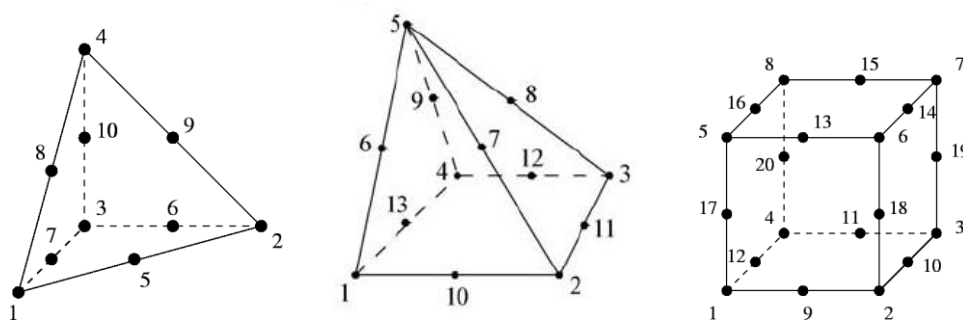


Figure 1.5. Eléments tétraédrique à 10 nœuds, pyramide à 13 nœuds et hexaédrique à 20 nœuds

Alors qu'une fonction tri-linéaire est souple à l'intérieur du volume et la fonction linéaire par morceaux n'est pas souple sur la limite entre les éléments. Ainsi, la dérivée d'une fonction linéaire par morceaux n'est pas continue à l'intérieur du volume. Cette discontinuité n'existe pas dans la plupart des phénomènes physiques et donc l'erreur dans la première dérivée approximée par une fonction linéaire par morceaux tend à être supérieure à une fonction tri-linéaire. Par exemple, dans l'analyse des structures par la méthode des éléments finis les déplacements sont calculés aux niveaux des nœuds et les contraintes sont calculées par le différentiel numérique des déplacements. Par conséquent, les éléments hexaédriques sont préférables à une analyse des structures que les éléments tétraédriques puisque l'élément hexaédrique tend à approximer les contraintes avec plus de précision.

Bien qu'un maillage tétraédrique peut être créé facilement par un schéma de génération automatique de maillage [31-33], cependant, un maillage hexaédrique est difficile de le faire créé automatiquement pour une forme compliquée. Malgré de nombreuses tentatives, aucune des méthodes connues peut créer un maillage avec des éléments hexaédriques d'une qualité suffisante pour un domaine de géométrie arbitraire [34-41].

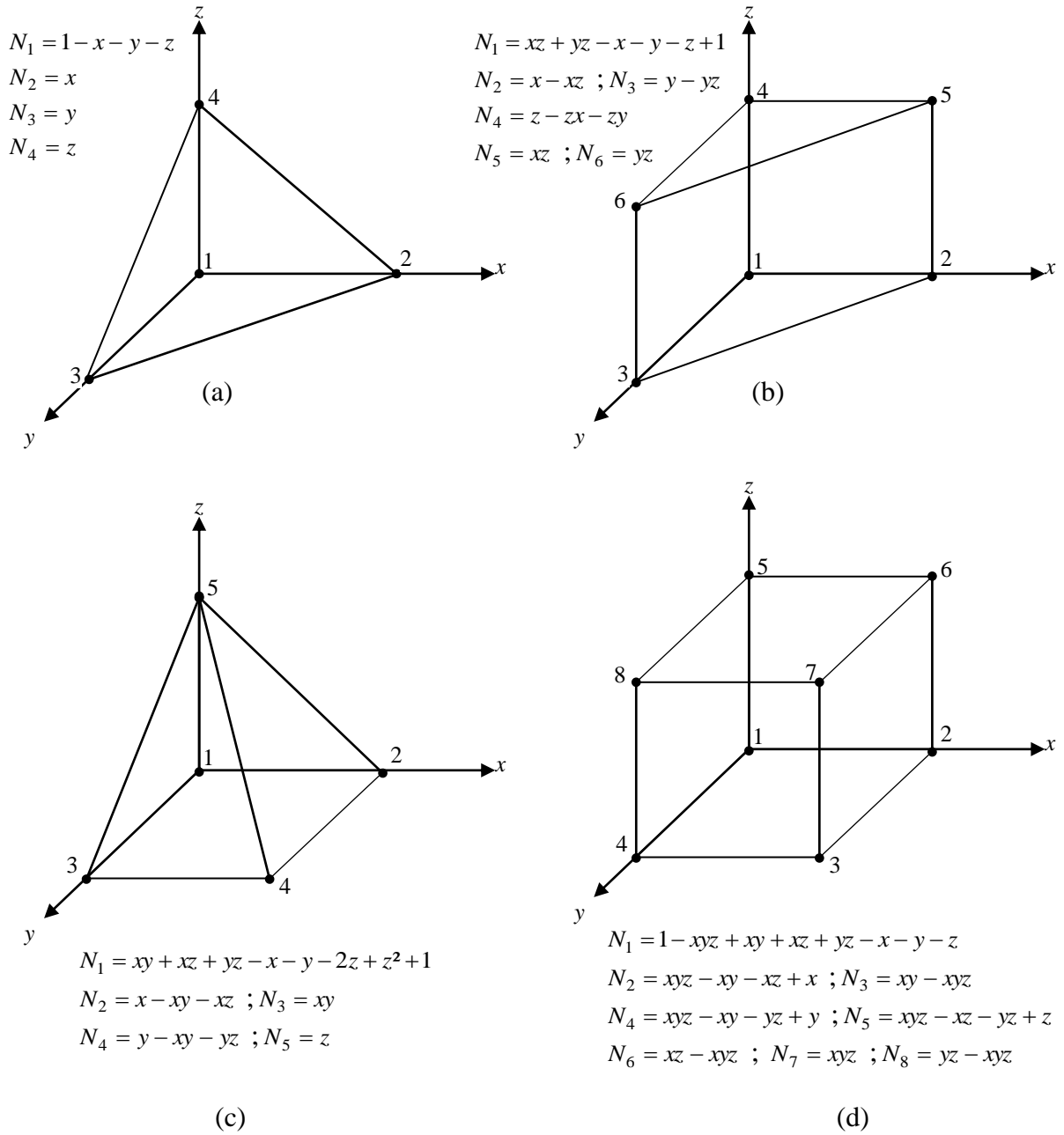


Figure 1.6. Fonctions de forme des éléments volumiques standards : (a) tétraédrique à 4 nœuds; (b) prismatique à 6 nœuds ; (c) pyramide à 5 nœuds ; et (d) hexaédrique à 8 nœuds

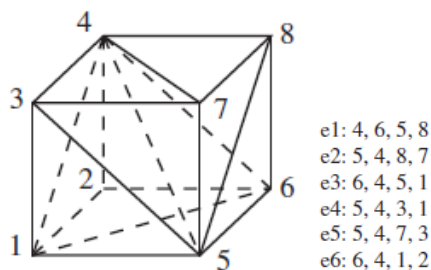


Figure 1.7. Élément hexaédrique composé de 6 tétraèdres

Les éléments tétraédriques sont particulièrement utiles pour discrétiser les portions de structures pour lesquelles les éléments hexaédriques et prismatiques auraient à être trop distordus. Par conséquent, de nombreux programmes prévoient de définir directement des hexaèdres composés automatiquement par assemblage d'un certain nombre (5 ou 6) de tétraèdres ; la figure 1.7 illustre un de ces « *super-élément* » [28], formé de six tétraèdres.

La difficulté dans l'analyse 3D c'est que beaucoup de travail est nécessaire pour générer les données du maillage. Comme nous le savons, la performance de l'élément hexaédrique est meilleure que celle des éléments tétraédrique, prismatique et pyramide. Par conséquent, l'application de l'élément hexaédrique en génération automatique de maillage reste un sujet d'intérêt. Dans certaines circonstances, il peut être souhaitable d'utiliser des maillages composés des tétraèdres et hexaèdres. Les régions qui peuvent être plus critiques dans l'analyse, tels que les couches limites ou des régions de concentration des contraintes peut également être mieux analysés par des éléments hexaédriques. Les éléments tétraédriques et pyramides peuvent combler les autres régions géométriquement plus complexes ou moins critiques du solide [42]. Il convient de noter que les approches réussies dans la génération du maillage ont été récemment proposées dans la littérature. Citons par exemple Owen et Saigla [42] qui ont proposé des nouveaux algorithmes pour la modification de maillage mixtes d'éléments hexaèdres-tétraèdres par l'insertion des éléments pyramides pour maintenir la compatibilité. Plusieurs méthodes pour la génération de pyramides sont présentées impliquant la transformation locale de tétraédriques et/ou insertion de nœud près de l'interface hex/tet. A ce sujet Kallinderis et Kavouklis [43] ont présenté un schéma de l'adaptation de maillage capable de gérer les maillages hybrides composés des hexaèdres, prismes, pyramides et tétraèdres. Par conséquent, tous les objets 3D complexes peuvent être discrétisés automatiquement. Un maillage hybride est un alternative à un maillage où tous les éléments sont les mêmes (par exemple, un maillage composé uniquement d'hexaèdres) et se compose des éléments hexaédriques, tétraédriques, prismatiques et pyramides (par exemple, mélange d'éléments hexaédriques et tétraédriques). La forme la plus commune d'un maillage hybride est un maillage hex-dominant [44, 45], dans lequel la plupart du volume est rempli par des éléments hexaédriques et le reste avec des éléments prismatiques et tétraédriques, et les éléments pyramides sont insérés entre une face quadrilatère de l'élément hexaédrique ou l'élément prismatique et les faces triangulaires de l'élément tétraédrique ou prismatique (figure 1.8).

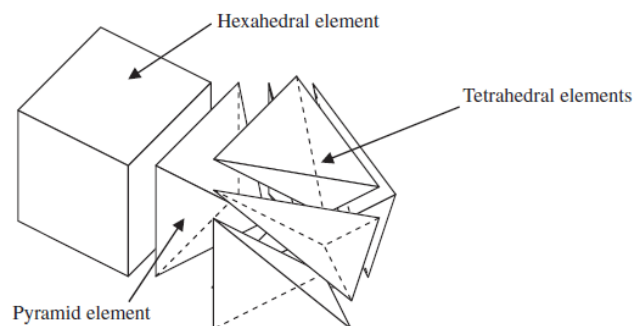


Figure 1.8. Transition de l'élément hexaédrique aux éléments tétraédriques à travers un élément pyramide [30]

Finalement, il faut noter que la complexité de mise en œuvre et le grand coût en temps de calcul et mémoire est un inconvénient majeur des éléments volumiques d'ordre supérieur qui peuvent être capable de fournir d'excellentes performances et d'éviter certains verrouillages numériques pour les problèmes complexes, y compris les matériaux

presque incompressibles. Dans la pratique, il est préférable d'utiliser les éléments volumiques de premier ordre. Malheureusement, ces éléments sont souvent trop rigides et par conséquent devient sensibles aux problèmes de verrouillages et aux maillages distordus. A cet égard, un effort important a été consacré par les chercheurs pour développer des éléments fiables et efficaces basés sur des différentes approches.

1.3.2. Eléments volumiques avec degrés de liberté de rotation

Ces dernières années, une attention particulière a été portée aux éléments finis volumiques avec degrés de liberté de rotation. La présence de degrés de liberté de rotation améliore l'efficacité numérique des éléments volumiques standards. Bien que, plusieurs modèles d'élément fini hexaédrique, tétraédrique et prismatique avec ddl de rotation ont été développés pour la modélisation des solides et des structures tridimensionnelles.

1.3.2.1. Eléments hexaédriques

Les éléments iso-paramétriques hexaédriques sont les plus utilisés dans l'analyse des structures 3D. Quoiqu'ils présentent un inconvénient sérieux lors de leurs distorsions. Afin d'améliorer la précision des éléments finis linéaires classiques hexaédriques, un ensemble d'éléments ont été développés par plusieurs auteurs. L'utilisation de la formulation hybride des contraintes est la première approche proposée par Yunus *et al.* [46] pour le développement d'un élément hexaédrique avec ddl de rotation. Cet élément est intégré par un schéma de 14 points d'intégration. Les modes parasites associés à des rotations égales ne sont pas contrôlés dans cet élément hybride.

Parmi les premiers travaux les plus cités dans la littérature sur l'application des ddl de rotation, on trouve également celui de Yunus *et al.* [47] qui ont développé deux éléments hexaédriques à 8 nœuds HEX8R et HEX8RX basés sur le modèle en déplacement avec 6 ddl (trois translations et trois rotations) par nœud pour les problèmes d'élasticité 3D. Ces éléments hexaédriques sous-intégrés sont formulés par la transformation des nœuds des milieux (m) des arêtes de l'élément iso-paramétrique hexaédrique à 20 nœuds a des termes de translations et de rotations aux nœuds des sommets i et j de l'élément. Cette formulation est exprimée par les relations ci-dessous qui représentent l'approximation des déplacements au nœud de milieu m :

$$\begin{aligned}
 u_m &= \frac{1}{2}(u_i + u_j) + \frac{y_j - y_i}{8}(\omega_{jz} - \omega_{iz}) + \frac{z_j - z_i}{8}(\omega_{jy} - \omega_{iy}) \\
 v_m &= \frac{1}{2}(v_i + v_j) + \frac{z_j - z_i}{8}(\omega_{jx} - \omega_{ix}) + \frac{x_j - x_i}{8}(\omega_{jz} - \omega_{iz}) \\
 w_m &= \frac{1}{2}(w_i + w_j) + \frac{x_j - x_i}{8}(\omega_{jy} - \omega_{iy}) + \frac{y_j - y_i}{8}(\omega_{jx} - \omega_{ix})
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Ces éléments hexaédriques HEX8R et HEX8RX possèdent douze modes parasites apparaissent dans la matrice de rigidité élémentaire. Les six premiers modes de Hourglass sont causés par l'utilisation de l'intégration réduite et les six autres modes sont associés à des rotations égales. Ces modes sont éliminés par l'utilisation d'une technique originale de stabilisation qui consiste à généraliser la procédure proposée par MacNeal [7, 48] pour les éléments membranaires 2D.

En parallèle de ces travaux, Ibrahimbegovic et Wilson [49] ont proposé deux éléments hexaédriques IBR-M et IBR-D basés sur les fonctionnels de Hughes et Brezzi de type mixte (M-type) et de type déplacement (D-type). Les déplacements et les rotations sont supposés indépendants où la rotation proposée et la rotation obtenue de la dérivée du

déplacement sont égales. Trois modes bulle de déplacement sont pris dans les deux éléments et leur énergie de déformation est intégrée par la règle de 14 points d'intégration.

Plus tard, Sze et Ghali [50], dans un article paru en 1993, ont présenté un élément hexaédrique hybride à 8 nœuds avec ddl de rotation d'Allman. Cet élément HBR est également intégré par la règle de 14 points d'intégration et les modes parasites associés à des rotations égales sont contrôlés à l'aide de l'application de la même technique utilisée dans le fonctionnel D-type de Hughes et Brezzi.

Une autre approche postulant l'existence de ddl de rotation a été proposée par Ayad [12] en 2002 dans laquelle, pour améliorer la performance de l'élément hexaédrique classique à 8 nœuds, il a utilisé un nouveau concept baptisé SFR (Space Fiber Rotation). Ce modèle est décrit par la rotation d'une fibre matérielle élémentaire dans l'espace. L'utilisation de l'intégration réduite ($2 \times 2 \times 2$ PG) dans l'élément hexaédrique SFR8 engendre des modes parasites qui disparaissent après l'assemblage de deux ou plusieurs éléments. Ces travaux ont été repris plus tard par Zouari *et al.* [14] pour formuler une version piézoélectrique de cet élément puis par Ghomari *et al.* [15] pour les problèmes de contact. A noter que ces travaux basés sur le concept SFR, ne résolvaient pas la déficience du rang de la matrice de rigidité élémentaire par une méthode de contrôle de modes parasites. Très récemment, Ayad *et al.* [51] ont publié une version stabilisée de l'élément SFR8 utilisant une technique de stabilisation inspirée des travaux réalisés par Yunus *et al.* [47]. Ces auteurs ont proposé aussi dans cet article une version non-conforme SFR8I de l'élément précédent. Dans ce nouveau, il exploite les trois modes incompatibles dans l'espace naturel de l'élément. Ces modes incompatibles sont éliminés par l'utilisation de la technique de la condensation statique. Un avantage peut se dégager de ce nouvel élément c'est que le verrouillage de Poisson ou d'épaisseur « *Poisson's ratio locking* » est évité.

1.3.2.2. Eléments tétraédriques

Un autre type d'éléments finis volumiques, particulièrement utiles pour discrétiser les portions de structure pour lesquelles les éléments hexaédriques auraient à être trop distordus, est la catégorie des éléments tétraédriques. L'utilisation de ces éléments devient pratiquement inévitable dans l'analyse des structures complexes par la méthode des éléments finis. La simplicité de génération de maillage complètement automatique et leur aptitude à des géométries arbitraires complexes sont les principaux atouts de ces éléments volumiques.

Une vaste partie de la littérature a été consacrée à ce sujet, nous citons les plus importants. Un nombre d'éléments finis avancés de type tétraédrique à 4 nœuds avec degrés de liberté de rotation ont été développés. Une des premières réalisations dans ce sens est due à Pawlak *et al.* [52] qui ont développé l'élément TET4RX avec ddl de rotation basé sur la méthode de déformations postulée « *assumed strain* » avec quinze modes. Ce modèle possède trois ddl de translations et trois de rotations par nœud. Le champ des déplacements est obtenu à partir de l'élément tétraédrique à 10 nœuds utilisant les mêmes transformations présentées dans l'équation (1.33). Notons que cet élément est disponible dans la bibliothèque d'éléments finis du code commercial ANSYS sous le nom SOLID72. L'élément TET4RX est intégré exactement avec un schéma de 4 points d'intégration et ne présente pas des modes parasites de Hourglass. Les 4 modes parasites associés à des rotations égales sont éliminés à l'aide d'une matrice de pénalité similaire à celle proposé par MacNeal et Harder [7] pour chaque face de tétraèdre. Cet élément est considéré par Sze et Pan [53] comme un élément hybride basé sur le principe variationnel de Hu-Washizu. Cependant, l'expérience numérique effectuée par Sze et Pan [53] à l'aide du

code commercial ANSYS a montré que l'élément TET4RX contient certains modes de déformation à énergie nulle non supprimés.

Parmi aussi les travaux intéressants, il faut citer en premier lieu ceux de Sze et Pan [53] qui ont développé un élément tétraédrique hybride avec ddl de rotation d'Allman. Cet élément HT4R est amélioré à l'aide de la formulation en rotation basée sur les travaux originaires de Allman [3, 4] et Cook [6]. La transformation des nœuds de milieux des arêtes est aussi utilisée dans cet élément où le champ de déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u_e &= \sum_{i=1}^4 \left(N_i u_i + \frac{1}{2} (N_{ji} z_{ji} + N_{ki} z_{ki} + N_{li} z_{li}) \omega_{iy} - \frac{1}{2} (N_{ji} y_{ji} + N_{ki} y_{ki} + N_{li} y_{li}) \omega_{iz} \right) \\ v_e &= \sum_{i=1}^4 \left(N_i v_i + \frac{1}{2} (N_{ji} x_{ji} + N_{ki} x_{ki} + N_{li} x_{li}) \omega_{iz} - \frac{1}{2} (N_{ji} z_{ji} + N_{ki} z_{ki} + N_{li} z_{li}) \omega_{ix} \right) \\ w_e &= \sum_{i=1}^4 \left(N_i w_i + \frac{1}{2} (N_{ji} y_{ji} + N_{ki} y_{ki} + N_{li} y_{li}) \omega_{ix} - \frac{1}{2} (N_{ji} x_{ji} + N_{ki} x_{ki} + N_{li} x_{li}) \omega_{iy} \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

avec

$$N_{ij} = N_i N_j, \quad x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad z_{ij} = z_i - z_j \quad (1.35)$$

Cette approche souffre également de quatre modes parasites. Les techniques de stabilisation utilisées dans cet élément pour contrôler les modes parasites sont appuyées sur l'utilisation des quatre modes de contraintes symétriques. Selon ces auteurs, on peut distinguer que l'élément HT4R est un TET4RX amélioré et ne présente pas des modes de déformation non supprimés.

Il est intéressant de noter que les deux éléments finis avancés tétraédriques à 4 nœuds TET4RX et HT4R avec ddl de rotation sont obtenus à partir de l'élément sub-paramétrique tétraédrique à 10 nœuds. Les ddl de rotation sont introduits en reliant les déplacements des nœuds milieux des arêtes aux déplacements et rotations des nœuds des sommets, les nœuds des milieux des arêtes de l'élément tétraédrique à 10 nœuds sont éliminés. Ces éléments avancés tétraédriques à 4 nœuds avec ddl de rotation améliorent remarquablement la solution donnée par l'élément classique tétraédrique à 4 nœuds, mais reste un peu loin de la précision donnée par l'élément tétraédrique à 10 nœuds. Plus tard, Matsubara *et al.* [54] ont adapté une autre approche simple pour construire un élément tétraédrique à 4 nœuds avec ddl de rotation. Cette approche consiste à utiliser les approximations des déplacements suivantes :

$$\begin{aligned} u_e &= \sum_{i=1}^4 N_i (u_i + \widehat{z}_i \theta_{iy} - \widehat{y}_i \theta_{iz}) \\ v_e &= \sum_{i=1}^4 N_i (v_i + \widehat{x}_i \theta_{iz} - \widehat{z}_i \theta_{ix}) \\ w_e &= \sum_{i=1}^4 N_i (w_i + \widehat{y}_i \theta_{ix} - \widehat{x}_i \theta_{iy}) \end{aligned} \quad (1.36)$$

avec

$$\widehat{x}_i = x - x_j, \quad \widehat{y}_i = y - y_j, \quad \widehat{z}_i = z - z_j \quad (1.37)$$

Récemment, Tian et Yagawa [55] ont développé un élément tétraédrique quadratique GNTet4 avec 4 nœuds aux sommets utilisant l’approche des nœuds généralisés qui est la suite de l’idée d’approximation par éléments finis de la partition de l’unité « *partition-of-unity* ». L’avantage de cet élément GNTet4 est que la précision de calcul est augmentée par rapport aux éléments TET4RX [52] et HT4R [53] et offre une précision meilleure que l’élément classique tétraédrique à 10 nœuds [56]. De plus, les quatre modes parasites à énergie nulle peuvent être facilement supprimés par l’application d’une technique spécifique qui consiste à utiliser un traitement des conditions aux limites essentielles.

Tian *et al.* [57] ont continué les travaux de Tian et Yagawa [55] en menant des études plus détaillées avec une analyse comparative des travaux exposés dans les références [52-55] sur les éléments finis avancés tétraédriques à 4 nœuds. De plus, les auteurs ont proposé un élément tétraédrique à 4 nœuds RGNTet4 basé sur la méthode « *Reduced Generalized nodes* ». Les auteurs de cet article ont conclu que l’élément tétraédrique RGNTet4 avec ddl de rotation à un ordre intermédiaire entre linéaire et quadratique et l’approximation du champ des déplacements de ce modèle est considérée super-linéaire. Des études très complètes, résumées dans le tableau 1.1, ont été menées afin de comparer l’efficacité numérique des différents types d’éléments tétraédriques présentés ci-dessus. Ce tableau, inspiré des références [55, 57], indique la forme et la formulation de ces éléments. Cette comparaison est reposante sur l’ordre d’interpolation et la précision de la solution obtenue par ces éléments, en tenant compte de la facilité d’utilisation dans la génération du maillage.

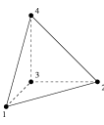
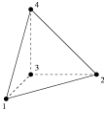
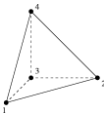
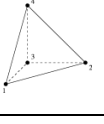
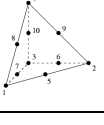
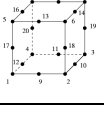
Forme	Elément	Formulation	Ordre	Génération du maillage	Précision
	Tet4	$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^4 N_i [\mathbf{I}][\mathbf{u}_i]$	linéaire	Excellent Génération du maillage est complètement automatique	Faible En général, le raffinement du maillage est recommandé
	GNTet4	$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_i^\theta & \mathbf{F}_i^\varepsilon \\ \mathbf{0}_i & \boldsymbol{\theta}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{bmatrix}$	Quadratique	Excellent Génération du maillage est complètement automatique	bon
	RGNTet4	$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_i^\theta \\ \mathbf{0}_i & \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix}$	Super-linéaire	Excellent Génération du maillage est complètement automatique	Excellent
	TET4RX HT4R	Equation (1.33) Equation (1.34)	linéaire	Excellent	Intermédiaire TET4<TET4RX/HT4R<<TET10
	Tet10	$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^{10} N_i [\mathbf{I}][\mathbf{u}_i]$	Quadratique	Bon Mauvais dans le remaillage	Excellent
	HEX20	$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^{20} N_i [\mathbf{I}][\mathbf{u}_i]$	Quadratique	mauvais	Excellent

Tableau 1.1. Comparaison des éléments tétraédriques avec ddl de rotation

1.3.2.3. *Eléments prismatiques*

Il existe une quantité assez impressionnante d'articles sur les formulations d'éléments finis de type hexaédrique et tétraédrique avec degrés de liberté de rotation et il existe peu d'études sur la classe des éléments finis prismatiques. Ce problème est de grande importance pour les applications industrielles, car de nombreuses structures de géométrie complexe nécessitent l'utilisation de maillages volumiques non-structurés qui incluent forcément des éléments finis prismatiques. A cet égard, une formulation d'un élément prismatique basé sur le modèle SFR (Space Fiber Rotation) avec degrés de liberté de rotation à été présenté par Meftah *et al.* [58]. Cet élément présente un degré de robustesse réellement satisfaisant.

1.3.3. *Eléments volumiques de premier ordre à précision améliorée*

Les éléments volumiques classiques de premier ordre basés sur le modèle en déplacement peuvent souffrir de différents types de verrouillage. Par exemple, le verrouillage de cisaillement se produit dans les plaques ou les coques très minces soumises à des charges de flexion. Dans ce cas, la flexion pure ne peut pas être représentée correctement à cause de la contrainte de cisaillement indésirable. Le verrouillage volumétrique peut se produire dans le cas des matériaux incompressibles ou presque incompressibles. L'utilisation des éléments d'ordre supérieur peut réduire légèrement ces phénomènes de verrouillages, mais l'effort de calcul devient plus grand. Pour résoudre ce problème, de nombreuses recherches ont été simulées pour développer des éléments de premier ordre avec une grande précision et répondre à trois exigences principales :

- (i) Eviter les phénomènes de blocage (verrouillage) en flexion dominant ;
- (ii) Eviter le verrouillage volumétrique dans les problèmes des matériaux incompressibles ou presque incompressibles ;
- (iii) Réduire la sensibilité des éléments à la distorsion du maillage.

La conception des éléments finis de premier ordre à précision améliorée est basée généralement sur les formulations mixtes. Deux approches couramment utilisées pour les éléments finis mixtes :

1. La méthode de déformations postulées améliorées « *Enhanced Assumed Strain, EAS* » : Cette formulation est présentée dans le cadre du principe variationnel mixte à trois champs de Hu-Washizu [59], où les champs de déplacement, de contrainte et de déformation sont supposés des variables indépendantes.

2. La méthode de contraintes postulées « *Assumed Stress Method* » : Cette approche utilise la formulation mixte à deux champs de Hellinger-Reissner qui consiste à approximer à la fois le champ de déplacements ainsi que le champ de contraintes indépendamment.

1.3.3.1. *Méthode de déformations postulées améliorées « Enhanced Assumed Strain »*

Pendant les deux dernières décennies, des progrès considérables ont été réalisés dans le développement d'éléments finis volumiques afin d'éviter les problèmes de verrouillage dans les cas des matériaux presque incompressibles ou dans les cas de flexion-dominante.

Des nombreux éléments finis efficaces ont été développés sur la base de la méthode de déformations postulées améliorées « *Enhanced Assumed Strain – EAS* » introduite dans les premiers travaux de Simo et Rifai [60], basée sur le principe variationnel mixte à trois champs de Hu-Washizu. Cette méthode a été appliquée avec succès dans les contributions qui ont suivies : Simo et Armero [61], Simo *et al.* [62], Andelfinger et Ramm [63], Freischläger et Schweizerhof [64], Korelc et Wriggers [65]. Le principe de cette méthode consiste à enrichir le champ des déformations en rajoutant un champ des variables qui

produit des modes de déformations supplémentaires. Ces champs de variables sont ensuite projetés sur un sous-espace approprié afin d'éviter les différents types de blocages. Cette méthode a été appliquée pour formuler des éléments volumiques applicables dans la modélisation des solides et des structures tridimensionnelles. Elle donne des résultats très favorables. Cependant, l'inconvénient majeur de ces éléments était l'inefficacité en temps de calcul.

Le principe variationnel à trois champs de Hu-Washizu est devenu un outil important en particulier dans le développement des éléments hexaédriques à 8 nœuds. De nombreuses méthodes sont formulées à la base de ce principe. Par exemple, Weissman [66] a développé les éléments volumiques B8-9P, B8-15P et B8-24P basés sur la méthode EAS. A noter que ces éléments sont sensibles à la distorsion du maillage pour le patch-test d'ordre supérieur avec $\nu = 0.49999$ et ont besoin de raffinement de maillage dans les tests de convergence. Cao *et al.* [67] ont proposé un élément tridimensionnel hexaédrique pour l'analyse élastique par l'introduction d'un terme de pénalité dans le fonctionnel de Hu-Washizu pour satisfaire les équations d'équilibre. Cette méthode permet d'éliminer le verrouillage volumétrique d'une manière efficace et également d'améliorer la précision pour les problèmes de flexion.

Une classe des éléments finis solides à 8 nœuds est présentée par Alves de Sousa *et al.* [68] basée sur l'approche de déformations améliorées « *enhanced strain* » adaptée pour le traitement des problèmes de verrouillage volumétrique et de cisaillement. Par conséquent, ces éléments peuvent être utilisés efficacement dans les applications 3D en présence de verrouillage volumétrique et dans les problèmes de verrouillage de cisaillement pour les structures coques minces. Cette formulation conduit à des éléments ayant les champs de déplacements et de pression hydrostatique comme inconnues nodales. Elle conduit à la résolution d'un système du type [68] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^h \\ \mathbf{P}^h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext}}^h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.38)$$

où $\mathbf{f}_{\text{ext}}^h$ est le vecteur des forces extérieures appliquées, \mathbf{P} est la pression hydrostatique et \mathbf{K} est la matrice de rigidité (l'exposant h signifie que la variable est une approximation par élément fini).

Récemment, Fredriksson et Ottosen [69] ont présenté un élément hexaédrique stabilisé basé sur l'approche EAS pour les problèmes d'élasticité 3D, utilisant l'énergie de flexion pour construire les modes améliorés. L'énergie de déformation est obtenue exactement pour la flexion pure dans le cas où l'élément hexaédrique est régulier. Pour un élément distordu, cette méthode est une estimation approximative. En parallèle, pour des problèmes de structures 3D, de nombreux éléments volumiques efficaces ont été développés sur la base de formulations mixtes basées sur le principe Hu-Washizu. Dans la référence [70] un ensemble de formulations mixtes ont été présentées, ces formulations fonctionnent bien pour le cas de flexion dominante et pour les matériaux presque incompressible. Une autre approche basée sur la séparation de déformation d'un élément en une partie homogène et une autre inhomogène utilisant la méthode EAS a été développé dans [71] pour construire un élément fini hexaédrique à 8 nœuds appelé Q1/EI12.

La formulation de déformations postulées « *assumed strain* » est basée sur une forme simplifiée du principe variationnel de Hu-Washizu. Dans cette forme simplifiée, la contrainte postulée est choisie orthogonale à la différence entre la partie symétrique du gradient de vitesse et le taux de déformation postulée. Parmi les travaux basés sur cette formulation, citons par exemple Belytschko et Bindeman [72], Zhu et Cescotto [73], Chen et Stolarski [74].

La méthode mixte de déformations améliorées « *mixed-enhanced strain* » qui peut être classée comme une méthode de déformations améliorées « *enhanced strain* » a été proposée par Kasper et Taylor [75, 76] pour les éléments 2D et 3D afin d'étudier les problèmes d'élasticité linéaire et non linéaire géométrique. Cette formulation est développée en utilisant un concept d'éléments finis mixtes pour améliorer le champ des déformations et d'éviter ainsi les différents effets de verrouillage et aussi pour améliorer la précision en flexion pour les maillages grossiers.

1.3.3.2. Méthode de contraintes postulées « *Assumed Stress Method* »

Les éléments finis hybrides sont la classe la plus précise des éléments finis. En particulier, ils sont relativement insensibles aux distorsions des maillages par rapport aux éléments finis standards basés sur la formulation en déplacement. Un autre avantage de ces éléments c'est qu'ils se comportent bien dans les cas des matériaux presque incompressibles.

Depuis les travaux de Pian [77] pour les éléments hybrides, des grands efforts ont été consacrés à l'élaboration des hypothèses de contraintes de capacités hautes performances. Les principaux objectifs ont été la satisfaction des conditions d'équilibre et l'insensibilité à la distorsion du maillage. Dans les premiers développements, les éléments hybrides ont été basés sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire et les contraintes ont été définies dans le système des coordonnées cartésiennes pour satisfaire les conditions d'équilibre. Même si cette approche est rationnelle, la performance des éléments obtenus par la méthode de contraintes postulées est liée aux distorsions du maillage et il n'est pas facile de satisfaire à la fois les conditions d'équilibre et l'invariance des coordonnées. Pour remédier à ces faiblesses, Pian et Sumihara [78] ont proposé plus tard une nouvelle approche pour les éléments hybrides qui repose sur le principe de Hellinger-Reissner où les contraintes postulées sont définies dans le système des coordonnées naturelles.

Parmi les premiers modèles d'éléments finis hybride-contrainte « *hybrid-stress* » tridimensionnels basés sur le principe de Hellinger-Reissner, on distingue l'élément hexaédrique PT18 β développé par Pian et Tong [79], qui est un élément volumique à 8 nœuds avec 18 modes de contraintes. La rigidité associée à chacun des modes des contraintes non-constantes peut également être réduite de telle sorte que l'élément peut être utilisé pour l'analyse des plaques et des coques minces. Cette démarche est proposée aussi dans la référence [80] pour formuler l'élément hexaédrique à 8 nœuds baptisé HS8. Yuan *et al.* [81] ont proposé un système des coordonnées inclinées pour les problèmes 2D. L'utilisation de ce système de coordonnées permet d'obtenir un champ des contraintes postulées qui satisfait les équations d'équilibre dans les coordonnées physiques (normales). Plus tard, Yuan *et al.* [82] ont généralisé cette technique en 3D pour formuler des éléments iso-paramétriques hexaédriques à 8 nœuds.

Après le succès des éléments hybride-contrainte volumiques de type hexaédriques HS8 [80] et PT18 β [79] ainsi que l'avancement dans la sélection des modes hybride-contrainte, des éléments volumiques hybride-contrainte efficaces ont été formulés pour des géométries et des applications spécifiques [83, 84]. Une nouvelle hypothèse de contrainte pour les éléments hybride-contrainte est présentée par Yeo et Lee [85]. Cette hypothèse de

contrainte est adaptée pour l'élément hexaédrique hybride à 8 nœuds PT18 β ce qui entraîne un élément hexaédrique M18 β . En général, la base variationnelle du modèle hybride-contrainte est un principe de Hellinger-Reissner (HR) avec des contraintes postulées [85]. Ce dernier est représenté par la relation suivante :

$$\prod_{HR}^e = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^T (D\mathbf{u}) d\Omega - W^e(\mathbf{u}) \quad (1.39)$$

où Ω_e est le volume de l'élément considéré, \mathbf{S} est la matrice de souplesse du matériau, $D\mathbf{u}$ est le gradient symétrique des déplacements compatibles, $\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur des contraintes postulées et W^e est le travail du chargement externe. Les approximations élément fini des déplacements et des contraintes postulées pour un élément sont :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (1.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta} \quad (1.41)$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur des paramètres de contraintes postulées, \mathbf{N} est la matrice des fonctions de forme standards iso-paramétriques définies dans le système des coordonnées naturelles et \mathbf{P} est la matrice des fonctions de base pour les contraintes postulées.

Plus tard, Sze et Lo [86] ont présenté un élément hexaédrique hybride-contrainte à 12 nœuds HS12 (figure 1.9) pour modéliser les structures allongées, telles que les poutres et les piliers, où le champ des déplacements et le champ des contraintes sont quadratiques le long de la dimension la plus longue. Cet élément peut être considéré comme un complémentaire de l'élément volumique hexaédrique à 18 nœuds HS18 (figure 1.10) développé dans la référence [87] pour modéliser les structures de type plaque et coque. L'interpolation des déplacements de cet élément est donnée par [87] :

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} U(\xi, \eta, \zeta) \\ V(\xi, \eta, \zeta) \\ W(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \left(\frac{1+\zeta}{2} \mathbf{q}_i + \frac{1-\zeta}{2} \mathbf{q}_{i+9} \right) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}_0 + \zeta \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}_n \quad (1.42)$$

avec

$$\mathbf{q}_i = [U_i \quad V_i \quad W_i] ; \mathbf{q}_0 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_9 + \mathbf{q}_{18} \end{Bmatrix} ; \mathbf{q}_n = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_9 - \mathbf{q}_{18} \end{Bmatrix} \quad (1.43)$$

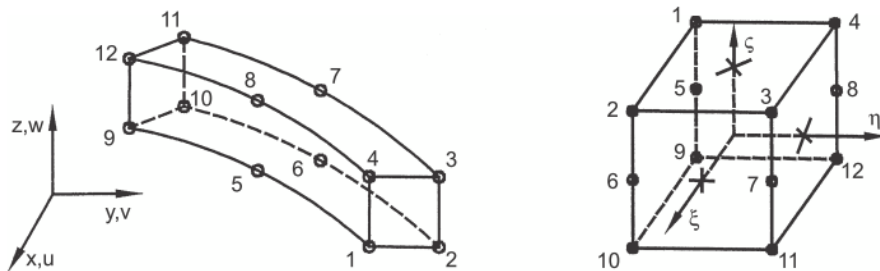


Figure 1.9. Elément hexaédrique hybride à 12 nœuds HS12 [86]

Ces éléments peuvent ainsi être utilisés efficacement pour modéliser les structures renforcées par des poutres uniformes et des piliers. Par exemple, Lo [88] a utilisé les éléments finis volumiques hexaédriques HS8 et HS12 où les joints sont modélisés avec les éléments HS8 à 8 nœuds et les poutres et les piliers sont modélisés avec les éléments HS12 à 12 nœuds.

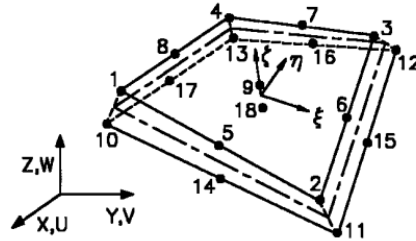


Figure 1.10. Élément HS18 [87]

Récemment, Chen et Wu [89] et Jog [90] ont proposés des éléments hexaédriques à 8 et à 27 nœuds respectivement. Ces deux éléments volumiques sont formulés spécialement pour le calcul des structures de type poutres, plaques et coques afin d'étudier avec une grande précision les problèmes d'élasticité 3D.

En parallèle à ces modèles, nous avons l'élément fini hexaédrique HC8/27 qui a été développé par Mijuca [91] basé sur le principe de Hellinger-Reissner avec un calcul direct du champ des contraintes (six composantes de contraintes indépendantes de deuxième ordre) sans réduire le dimensionnel. Très récemment, Wu *et al.* [92] ont présenté une méthode générale basée sur le principe fonctionnel de Hellinger-Reissner pour la formulation des éléments hexaédriques de connexion avec des interfaces quadrilatérales situées aux faces d'élément spécifié.

Ce développement réussi d'éléments volumiques hexaédriques a rendu nécessaire l'existence d'éléments volumiques prismatiques afin de pouvoir mailler facilement et automatiquement des géométries de forme quelconque. Les développements de ce type d'élément sont récemment explorés par quelques chercheurs. Citons par exemple Sze *et al.* [93] qui ont développé un élément hybride-contrainte volumique prismatique à 6 nœuds basé sur les modes d'équilibre hybride-contrainte. Cet élément est sous-intégré avec un schéma de 1×2 points (1 point dans le plan $\xi - \eta$ et deux suivant la direction transversale ζ) et le vecteur des déplacements est interpolé par la relation suivante :

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{1+\zeta}{2} [(1-\xi-\eta)\underline{u}_1 + \xi\underline{u}_2 + \eta\underline{u}_3] + \frac{1-\zeta}{2} [(1-\xi-\eta)\underline{u}_4 + \xi\underline{u}_5 + \eta\underline{u}_6] \quad (1.44)$$

Jog [90] a étendu l'idée développé dans [93] pour formuler un élément hybride prismatique à 21 nœuds qui peut être combiné avec l'élément hybride hexaédrique à 27 nœuds cité auparavant pour l'analyse des structures tridimensionnelles. La formulation de ces deux éléments est basée sur le principe variationnel de deux champs mixtes. Les termes d'ordre supérieur dans l'interpolation des contraintes sont identifiés à l'aide des modes à énergie nulle qui peuvent se produire dans les éléments de forme cubique et prismatique.

Un principe hybride particulier nommé principe hybride-Trefftz peut également être utilisé pour formuler des éléments finis volumiques [94, 95]. Ce principe a été proposé par Trefftz [96] en 1926 dans un article intitulé « une alternative à la méthode de Ritz » [97].

La formulation élément fini hybride-Trefftz basée sur le modèle contrainte est utilisée par Teixeira de Freitas et Bussamra [95] pour construire deux éléments volumiques (hexaédrique et tétraédrique) hybride-Trefftz afin d'étudier les problèmes linéaires élasto-statiques des solides. Les contraintes sont approximées dans le domaine de l'élément et les déplacements sont approximés sur la frontière de l'élément [95].

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{X} \text{ dans } V^e \quad (1.45)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{q} \text{ sur } \Gamma_\sigma^e \quad (1.46)$$

où \mathbf{S} et \mathbf{Z} sont respectivement les matrices d'approximation (non nodales) des contraintes et des déplacements et les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{q} sont respectivement les contraintes généralisées et les déplacements généralisés.

Ces éléments ont montré de très bons comportements et de bonnes performances dans l'analyse des solides tridimensionnels pour les cas des matériaux isotropes : pas de verrouillage volumétrique en présence d'un matériau incompressible ou presque incompressible, moins sensible aux irrégularités géométriques et une bonne estimation des contraintes et des déplacements. Les éléments Hybride-trefftz ont également montré une bonne performance dans l'analyse des solides élasto-plastique [98], dans la modélisation des fissures et la simulation des problèmes de champ de contraintes singuliers [99-101]. En particulier, une très faible sensibilité à la distorsion du maillage a été signalé pour l'élément hexaédrique qui a été utilisé dans la modélisation des plaques isotropes minces et épaisses [95, 101]. Partant de cette formulation, Bussamra *et al.* [102] ont présenté très récemment des éléments hexaédriques hybride-Trefftz permettant de modéliser les plaques composites stratifiées. Les deux champs de contraintes et de déplacements sont interpolés indépendamment où les contraintes sont interpolées dans l'élément et les déplacements sont interpolés sur les frontières.

Finalement, il faut remarquer que les modèles mixte et hybride introduites respectivement dans les sections précédentes, ne sont pas mutuellement exclusive. En effet, un principe peut interpoler un ou plusieurs champs internes et un ou plusieurs champs à la frontière. Quelques avantages peuvent se dégager de ces modèles, par exemple l'absence des verrouillages numériques pour les structures minces ou pour les matériaux presque incompressibles, permettant ainsi d'obtenir une solution robuste et précise lorsque les éléments sont réguliers. Cependant, la précision dégrade lorsque les éléments sont distordus. Ce problème reste donc un problème ouvert, et on peut citer des pistes de recherche vers les éléments volumiques d'ordre supérieur dans la section suivante.

1.3.4. Eléments volumiques d'ordre supérieur

Les éléments volumiques hybrides de premier ordre basés sur le principe de Hellinger-Reissner et les éléments basés sur la méthode de déformations postulées améliorées « *enhanced assumed strain* » avec le principe de Hu-Washizu donnent en générales des bons résultats spécialement pour des maillages réguliers. Cependant, la performance de ces éléments dégrade généralement lorsque le maillage est distordu. A cet égard, des éléments tridimensionnels d'ordre supérieur ont été développés pour résoudre avec plus d'efficacité les problèmes de mécanique des solides et des structures complexes. Parmi ces développements, on peut citer ceux de Dhont [103] qui a utilisé des éléments hexaédriques à 20 nœuds pour modéliser les structures à parois minces. En effet, pour obtenir une efficacité numérique et réduire l'effort de calcul, cet auteur a proposé une intégration réduite pour évaluer la matrice de rigidité élémentaire au lieu d'utiliser l'intégration exacte qui donne des résultats des fois erronés à cause de l'existence de certains verrouillages numériques. Cependant, un inconvénient majeur de ces éléments sous-intégrés est

l'apparition des modes parasites de Hourglass (figure 1.11) spécialement dans les problèmes non linéaires. Nous pouvons également citer les travaux de Hoit et Krishnamurthy [104] et Sauer [105] qui ont utilisés différentes règles d'intégration de la matrice de rigidité des éléments hexaédriques à 20 nœuds afin d'éliminer les différents phénomènes de verrouillage. L'élément hexaédrique à 20 nœuds présenté dans [104] est intégré avec un schéma de 14 points d'intégration (figure 1.12) et l'élément hexaédrique à 20 nœuds proposé dans [105] est intégré avec 9 et 21 points (figure 1.13).

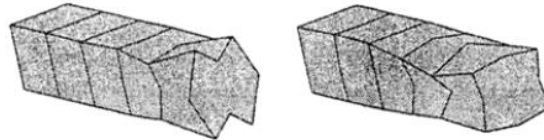


Figure 1.11. Modes parasites de Hourglass dans une poutre encadrée dû à l'intégration réduite $2 \times 2 \times 2$ [105]

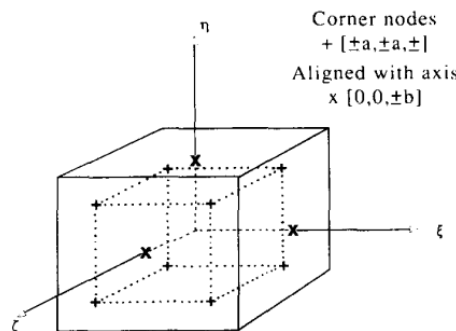


Figure 1.12. Élément hexaédrique à 20 nœuds avec 14 points d'intégration [104]

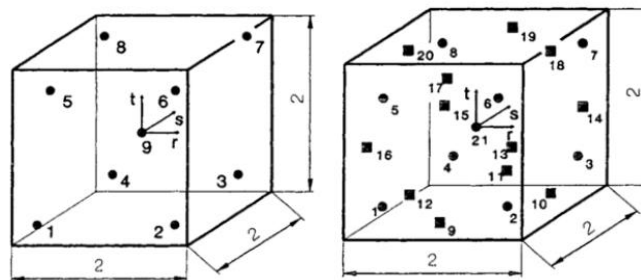


Figure 1.13. Éléments hexaédriques avec 9 et 21 points d'intégration [105]

Beaucoup de recherches ont été consacrées aux développements des éléments de géométrie hexaédrique. Toutefois, dans le point de vu de la génération automatique de maillage, il est très difficile de réaliser un maillage automatique d'un domaine tridimensionnel arbitraire utilisant un seul type d'élément hexaédrique. Cependant, le plus simple élément volumique tridimensionnel est le tétraèdre à 4 et 10 nœuds. Comparant les deux éléments tétraédriques à 4 et à 10 nœuds, l'élément à 10 nœuds est beaucoup plus précis. De plus, l'élément tétraédrique à 10 nœuds possède certains avantages puisqu'il utilise une base polynomiale complète par rapport aux autres éléments tridimensionnels qui utilisent des polynômes incomplets. Parmi les travaux de recherche ayant trait à la formulation des éléments finis tridimensionnels d'ordre supérieur de type tétraèdre, on peut noter le travail de Lo et Ling [106] pour le développement d'un élément tétraédrique

quadratique par l'amélioration de l'élément tétraèdre classique à 10 nœuds avec l'introduction des conditions d'incompressibilité dans le terme de déformation d'ordre supérieur. La fonction postulée de ce nouvel élément est de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{10} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 & z & 0 & y \\ 0 & 2y & 0 & 0 & z & x \\ 0 & 0 & 2z & x & y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

où λ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) sont des paramètres indéterminés.

Néanmoins, très peu de travaux ont été réalisés sur les éléments tétraédriques à 10 nœuds pour améliorer leur efficacité numérique [107-109]. Il faut noter que les recherches sur les éléments tétraédriques à 10 nœuds pour résoudre les problèmes 3D ont été retardées en raison du coût élevé de la création des maillages manuellement avec les éléments tétraédriques. Quoique, les progrès récents dans la génération du maillage utilisant des éléments tétraédriques ont connus un grand succès pour tous les types des domaines complexes discrétisés automatiquement ou semi-automatique en trois dimensions [110-112]. Cette évolution rend l'élément tétraédrique le plus utilisé dans l'analyse tridimensionnel. Par conséquence, la performance et la polyvalence de l'élément tétraédrique à 10 nœuds le rend pratiquement important et le plus requis.

Récemment, Ooi *et al.* [113, 114] ont introduit ce qu'ils appellent la formulation asymétrique « *unsymmetric* » pour développer un élément hexaédrique à 20 nœuds baptisé US-HEXA20. Dans cette formulation deux groupes séparés des fonctions de forme sont utilisés pour avoir des fonctions de forme iso-paramétriques (dans l'espace naturel) qui respectent l'exigence de compatibilité (ou de continuité) et des fonctions de forme métriques (dans l'espace cartésien) qui respectent l'exigence de complétude. La présence des termes d'ordre supérieur dans les fonctions de forme métriques rend l'élément insensible au maillage distordu. L'interpolation du champ de déplacements avec les fonctions de forme paramétrique est :

$$\bar{u}(x) \equiv N\bar{u}_n \quad (1.48)$$

où N est la matrice des fonctions de forme paramétriques de l'élément hexaédrique à 20 nœuds standard et n est le nombre total de nœuds de l'élément. L'interpolation du champ des déplacements avec les fonctions de forme métriques peut aussi être écrite comme suit :

$$\hat{u}(x) \equiv M\hat{u}_n \quad (1.49)$$

où M est la matrice des fonctions de forme métriques. Afin de satisfaire les conditions de complétude et reproduire le champ des déplacements, ces fonctions de forme peuvent être écrites sous la forme compacte suivante :

$$\sum_{i=1}^{20} M_i x_i^p y_i^q z_i^r = x^p y^q z^r, \quad p, q, r = 0, 1, 2 \quad (1.50a)$$

avec

$$\sum_{i=1}^{20} M_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{20} M_i x_i = x, \quad \sum_{i=1}^{20} M_i y_i = y \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{20} M_i z_i = z \quad (1.50b)$$

1.3.5. Autres formulations existantes d'éléments volumiques

1.3.5.1. Formulation basée sur les fonctions Papcovitch-Neuber

Parmi les nombreux travaux consacrés au développement des éléments volumiques robustes et précis pour des maillages distordus on distingue également les formulations basées sur les fonctions de Papcovitch-Neuber (PN) [115-117] qui satisfont l'équation de Navier. La solution de Papcovitch-Neuber (équation 1.51) a été utilisée dans le contexte des éléments basés sur le modèle en déplacement comme une alternative aux techniques proposées dans la littérature pour combler les lacunes identifiées et trouvées dans le comportement des éléments volumiques tridimensionnels standards [118].

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi} - \alpha \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Phi}) - \alpha \nabla \phi_0 \quad (1.51)$$

où $\mathbf{U} = \{u \ v \ w\}^T$ est le vecteur des déplacements, $\mathbf{\Phi} = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3\}^T$ est le vecteur des fonctions harmoniques, $\mathbf{r} = \{x \ y \ z\}^T$ est le vecteur de position, $\alpha = 0.25/(1-\nu)$ et ν est le coefficient de Poisson.

Dans leurs premiers travaux, Venkatesh et Shrinivasa [115, 118] proposaient des éléments hexaédriques à 8 nœuds utilisant les fonctions de Papcovitch-Neuber. Ces éléments PN30 et PN34 sont obtenus par la solution de l'équation de Navier pour l'analyse des structures de type poutre. Le champ des contraintes d'ordre supérieur est représenté exactement pour des situations particulières de maillages extrêmement distordus. Cependant, la contrainte constante de cisaillement n'est pas représentée correctement et donc le patch-test de déformation constante est faiblement satisfait. Les auteurs ont également utilisé cette technique dans la référence [119] sous la forme d'un polynôme du troisième degré pour étendre les éléments hexaédriques à 8 nœuds PN30 et PN34 au cas des structures de type plaques et coques. Les auteurs de cet article ont conclu que ces éléments passent les patch-tests du moment de flexion constant et du moment de torsion constant mais ne permettent pas d'obtenir correctement le patch-test des contraintes et des déplacements pour un chargement de cisaillement hors plan. Dans le contexte des fonctions d'interpolation basées sur la solution PN de l'équation de Navier, Bassayya *et al.* [116] ont proposé un élément volumique baptisé PN340. La performance de cet élément est exacte pour le champ des contraintes constantes mais il a besoin de raffinement de maillage pour le champ des contraintes d'ordre supérieur. Pour corriger les lacunes des éléments volumiques PN34 et PN340, Bassayya et Shrinivasa [117] ont présenté un élément hexaédrique à 14 nœuds PN5X1 utilisant le modèle en déplacement. Les auteurs ont considéré que les fonctions d'interpolation sont basées sur la solution PN de l'équation de Navier où seul le vecteur potentiel de cette équation est utilisé. Cet élément est aussi utilisé par ces auteurs dans la référence [120] pour les problèmes des structures de type plaque et coque. L'utilisation de la solution PN sous forme polynomiale et imposés des conditions sur les coefficients polynomiaux inconnus permettent d'obtenir une représentation linéaire correcte du champ des contraintes dans l'élément.

1.3.5.2. Méthode des coordonnées volumiques

Les éléments hexaédriques à 8 et à 20 nœuds de type Serendip basés sur le modèle en déplacement sont largement utilisés pour construire des modèles éléments finis volumiques qui puissent être utilisés efficacement dans des applications tridimensionnelles. Par exemple, Jiao et Li [121] ont présenté une nouvelle formulation de l'élément hexaédrique à 8 nœuds afin de réduire le temps du calcul de la matrice de rigidité élémentaire. Lors de l'utilisation des éléments Serendip, une exigence de base est que la distorsion violente de l'élément n'est pas autorisée. La bibliographie sur les formulations des éléments finis iso-

paramétriques utilisant la méthode des coordonnées iso-paramétriques est très importante. Ce type de formulation entre dans la catégorie des éléments finis utilisés la première fois par Taig [122] et Irons [123] dans leurs travaux. Selon les études systématiques effectuées par Lee et Bathe [124], lorsque la forme de l'élément n'est pas un parallélogramme ou parallélépipédique les coordonnées iso-paramétriques sont des fonctions irrationnelles des coordonnées cartésiennes. Par conséquent, les éléments hexaédriques à 8 et 20 nœuds de type Serendip ne possèdent que la complétude de premier ordre dans les coordonnées cartésiennes et ils sont sensibles aux distorsions des maillages. Une variante de cette méthode a été présentée par Li *et al.* [125]. Les auteurs ont utilisé la méthode des coordonnées volumiques hexaédrique « *hexahedral volume coordinate method - HVCM* » pour formuler trois éléments hexaédriques à 8 nœuds. Très récemment, Li *et al.* [126] ont proposé un élément hexaédrique « *spline* » à 21 nœuds où le nœud interne assure la complétude du second ordre des coordonnées cartésiennes. La méthode « *spline* » permet d'éviter la transformation des coordonnées et donc d'éviter le calcul de la matrice Jacobienne et son inverse. De plus, cet élément est moins sensible aux maillages distordus et améliore la précision de calcul par rapport à l'élément Serendip hexaédrique standard à 20 nœuds. En utilisant une formulation similaire, Chen *et al.* [127] ont proposé un élément pyramide « *spline* » à 13 nœuds. Cet élément assure la complétude du second ordre dans les coordonnées cartésiennes et se comporte très bien pour les maillages distordus. Notons que ces éléments hexaédrique à 21 nœuds et pyramide à 13 nœuds sont basés sur la méthode des coordonnées volumiques tétraédrique « *tetrahedral volume coordinates* » et la méthode « *B-net* ».

1.3.5.3. Eléments volumiques non-conformes

L'utilisation des éléments non-conformes pour la modélisation des structures tridimensionnelles est motivée par le succès de ces éléments pour les structures bidimensionnelles. Une discussion plus détaillée sur les éléments non-conformes peut être trouvée dans les références [128-130]. La méthode classique des éléments finis non-conformes avec une continuité aux milieux des arêtes (l'élément de Crouzeix-Raviart) a été utilisée dans les références [131-133]. A ce sujet, un élément volumique non-conforme a été développé par Choi et Chung [134] spécialement pour simuler les problèmes de contact élasto-plastique sans frottement en trois dimensions d'une manière simple et efficace. Dans cette étude, les auteurs ont utilisé l'élément volumique non-conforme élasto-plastique avec des nœuds variables proposé la première fois dans la référence [135]. Cet élément a été créé par l'ajout d'un nombre variable de nœuds à l'élément non-conforme hexaédrique à huit nœuds. Cette technique permet d'obtenir une série d'éléments solides de transition qui ont jusqu'à 27 nœuds (figure 1.14). Le comportement de base de ces éléments a été amélioré par l'ajout des modes de déplacements non-conformes modifiés.

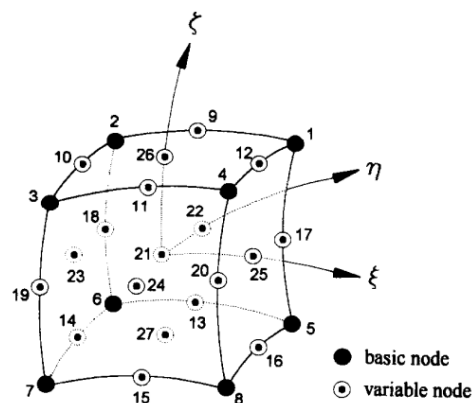


Figure 1.14. Elément solide de transition avec des nœuds variables de 8 à 27 [134]

1.3.5.4. Fonctions surfaciques et volumiques de type « bulle »

Dans le travail de Taylor [136], les fonctions volumiques « bulle » sont utilisées pour la stabilisation des éléments volumiques tétraédriques dans les cas des problèmes des grandes déformations ou des petites déformations, où les inconnues supplémentaires des fonctions « bulle » sont éliminées par la méthode de condensation statique. Cette version a été optimisée par Cisloiu *et al.* [137] en utilisant des fonctions volumiques « bulle » résultant de la stabilité de mini-élément présenté premièrement par Arnold *et al.* [138] et par la suite utilisé dans des nombreux travaux, par exemple [139-143]. L'élément tétraédrique proposé par Cisloiu *et al.* [137] a un nœud dans chaque sommet avec des ddl externes de déplacements et de pression, et un nœud barycentrique qui possède des paramètres de déformations améliorées comme ddl internes (figure 1.15). Ces paramètres de déformations améliorées sont obtenus à partir de la fonction « bulle » cubique suivante :

$$N_b = (N + 1) \prod_{i=1}^{N+1} \xi_i \quad (1.52)$$

où $N = 3$ pour l'élément tétraédrique.

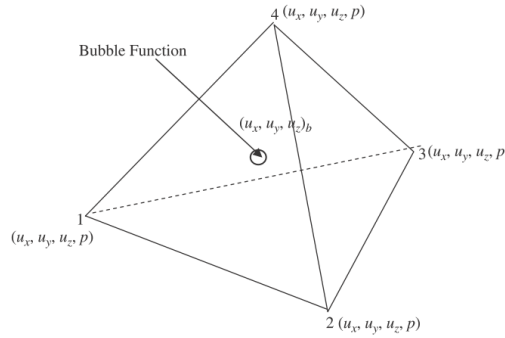


Figure 1.15. Fonction « bulle » volumique dans un élément tétraédrique [137]

Mahnken *et al.* [143] ont ajouté aux fonctions de forme standards de l'élément tétraédrique iso-paramétrique, les fonctions « bulle » surfaciques suivantes :

$$\bar{N}^1(\underline{\xi}) = 27 \left(\eta \zeta \varphi + \frac{\xi^2}{10} \right) \quad (1.53a)$$

$$\bar{N}^2(\underline{\xi}) = 27 \left(\xi \zeta \varphi + \frac{\eta^2}{10} \right) \quad (1.53b)$$

$$\bar{N}^3(\underline{\xi}) = 27 \left(\xi \eta \varphi + \frac{\zeta^2}{10} \right) \quad (1.53c)$$

$$\bar{N}^4(\underline{\xi}) = 27 \left(\xi \eta \zeta + \frac{\varphi^2}{10} \right) \quad (1.53d)$$

Une illustration de la fonction « bulle » surfacique \bar{N}^4 est donnée dans la figure 1.16. La valeur de la fonction est égale 0 le long des trois segments de la face considérée avec $\varphi = 0$, et égale 1 au niveau du centre de la face défini par les coordonnées $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Ces travaux ont été étendus très récemment par Caylak et Mahnken [144] aux problèmes de grandes déformations. Les fonctions « bulle » utilisées par ces auteurs sont des fonctions surfaciques (équations 1.53) et une fonction volumique écrite comme suit :

$$\bar{N}(\xi) = \xi\eta\zeta\varphi \quad (1.54)$$

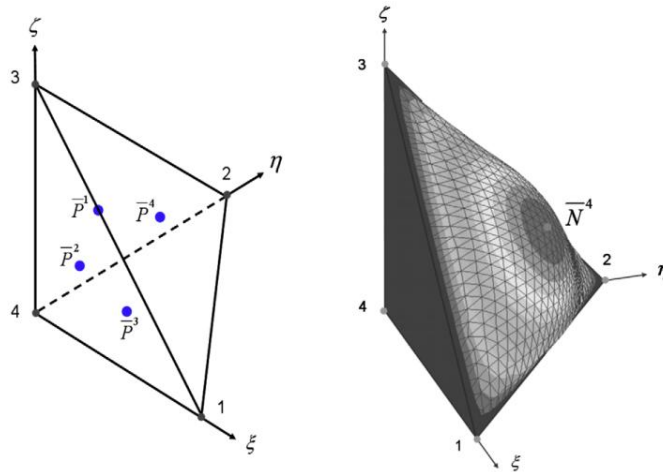


Figure 1.16. Illustration de la fonction « bulle » surfacique \bar{N}^4 et les points \bar{P}^i où les fonctions sont maximales [143]

1.3.5.5. Approche des moindres carrés pondérée

L'élément tétraédrique à 4 nœuds est souvent utilisé pour débiter les procédures de la méthode des éléments finis tridimensionnels. La raison est que l'élément tétraédrique à 4 nœuds peut être formulé et implémenté très facilement utilisant une approximation linéaire par morceaux. De plus, la plupart des codes éléments finis tridimensionnels utilisent des éléments tétraédriques en raison de la simplicité d'utilisation dans la génération automatique des maillages ainsi que dans le raffinement du maillage même pour des domaines complexes. Cependant, cet élément possède des lacunes importantes pour les problèmes de mécanique des solides. Deux de ces lacunes sont le comportement trop rigide et le verrouillage volumétrique dans les cas des matériaux incompressibles ou presque incompressibles. Afin de remédier à ces inconvénients, certains nouveaux éléments finis ont été proposés. Par exemple, Dohrmann *et al.* [145] ont présenté l'approche des moindres carrés pondérée dans laquelle un champ linéaire de déplacements est monté sur les déplacements nodaux de l'élément. La méthode est prétendue d'être efficace et permet d'éviter les problèmes de verrouillage volumétrique. Cependant, les nœuds doivent être à la frontière de l'élément pour définir le champ linéaire de déplacements. Plus tard, Dohrmann *et al.* [146] ont aussi proposé un élément tétraédrique à 4 nœuds. Cet élément utilise les fonctions d'interpolation linéaire du maillage original, mais chaque élément est associé à un seul nœud. Cette méthode permet d'éviter les problèmes de verrouillage volumétrique et donne une performance mieux que celle de l'élément tétraédrique classique à 4 nœuds en termes de la solution des contraintes pour les problèmes statiques. Cependant, pour les problèmes dynamiques, cette méthode n'est pas stable en raison de l'apparition des modes parasites aux niveaux de l'énergie et un schéma de stabilisation tel que celui proposé par Puso et Solberg [147] est nécessaire.

1.3.6. Éléments volumiques non linéaires

La formulation des éléments finis volumiques a été présentée dans le cadre des problèmes élastique linéaire. Il convient maintenant de discuter sur l'application de ces modèles aux problèmes matériellement non linéaires, géométriquement non linéaires et dynamiques. Généralement, l'utilisation des éléments volumiques d'ordre supérieur dans les problèmes non linéaires, par exemple le problème de contact, conduit à une difficulté d'inversion de la matrice Jacobienne pour les éléments distordus, et exige un temps de calcul élevé. A cet égard, les éléments finis hexaédriques et tétraédriques de premier ordre sont généralement les plus utilisés dans l'analyse non linéaire des structures tridimensionnelles, en raison de leur efficacité de calcul, robustesse et facilité d'utilisation.

L'approche EAS fournit une grande flexibilité pour la formulation des différents éléments finis volumiques en non linéaire. En raison de la formulation en déformation des éléments basés sur l'approche EAS, l'implémentation des matériaux inélastiques devient simple. Dans la référence [148] le bon comportement des éléments volumiques hexaédriques à 8 nœuds en non linéaire a été démontré. Plus tard, Klinkel et Wagner [149] ont présenté un élément hexaédrique tridimensionnel Q1E30 avec l'utilisation des fonctions de forme améliorées pour définir le champ des déformations. Cet élément volumique est formulé avec 30 paramètres de EAS pour l'analyse des problèmes non linéaires géométriques utilisant le tenseur de déformations de Green-Lagrange. Il est montré que cet élément volumique peut être utilisé pour l'analyse des structures minces 2D, poutres 3D et coques. Les résultats obtenus par cet élément sont satisfaisants et comparables aux résultats obtenus par les éléments de type poutre et coque.

Les deux inconvénients majeurs des éléments basés sur la méthode EAS sont liés à des instabilités d'Hourglass et l'inefficacité numérique en raison du nombre élevé des modes postulés. L'utilisation des polynômes d'ordre supérieur pour approximer les modes postulés peut réduire la convergence de la procédure itérative de Newton-Raphson. L'effet des modes de Hourglass survient dans les problèmes de grandes déformations où les instabilités sont observées. Ces modes sont examinés pour la première fois par Wriggers et Reese [150] et plus tard par Glaser et Armero [151]. Les modes parasites de Hourglass peuvent être supprimés par l'ajout d'un terme artificiel de stabilisation à la fonctionnelle EAS. De nombreuses approches concernant les problèmes des modes parasites de déformation ont été développées [152, 153] mais aucune explication physique complète des modes de Hourglass n'est donnée. Une autre technique de stabilisation consiste à utiliser une matrice de stabilisation calculée d'une manière semblable à celle calculée pour les éléments sous-intégrés. Cette approche a été suggérée par Reese et Wriggers [154] et développée dans [155] pour les problèmes élasto-plastique et dans [71] pour les problèmes de déformations finies. Il y a eu plusieurs approches dont la formulation originale EAS est combinée avec d'autres approches éprouvées afin d'améliorer la stabilité des éléments basés sur le modèle EAS. Dans la plupart des cas, la stabilisation des éléments est obtenue par l'exploitation de blocage en cisaillement ce qui rend l'élément obtenu moins efficace dans les problèmes de flexion dominante. Weissman [66] a utilisé cette approche pour formuler un élément hexaédrique à 8 nœuds pour les problèmes 3D élasto-plastique.

Récemment, Cao *et al.* [156] ont présenté un élément brique à 8 nœuds basé sur le principe variationnel modifié à trois champs de Hu-Washizu pour l'analyse élasto-plastique, qui est une extension de l'analyse élastique de référence [67]. Pour augmenter la précision de l'élément pour les maillages irréguliers, un terme de pénalité est employé dans le fonctionnel modifié de Hu-washizu. Il est également utilisé pour avoir des contraintes qui satisfont les équations d'équilibre. Ces auteurs indiquent que cet élément basé sur le principe variationnel à trois champs est préférable que les éléments hybride-contrainte pour

l'analyse non linéaire matérielle. Un autre élément volumique basé sur l'approche EAS pour les problèmes de dynamique non linéaire a été introduit par Armero [157]. Dans cet élément, l'opérateur associé à des déformations linéarisées permet d'obtenir une formulation capable d'assurer les lois de conservation des moments linéaire et angulaire ainsi que la loi de conservation de l'énergie pour les problèmes d'élasticité et d'inélasticité.

Compte tenu de l'intérêt croissant pour la modélisation des problèmes multi-physiques, une certaine attention a été concentrée sur l'élaboration d'éléments simplex pour la simulation des matériaux presque incompressibles. Des étapes importantes dans ce sens ont été reportées dans les travaux de Zienkiewicz *et al.* [158], Bonet et Burton [159] et Bonet *et al.* [160] pour la dynamique explicite, et de Taylor [136] pour les problèmes de déformations finies. Des idées similaires ont été exploitées dans [161] pour traiter les problèmes d'élasticité non linéaire et les matériaux presque incompressibles.

Aussi, les éléments volumiques sont nécessaires pour la simulation numérique par éléments finis de retour élastique « *Spring-back* » lorsque le rapport entre le rayon de l'outil et l'épaisseur est inférieur à 5-6 (Li *et al.* [162]). Ces données ont motivé de nombreuses études récentes afin d'améliorer les éléments volumiques et de mieux simuler les problèmes de formages des tôles (par exemple : Areias *et al.* [163], Wang et Wagoner [164] et Reese [155]). Dans la référence [165] un élément hexaédrique classique à 8 nœuds tri-linéaire associé à un schéma d'intégration réduite sélective (SRI) est adopté, bien que le schéma SRI puisse présenter des modes parasites à énergie nulle dans les problèmes de torsion-dominante. Ce type d'éléments finis permet de calculer l'évolution de l'épaisseur [166, 167] et les gradients de contraintes à travers l'épaisseur [168] avec une grande efficacité, selon le type d'application et le nombre d'éléments à travers l'épaisseur et dans le plan de la tôle.

Très récemment, Korelc *et al.* [169] ont développé un élément volumique hexaédrique TSCG12 basé sur la méthode EAS avec 12 modes pour les problèmes de déformations finies en élasticité et plasticité. Cet élément est basé sur une extension des dérivées de fonctions de forme utilisant les séries de Taylor et un ensemble étendu de conditions d'orthogonalité pour éliminer les modes de Hourglass due à la formulation EAS. Cette approche n'a pas été appliquée jusqu'à présent dans les problèmes 3D de grandes déformations. L'avantage majeur de cet élément est l'absence de verrouillage de cisaillement pour les structures très minces de type plaque te coque.

Parallèlement à ces travaux de recherche, un article de Nadler et Rubin [170], datant de 2003, va être le point de départ d'utilisation de la théorie du point de Cosserat « CP : *Cosserat point* » pour la formulation des éléments volumiques tridimensionnels en élasticité non linéaire. Cette approche permet d'éviter les modes parasites de type Hourglass qui l'on trouve dans les éléments finis volumiques en élasticité non linéaire [150, 154, 171, 172] et les différents types de blocage numérique [170]. Cependant, comme il a été montré dans la référence [173], ce type d'élément ne présente pas une performance significative par rapport aux éléments finis tri-linéaires standards lorsque le maillage est distordu. Les éléments hexaédriques à 8 nœuds basés sur la théorie du point de Cosserat développés dans les références [170, 173] peuvent être utilisés pour les simulations des problèmes dynamiques non linéaires des matériaux hyper-élastiques. La cinématique des éléments basés sur la théorie du point de Cosserat est caractérisée par huit vecteurs directeurs élémentaires et la cinétique repose sur huit lois d'équilibre de moment directeur pour déterminer la réponse dynamique de l'élément. Spécifiquement, les emplacements des nœuds dans la configuration déformée actuelle sont caractérisés par huit vecteurs directeurs nodaux et les éléments directeurs sont liés à des nœuds directeurs par les fonctions de forme standards tri-linéaires. Très récemment, un élément hexaédrique à 8

nœuds basé sur la théorie du point de Cosserat a été développé par Jabareen *et al.* [174] pour la simulation tridimensionnelle des problèmes non linéaires des matériaux hyper-élastiques orthotropes. Dans cet élément, la fonction de l'énergie de déformations est proposée d'une façon à satisfaire les restrictions dues à une forme de patch-test.

Finalement, certains auteurs démontrent que les éléments finis volumiques d'ordre supérieur sont efficaces pour le traitement des problèmes non linéaires géométriques lorsque les maillages sont distordus. Citons par exemple l'extension effectuée récemment par Ooi *et al.* [114] de l'élément hexaédrique à 20 nœuds asymétrique « *unsymmetric* » US-HEXA20 pour l'analyse non linéaire géométrique utilisant la description lagrangienne totale. Cette formulation présente une bonne performance spécialement pour les cas où les maillages sont distordus. Cependant, cet élément quadratique exige un effort de calcul très important due à l'utilisation de deux ensembles de fonctions de forme et de la nécessité de résolution des équations asymétriques. Selon Buczkowski [175] l'élément hexaédrique à 20 nœuds de type Serendip ne répond pas correctement aux exigences physique du problème de contact à cause de l'existence de quelque forces nodales équivalentes négatives. A cet égard, cet auteur a proposé un élément hexaédrique à 21 nœuds de transition pour les problèmes non linéaire de type contact avec frottement. Cet élément est formulé par l'ajout d'un nœud à la face supérieure ou inférieure de l'élément hexaédrique standard à 20 nœuds (figure 1.17) pour assurer une liaison efficace entre la zone de contact (modélisée avec l'élément hexaédrique à 21 nœuds) et le reste de la structure qui est modélisée avec l'élément standard à 20 nœuds. Cependant, dans les problèmes de l'impact en dynamique explicite l'élément à 21 nœuds doit être utilisé avec une prudence en raison de la non-positivité des masses nodales sur la face du contact [176]. Pour résoudre ce problème, Buczkowski et Gabbert [176] ont proposé un élément hexaédrique iso-paramétrique de transition à 28 nœuds (figure 1.17). Notons que, dans la référence [175] la surface de contact est modélisée par l'élément d'interface quadratique iso-paramétrique à 18 nœuds et dans la référence [176] elle est modélisée avec l'élément d'interface cubique iso-paramétrique à 32 nœuds. Sachant que ces éléments d'interface (figure 1.18) ont une épaisseur égale à zéro.

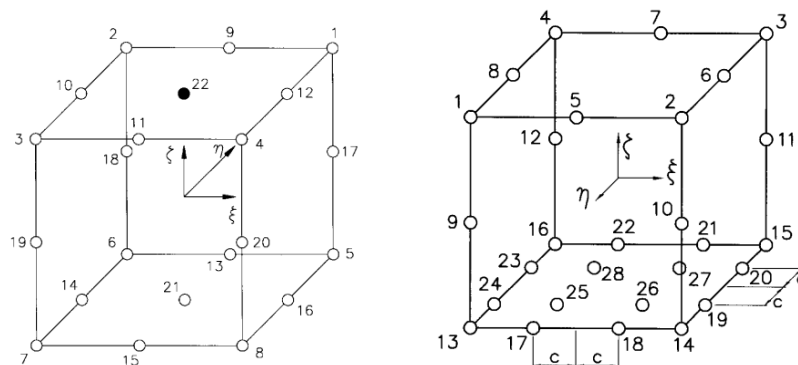


Figure 1.17. Eléments hexaédriques de transition à 21 nœuds [175] et à 28 nœuds [176]

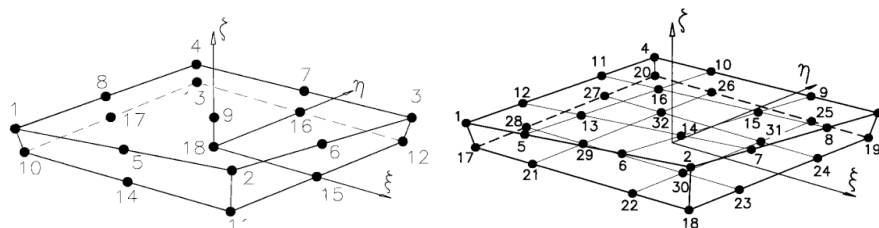


Figure 1.18. Eléments d'interface à 18 et à 32 nœuds [175, 176]

1.3.7. Techniques d'intégration réduite avec contrôle des modes parasites

Dans les éléments finis volumiques standards l'intégration exacte (IE) de la matrice de rigidité entraînait une surévaluation de la raideur du système étudié. Cette surestimation, propre à toute méthode approchée de type déplacement, fournit une bonne stabilité et une convergence de la solution approximative à la solution exacte si le maillage est raffiné. Cependant, l'intégration exacte peut être particulièrement pénalisante et conduite à un véritable blocage (verrouillage) volumétrique pour les matériaux incompressibles ou presque incompressibles, et le verrouillage de cisaillement pour les problèmes de flexion-dominantes aux cas des structures minces avec un maillage grossier. L'intégration réduite (IR) est une alternative efficace pour évaluer la matrice de rigidité et permet d'éviter les différents phénomènes de verrouillage. A cet avantage s'ajoute encore celui de la diminution du coût de l'intégration numérique, puisque le nombre d'évaluations dans l'intégration réduite est plus faible qu'avec la règle normale [177].

Le premier inconvénient de la méthode d'intégration réduite est que la mono-tonicité de la convergence en énergie d'un modèle d'éléments finis n'est plus garantie, de sorte qu'il devient impossible de dire si le modèle est trop souple ou trop rigide par rapport à la solution exacte. Le second désavantage réside dans l'apparition éventuelle de modes parasites à énergie de déformation nulle, mais différents des modes classiques de mouvements d'un corps rigide. Ces modes parasites, appelés quelquefois mécanismes ou modes cinématiques (sont aussi appelés *hourglass modes* dans la littérature anglo-saxonne), proviennent des singularités introduites par la technique d'intégration réduite dans la matrice de rigidité et correspondent en fait à des configurations pour lesquelles les éléments infinitésimaux en chacun des points de Gauss ne subissent aucune déformation [177]. Une étude approfondie du problème révélerait que ces modes parasites ne se propagent pas nécessairement dans l'ensemble de la structure et que leur nombre dépend des conditions aux limites imposées et de la densité du maillage [177]. Notons que la règle édictée pour la détermination de l'indice de singularité de la matrice de rigidité admet malheureusement des exceptions, de sorte qu'il est parfois préférable de s'assurer directement du rang de cette matrice par extraction de ses valeurs propres. Le nombre de valeurs nulles ne devant pas excéder le nombre de déplacements de corps rigide possibles (6 modes pour les éléments volumiques 3D). Un autre moyen de vérification consiste à factoriser la matrice de rigidité et à contrôler le nombre de termes ou pivots nuls dans la matrice diagonale issue de la décomposition.

Hughes [178] a proposé l'intégration réduite sélective (IRS) pour diminuer et souvent supprimer les instabilités numériques (modes parasites de Hourglass) provoquées par l'intégration réduite. Ce type d'intégration ne permis pas d'améliorer l'efficacité de calcul puisque l'intégration exacte et réduite doivent être appliqués à des termes différents de la matrice de rigidité. De plus, dans le schéma IRS, l'intégration réduite des termes de cisaillement pourrait activer les modes de Hourglass (de torsion) pour les problèmes dominés par la torsion [179]. Koh et Kikuchi [179] ont proposé l'intégration réduite directionnelle (IRD) où IR est appliqué sur certaines directions dépendant de la géométrie de l'élément. Bien que l'IRD fonctionne bien dans les problèmes 2D, elle souffre encore des modes de Hourglass dans certains cas de problèmes 3D.

Une autre approche a été introduite pour résoudre ces difficultés consiste à utiliser l'intégration réduite avec un contrôle des modes de Hourglass. Elle est devenue la plus populaire. Dans cette approche la matrice de rigidité est calculée par la somme de deux matrices : la matrice de rigidité obtenue de l'intégration réduite et la matrice de correction (matrice de pénalité), cette dernière est ajoutée pour contrôler les modes de Hourglass. Dans cette approche l'effort a été porté sur la façon de prendre en considération les deux

choix mathématique et physique pour construire la matrice de correction. Flanagan et Belytschko [180] ont construit la matrice de correction par l'introduction des paramètres de contrôle. Plus tard, Belytschko *et al.* [181] ont introduit la rigidité artificielle. Bien que ces éléments peuvent contrôler les verrouillages et les modes de Hourglass, ils ont un inconvénient important c'est qu'ils sont sensibles à ces paramètres spécifiés par l'utilisateur pour les problèmes dominés par la flexion avec un maillage grossier. Aussi les procédures pour définir les valeurs convenables sont en général coûteuses et dépendant de l'expérience des utilisateurs.

Belytschko et Bindeman [72] ont proposé un élément qui ne nécessite pas l'utilisation des paramètres artificiels spécifiés par l'utilisateur. Dans cet élément la matrice ajoutée (pénalité) est construite à partir des propriétés de matériau, tel que le coefficient de Poisson et la géométrie de l'élément. Belytschko *et al.* [181] ont suggéré que la construction de la matrice ajoutée devra conserver la condition d'orthogonalité qui exige que les déformations de Hourglass généralisées ne peuvent pas activer un mouvement d'un corps rigide. Comme discuté auparavant, l'élément stabilisé présenté par Fredriksson et Ottosen [69] basé sur la méthode EAS utilisant l'énergie de flexion pour construire les modes améliorés est intégré avec un schéma d'intégration réduite. Cela conduit à des modes de Hourglass représentés dans la figure 1.19. Cette figure illustre les quatre modes parasites de Hourglass suivant la direction x pour les quatre déplacements nodaux dans cette direction dans le cas d'un seul point d'intégration situé à l'origine du repère de référence. Les autres modes selon y et z , pour arriver à un total de 12, sont obtenus par permutation des axes. Une analyse très détaillée des modes de Hourglass avec une démonstration complète se trouvent dans la référence [69].

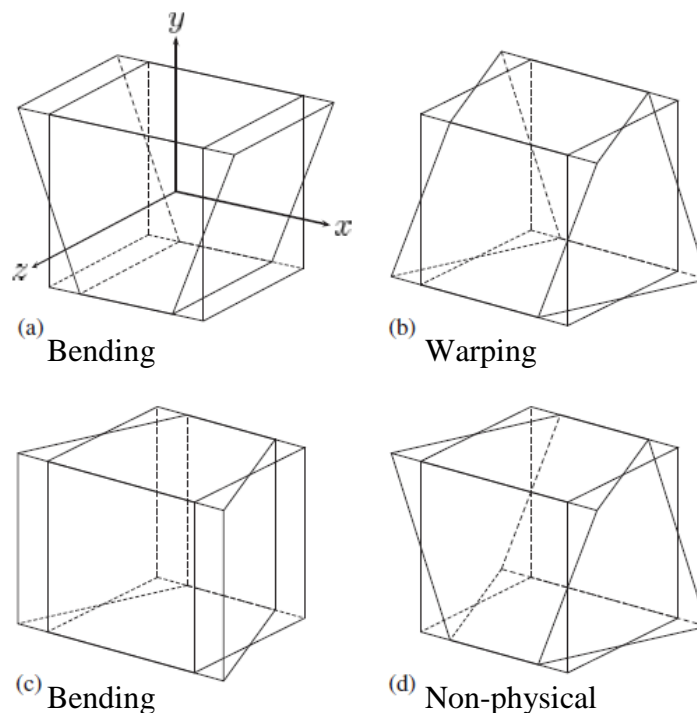


Figure 1.19. Modes de Hourglass selon la direction x avec un point d'intégration [69]

Un élément volumique JET3D a été développé par Li [182] et par la suite utilisé par Li et Cescotto [183]. Dans cet élément l'intégration réduite est également utilisée avec une technique de contrôle des modes de Hourglass. Cette technique consiste à utiliser une matrice de pénalité construite à l'aide de la méthode de déformations améliorées

« *enhanced strain method* ». Les composantes de déformation comprennent des termes supplémentaires afin de supprimer les modes de Hourglass et aussi pour contrôler les verrouillages numériques dans l'élément. Cependant, ces composantes de déformation supplémentaires rendent particulièrement difficiles l'implémentation des relations constitutives.

Une approche alternative pour contrôler les modes de Hourglass est adoptée par Liu et co-auteurs [184, 185]. Dans cette approche, les déformations et les contraintes au centre de gravité de l'élément sont développées en série de Taylor dans les coordonnées locales. Quatre points d'intégration sont utilisés par Liu *et al.* [185] pour l'élément hexaédrique à 8 nœuds ce qui permet d'améliorer la solution lorsque le comportement du matériau est non linéaire en raison de l'interpolation plus précise des contraintes. Cette méthode implique des formulations extrêmement compliquées qui dépendent des coordonnées locales. Le choix de points d'intégration effectué par Liu n'est pas expliqué et leur influence n'est pas signalée.

1.3.8. Eléments volumiques composites

L'utilisation des matériaux composites gagne une grande importance dans les secteurs industriels de l'aérospatiale, du sport et loisir, du génie civil et de l'automobile. Ceci est dû à leur faible densité, rigidité spécifique élevée, résistance spécifique élevée, résistance à la corrosion, ainsi que leur faible coefficient de dilatation thermique, etc. Le principal avantage des matériaux composites est que l'on peut choisir le matériau en fonction de la rigidité et de la force directionnelle dans une direction spécifique. Leur comportement anisotrope permet d'adapter les rigidités à l'application.

La modélisation numérique des structures composites par l'application des éléments finis volumiques 3D prend un intérêt croissant dans les recherches appliquées. Des travaux ont été menés en ce qui concerne les plaques composites par Barbero [186] où un élément tridimensionnel pour l'analyse linéaire des plaques composites multidirectionnelles est développé. Cet élément utilise les contraintes cinématiques de la théorie de cisaillement constant d'une couche. Il est validé à travers le patch-test élaboré dans la référence [187]. Un peu plus tard, Barbero et Zinno [188] généralise cet élément pour l'analyse des structures de type coque anisotrope. Dans la référence [189], un élément tridimensionnel avec des contraintes cinématiques bidimensionnelles a été développé pour l'analyse non linéaire géométrique des plaques composites stratifiées associé à la description lagrangienne totale basé sur le principe des déplacements virtuels.

Les éléments finis 3D ont été aussi appliqués pour l'analyse du comportement mécanique des joints collés dans la référence [190]. Les auteurs ont utilisé l'élément hexaédrique à 27 nœuds disponible dans le code commercial de calcul par éléments finis Abaqus pour l'analyse tridimensionnelle des contraintes et des déformations dans les structures composite-aluminium collées. Dans ce travail, les couches adhésives ne sont pas explicitement prises en compte. Afin d'améliorer la précision de la modélisation des structures composite-composite à joint collé Bogdanvich et Kizhakkethara [191] ont étendue l'approche précédente, pour tenir compte de toutes les couches adhésives élastiques comme des entités 3D.

Actuellement, la modélisation tridimensionnelle par les éléments finis volumiques des assemblages boulonnés des composites est devenue possible et ces analyses ont commencés à apparaître dans la littérature [192-199]. Dans ces études, pour tenir compte de la variation des contraintes à travers l'épaisseur, les stratifiés ont été modélisés soit avec un ou plusieurs éléments solides orthotropes par couche [192, 195, 196] ou avec des éléments solides multicouches [194]. Certaines études antérieures [192] ne considèrent pas

le contact entre le boulon et le trou, mais fait des hypothèses de simplifications pour simuler la présence du boulon, comme la fixation du déplacement radial des nœuds autour du trou [192]. Plus tard, la modélisation explicite de contact entre le boulon et le trou a été utilisée dans les références [194-196, 198]. Dans ces travaux, les éléments finis non linéaires ont été utilisés pour résoudre le problème de changement des conditions aux limites apportés par les changements de contact entre le boulon et le stratifié. Certains auteurs ont modélisé le boulon comme une surface de contact cylindrique rigide [195, 196], tandis que d'autres ont estimé qu'il est élastique et l'ont modélisé par des éléments finis tridimensionnels [194, 198].

L'analyse des stratifiés soumis à un chargement transversal a reçu très peu d'attention par les chercheurs. Marimuthu et co-auteurs [200, 201] croyaient que l'élément tridimensionnel hexaédrique (approche par couche) basé sur la formulation mixte est le meilleur option pour trouver les contraintes inter-laminaires et d'étudier le comportement en déformation des matériaux composites stratifiés. Les auteurs ont déjà montré que cet élément fonctionne bien pour prédire les contraintes et les déformations inter-laminaires pour le cas de chargement dans le plan [200]. Dans la référence [201] une formulation mixte de l'élément hexaédrique à 20 nœuds (élément par couche) est utilisé pour prédire les déplacements et les contraintes inter-laminaires dans les stratifiés soumis à une charge transversale. Cet élément (figure 1.20) possède six ddl par nœuds, trois translations et trois contraintes transversales, et utilise l'interpolation suivante :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \sigma_{zi} \\ \tau_{xzi} \\ \tau_{yzi} \end{Bmatrix} \quad (1.55)$$

où N_i sont les fonctions de forme de l'élément hexaédrique à 20 nœuds standard.

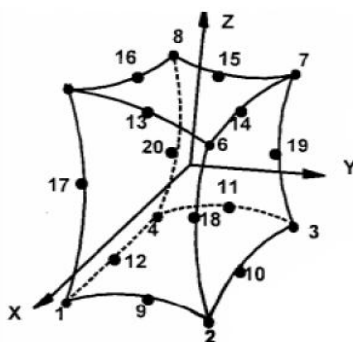


Figure 1 .20. Élément hexaédrique iso-paramétrique à 20 nœuds [201]

La conception et le dimensionnement des structures composites sont maintenant globalement maîtrisés et intégrés dans de nombreux codes de calculs grâce à la théorie classique des stratifiés. Cependant, les effets locaux tels que les délaminages près des bords libres ou des jonctions dans les structures composites stratifiées posent encore de nombreuses difficultés qui en limitent parfois l'utilisation. Il a depuis longtemps été démontré qu'il existe, dans les stratifiés des contraintes inter-laminaires causées par la

variation des propriétés du matériau entre plis adjacents. La présence de contraintes inter-laminaires dans les composites stratifiés conduit au délaminage local et réduit la force des composant de construction pour lesquels il est conçu, ceci pourrait être la cause de la défaillance prématurée. Une estimation précise des contraintes inter-laminaires est une tâche difficile dans l'analyse des structures composites. Au voisinage des bords libres, ces dernières donnent naissance à des états de contrainte tridimensionnels. Il existe deux méthodes essentielles pour la modélisation par éléments finis du phénomène du délaminage dans les matériaux composites stratifiés. La première méthode consiste à utiliser des éléments solides composites par couche [202] éventuellement reliés entre eux par des éléments d'interface [203-208]. Cette méthode est coûteuse en temps CPU et devient laborieuse car la structure du modèle devient complexe. La seconde méthode consiste à utiliser un élément de coque multicouche à travers l'épaisseur du stratifié. Cet élément n'a pas l'accès à la contrainte transversale normale. Par conséquent, il n'est pas apte à représenter le mode I du délaminage. Une méthode alternative introduit par Hoa et Feng [209] consiste à utiliser un élément solide multicouche partiel-hybride qui permet également de représenter les contraintes inter-laminaires à travers l'épaisseur d'un stratifié. Très récemment, Abdullah *et al.* [210] ont introduit un élément solide hexaédrique composite pour l'analyse de délaminage des composites stratifiés. Cet élément volumique à 8 nœuds est obtenu à partir de l'élément hexaédrique à 20 nœuds et possède trois ddl de translation et trois de rotation par nœud. En parallèle, de nombreux auteurs se sont penchés, ces deux dernières décennies, sur la quantification et la prédiction de ces phénomènes par l'utilisation des éléments hexaédriques iso-paramétriques à 20 nœuds afin d'étudier les champs et les effets locaux tels que les délaminages près des bords libres [211-214]. La figure 1.21 représente un maillage 3D typique utilisé par Lessard *et al.* [212] pour étudier les contraintes d'interface.

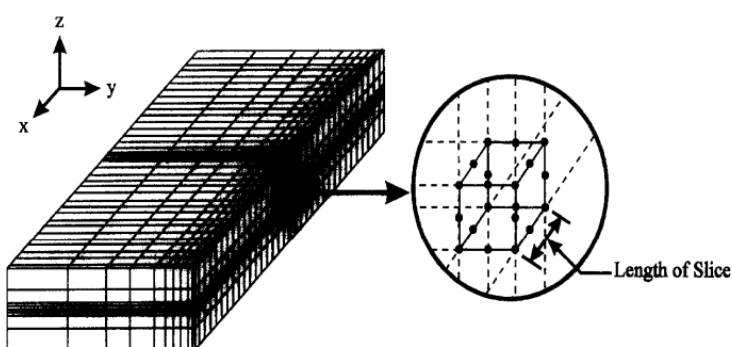


Figure 1.21. Illustration d'un maillage éléments finis 3D pour déterminer les contraintes inter-laminaires [212]

Dans les références [214, 215], la plaque multicouche trouée est étudiée avec un maillage 3D raffiné aux interfaces (figure 1.22). A cause du grand nombre de degrés de liberté on doit avoir recours à la technique de sous-structuration pour résoudre le problème. Dans ce contexte Icardi *et al.* [211] ont étudié la singularité des contraintes au bord libre en utilisant un élément hexaédrique à 20 nœuds et un élément singulier à 15 nœuds (figure 1.23). Ce dernier est généré à partir d'un élément hexaédrique à 20 nœuds. Une procédure de calcul à deux phases (prédicteur-correcteur) est utilisée pour assurer les conditions de contact aux interfaces. Le maillage utilisé dans cette étude est présenté sur la figure 1.24.

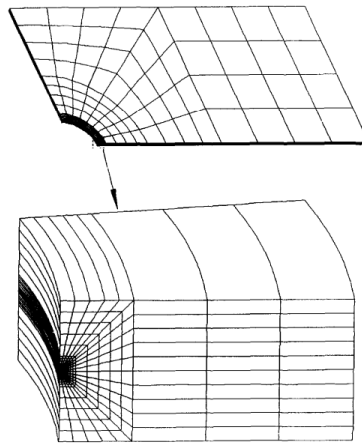


Figure 1 .22. Raffinement du maillage 3D pour l'étude des plaques trouées [215]

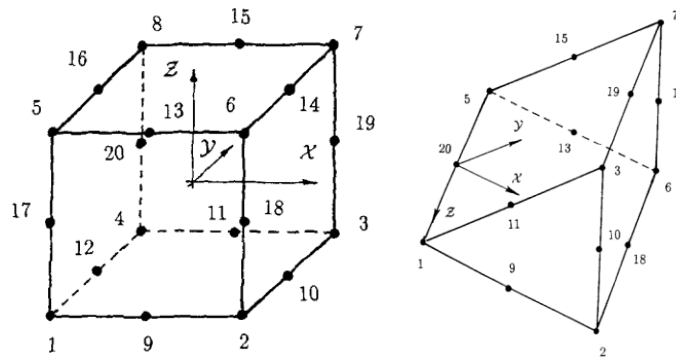


Figure 1 .23. Éléments finis volumiques [211]

Une autre façon non classique d'élaborer des modèles 3D composites est de traiter les structures stratifiées par le modèle zig-zag. Cho *et al.* [216] ont développé un élément fini hexaédrique à 8 nœuds basé sur le modèle zig-zag du premier ordre. Suivant l'épaisseur, chaque couche est modélisée par un élément qui adopte une cinématique de type zig-zag du premier ordre. Dans les références [217-219] un élément mixte à 18 nœuds est proposé. Les variables nodales sont les trois déplacements et les trois contraintes hors plan. Chaque élément à l'épaisseur d'une couche et les contraintes déterminées aux nœuds sont les contraintes inter-laminaires. Cet élément volumique à 18 nœuds (figure 1.25) basé sur la formulation mixte et le modèle en déplacement a été aussi utilisé par Desai *et al.* [220]. Ce modèle permet de représenter avec une performance les contraintes et les déplacements dans les composites stratifiés, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. Les conditions de continuité sont satisfaites pour les déplacements et les contraintes transversales. De même, Bambole et Desai [221] ont développé un modèle tridimensionnel hybride-interface, hexaèdre à 27 nœuds, par l'utilisation du principe de l'énergie potentielle minimale. Dans cette étude, les interfaces supérieure et inférieure de chaque couche sont modélisées par des éléments hybrides d'interface et les éléments standards basés sur le modèle en déplacements sont utilisés entre ces interfaces (figure 1.26).

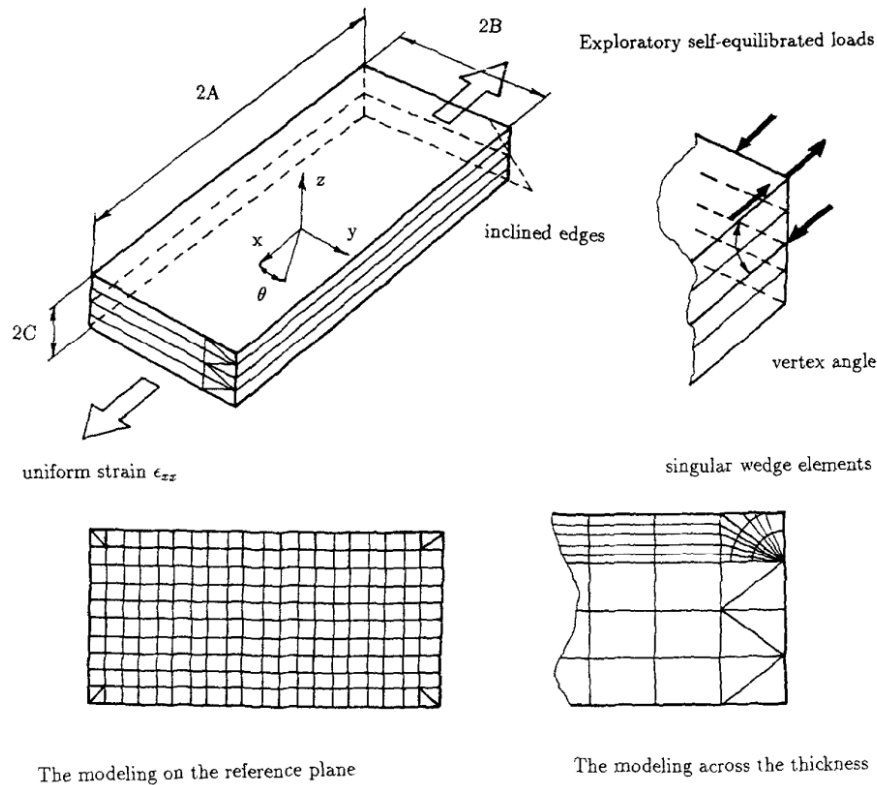


Figure 1.24. Etudes du problème de bord libre par EF 3D [211]

La méthode proposée par Bui *et al.* [222, 223] s'inscrit ainsi dans la classe de la prédiction des contraintes inter-laminaires. Cette méthode consiste à utiliser les éléments dits d'interfaces pour modéliser les structures composites stratifiées. Les interfaces sont modélisées par un élément typique avec une épaisseur égale à zéro. Cet élément d'interface est formulé en dégageant continuellement vers zéro l'épaisseur d'un élément de plaque mince (figure 1.27). Les couches sont modélisées par des éléments finis volumiques ordinaires.

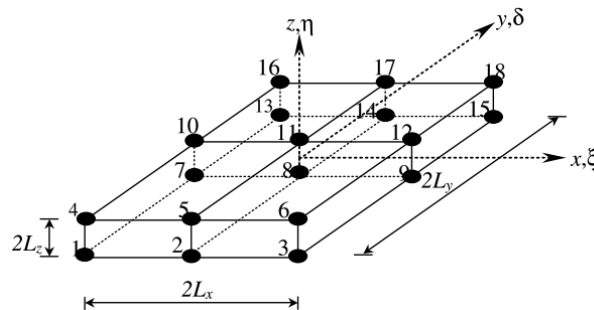


Figure 1.25. Élément brique mixte à 18 nœuds [217]

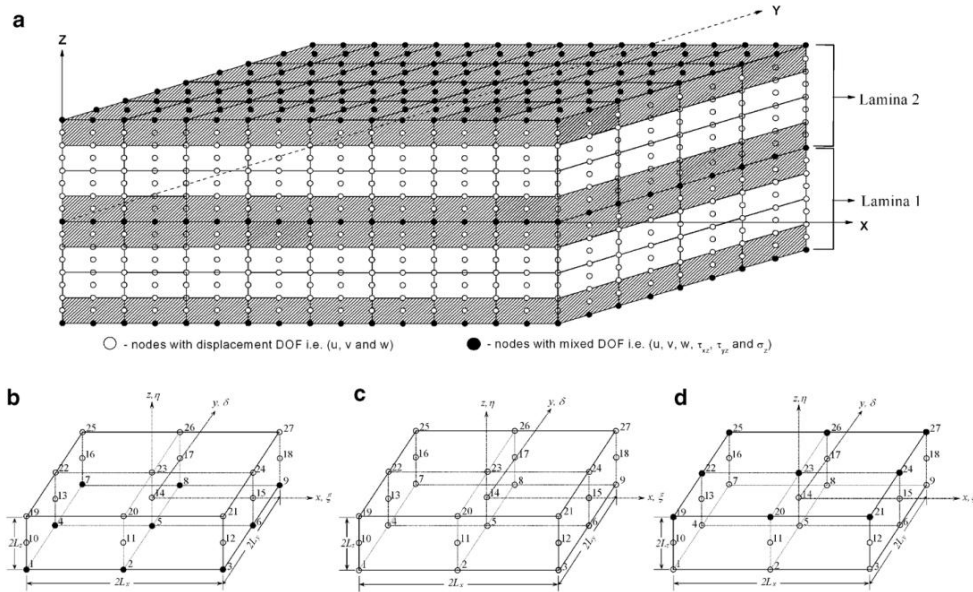


Figure 1.26. Discretisation d'une plaque stratifiée avec des éléments hybrides d'interface et des éléments standards [221]

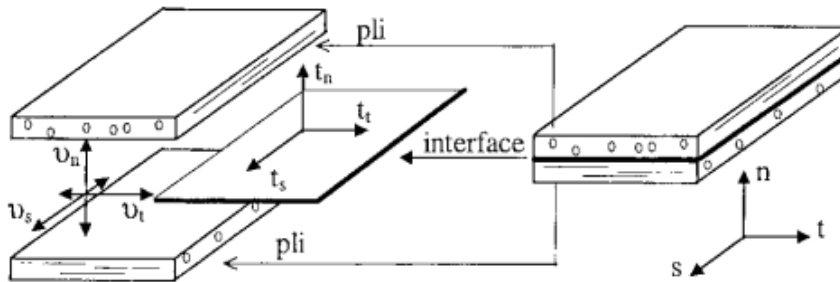


Figure 1.27. Élément d'interface [222, 223]

En particulier les régions dominées par les états de contrainte tridimensionnels, par exemple les zones d'introduction de charge doivent être explorées plus en détail. Dans ces régions ou dans des structures épaisses le calcul des distributions des contraintes tridimensionnelles nécessite l'utilisation des éléments volumiques. Ces éléments solides sont préférés par rapport aux éléments structuraux car on risque d'utiliser ces derniers en dehors de leur domaine de validité. Afin d'analyser les structures composites épaisses, Kuhlmann et Rolfes [224] ont proposé un élément volumique multicouche utilisant les fonctions de forme hiérarchiques. Cet élément utilise deux étapes pour calculer le tenseur des contraintes. Dans la première étape les contraintes planes sont calculées à partir de la loi constitutive sous la forme suivante :

$$\sigma^{(k)} = H^{(k)} \varepsilon = H^{(k)} B u \tag{1.56}$$

où $H^{(k)}$ est la matrice d'élasticité de la couche k .

Puis dans la deuxième étape, les contraintes transversales sont calculées à partir des équations d'équilibre 3D :

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(k)} &= -\int_z \frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} dz + \psi_{xz}^{(k)}(x, y) \\ \tau_{yz}^{(k)} &= -\int_z \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(k)}}{\partial y} dz + \psi_{yz}^{(k)}(x, y) \\ \sigma_z^{(k)} &= -\int_z \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial y} dz + \psi_z^{(k)}(x, y)\end{aligned}\tag{1.57}$$

Cette approche est très intéressante à condition qu'on possède des fonctions d'interpolation d'ordre élevé. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur.

1.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord décrit, dans la première partie, quelques brefs rappels des théories générales de la mécanique des milieux continus en définissant des différentes quantités, telles que le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes. Nous avons aussi introduit les différentes définitions principales de la méthode des éléments finis tridimensionnels.

La deuxième partie de ce chapitre est constituée d'une synthèse bibliographique sur les éléments finis volumiques, notamment les techniques de formulation des modèles éléments finis solides tridimensionnels. Plusieurs éléments finis volumiques ont été proposés pour faciliter l'analyse des nouveaux phénomènes et d'améliorer les méthodes existantes. Cette partie est écrite donc pour fournir les récents développements des éléments finis solides utilisés dans l'analyse d'ingénierie. Pendant les deux dernières décennies, des progrès considérables ont été réalisés dans le développement d'éléments finis volumiques fiables et efficaces pour résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus. La revue bibliographique montre que les éléments finis classiques basés sur la formulation tridimensionnelle du principe des travaux virtuels et utilisent des approximations de premier ordre, deviennent inefficaces lorsqu'ils sont appliqués par exemple à des structures minces. Ces éléments finis de faible degré, souffrent généralement du problème dit du verrouillage numérique ainsi que du verrouillage volumétrique dans les cas des matériaux incompressibles ou presque incompressibles. Cependant, l'utilisation des éléments finis volumiques classiques d'ordre supérieur permet d'éviter les phénomènes de verrouillage numérique « *locking free* » mais les calculs deviennent très coûteux, en temps de calcul et en stockage. Pour éviter les difficultés numériques des modèles éléments finis précédents, plusieurs auteurs ont proposé des modèles éléments finis volumiques de premier ordre à précision améliorée, qui utilisent les formulations mixtes ou les méthodes de déformations postulées enrichies « *Enhanced Assumed Strain* ».

En parallèle de ces travaux, un large volume de recherche a été consacré aussi au développement des éléments finis volumiques d'ordre supérieur. Comme déjà discuté ci-dessus, les développements des modèles d'ordre supérieur ont généralement l'objectif d'améliorer les modèles classiques dans les cas des maillages très distordus et pour éviter le verrouillage volumétrique « *volumetric locking* » qui peut survenir lorsque le matériau est incompressible ou presque incompressible. Par ailleurs, nous avons aussi constaté lors de cette étude bibliographique que certains modèles éléments finis volumiques avec degrés de liberté de rotation sont aussi proposés afin de répondre aux exigences croissantes de l'application, notamment les bonnes propriétés de convergence et la précision élevée.

Dans tous ces développements, l'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de verrouillage en membrane et en cisaillement, et permettre le plus souvent de réduire le coût des calculs ou bien d'améliorer la convergence des solutions approchées. Sur cette technique, il a alors été dit qu'elle pouvait entraîner l'apparition des modes parasites de type Hourglass dans les éléments finis volumiques sous-intégrés. Afin d'éliminer ces modes parasites, des différentes méthodes de stabilisation ont été proposées par plusieurs auteurs, le but étant soit d'ajouter dans la matrice de rigidité sous-intégrée des matrices de stabilisation qui viennent neutraliser les modes Hourglass, soit d'utiliser des méthodes de projection qui consistent à projeter dans un espace plus petit la condition d'incompressibilité de façon à contrôler les phénomènes de verrouillage.

Pour les structures composites stratifiées, la modélisation numérique par éléments finis volumiques ne présente toutefois d'utilité que dans les problèmes qui nécessitent la prise en compte de la distribution des contraintes inter-laminaires ainsi que la prise en compte

des endommagements spécifiques aux stratifiés telle que le délaminage et la fissure transverse. Là encore un modèle tridimensionnel peut fournir des informations dans certains cas (bord libre, plaque trouée...). L'étude bibliographique montre que relativement très peu de chercheurs se sont intéressés à la formulation de ces éléments volumiques composites surtout avec la prise en compte des champs au voisinage des interfaces. Dans la pratique, il semblerait que face aux difficultés rencontrées pour l'analyse tridimensionnelle, conduisant généralement à un large système d'équations, il soit courant d'utiliser les modèles 2D de type plaque et/ou coque. En général, la plupart des auteurs réservent la modélisation tridimensionnelle par les éléments solides tridimensionnels pour l'étude locale des champs dans les zones critiques.

En conclusion, nous avons étudié les progrès récents des éléments finis solides utilisés dans la modélisation tridimensionnelle des solides et des structures tridimensionnelles. Ce domaine a connu des progrès remarquables au cours des 20 dernières années, et un certain degré de maturité a été atteint. Cependant, ce qui est remarquable dans cette étude bibliographique, c'est qu'il y a encore des espaces pour des développements ultérieurs à la suite de l'analyse des nouveaux phénomènes et des éléments plus spécifiques sont développés pour faciliter les nouvelles applications d'ingénierie.

C'est en vue de contribuer à ces progrès que la présente étude a été menée. Elle visait précisément à développer des nouveaux éléments finis volumiques basés sur le concept SFR (Space Fiber Rotation) qui permettent de modéliser les solides et les structures tridimensionnelles. Ces éléments seront formulés non seulement dans le domaine linéaire, mais aussi dans le domaine non linéaire pour les matériaux isotropes. Des modèles orthotropes et multicouches peuvent être obtenus en étendant les modèles SFR aux structures composites stratifiées. Enfin, tous ces développements seront proposés dans les chapitres suivants de cette étude.

Chapitre 2.

Eléments finis volumiques basés sur le concept de rotation d'une fibre spatiale (modèle SFR : Space Fiber Rotation)

Sommaire

2.1. Introduction	50
2.2. Formulation variationnelle	51
2.3. Principe du modèle SFR	53
2.4. Approximation du champ des déplacements	53
2.5. Calcul des contraintes	57
2.6. Cas particulier du modèle SFR en 2D : éléments FRT et FRQ	57
2.7. Intégration numérique	58
2.7.1. Calcul des matrices élémentaires	58
2.7.2. Formules d'intégration pour l'élément SFR6	59
2.7.3. Formules d'intégration pour l'élément SFR8	60
2.7.4. Examen du rang de la matrice de rigidité élémentaire	62
2.8. Contrôle des modes parasites	62
2.8.1. Élément SFR8	62
2.8.2. Élément SFR6	66
2.9. Matrices de masse des éléments SFR	72
2.10. Modèle non conforme SFR8I avec trois modes incompatibles	73
2.11. Conclusion	75

2.1. Introduction

Depuis les premiers jours, la recherche sur le développement des nouveaux éléments finis a servi cinq principaux objectifs : (i) améliorer les performances dans les problèmes dominés par la flexion ; (ii) éviter les différents phénomènes de verrouillages (membrane, cisaillement,...) ; (iii) éviter le blocage volumétrique dans les matériaux incompressibles ou presque incompressibles ; (iv) réduire la sensibilité de l'élément à la distorsion du maillage ; et (v) développer des éléments plus efficaces avec une précision suffisante (par exemple les éléments stabilisés). Pour répondre à ces exigences, le développement des éléments volumiques de premier ordre à précision améliorée a été traditionnellement l'un des principaux objectifs de recherches d'éléments finis, car une réduction significative de l'effort de calcul peut être réalisée. À cet égard, nous avons développé une famille d'éléments finis volumiques sous-intégrés et stabilisés, pour résoudre avec plus d'efficacité les problèmes généraux de mécanique des milieux continus. En effet, ils éviteraient le

recours à des cinématiques complexes de type plaques et coques, et utilisaient des lois de comportement générales tridimensionnelles.

Ce chapitre a pour but de présenter donc le développement de nouveaux éléments finis solides dits « à valeur ajoutée » avec six degrés de liberté (3 translations et 3 rotations fictives) par nœud, pour les problèmes de mécanique des solides et des structures. Ces éléments 3D volumiques à interpolation de premier ordre sont formulés sur la base du concept de rotation d'une fibre matérielle élémentaire dans l'espace (concept SFR : Space Fiber Rotation). Le modèle SFR est une approche tridimensionnelle pour l'amélioration de la précision des éléments finis linéaires classiques (hexaèdre à 8 nœuds et prisme à 6 nœuds). En exploitant la rotation d'une fibre matérielle élémentaire dans l'espace, ce nouveau modèle crée de la valeur en enrichissant la définition du champ des déplacements qui devient quadratique, tout en maintenant le nombre de nœuds des éléments linéaires. Les éléments SFR développés améliorent la réponse des éléments volumiques classiques de premier ordre souvent délaissés à cause de la faible précision de leurs résultats. En effet, un maillage suffisamment fin est exigé pour ces éléments linéaires standards pour s'assurer de la convergence vers une solution raisonnable.

Dans un premier temps, afin de définir les formulations en déplacements adaptées aux éléments SFR, nous écrivons le principe variationnel en explicitant les formes intégrales appliquées à la théorie des solides tridimensionnels. Dans un second temps, nous adaptons le modèle SFR aux éléments finis volumiques standards. Ceci consiste en un élément prismatique à 6 nœuds, nommé le SFR6, et un élément hexaédrique à 8 nœuds, appelé le SFR8. Une version non conforme de ce dernier baptisé SFR8I sera également présenté afin d'éviter le verrouillage de Poisson. Ceci est rendu possible par l'enrichissement de la base cinématique par trois modes incompatibles. Les éléments SFR sont également sous-intégrés avec un schéma d'intégration numérique réduite afin d'améliorer l'efficacité des calculs. Outre la réduction considérable des temps de calcul, la méthode de l'intégration réduite permet de réduire certains verrouillages (membrane et cisaillement) rencontrés dans la simulation numérique par la méthode des éléments finis. Cependant, cette intégration réduite peut introduire des modes parasites associés à une énergie nulle comme les phénomènes d'Hourglass. Après l'identification de ces modes, on présentera les différentes démarches suivies pour construire les matrices de stabilisations de nos éléments SFR afin d'éliminer ces modes parasites. A la fin de ce chapitre, on présentera la méthode d'évaluation des matrices de masse des éléments volumiques SFR.

2.2. Formulation variationnelle

Considérons un corps solide élastique dans un état de petites déformations qui occupe le domaine Ω et sa frontière $\partial\Omega$ comme le montre la figure 2.1. L'équation d'équilibre mécanique pour un solide soumis à des forces volumiques \underline{f}^v s'écrit comme suit :

$$Div(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}^v = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.1)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes mécaniques.

De plus, et afin de pouvoir résoudre le problème, il faut spécifier les conditions aux limites des déplacements imposés sur $\partial\Omega_u$ et les conditions aux limites des efforts de tractions imposées sur $\partial\Omega_t$:

$$\begin{cases} u_i = U_i & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \sigma_{ij}n_j = T_i & \text{sur } \partial\Omega_t \end{cases} \quad (2.2)$$

où n_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur N normal à la frontière de solide dans la configuration initiale.

Le principe des travaux virtuels consiste à satisfaire l'équation d'équilibre (2.1) sous forme faible :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\underline{u} \cdot (\text{Div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}^v) \cdot d\Omega = 0 \quad \forall \delta\underline{u} \quad (2.3)$$

où $\delta\underline{u}$ représente un ensemble de fonctions tests (les déplacements virtuels) qui vérifient $\delta\underline{u} = 0$ sur $\partial\Omega_u$. En effectuant une intégration par parties du premier terme de cette relation, puis en appliquant le théorème de la divergence et en utilisant les relations de conditions aux limites mécaniques (2.2), on obtient une forme faible $\delta\Pi$ de l'équilibre du système définie par :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega - \left[\int_{\Omega} f_i^v \delta u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} T_i \delta u_i dS \right] = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (2.4)$$

où δW_{int} et δW_{ext} sont respectivement les travaux virtuels intérieur et extérieur. Le tenseur des déformations virtuelles $\delta\underline{\varepsilon}$ est lié avec $\delta\underline{u}$ par l'expression suivante :

$$\delta\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}}(\delta\underline{u}) + \underline{\text{grad}}^T(\delta\underline{u})) \quad (2.5)$$

A partir de l'équation (2.4), la forme faible peut être réécrite comme suit :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \left[\int_{\Omega} f_i^v \delta u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} T_i \delta u_i dS \right] = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (2.6)$$

où $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ sont respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations donnés par :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T \quad (2.7a)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (2.7b)$$

où $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$, $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$ et $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$.

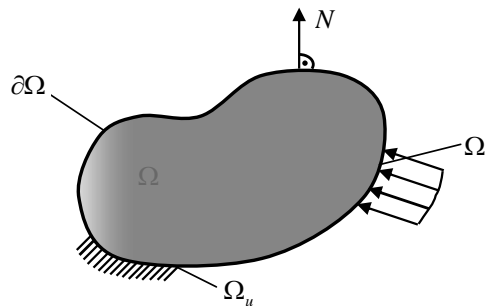


Figure 2.1. Corps solide 3D

2.3. Principe du modèle SFR

Le modèle SFR (Space Fiber Rotation) est basé sur la rotation d'une fibre matérielle élémentaire dans l'espace tridimensionnel [12, 13]. La figure 2.2 représente la géométrie nodale des éléments finis volumiques SFR6 et SFR8, animés d'une fibre spatiale nodale \underline{iq} qui, en effectuant une rotation tridimensionnelle d'angle $\underline{\theta}$, va engendrer un vecteur déplacement additionnel $f(\underline{\theta}_i, \underline{iq})$ (équation 2.8) qui viendrait enrichir le champ de déplacements \underline{u}_q du point q , classiquement utilisé pour formuler les éléments solides standards. Le champ de déplacements final prendra la forme suivante :

$$\underbrace{\underline{u}_q}_{\text{Champ de déplacements}} = \underbrace{\sum_i N_i \underline{u}_i}_{\text{Approximation Classique } \underline{u}_q} + \underbrace{f(\underline{\theta}_i, \underline{iq})}_{\text{Déplacement t additionnel}} \quad (2.8)$$

où N_i sont les fonctions d'interpolation associées à l'élément volumique classique et \underline{u}_i est le vecteur des déplacements nodaux.

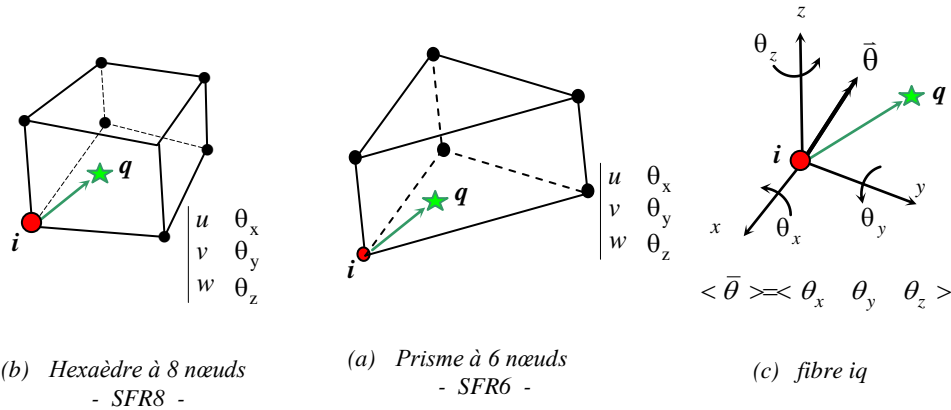


Figure 2.2. Géométrie d'une fibre spatiale élémentaire

2.4. Approximation du champ des déplacements

L'introduction du vecteur des rotations $\underline{\theta}$ de la fibre spatiale \underline{iq} (figure 2.2c) permet d'obtenir une expression enrichie du champ de déplacements \underline{u}_q d'un point quelconque q :

$$\underline{u}_q = \sum_{i=1}^{n_d} N_i \underline{u}_i + f(\underline{\theta}_i, \underline{iq}) \quad (2.9)$$

avec

$$f(\underline{\theta}_i, \underline{iq}) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i (\underline{\theta}_i \wedge \underline{iq}) \quad ; \quad \{iq\} = \begin{Bmatrix} x - x_i \\ y - y_i \\ z - z_i \end{Bmatrix} \quad (2.10a)$$

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\theta_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (2.10b)$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du point quelconque q traduisant la géométrie de l'élément volumique SFR données par les approximations suivantes :

$$x = \sum_{i=1}^{n_d} N_i x_i ; y = \sum_{i=1}^{n_d} N_i y_i ; z = \sum_{i=1}^{n_d} N_i z_i \quad (2.11)$$

avec : (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du nœud i et n_d est le nombre de nœuds par élément ($n_d = 6$ pour l'élément prismatique à 6 nœuds SFR6 et $n_d = 8$ pour l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8).

Les fonctions d'interpolation N_i associées à l'élément volumique 3D sont [16] :

- Pour l'élément hexaédrique à 8 nœuds (SFR8) :

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) ; i = 1 \text{ à } 8 \quad (2.12)$$

où $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ et $-1 \leq \zeta \leq 1$.

- Pour l'élément prismatique à 6 nœuds (SFR6) :

$$\langle N \rangle = \langle CA \quad \xi A \quad \eta A \quad CB \quad \xi B \quad \eta B \rangle \quad (2.13)$$

avec

$$A = \frac{1 - \zeta}{2} ; B = \frac{1 + \zeta}{2} ; C = 1 - \xi - \eta \quad (2.14)$$

où $\xi \geq 0, \eta \geq 0, 1 - \xi - \eta \geq 0$ et $-1 \leq \zeta \leq 1$.

Les expressions de ces fonctions de forme sont exposées plus en détails dans l'Annexe A.

En effectuant le produit vectoriel $\underline{\theta}_i \wedge \underline{iq}$, on obtient l'approximation de \underline{u}_q suivante :

$$\{u_q\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_d} \begin{Bmatrix} N_i u_i + N_i(z - z_i)\theta_{yi} - N_i(y - y_i)\theta_{zi} \\ N_i v_i - N_i(z - z_i)\theta_{xi} + N_i(x - x_i)\theta_{zi} \\ N_i w_i + N_i(y - y_i)\theta_{xi} - N_i(x - x_i)\theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

ou sous une forme matricielle :

$$\{u_q\} = [N_q] \{u_n\} ; [N_q] = \begin{bmatrix} \langle N_{ui} \rangle & & & & & \\ \dots & \langle N_{vi} \rangle & \dots & i = 1, n_d & & \\ & & \langle N_{wi} \rangle & & & \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

où

$$\begin{aligned} \langle N_{ui} \rangle &= \langle N_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_i(z - z_i) \quad -N_i(y - y_i) \rangle \\ \langle N_{vi} \rangle &= \langle 0 \quad N_i \quad 0 \quad -N_i(z - z_i) \quad 0 \quad N_i(x - x_i) \rangle \\ \langle N_{wi} \rangle &= \langle 0 \quad 0 \quad N_i \quad N_i(y - y_i) \quad -N_i(x - x_i) \quad 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\{u_n\}$ est le vecteur des degrés de liberté (ddl) nodaux contient 6 ddl (trois translations et trois rotations fictives) par nœud :

$$\langle u_n \rangle = \langle \dots \quad u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad \dots \quad i = 1, n_d \rangle \quad (2.18)$$

En élasticité linéaire, le tenseur des déformations linéarisées est donné par :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_n\} \quad (2.19a)$$

avec $[B]$ est une matrice qui relie le déplacement à la déformation, obtenue par dérivation de la matrice des fonctions de forme.

$$[B] = [L][N_q] \quad (2.19b)$$

où $[L]$ est l'opérateur différentiel tridimensionnel donné par :

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (2.19c)$$

Donc la matrice déformation-déplacement est :

$$[B] = \begin{bmatrix} \langle N_{u,x} \rangle \\ \langle N_{v,y} \rangle \\ \langle N_{w,z} \rangle \\ \langle N_{u,y} \rangle + \langle N_{v,x} \rangle \\ \langle N_{u,z} \rangle + \langle N_{w,x} \rangle \\ \langle N_{v,z} \rangle + \langle N_{w,y} \rangle \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

La matrice $[B]$ est de dimension $6 \times (6 \times n_d)$: 6×36 pour l'élément SFR6 et 6×48 pour l'élément SFR8. Les dérivées des fonctions de forme sont obtenues par les relations standards suivantes :

$$\begin{aligned} \langle N_{\alpha,x} \rangle &= j_{11} \langle N_{\alpha,\xi} \rangle + j_{12} \langle N_{\alpha,\eta} \rangle + j_{13} \langle N_{\alpha,\zeta} \rangle \\ \langle N_{\alpha,y} \rangle &= j_{21} \langle N_{\alpha,\xi} \rangle + j_{22} \langle N_{\alpha,\eta} \rangle + j_{23} \langle N_{\alpha,\zeta} \rangle \quad ; \quad \alpha \equiv u, v, w \\ \langle N_{\alpha,z} \rangle &= j_{31} \langle N_{\alpha,\xi} \rangle + j_{32} \langle N_{\alpha,\eta} \rangle + j_{33} \langle N_{\alpha,\zeta} \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

où j_{lk} sont les termes de la matrice Jacobienne inverse $[j] = [J]^{-1}$.

La matrice Jacobienne (3×3) de la transformation iso-paramétrique peut être exprimée à partir de la définition de coordonnées de l'équation (2.11) comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Les dérivées des termes associés aux degrés de liberté additionnels θ_x , θ_y et θ_z par rapport à x , y et z sont :

$$\begin{cases} N_{u,x} \\ N_{u,y} \\ N_{u,z} \\ N_{v,x} \\ N_{v,y} \\ N_{v,z} \\ N_{w,x} \\ N_{w,y} \\ N_{w,z} \end{cases} = \begin{cases} 0 & N_{i,x}(z-z_i) & -N_{i,x}(y-y_i) \\ 0 & N_{i,y}(z-z_i) & -N_{i,y}(y-y_i) - N_i \\ 0 & N_{i,z}(z-z_i) + N_i & -N_{i,z}(y-y_i) \\ -N_{i,x}(z-z_i) & 0 & N_{i,x}(x-x_i) + N_i \\ \dots & -N_{i,y}(z-z_i) & 0 & N_{i,y}(x-x_i) \quad \dots i = 1, n_d \\ -N_{i,z}(z-z_i) - N_i & 0 & N_{i,z}(x-x_i) \\ N_{i,x}(y-y_i) & -N_{i,x}(x-x_i) - N_i & 0 \\ N_{i,y}(y-y_i) + N_i & -N_{i,x}(x-x_i) & 0 \\ N_{i,z}(y-y_i) & -N_{i,x}(x-x_i) & 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Les degrés de liberté additionnels θ_x , θ_y et θ_z associés à la rotation spatiale de la fibre iq auront pour conséquence un enrichissement du champ des déformations, rendant ainsi les éléments basés sur le modèle SFR précis sans augmenter le nombre de nœuds.

L'énergie potentielle totale Π pour un corps solide comportant $Nelt$ éléments et Nbn nœuds est la différence entre l'énergie de déformation totale et le travail fourni par les forces externes :

$$\Pi = \sum_{e=1}^{Nelt} \Lambda^{(e)} - \sum_{j=1}^{Nbn} F_j u_j \quad (2.24)$$

L'équilibre d'un corps solide se réalise lorsque cette énergie est minimale :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{e=1}^{Nelt} \Lambda^{(e)} - \frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{Nbn} F_j u_j = 0 \quad (2.25)$$

En s'appliquant ce principe à un élément quelconque :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Pi^e}{\{\delta u_n\}} &= \left[\int_{V^e} [B]^T [H] [B] dV^e \right] \{u_n\} - \left\{ \int_{V^e} [N_q]^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N_q]^T \{T\} dS^e \right\} \\ &= [K^e] \{u_n\} - \{F^e\} = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec $[N_q]$ est la matrice qui relie le vecteur de déplacement au point q et le vecteur des degrés de liberté nodaux $\{u_n\}$, $\{F^e\}$ est le vecteur des forces nodales et $[K^e]$ est la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [H] [B] dV^e \quad (2.27)$$

$$\{F^e\} = \int_{V^e} [N_q]^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N_q]^T \{T\} dS^e \quad (2.28)$$

La matrice d'élasticité 3D $[H]$, de dimension 6×6 , s'écrit pour un matériau homogène et isotrope :

$$[H] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.29a)$$

Les deux coefficients de Lamé G et λ s'expriment en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.29b)$$

2.5. Calcul des contraintes

Les composantes du tenseur des contraintes au point q sont déduites de la loi de comportement généralisée de Hooke utilisant la matrice d'élasticité $[H]$ (équation 2.29) :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (2.30a)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_n\} \quad (2.30b)$$

$$\{\sigma\} = [H][B]\{u_n\} \quad (2.30c)$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle \quad (2.30d)$$

Le fait de considérer une approximation quadratique du champ \underline{u}_q (équation 2.15), induite par la fibre spatiale, a pour conséquence une évaluation plus précise des contraintes, contrairement aux éléments classiques (hexaédrique à 8 nœuds et prismatique à 6 nœuds).

2.6. Cas particulier du modèle SFR en 2D : éléments FRT et FRQ

Le modèle SFR (Space Fiber Rotation) généralise celui des éléments membranaires 2D utilisant la rotation d'une fibre plane (modèle : Fibre Plane Rotatoire) proposé par Ayad dans ses travaux de thèse [10]. Ce modèle 2D a été décrit à travers deux éléments membranaires baptisés FRQ et FRT (Fiber Rotation Quadrilateral et Triangular). L'élément plan à 4 nœuds FRQ est donc un cas particulier de l'élément présent SFR8 et l'élément triangulaire plan à 3 nœuds FRT est un cas 2D de l'élément prismatique à 6 nœuds SFR6. Il suffit de considérer la fibre spatiale $\underline{i}q$ (figure 2.2) en rotation dans le plan xy . Le vecteur des rotations $\underline{\theta}$ s'identifie à $\theta_z \bar{k}$, et le point quelconque q devient un point p du plan xy . L'expression du champ des déplacements \underline{u}_q (équation 2.15) devient identique à celle des éléments membranaires FRQ et FRT [10] :

$$\bar{u}_p = \sum_{i=1}^{n_{dp}} N_i \left(\bar{u}_i + \theta_{zi} \bar{k} \wedge \bar{i}p \right) ; \quad \bar{i}p = \bar{x}_p - \bar{x}_i \quad (2.31a)$$

où \bar{k} est le vecteur unitaire selon l'axe z . Le vecteur des déplacements est :

$$\left\{ \begin{matrix} u_p \\ v \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^{n_{dp}} \left\{ \begin{matrix} N_i u_i - N_i (y - y_i) \theta_{zi} \\ N_i v_i + N_i (x - x_i) \theta_{zi} \end{matrix} \right\} \quad (2.31b)$$

où n_{dp} : est le nombre de nœuds par élément plan ($n_{dp} = 3$ pour l'élément triangulaire FRT et $n_{dp} = 4$ pour l'élément quadrilatère FRQ).

Le concept de « Fibre Plane Rotatoire » (en anglais, *Plane Fiber Rotation*) est décrit par la rotation d'une fibre quelconque ip (i est un nœud de l'élément plan) autour du vecteur unitaire \bar{k} . Ceci est donc différent de celui de « *Vertex Rotation* » qui fût introduit par Allman [3] et repris par les autres [6, 8, 225, 226] pour formuler leur modèles. Il est aussi différent du concept « *Drilling Rotation* » dû à Bergan *et al.* [5] et utilisé dans les références [4, 227].

2.7. Intégration numérique

Le Jacobien de la transformation géométrique permet de passer de l'intégration d'une fonction $f(x, y, z)$ définie sur l'élément réel à l'intégration sur l'élément de référence :

$$\int_{V_e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{V_{ref}} f(\xi, \eta, \zeta) DetJ d\xi d\eta d\zeta \quad (2.32)$$

Les formules d'intégration numérique permettent d'évaluer l'intégrale sous la forme générale suivante :

$$\int_{V_{ref}} f(\xi, \eta, \zeta) DetJ d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) DetJ(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) w_i w_j w_k \quad (2.33)$$

où $N_{pi} = m^3$ représente le nombre de points d'intégration sur l'élément de référence. m représente le nombre de points d'intégration dans les directions ξ ou η ou ζ . On a supposé que le nombre de points d'intégration était le même dans chaque direction. Ceci n'est évidemment pas obligatoire et il peut être avantageux, dans certains cas, d'utiliser des nombres de points différents dans chacune de directions. Les ξ_i, η_j et ζ_k sont les coordonnées paramétriques des points d'intégration et w_i, w_j et w_k sont les poids d'intégration.

Les schémas d'intégration les plus utilisés dans la méthode des éléments finis sont celles de Gauss pour les problèmes à une dimension (élément de référence barre), deux dimensions (élément de référence carré), trois dimensions (éléments de référence cubique) et celle de Hammer pour les éléments 2D triangulaires et les éléments volumiques tétraédriques [16]. Pour les éléments volumiques prismatiques un schéma d'intégration de Gauss-Hammer est utilisé.

2.7.1. Calcul des matrices élémentaires

Pour obtenir la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des charges (équations 2.27 et 2.28 respectivement), l'intégration numérique sur l'élément de référence est nécessaire. La matrice de rigidité élémentaire exprimée dans le repère paramétrique (ξ, η, ζ) a donc l'expression suivante :

- Pour l'élément hexaédrique à 8 nœuds (SFR8) :

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_{V^e} [B]^T [H][B] dV^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^T [H][B] DetJ)_{\xi, \eta, \zeta} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m w_i w_j w_k ([B]^T [H][B] DetJ)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \end{aligned} \quad (2.34a)$$

- Pour l'élément prismatique à 6 nœuds (SFR6) :

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_{V^e} [B]^T [H][B] dV^e = \int_{-1}^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{\eta} ([B]^T [H][B] DetJ)_{\xi, \eta, \zeta} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^{N_{pi}} w_i ([B]^T [H][B] DetJ)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \end{aligned} \quad (2.34b)$$

Le vecteur des forces (équivalentes) élémentaires dues aux forces de volume et de surface est évalué avec une démarche similaire à celle suivie pour la matrice de rigidité élémentaire, le changement de base s'effectuant toujours via le déterminant du Jacobien.

$$\{F^e\} = \int_{V^e} [N_q]^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N_q]^T \{T\} dS^e \quad (2.35a)$$

- Pour l'élément SFR8 :

$$\{F^e\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m w_i ([N_q]^T \{f_v\} DetJ)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j ([N_q]^T \{T\} DetJ_{S^e})_{\xi_i, \eta_i} \quad (2.35b)$$

- Pour l'élément SFR6 :

$$\{F^e\} = \sum_{i=1}^{N_{pi}} w_i ([N_q]^T \{f_v\} DetJ)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} + \sum_{i=1}^{N_{pi}} w_i ([N_q]^T \{T\} DetJ_{S^e})_{\xi_i, \eta_i} \quad (2.35c)$$

2.7.2. Formules d'intégration pour l'élément SFR6

Pour les éléments archétypes prismatiques droit, la règle d'intégration numérique selon les directions ξ et η , valable pour les triangles, doit être complétée pour la direction ζ par une des formules de quadrature de Gauss unidimensionnelle. Les schémas d'intégration numérique des éléments volumiques, linéaires et quadratiques, de type prismatique sont donnés au tableau 2.1 [228] et illustrés dans la figure 2.3. Dans l'expression du champ des déplacements \underline{u}_q (équation 2.15), l'approximation de la partie correspondante à la rotation de la fibre spatiale \underline{i}_q est quadratique en ξ , η et ζ . Une intégration numérique à 3×3 points de Gauss-Hammer (PGH) est par conséquent nécessaire pour évaluer exactement la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$. Nous avons constaté qu'une intégration réduite à 1×2 points (un point dans le plan $\xi - \eta$ et deux suivant la direction ζ) rend l'élément SFR6 particulièrement efficace, sans toutes fois nuire aux résultats numériques obtenus.

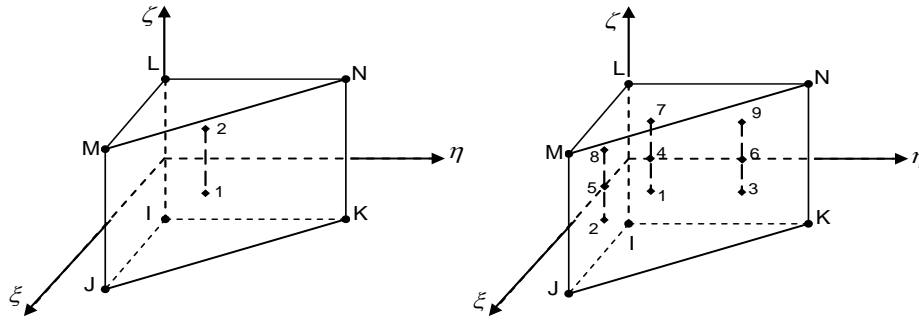


Figure 2.3. Elément de référence SFR6 et ses points d'intégration (1×2 et 3×3 PGH)

Ordres	Schémas d'intégration	Cordonnées (ξ_i, η_i, ζ_i)	Nombre de points	Coefficients de pondération ω_i
Linéaire	1×2	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	2	$\frac{1}{2}$
		$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	2	
		$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$
Quadratique	3×3	$\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	2	
		$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0\right)$	3	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
		$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0\right)$		
		$\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 0\right)$		

Tableau 2.1. Formules d'intégration numérique de Gauss-Hammer pour des prismes

2.7.3. Formules d'intégration pour l'élément SFR8

Une intégration numérique à 3×3×3 points de Gauss (PG) est par conséquent nécessaire pour évaluer exactement la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ de l'élément hexaédrique SFR8. Nous avons constaté qu'une intégration réduite à 2×2×2 points de Gauss (figure 2.4) rend l'élément particulièrement efficace. Les schémas d'intégration numérique des éléments hexaédriques sont donnés dans le tableau 2.2. L'intégration réduite qui capture les termes additionnels apportés par les éléments SFR est souvent considérée comme optimale car elle préserve le taux de convergence et leur coût de calcul faible.

À noter aussi qu'un schéma d'intégration réduite, initié par les contributions de Zienkiewicz *et al.* [229], Hughes *et al.* [230] et Hughes [178], est utilisé dans les éléments volumiques SFR afin d'améliorer l'efficacité des calculs, d'une part, et pour atténuer certains phénomènes de verrouillage en membrane et cisaillement, d'autre part. En contrepartie de la qualité des éléments volumiques sous-intégrés, il est nécessaire de vérifier que

ces éléments passent les Patch tests 3D. En effet, l'intégration réduite conduit à l'apparition de modes parasites à énergie nulle (en anglais, *spurious modes*) qu'il faut les contrôler.

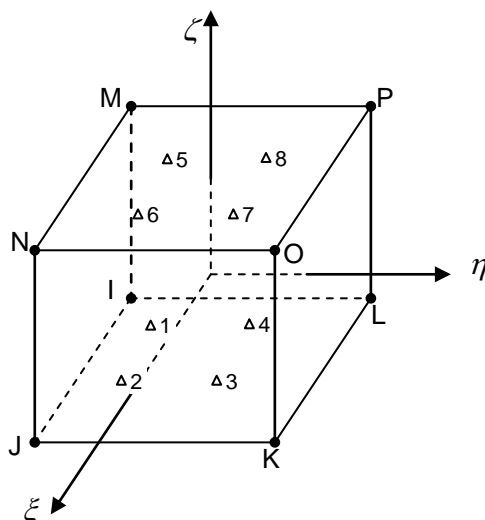


Figure 2.4. Elément de référence SFR8 et ses points d'intégration (2x2x2 PG)

Ordres	Schémas d'intégration	Coordonnées (ξ_i, η_i, ζ_i)	Nombre de points	Coefficients de pondération ω_i
Linéaire	1x1x1	(0, 0, 0)	1	8
Quadratique	2x2x2	$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	8	1
		$\left(\pm \sqrt{\frac{3}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	8	$\left(\frac{5}{9}\right)^3$
Cubique	3x3x3	$\left(0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	12	$\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^2$
		$\left(\pm \sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$		
		$\left(\pm \sqrt{\frac{3}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	6	$\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)$
		$\left(0, 0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$		
	(0, 0, 0)	1	$\left(\frac{8}{9}\right)^3$	

Tableau 2.2. Formules d'intégration numérique de Gauss pour des hexaèdres

2.7.4. Examen du rang de la matrice de rigidité élémentaire

La déficience dans le rang de la matrice de rigidité élémentaire se traduit par des oscillations irréalistes du maillage conduisant à des solutions qui explosent pour certaines conditions aux limites. L'examen du rang de la matrice de rigidité élémentaire intégrée exactement ou sous-intégrée a révélé l'existence de modes parasites pour les deux éléments volumiques SFR :

- ♦ Élément SFR6 :
Intégration exacte (3×3 PGH) : 5 modes parasites
Intégration réduite (1×2 PGH) : 18 modes parasites
- ♦ Élément SFR8 :
Intégration exacte ($3 \times 3 \times 3$ PG) : 6 modes parasites
Intégration réduite ($2 \times 2 \times 2$ PG) : 12 modes parasites

Ces éléments nécessitent donc des techniques dites de stabilisation réalisées par l'ajout des matrices fictives à la matrice de rigidité élémentaire. Ce sera le sujet de la section suivante qui traitera en détail ces matrices fictives adaptées à notre formulation des éléments volumiques SFR.

2.8. Contrôle des modes parasites

2.8.1. Élément SFR8

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément SFR8 possède des modes parasites à énergie nulle qui peuvent être contrôlés par l'introduction des matrices de pénalités. Une matrice de rigidité élémentaire intégrée par un schéma d'intégration exacte ($3 \times 3 \times 3$ PG) possède 6 modes parasites et celle intégrée par un schéma d'intégration réduite ($2 \times 2 \times 2$ PG) possède 12 modes parasites. Après une étude attentive des modes parasites pour un seul élément hexaédrique, il est facile d'identifier que les 6 premiers modes parasites cinématiques sont associés à des rotations égales (figure 2.5) et les 6 autres modes de sablier ou modes d'Hourglass (figure 2.6) sont une conséquence directe de l'intégration réduite (ils correspondent à une énergie nulle alors qu'ils induisent une déformation non nulle). Ces modes peuvent être éliminés par des matrices stabilisatrices, dans chacune de 6 faces, semblables à celle proposée dans la référence [7] pour les éléments membranaires 2D et repris par les auteurs [47, 52] pour stabiliser leur modèles volumiques 3D. Deux matrices de pénalités sont développées par face, l'une pour contrôler le mode parasite de rotation égale, et une autre pour contrôler le mode parasite Hourglass. Ces matrices de pénalités calculées pour chaque face définissent un mode de contrôle local (figure 2.7) des modes parasites.

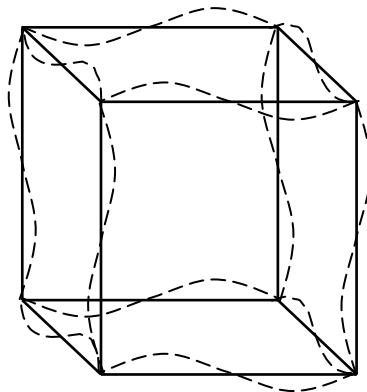


Figure 2.5. Modes parasites cinématiques pour un élément hexaédrique

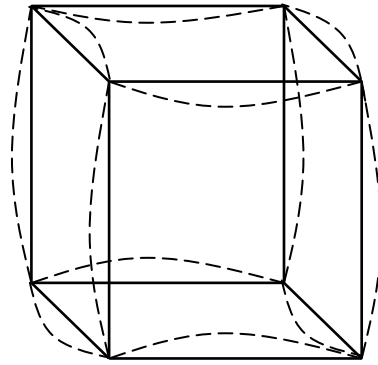


Figure 2.6. Modes parasites d'Hourglass pour un élément hexaédrique

2.8.1.1. Contrôle des modes parasites cinématiques

La démarche suivie pour stabiliser l'élément SFR8 est celle de MacNeal [7] et repris par Yunus *et al.* [47] pour stabiliser l'élément hexaédrique à 8 nœuds HEX8R avec ddl de rotation. La méthode développée pour contrôler les 6 premiers modes cinématiques associés à des rotations égales consiste à introduire une matrice de pénalité à chaque face de l'élément hexaédrique (figure 2.7).

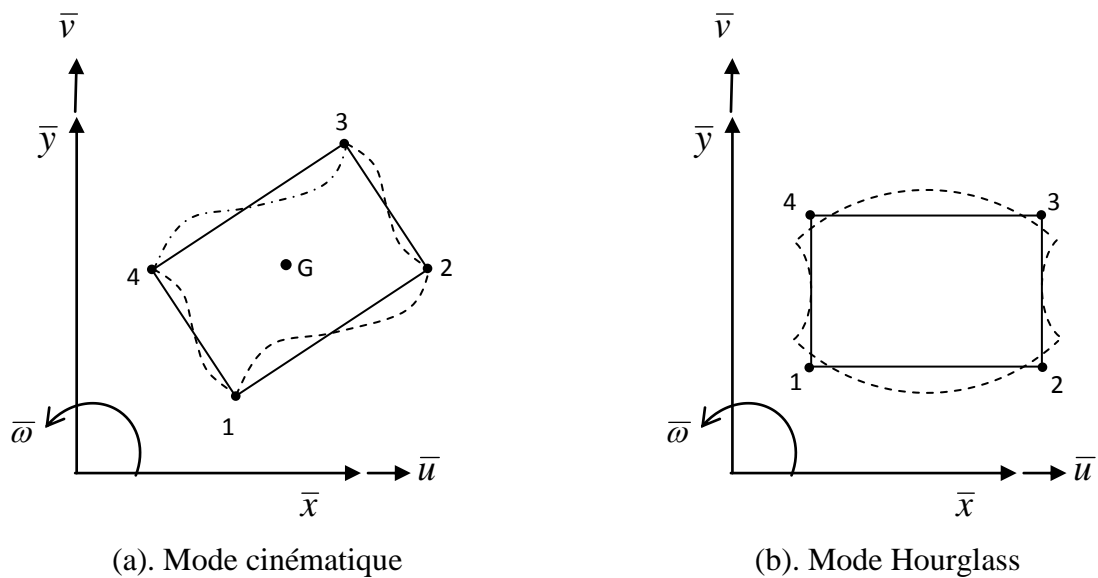


Figure 2.7. Modes parasites dans une face de l'élément hexaèdre

On considère une face de l'hexaèdre liée à un repère local plan $\bar{x} - \bar{y}$ (figure 2.7a). La rotation relative $\bar{\theta}_r$ est la différence entre la moyenne des rotations nodales $\bar{\omega}_i$ et la rotation $\bar{\theta}_0$ de l'élasticité plane [47].

$$\bar{\theta}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\omega}_i - \bar{\theta}_0) \quad (2.36)$$

Avec :

n : Nombre de nœuds, égal 4 pour une face quadrilatérale.

$\bar{\omega}_i$: Rotation autour de la normal du nœud i .

Dans l'équation (2.36), $\bar{\theta}_0$ est calculée au centre de gravité de l'élément quadrilatéral à 4 nœuds, utilisant les fonctions d'interpolation standards linéaires de l'élément Q4.

$$\bar{\theta}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \quad (2.37)$$

\bar{u}, \bar{v} : Translations dans le plan dans le repère local.

\bar{x}, \bar{y} : Repère cartésien local d'une face plane.

On peut écrire l'équation (2.36) en fonction des variables nodales u_i, v_i et ω_i sous la forme suivante :

$$\bar{\theta}_r = \langle Q \rangle \{ \bar{\delta} \} \quad (2.38)$$

$\langle Q \rangle$: Vecteur des rotations relatives dans le repère local lié à une face.

$\{ \bar{\delta} \}$: Vecteur des variables nodales d'une face dans le repère local.

avec :

$$\{ \bar{\delta} \} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\omega}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_4 \\ \bar{v}_4 \\ \bar{\omega}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

L'énergie de pénalité P_1 est :

$$P_1 = (\alpha_1 V G) \langle \bar{\delta} \rangle \langle Q \rangle \langle Q \rangle \{ \bar{\delta} \} \quad (2.40)$$

avec : $\alpha_1 = 10^{-6}$ [47], G : module de cisaillement et V : volume de l'élément hexaédrique.

La relation entre les variables nodales dans le repère local d'une face $\{ \bar{\delta}_i \}$ et les variables nodales dans le repère global $\{ \delta_i \}$ pour le nœud i est :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\omega}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

où l_i, m_i, n_i sont les cosinus directeurs du repère local donnés à l'Annexe B, et $u_i, v_i, w_i, \dots, \theta_{zi}$ sont les variables globales du nœud i . L'équation (2.41) s'écrit ainsi :

$$\{ \bar{\delta}_i \} = [\lambda] \{ \delta_i \} \quad (2.42)$$

Alors la relation entre les variables locales $\{\bar{\delta}\}$ d'une face et les variables globales $\{\delta\}$ est :

$$\{\bar{\delta}\} = \begin{bmatrix} [\lambda] & & & \\ & [\lambda] & & \\ & & [\lambda] & \\ & & & [\lambda] \end{bmatrix} \{\delta\} = [\tau] \{\delta\} \quad (2.43)$$

L'énergie de pénalité s'écrit après substitution de l'équation (2.43) dans l'équation (2.40) :

$$P_1 = (\alpha_1 VG) \langle \delta \rangle [\tau]^T \{Q\} \langle Q \rangle [\tau] \{\delta\} \quad (2.44)$$

La matrice stabilisatrice s'écrit :

$$[K_r] = (\alpha_1 VG) [\tau]^T \{Q\} \langle Q \rangle [\tau] \quad (2.45)$$

L'élément hexaèdre possède 6 faces, donc après l'assemblage des matrices stabilisatrices de chaque face de l'élément SFR8 nous obtenons une matrice élémentaire intégrée exactement $[K_{stab}]_{J.E}^e$ stable de dimension 48×48 et de rang égal 42 (6 modes associés aux mouvements de corps rigide, soit en 3D, 3 translations et 3 rotations). La matrice de rigidité élémentaire stabilisée est :

$$[K_{stab}]_{J.E}^e = [K^e] + [K_r] \quad (2.46)$$

2.8.1.2. Contrôle des modes de « Hourglass »

L'utilisation de l'intégration réduite ($2 \times 2 \times 2$ PG) provoque d'autres modes parasites. Ces modes sont les six modes de Hourglass (une des formes de ces modes est illustrée dans la figure 2.7b). Une technique de stabilisation inspirée de l'approche proposée par Yunus *et al.* [47] est utilisée pour éliminer les modes parasites de Hourglass. Elle consiste à ajouter une matrice de pénalité pour chaque face de l'élément hexaèdre. La configuration du mode de n'importe quelle face du parallélépipède droit est écrit par :

$$\bar{\theta}_h = (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_4) \quad (2.47)$$

$$= \langle 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \rangle \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\omega}_1 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\bar{\theta}_h = [H] \{\bar{\delta}\} \quad (2.49)$$

L'énergie de pénalité P_2 associée à une face est :

$$P_2 = (\alpha_2 VG) \langle \bar{\delta} \rangle [H] \langle H \rangle \{\bar{\delta}\} \quad (2.50)$$

avec : $\alpha_2 = 10^{-3}$ [47].

L'énergie de pénalité s'écrit après substitution de l'équation (2.43) dans l'équation (2.50) :

$$P_2 = (\alpha_2 VG) \langle \delta \rangle [\tau]^T \{H\} \langle H \rangle [\tau] \{\delta\} \quad (2.51)$$

La matrice stabilisatrice s'écrit :

$$[K_h] = (\alpha_2 VG) [\tau]^T \{H\} \langle H \rangle [\tau] \quad (2.52)$$

Le rang de la matrice $[K_h]$ égal un (1).

L'élément hexaèdre possède 6 faces. Après l'assemblage des matrices stabilisatrices de chaque face de l'élément SFR8 nous obtenons une matrice élémentaire sous-intégrée $[K_{stab}]_{I.R}^e$ stable de dimension 48×48 et de rang égal 42. La matrice de rigidité finale stabilisée est :

$$[K_{stab}]_{I.R}^e = [K^e] + [K_r] + [K_h] \quad (2.53)$$

Les méthodes de contrôle des modes parasites ont été vérifiées numériquement pour les problèmes linéaires et ont été jugées suffisantes pour éliminer tous les modes parasites. Un ensemble de tests numériques linéaires statique et dynamique est effectuée pour sélectionner les paramètres α_1 et α_2 . Il est observé qu'un large éventail de valeurs de paramètres de pénalité peut être utilisé sans effets indésirables significatifs sur la précision de la solution numérique.

2.8.2. Élément SFR6

La matrice de rigidité de l'élément SFR6 dispose de 18 degrés de liberté de rotation fictive. L'analyse des propriétés de la matrice de rigidité élémentaire indique qu'elle a des modes à énergie nulle outre les six modes de corps rigides. Ces modes parasites peuvent être contrôlés par l'introduction des matrices de pénalités. L'utilisation de l'intégration exacte avec 3×3 points [231] entraîne 5 modes parasites dans la matrice de rigidité, et 18 modes si la matrice est intégrée avec un schéma d'intégration réduite de 1×2 points [231]. La technique de stabilisation pour l'élément SFR6 est désignée pour éliminer ces modes indésirables. Cette technique est inspirée des références [47, 52] basée sur l'addition des matrices de pénalités sur chaque face de l'élément. Les 5 premiers modes parasites cinématiques associés à des rotations égales (figure 2.8) et les 3 modes d'Hourglass (figure 2.9), peuvent facilement être contrôlés à l'aide d'une matrice de pénalité similaire à celle proposée par MacNeal and Harder [7] pour les 5 faces de l'élément prismatique. Les 10 autres modes peuvent être éliminés en utilisant la matrice fictive due à Batoz et Dhatt [18] et Zienkiewicz [232]. Trois matrices de pénalités sont développées par face, l'une pour contrôler le mode parasite cinématique, la deuxième pour contrôler le mode parasite d'Hourglass et la troisième pour contrôler les rotations fictives. Ces matrices de pénalités calculées pour chaque face définissent un contrôle de mode parasite local.

Pour introduire les matrices de pénalités on considère une face de l'élément prismatique liée au plan local $\bar{x} - \bar{y}$ (figure 2.10).

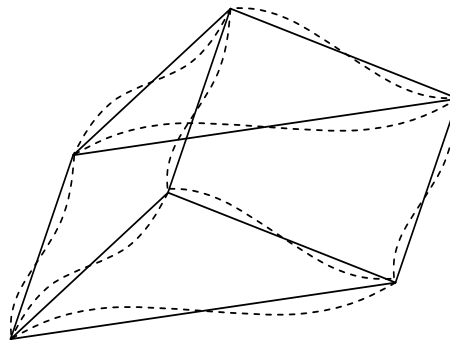


Figure 2.8. Modes parasites cinématiques pour un élément prismatique

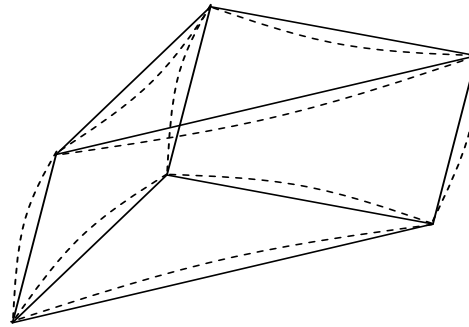
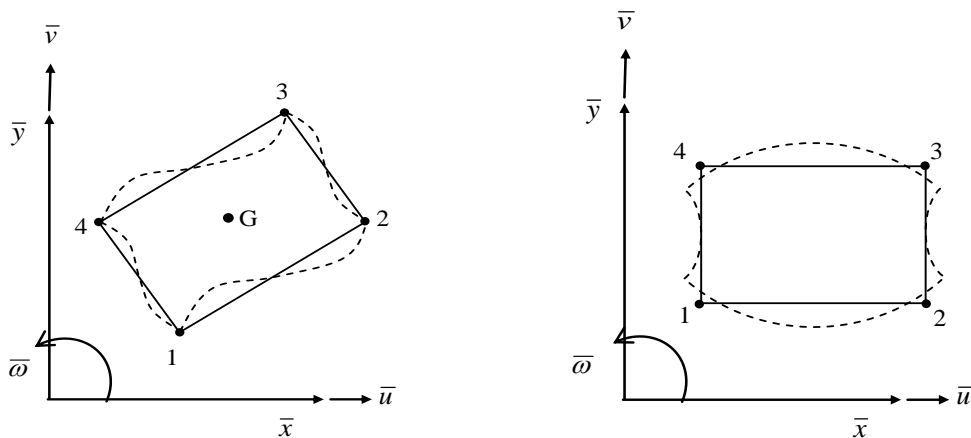


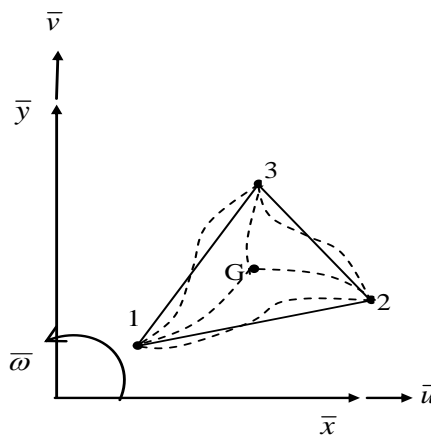
Figure 2.9. Modes parasites de Hourglass pour un élément prismatique

2.8.2.1. Contrôle des modes parasites cinématiques

Les 5 modes parasites cinématiques pour lesquels les déplacements s'annulent et les rotations ont la même valeur sont illustrés dans la figure 2.8. Pour faire disparaître l'effet de ces modes parasites, des méthodes de stabilisation ont été proposées par Yunus *et al.* [47] et Pawlak *et al.* [52], où le but étant d'ajouter dans la matrice de rigidité élémentaire une matrice supplémentaire de stabilisation de rang unité calculée pour chaque face de prisme (figures 2.10a et 2.10c).



(a). Mode cinématique (face quadrilatérale) (b). Mode de Hourglass (face quadrilatérale)



(c). Mode cinématique (face triangulaire)

Figure 2.10. Modes parasites dans une face de l'élément prismatique

La rotation relative $\bar{\theta}_r$ est la différence entre la moyenne des rotations hors plan nodales $\bar{\omega}_i$ et la rotation vraie $\bar{\theta}_0$ de l'élasticité plane calculée au centre de gravité de l'élément plan, soit :

$$\bar{\theta}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\omega}_i - \bar{\theta}_0) \quad (2.54)$$

avec n est le nombre des nœuds ($n = 3$ pour la face triangulaire et $n = 4$ pour la face quadrilatérale).

$$\bar{\theta}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \quad (2.55)$$

avec \bar{u}, \bar{v} : les translations dans le plan (\bar{x}, \bar{y}) .

La rotation relative s'écrit après substitution de l'équation (2.55) dans l'équation (2.54) :

$$\bar{\theta}_r = \langle Q \rangle \{ \bar{\delta} \} \quad (2.56)$$

avec $\{ \bar{\delta} \} = \{ \bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\omega}_i \}^T$ sont les variables nodales d'une face dans le repère local et $\langle Q \rangle$ est le vecteur des rotations relatives qui s'écrit par exemple pour la face triangulaire :

$$\langle Q \rangle = \left\langle -\frac{\bar{x}_{32}}{4A} \quad -\frac{\bar{y}_{32}}{4A} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{\bar{x}_{31}}{4A} \quad \frac{\bar{y}_{31}}{4A} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{\bar{x}_{21}}{4A} \quad -\frac{\bar{y}_{21}}{4A} \quad -\frac{1}{3} \right\rangle \quad (2.57)$$

A : surface du triangle.

L'énergie de pénalité P_1 est donnée par :

$$P_1 = (\alpha_1 V G) \langle \bar{\delta} \rangle \langle Q \rangle \langle Q \rangle \{ \bar{\delta} \} \quad (2.58)$$

G : module de cisaillement ; V : volume de l'élément prismatique

α_1 : constante adimensionnelle ($= 10^{-6}$ dans les références [7, 47, 52]).

Les déplacements et les rotations dans le repère global $u_i, v_i, w_i, \dots, \theta_{zi}$ sont reliés aux quantités locales par :

$$\{ \bar{\delta}_i \} = [T] \{ \delta_i \} \quad (2.59)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\omega}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

$u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$: sont les variables nodales du nœud i dans le repère global.

Soit $\{ \delta_i \}$ les variables nodales d'une face dans le repère global :

$$\langle \delta \rangle = \langle \dots \quad u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad \dots \quad i=1,6 \rangle \quad (2.61)$$

Nous avons, en utilisant les équations (2.59), (2.60) et (2.61) :

$$\{\bar{\delta}\} = [\tau]\{\delta\} \quad (2.62)$$

où $\{\bar{\delta}_i\}$ sont les variables nodales d'une face dans le repère local.

$$[\tau] = \begin{bmatrix} [T] & & & \\ & [T] & & \\ & & [T] & \\ & & & [T] \end{bmatrix} \text{ pour une face quadrilatérale}$$

$$[\tau] = \begin{bmatrix} [T] & & \\ & [T] & \\ & & [T] \end{bmatrix} \text{ pour une face triangulaire.}$$

La relation (2.62) permet de définir l'énergie de pénalité (2.58) dans le repère global :

$$\begin{aligned} P_1 &= (\alpha_1 VG) \langle \delta \rangle [\tau]^T \{Q\} \langle Q \rangle [\tau] \{\delta\} \\ &= \langle \delta \rangle [K_r] \{\delta\} \end{aligned} \quad (2.63)$$

avec :

$$[K_r] = (\alpha_1 VG) [\tau]^T \{Q\} \langle Q \rangle [\tau] \quad (2.64)$$

La matrice de pénalité $[K_r]$ est ajoutée dans la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$, d'où une matrice résultante ne contienne pas des modes parasites cinématiques. Il est clair que l'élément SFR6 ne contient pas des modes parasites si la matrice de rigidité élémentaire est intégrée exactement avec 3×3 points.

2.8.2.2. Contrôle des modes de « Hourglass »

L'utilisation de l'intégration réduite (1×2 points) produit des modes parasites (figure 2.10b) appelés « Hourglass » par Flanagan and Belytschko [180]. Les modes de Hourglass sont des modes cinématiques qui sont dus à la sous-intégration et sont associés à une énergie nulle alors qu'ils induisent une déformation non nulle. La méthode développée premièrement par MacNeal et Harder [7] et par la suite utilisée par Yunus *et al.* [47] est adoptée ici pour les trois faces quadrilatérales de l'élément prismatique pour contrôler les 3 modes parasites. Pour certain maillage d'éléments finis ces modes peuvent disparaître après assemblage de plusieurs éléments et l'application des conditions aux limites.

Le mode de configuration pour la face quadrilatérale de l'élément prismatique s'écrit :

$$\bar{\theta}_h = (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_4) \quad (2.65a)$$

$$\bar{\theta}_h = \langle 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \rangle \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\omega}_1 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.65b)$$

$$\bar{\theta}_h = \langle H \rangle \{\bar{\delta}\} \quad (2.66)$$

L'énergie de pénalité associée à une face quadrilatérale est :

$$P_2 = (\alpha_2 VG) \langle \bar{\delta} \rangle \{ H \} \langle H \rangle \{ \bar{\delta} \} \quad (2.67)$$

avec α_2 est un coefficient, sans dimension, petit par rapport à 1 ($=10^{-3}$, dans les références [7, 47]).

Utilisant la relation de transformation (2.62), l'énergie de pénalité s'écrit comme suit :

$$P_2 = (\alpha_2 VG) \langle \delta \rangle [\tau_q]^T \{ H \} \langle H \rangle [\tau_q] \{ \delta \} = \langle \delta \rangle [K_h] \{ \delta \} \quad (2.68)$$

où

$$[K_h] = (\alpha_2 VG) [\tau_q]^T \{ H \} \langle H \rangle [\tau_q] \quad (2.69)$$

La matrice de pénalité $[K_h]$ pour les modes de Hourglass est ajoutée à la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ et la matrice obtenue ne contient pas des modes parasites de Hourglass.

2.8.2.3. Matrice angulaire fictive

La matrice angulaire fictive est proposée par Zienkiewicz [232] et aussi utilisée par Batoz et Dhett [18] pour éviter le problème de singularité de la matrice de rigidité élémentaire. Cette matrice supplémentaire de rang deux permet d'éliminer les 10 autres modes parasites (deux par face). Elle est calculée dans le repère local de chaque face de l'élément prismatique.

L'énergie de pénalité associée à une face liée au plan (\bar{x}, \bar{y}) est :

$$P_3 = \alpha_3 C \int_A (\bar{\omega}_{,x}^* \cdot \bar{\omega}_{,x} + \bar{\omega}_{,y}^* \cdot \bar{\omega}_{,y}) dA = \langle \bar{\omega}_n^* \rangle [K_{\bar{\omega}}] \{ \bar{\omega}_n \} \quad (2.70)$$

avec $[K_{\bar{\omega}}]$ est la matrice angulaire fictive associée aux variables locales $\bar{\omega}_i$.

où $\{ \bar{\omega}_n \} = \{ \bar{\omega}_1 \quad \bar{\omega}_2 \quad \bar{\omega}_3 \}^T$ pour la face triangulaire et $\{ \bar{\omega}_n \} = \{ \bar{\omega}_1 \quad \bar{\omega}_2 \quad \bar{\omega}_3 \quad \bar{\omega}_4 \}^T$ pour la face quadrilatérale. L'exposant (*) signifie que la variable $\bar{\omega}_n^*$ est une quantité virtuelle.

Pour le paramètre de pénalité α_3 , nous avons constaté que, les résultats numériques se détériorent si celui-ci est constant partout dans le maillage. Ayad [10] et Cook [226] considèrent qu'une valeur de α_3 en fonction de la géométrie de l'élément permet de retenir une précision acceptable. Nous proposons, après une étude attentive pour celui-ci la relation suivante :

$$\alpha_3 = \frac{2.V}{L_{\max}^2} \quad (2.71)$$

$C = \frac{E.V}{12}$: est une constante inspirée des références [10, 18].

L_{\max} : le plus long côté de l'élément.

Par exemple pour la face triangulaire la matrice angulaire fictive est :

$$[K_{\bar{\omega}}] = \alpha_3 \frac{C}{4A} \begin{bmatrix} \bar{x}_{32}^2 + \bar{y}_{32}^2 & -\bar{y}_{32}\bar{y}_{31} - \bar{x}_{31}\bar{x}_{32} & \bar{y}_{32}\bar{y}_{21} + \bar{x}_{32}\bar{x}_{21} \\ & \bar{x}_{31}^2 + \bar{y}_{31}^2 & -\bar{y}_{31}\bar{y}_{21} - \bar{x}_{31}\bar{x}_{21} \\ Sym. & & \bar{x}_{21}^2 + \bar{y}_{21}^2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

avec : A = surface de triangle et la notation $x_{ij} = x_i - x_j$; $y_{ij} = y_i - y_j$

La matrice $[T_3]$ transforme les rotations fictives du nœud i du repère global au repère local :

$$\{\bar{\omega}_i\} = [T_3]\{\theta_i\} \quad (2.73)$$

$$\{\bar{\omega}_i\} = [l_{31} \quad l_{32} \quad l_{33}] \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

avec l_{ij} : les cosinus directeurs de l'axe \bar{z} .

La relation entre les variables de rotations $\{\bar{\omega}\}$ dans le repère local et les rotations globale $\{\theta\}$ est :

$$\{\bar{\omega}\} = [\tau_3]\{\theta\} \quad (2.75a)$$

Pour la face triangulaire à 3 nœuds :

$$[\tau_3] = \begin{bmatrix} [T_3] & & \\ & [T_3] & \\ & & [T_3] \end{bmatrix} \quad (2.75b)$$

Pour la face quadrilatérale à 4 nœuds :

$$[\tau_3] = \begin{bmatrix} [T_3] & & & \\ & [T_3] & & \\ & & [T_3] & \\ & & & [T_3] \end{bmatrix} \quad (2.75c)$$

Donc la matrice angulaire fictive associée aux variables de rotation s'écrit :

$$[K_f] = [\tau_3]^T [K_{\bar{\omega}}] [\tau_3] \quad (2.76)$$

Finalement, la matrice de pénalité $[K_f]$ est ajoutée également à la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ et la matrice obtenue est de rang correct et ne contient pas de modes parasites.

Nous concluons cette section en notant que les 18 modes parasites dans l'élément SFR6 utilisant l'intégration réduite sont identifiés comme étant les modes de corps rigides. Ils peuvent être supprimés en incluant des petites matrices de pénalités pour augmenter la performance de la matrice de rigidité élémentaire habituelle. Pour répondre à la question de la sélection des valeurs de paramètres de pénalité α_1 , α_2 et α_3 , une série d'expériences numériques est effectuée.

2.9. Matrices de masse des éléments SFR

La formulation des matrices de masse élémentaires des éléments SFR est nécessaire pour évaluer le comportement des solides et des structures 3D en vibrations libres. Le travail virtuel externe dû aux forces d'inertie s'écrit :

$$W_m^{ext} = - \int_{V^e} \underline{u}_q^* \cdot \rho \cdot \underline{\ddot{u}}_q dV \quad (2.77)$$

où ρ est la masse volumique et $\underline{\ddot{u}}_q = \frac{d^2 \underline{u}_q}{dt^2}$.

L'approximation des déplacements virtuels est définie par :

$$\{u_q^*\} = [N_q] \{u_n^*\} \quad (2.78)$$

avec $\langle u_n^* \rangle = \langle \dots u_i^* \ v_i^* \ w_i^* \ \theta_{xi}^* \ \theta_{yi}^* \ \theta_{zi}^* \ \dots \ i = 1, n_d \rangle$

où n_d est le nombre de nœuds de l'élément volumique SFR.

L'approximation des déplacements réels est définie de manière identique :

$$\{u_q\} = [N_q] \{u_n\} \quad (2.79)$$

où $\langle u_n \rangle = \langle \dots u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ \dots \ i = 1, n_d \rangle$

En utilisant les équations (2.77), (2.78) et (2.79), on a :

$$W_m^{ext} = - \langle u_n^* \rangle [m] \{ \ddot{u}_n \} \quad (2.80)$$

avec $\langle \ddot{u}_n \rangle = \langle \dots \ddot{u}_i \ \ddot{v}_i \ \ddot{w}_i \ \ddot{\theta}_{xi} \ \ddot{\theta}_{yi} \ \ddot{\theta}_{zi} \ \dots \ i = 1, n_d \rangle$

d'où la matrice masse élémentaire est :

$$[m] = \int_{V^e} [N_q]^T \rho [N_q] dV = \int_{V_r^e} [N_q]^T \rho [N_q] \det(J) dV_r \quad (2.81)$$

V_r^e : représente l'élément de référence.

$$[N_q] = \begin{bmatrix} \langle N_{ui} \rangle \\ \dots \langle N_{vi} \rangle \ \dots \ i = 1, n_d \\ \langle N_{wi} \rangle \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

où

$$\begin{aligned} \langle N_{ui} \rangle &= \langle N_i \ 0 \ 0 \ 0 \ N_i(z - z_i) \ -N_i(y - y_i) \rangle \\ \langle N_{vi} \rangle &= \langle 0 \ N_i \ 0 \ -N_i(z - z_i) \ 0 \ N_i(x - x_i) \rangle \\ \langle N_{wi} \rangle &= \langle 0 \ 0 \ N_i \ N_i(y - y_i) \ -N_i(x - x_i) \ 0 \ \rangle \end{aligned} \quad (2.83)$$

Les fonctions de forme N_i pour les deux éléments volumiques SFR8 et SFR6 sont données respectivement par les équations (2.12) et (2.13).

Les dimensions des matrices de masse sont 36×36 pour l'élément SFR6 et 48×48 pour l'élément SFR8. Les matrices de masse cohérentes complètes des éléments volumiques SFR sont évaluées par une intégration numérique réduite avec un schéma d'intégration de $2 \times 2 \times 2$ points de Gauss pour l'élément hexaédrique SFR8 et un schéma de 1×2 points de Gauss-Hammer pour l'élément prismatique SFR6.

2.10. Modèle non conforme SFR8I avec trois modes incompatibles

Comme on le verra dans le chapitre suivant de validation numérique des éléments SFR, l'élément hexaédrique SFR8 souffre de verrouillage de Poisson ou d'épaisseur. Ce type de verrouillage est détecté en générale dans les cas des problèmes de flexion où l'élément fini est raide et ses résultats dépendent du nombre d'éléments à travers l'épaisseur. De telle situation peut être rencontrée également dans la publication déjà citée [47] où l'élément HEX8R avec ddl de rotation, souffre également de verrouillage de Poisson, est jugé plutôt raide et à une convergence assez lente dans les cas de flexion.

Dans cette section, on présente une version non conforme de l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8 afin d'éviter le verrouillage de Poisson ou d'épaisseur. Cet élément non conforme baptisé SFR8I est formulé par l'enrichissement de la base cinématique par la méthode de Modes Incompatibles. Cette méthode est utilisée également par Yunus *et al.* [47]. Elle consiste à introduire trois modes incompatibles de déplacement à l'élément dans l'espace naturel. Les modes supplémentaires dans l'espace naturel sont donnés par :

$$\begin{aligned} U^{NC} &= (1 - \xi^2) a_u \\ V^{NC} &= (1 - \eta^2) a_v \\ W^{NC} &= (1 - \zeta^2) a_w \end{aligned} \quad (2.84)$$

où U^{NC} , V^{NC} et W^{NC} sont les modes naturels, (ξ, η, ζ) sont les coordonnées naturelles et (a_u, a_v, a_w) sont des facteurs scalaires. Les covariants non-conformes des déformations sont déterminés par :

$$\varepsilon_{\xi\xi}^{NC} = \frac{\partial U^{NC}}{\partial \xi} ; \varepsilon_{\eta\eta}^{NC} = \frac{\partial V^{NC}}{\partial \eta} ; \varepsilon_{\zeta\zeta}^{NC} = \frac{\partial W^{NC}}{\partial \zeta} \quad (2.85a)$$

$$\gamma_{\xi\eta}^{NC} = \gamma_{\xi\zeta}^{NC} = \gamma_{\eta\zeta}^{NC} = 0 \quad (2.85b)$$

donc le tenseur des déformations naturelles est :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi}^{NC} \\ \varepsilon_{\eta\eta}^{NC} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta}^{NC} \\ \gamma_{\xi\eta}^{NC} \\ \gamma_{\xi\zeta}^{NC} \\ \gamma_{\eta\zeta}^{NC} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon_{\xi}^{NC}\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2\xi & 0 & 0 \\ 0 & -2\eta & 0 \\ 0 & 0 & -2\zeta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{Bmatrix}}_{\{a\}} \quad (2.86)$$

Pour vérifier la condition d'orthogonalité entre le tenseur des contraintes constantes et le tenseur des déformations non conformes, on considère que la relation entre les déformations non conformes cartésienne et naturelle s'écrit comme suit :

$$\{\varepsilon_X^{NC}\} = \frac{\det J_0}{\det J} [T_0] \{\varepsilon_{\xi}^{NC}\} = \frac{\det J_0}{\det J} [T_0] \underbrace{[M]}_{[M^{NC}]} \{a\} \quad (2.87)$$

où $[T_0]$ est la matrice relie les tenseurs des déformations cartésiennes et covariants, évaluées au centre de l'élément et $\det J$ est la transformation Jacobienne entre les coordonnées globales et naturelles ($\det J_0$ est évalué au centre de l'élément).

Les modes incompatibles ajoutés nous permettent d'obtenir un tenseur des déformations améliorées :

$$\{\varepsilon^E\} = \{\varepsilon\} + \{\varepsilon^{NC}\} = [B]\{U_n\} + [M^{NC}]\{a\} \quad (2.88)$$

Remplaçons $\{\varepsilon^E\}$ dans la forme faible d'équilibre (2.4), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}^e] & [K_{ua}^e] \\ [K_{au}^e] & [K_{aa}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_n\} \\ \{a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{ext}^e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

où

$$[K_{uu}^e] = \int_{V^e} [B]^T [H] [B] dV \quad (2.90a)$$

$$[K_{ua}^e] = \int_{V^e} [B]^T [H] [M^{NC}] dV \quad (2.90b)$$

$$[K_{aa}^e] = \int_{V^e} [M^{NC}]^T [H] [M^{NC}] dV \quad (2.90c)$$

$$[K_{au}^e] = [K_{ua}^e] \quad (2.90d)$$

Le vecteur des variables internes $\{a\}$ est éliminé par l'utilisation de la méthode de condensation statique. On obtient :

$$\{a\} = -[K_{aa}^e]^{-1} [K_{au}^e] \{U_n\} \quad (2.91)$$

Finalement, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément SFR8I est donnée par :

$$[K^e] = [K_{uu}^e] - [K_{ua}^e] [K_{aa}^e]^{-1} [K_{au}^e] \quad (2.92)$$

Nous avons adopté dans l'élément SFR8I l'intégration réduite avec $2 \times 2 \times 2$ points de Gauss pour évaluer la matrice de rigidité élémentaire $[K_{uu}^e]$ (comme dans l'élément SFR8 seulement la partie relie avec les ddl de rotation est concernée par l'intégration réduite). Pour les matrices $[K_{ua}^e]$ et $[K_{aa}^e]$ d'équations 2.90b et 2.90c sont calculées également avec un schéma d'intégration de $2 \times 2 \times 2$ points de Gauss.

2.11. Conclusion

Dans ce chapitre, une famille d'éléments finis volumiques, appelée SFR (Space Fiber Rotation) a été décrite. Deux éléments volumiques et les principes généraux de leur formulation ont été présentés. Ces deux éléments originaux, l'un prismatique à 6 nœuds baptisé SFR6 et l'autre hexaédrique à 8 nœuds appelé SFR8, reposent sur la même idée de départ, consistant à introduire une fibre matérielle élémentaire dans les éléments volumiques linéaires standards. Le modèle SFR crée de la valeur en enrichissant la définition du champ des déplacements qui devient quadratique, tout en maintenant le nombre de nœuds des éléments linéaires. L'idée de la fibre spatiale en rotation demeure intéressante car elle n'altère en aucune manière la conformité des modèles éléments finis considérés. Nous avons proposé également un élément non conforme SFR8I pour éliminer le verrouillage de Poisson. Pour cela nous nous basons sur l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8 avec une cinématique enrichie en utilisant la méthode de modes incompatibles. On réussit alors à développer de nouveaux éléments finis dits « à valeur ajoutée », avec degrés de liberté de rotation, pour les problèmes de mécanique des solides et des structures.

Une intégration numérique réduite à 8 points ($2 \times 2 \times 2$ PG) pour les éléments hexaédriques à 8 nœuds SFR8 et SFR8I et à 2 points (1×2 PGH) pour l'élément prismatique à 6 nœuds SFR6 suffit pour obtenir une intégration cohérente de la matrice de rigidité élémentaire. Ceci présente en plus l'avantage de réduire les temps de calculs. Cependant, une analyse du rang de la matrice de rigidité élémentaire de ces éléments montre qu'ils possèdent des modes à énergie nulle (modes parasites). Pour éliminer ces modes, une technique de stabilisation basée sur l'ajout des matrices de pénalités, est adoptée.

Nous avons également évalué dans cette étude les matrices de masse des éléments volumiques SFR pour les problèmes de vibrations libres des structures tridimensionnelles. Comme dans le cas des matrices de rigidités, l'intégration réduite est pratiquement suffisante pour obtenir des matrices de masse cohérentes, ce qui contribue à l'efficacité de nos modèles. Ainsi, ce point intéressant est fortement lié à notre choix d'une formulation complète des matrices de masse.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les tests classiques de validation d'éléments finis volumiques permettant d'analyser le comportement de nos modèles en élasticité linéaire et en vibrations libres des structures tridimensionnelles. Nous montrons que les résultats sont intéressants vis-à-vis de la formulation des éléments volumiques SFR qui reste malgré tout relativement simple.

Chapitre 3.

Validation numérique des éléments SFR

Sommaire

3.1. Introduction	76
3.2. Validation de l'élément SFR6	79
3.2.1. Patchs tests 3D	79
3.2.2. Flexion plane d'une poutre encastree	80
3.2.3. Panneau fuselé	82
3.2.4. Plaque circulaire sous chargement uniforme	83
3.2.5. Plaque biaise à 30°	85
3.2.6. Poutre vrillée	87
3.2.7. Hémisphère sous charges diamétralement opposées	88
3.2.8. Cylindre pincé avec diaphragmes	89
3.2.9. Poutre encastree	91
3.2.10. Plaque carrée simplement supportée	92
3.3. Validation des éléments SFR8 et SFR8I	94
3.3.1. Patchs tests 3D	94
3.3.2. Analyse des valeurs propres	98
3.3.3. Flexion plane d'une poutre encastree	98
3.3.4. Poutre courbée	100
3.3.5. Poutre encastree	102
3.3.6. Poutre vrillée	103
3.3.7. Plaque carrée simplement supportée soumise à une charge concentrée	105
3.3.8. Plaque carrée encastree soumise à une charge concentrée	106
3.3.9. Panneau fuselé	107
3.3.10. Cylindre pincé avec diaphragmes	110
3.3.11. Toit cylindrique soumis à son poids propre (Scordelis-Lo roof)	111
3.4. Validation des éléments SFR en vibration libre	113
3.4.1. Vibration libre d'une poutre libre/encastree	113
3.4.2. Vibration libre d'une aube de compresseur	116
3.5. Conclusion	119

3.1. Introduction

Ce travail de recherche consiste à développer une nouvelle génération d'éléments finis volumiques tridimensionnels basés sur le modèle SFR et les intégrer dans l'outil de calcul de structure par éléments finis Reflex [16-18]. Cette implémentation nécessite au préalable une formulation des éléments finis déjà existants :

- Les éléments membranaires 2D linéaires (T3 et Q4) et quadratiques (T6 et Q8) ;
- Les éléments membranaires FRT et FRQ, proposés dans des travaux antérieurs [10] ;
- Les éléments volumiques hexaédriques standards à 8 et à 20 nœuds (H8 et H20) ;

- Les éléments volumiques prismatiques standards à 6 et à 15 nœuds (W6 et W15).

Ces éléments membranaires 2D et volumiques 3D servent à la comparaison avec les éléments volumiques SFR.

Dans ce chapitre, nous proposons de valider les éléments volumiques basés sur le modèle SFR à travers une série de cas-tests standards (tableaux 3.1 et 3.2) qui ont été étudiés par bon nombre d’auteurs dans les références [10, 16, 18, 163, 233-236]. Ces tests ont été choisis pour montrer l’efficacité des éléments volumiques SFR dans l’élasticité linéaire. Pour chaque cas-test, les résultats obtenus sont comparés, d’une part, à la solution de référence extraits de la littérature technique, et d’autre part, à la solution donnée par les éléments finis 2D et 3D usuels existant (tableau 3.3). Les conditions aux limites des degrés de liberté de rotation utilisées pour les éléments SFR sont les mêmes conditions pour les éléments coques 3D. Par exemple, pour les conditions aux limites d’encastrement, nous bloques les degrés de liberté de déplacements ainsi que de rotations.

Cas tests	Figures	Résultats
1 Patchs tests 3D,	Fig. 3.1	Tab. 3.4 et 3.5
2 Flexion plane d’une poutre encastree,	Fig. 3.2	Tab. 3.6
3 Panneau fuselé,	Fig. 3.3	Tab. 3.7
4 Plaque circulaire,	Fig. 3.4; Tab. 3.8	Tab. 3.9 ; Fig. 3.5
5 Plaque biaise à 30°,	Fig. 3.6	Tab. 3.10 ; Fig. 3.7
6 Poutre vrillée,	Fig. 3.8; Tab. 3.11	Tab. 3.12
7 Hémisphère pincé,	Fig. 3.9	Tab. 3.13 ; Fig. 3.10
8 Cylindre pincé avec diaphragmes,	Fig. 3.11	Tab. 3.14 ; Fig. 3.12
9 Poutre encastree,	Fig. 3.13	Tab. 3.15
10 Plaque carrée simplement supportée.	Fig. 3.14	Tab. 3.16 ; Fig. 3.15

Tableau 3.1. Liste des cas-tests (benchmarks) utilisés pour valider l’élément SFR6

Cas tests	Figures	Résultats
1 Patchs tests 3D,	Fig. 3.16/17	Tab. 3.17/18/19/20; Fig. 3.18
2 Analyse des valeurs propres,	-	Tab. 3.21
3 Flexion plane d’une poutre encastree,	Fig. 3.19/20	Tab. 3.22
4 Poutre courbée,	Fig. 3.21	Tab. 3.23
5 Poutre encastree,	Fig. 3.22	Tab. 3.24
6 Poutre vrillée,	Fig. 3.23	Tab. 3.25/26
7 Plaque carrée simplement supportée,	Fig. 3.24	Tab. 3.27
8 Plaque carrée encastree,	Fig. 3.25	Tab. 3.28
9 Panneau fuselé,	Fig. 3.26	Tab. 3.29/30/31 ; Fig. 3.27
10 Cylindre pincé avec diaphragmes,	Fig. 3.11	Tab. 3.32; Fig. 3.28
11 Toit cylindrique (Scordelis-Lo roof).	Fig. 3.29	Tab. 3.33

Tableau 3.2. Liste des cas-tests (benchmarks) utilisés pour valider l’élément SFR8

Afin de valider également les éléments SFR en vibrations libres des structures 3D, deux exemples représentatifs seront étudiés dans la quatrième section de ce chapitre. Le premier exemple traite les fréquences propres d’une poutre encastree-libre. Dans le deuxième exemple, un modèle simplifié d’aube de compresseur est également utilisé pour valider les modèles dynamiques. Cette aube de compresseur est encastree à une extrémité et libre sur les autres côtés.

Symboles	Désignations	Règles d'intégration	Réfs.
Eléments 2D			
T3 (CST)	Elément triangulaire à 3 nœuds,	I.E : 1	-
T6 (LST)	Elément triangulaire à 6 nœuds,	I.E : 3	-
FRT	Elément triangulaire à 3 nœuds basé sur le concept « <i>Plane Fiber Rotation</i> »,	I.R : 1 I.E : 3	[10]
FRQ	Elément quadrilatéral à 4 nœuds basé sur le concept « <i>Plane Fiber Rotation</i> »,	I.R : 2×2 I.E : 3×3	[10]
Q4	Elément quadrilatéral à 4 nœuds,	I.E : 2×2	-
Q8	Elément quadratique à 8 nœuds,	I.E : 3×3	-
Q4PS	Elément hybride quadrilatéral à 4 nœuds,	I.E : 2×2	[78]
Q4WT	Elément quadrilatéral à 4 nœuds avec modes incompatibles,	I.E : 2×2	[237, 238]
Eléments 3D			
W6	Elément prismatique à 6 nœuds,	I.E : 1×2	-
W15	Elément prismatique à 15 nœuds,	I.E : 3×3	-
SHB6	Elément solide-coque prismatique à 6 nœuds basé sur la méthode « <i>Assumed Strain</i> »,	5	[239]
SFR6	Elément prismatique à 6 nœuds basé sur le concept «<i>Space Fiber Rotation</i>»,	I.R : 1×2 I.E : 3×3	Modèle proposé
H8	Elément hexaédrique à 8 nœuds,	I.E : 2×2×2	-
H20	Elément hexaédrique à 20 nœuds,	I.E : 3×3×3	-
HIS	Elément hexaédrique à 8 nœuds basé sur la technique de déformation améliorée « <i>enhanced strain technique</i> »,	-	[163]
NUHEXIN-4	Elément à 8 nœuds sous-intégré,	-	[184]
QSN/E9	Elément hexaédrique à 8 nœuds basé sur l'approche de déformation améliorée,	-	[65]
HEX8R/RX	Eléments hexaédriques à 8 nœuds avec degrés de liberté de rotation,	-	[47]
HEXDS	Elément hexaédrique à 8 nœuds sous-intégré,	4	[185]
3D.EAS-9	Elément 3D basé sur la méthode de déformations postulées améliorées « <i>enhanced assumed strain method</i> » avec 9 variables internes,	-	[63]
HCiS12	Elément hexaédrique à 8 nœuds basé sur la technique de déformation améliorée avec 12 variables internes,	-	[68]
C3D8	Elément hexaédrique à 8 nœuds de l'ABAQUS,	I.E : 2×2×2	[240]
C3D8R	Elément hexaédrique à 8 nœuds avec IR et contrôle des modes d'hourglass	-	[240]
C3D8I	Elément hexaédrique incompatible à 8 nœuds de l'ABAQUS,	-	[240]
C3D20	Elément hexaédrique à 20 nœuds de l'ABAQUS,	I.E : 3×3×3	[240]
Wilson_H8	Elément hexaédrique à 8 nœuds incompatible « <i>méthode de Wilson</i> »	-	[237]
HVCC8-EM	Elément hexaédrique à 8 nœuds basé sur « <i>volume coordinate methode</i> »,	-	[125]
H1/ME9	Elément hexaédrique à 8 nœuds basé sur la formulation mixte améliorée avec 9 modes améliorés,	-	[75]
H1/E9	Elément hexaédrique à 8 nœuds basé sur la formulation améliorée,	-	[61]
SFR8	Elément hexaédrique à 8 nœuds basé sur le concept «<i>Space Fiber Rotation</i>»	I.R : 2×2×2 I.E : 3×3×3	Modèle proposé
SFR8I	Elément hexaédrique à 8 nœuds basé sur le concept «<i>Space Fiber Rotation</i>» avec 3 modes incompatibles	I.R : 2×2×2	Modèle proposé

I.R = Intégration Réduite; I.E = Intégration Exacte.

Tableau 3.3. Liste des éléments de comparaisons

3.2. Validation de l'élément SFR6

3.2.1. Patches tests 3D

Les Patches tests notés A et C proposés par Taylor *et al.* [236] sont effectués sur un élément hexaédrique distordu composé de deux éléments prismatiques représenté sur la figure 3.1. Les coordonnées (x, y, z) des huit nœuds de ces Patches tests sont résumées dans le tableau 3.4. Le matériau est élastique isotrope avec un module de Young $E = 1000 \text{ N/mm}^2$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

Patch test A :

La solution analytique des déplacements, avec un état de contrainte homogène :

$$\sigma_x = 2N/mm^2, \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (3.1)$$

est obtenue par la substitution des déformations calculées à partir de la loi de Hook généralisée :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{\sigma_x}{E} = 0.002 \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -0.0006 \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -0.0006 \quad (3.4)$$

dans les relations déformation-déplacement suivantes :

$$u = \varepsilon_x x, v = \varepsilon_y y, w = \varepsilon_z z \quad (3.5)$$

N° de nœud	Coordonnées			Déplacements			Forces		Moments		
	x	y	z	u	v	w	F_x	$F_y=F_z$	M_x	M_y	M_z
1	1.5	1.0	0.0	0.003	-0.0006	0.0	-1.3749	0.0	0.0	-0.9131	1.2083
2	4.5	1.5	0.0	0.009	-0.0009	0.0	2.3125	0.0	0.0	1.5260	-1.2847
3	4.0	3.5	0.0	0.008	-0.0021	0.0	1.4374	0.0	0.0	0.9826	1.2786
4	1.5	3.0	0.0	0.003	-0.0018	0.0	-2.5833	0.0	0.0	-1.9027	-1.3576
5	2.0	1.5	2.0	0.004	-0.0009	-0.0012	-1.0000	0.0	0.0	0.6788	0.4036
6	4.25	1.75	2.0	0.0085	-0.00105	-0.0012	2.0416	0.0	0.0	-1.2256	-0.6788
7	3.75	3.0	2.5	0.0075	-0.0018	-0.0015	1.2708	0.0	0.0	-1.2829	0.5980
8	2.0	2.5	2.5	0.004	-0.0015	-0.0015	-2.1041	0.0	0.0	2.1371	-0.1675

Tableau 3.4. Patches tests 3D : Les coordonnées nodales (x, y, z) , les déplacements, les forces et les moments aux huit nœuds

Les valeurs obtenues pour les déplacements (u, v, w) à tous les huit nœuds sont données dans le tableau 3.4. Ces déplacements sont utilisés comme conditions aux limites pour calculer les contraintes. Les résultats sont donnés dans le tableau 3.5. Nous remarquons que l'élément SFR6 représente exactement l'état de contrainte pour les deux points d'intégration.

Les forces et les moments obtenus à partir de la méthode des éléments finis sont résumés dans le tableau 3.4, pour les huit nœuds.

Patch test C :

Pour le Patch test C on a appliqué les forces et les moments illustrés dans le tableau 3.4

Les résultats sont donnés dans le tableau 3.5. L'élément fini SFR6 passe avec succès le patch test C pour l'état de contrainte constante.

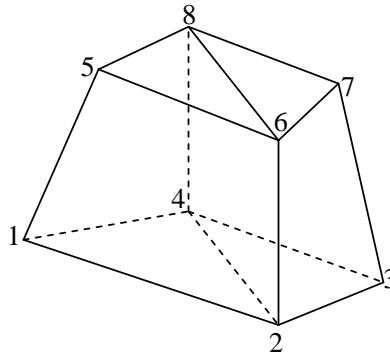


Figure 3.1. Patch test 3D : élément hexaèdre distordu composé de 2 éléments prismatiques

	Composantes de contraintes		
	σ_x	σ_y	σ_z
Cas A			
Valeur Max.	2	≈ 0	≈ 0
Valeur Min.	2	≈ 0	≈ 0
Théorie	2	0	0
Cas C			
Valeur Max.	1.99	≈ 0	≈ 0
Valeur Min.	1.93	≈ 0	≈ 0
Théorie	2	0	0

Tableau 3.5. Contraintes homogènes obtenues aux points d'intégration de l'élément SFR6

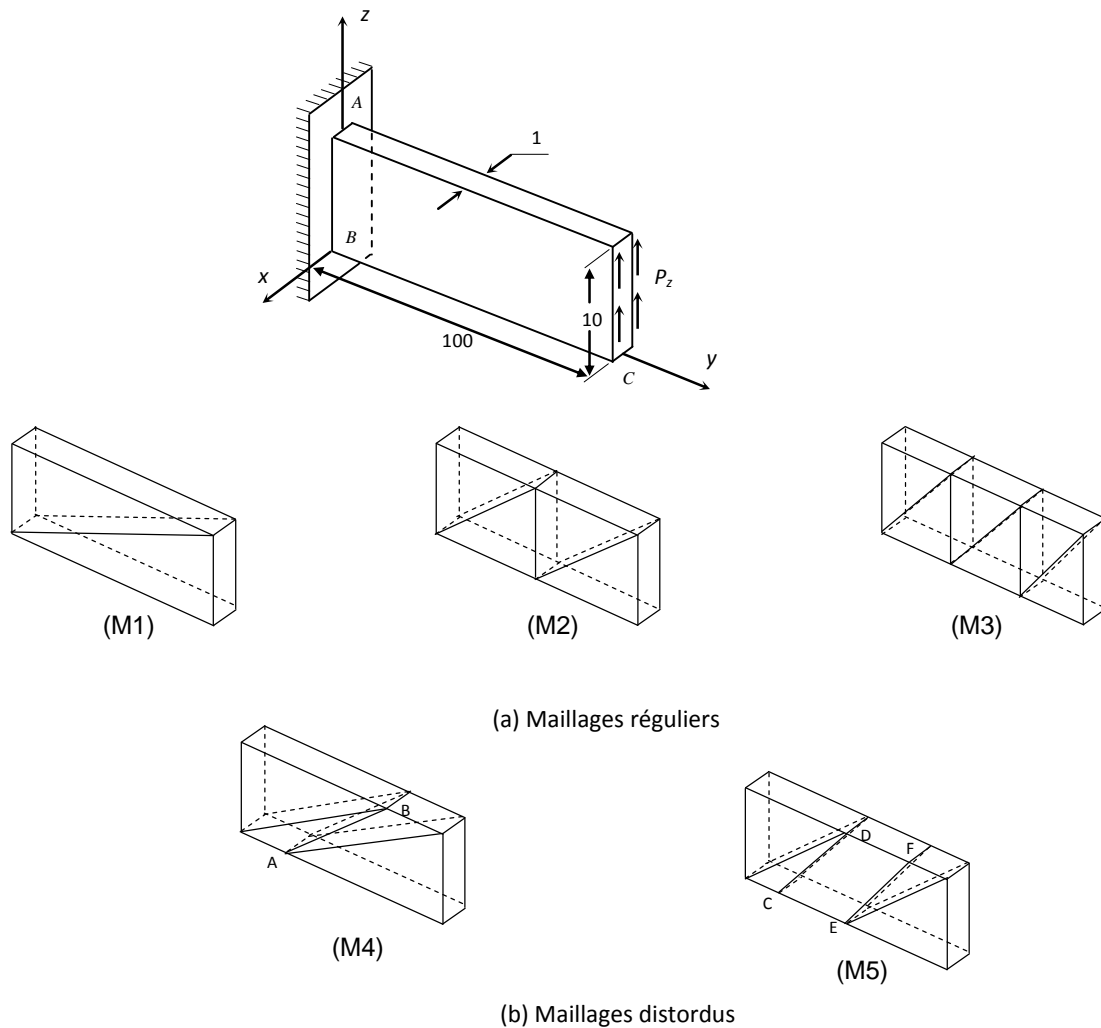
3.2.2. Flexion plane d'une poutre encastree

Il s'agit d'évaluer le déplacement vertical selon l'axe z à l'extrémité libre d'une poutre encastree soumise à une charge verticale uniforme $P_z = 10^4$. Ce test est utile pour étudier en général l'influence du type d'élément et de la distorsion géométrique des éléments. Ce problème a été traité par Batoz et Dhatt [16] afin de tester la performance des éléments membranaires (CST, LST, Q4, Q8, ...). Par la suite Ayad [10] à repris le même problème pour tester les éléments membranaires FRT et FRQ basés sur le modèle (Fibre Plane Rotatoire). La géométrie, les propriétés du matériau et les 5 maillages 3D utilisés sont représentés sur la figure 3.2. La solution de référence est obtenue par la théorie des poutres de Timoshenko :

$$W_c^{ref} = \frac{P_z L^3}{3EI} + \frac{6P_z L}{5GA} = 4 + 0.03 = 4.03 \quad (3.6)$$

Nous présentons dans le tableau 3.6 les résultats obtenus avec les éléments volumiques 3D : SFR6, W6 et W15 ainsi que les éléments 2D membranaires : T3, T6 et FRT. Pour compléter notre étude, nous avons utilisé deux types d'intégration numérique exacte et réduite pour les deux éléments SFR6 et FRT.

Cet exemple nous à permet de constater que l'utilisation de l'intégration réduite (1×2 points) dans l'élément SFR6 améliore les résultats par rapport à l'intégration exacte. De plus, pour les maillages sans distorsions M1, M2 et M3, l'élément SFR6 donne des résultats nettement meilleurs que la solution donnée par l'élément prismatique à 6 nœuds W6. Sa solution est du même ordre de grandeur que celle de l'élément quadratique W15 pour un nombre total de ddl égal. Cependant, pour les maillages distordus M4 et M5, l'élément reste mieux que l'élément classique linéaire W6 mais ces résultats sont un peu inférieurs des résultats obtenus par l'élément quadratique W15 qui, rappelons le, est un élément très coûteux. Nous constatons que le modèle SFR est moins sensible aux maillages distordus que l'élément linéaire prismatique à 6 nœuds. Une autre constatation intéressante concerne le modèle SFR en 2D. En effet, les résultats de l'élément SFR6 sont naturellement identiques à ceux du modèle 2D correspondant l'élément FRT, pour tous les maillages ainsi que pour les mêmes types d'intégration.



A(1,25,0) ; B(1,75,10) ; C(1,16.7,0) ; D(1,50,10) ; E(1,50,0) ; F(1,83.3,10)

Figure 3.2. Poutre en flexion plane ($E = 10^7, \nu = 0.3$)

Maillages (nombre total de ddl)	Eléments 3D				Eléments 2D			
	SFR6		W6	W15	T3 (CST)	T6 (LST)	FRT	
	I.E : 3×3	I.R : 1×2	I.E : 1×2	I.E : 3×3	I.E : 1	I.E : 3	I.E : 3	I.R : 1
M1	0.24 (48)	2.32 (48)	0.05 (24)	3.00 (66)	0.05 (8)	3.00 (18)	0.24 (12)	2.32 (12)
M2	0.89 (72)	2.92 (72)	0.14 (36)	3.70 (108)	0.14 (12)	3.70 (30)	0.89 (18)	2.92 (18)
M3	1.54 (96)	3.07 (96)	0.26 (48)	3.84 (150)	0.26 (16)	3.84 (42)	1.54 (24)	3.07 (24)
M4	0.44 (72)	1.99 (72)	0.06 (36)	3.02 (108)	0.06 (12)	3.02 (30)	0.44 (18)	1.99 (18)
M5	0.65 (96)	2.02 (96)	0.10 (48)	3.09 (150)	0.10 (16)	3.09 (42)	0.65 (24)	2.02 (24)

Solution de référence : $W_C^{ref} = 4.03$

Tableau 3.6. Résultats de la poutre en flexion plane

3.2.3. Panneau fuselé

Le panneau fuselé de la figure 3.3 proposé par Cook *et al.* [233] est fixé sur le bord gauche et soumis à un chargement de cisaillement distribué uniformément le long du bord droit. Il s'agit de calculer le déplacement vertical au point C et les contraintes maximale et minimale aux points A et B respectivement. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en maillage distordu et aussi dans les problèmes de cisaillement-dominant. Trois maillages ont été particulièrement étudiés (un des cas de ces maillages est illustré dans la figure 3.3). Les résultats obtenus avec l'élément SFR6, présentés dans le tableau 3.7, sont comparés avec la solution de référence [241] et les résultats obtenus avec les éléments membranaires 2D (FRT, CST et LST) et les éléments volumiques 3D (W6 et W15). L'élément SFR6 possède une très bonne convergence vers la solution de référence pour les déplacements et les contraintes. Ces résultats sont plus performant que ceux obtenus par l'élément linéaire prismatique à 6 nœuds et ils sont proches des résultats obtenus par l'élément quadratique W15. A partir des trois maillages utilisés dans la modélisation du panneau fuselé, on a constaté une fois de plus que l'élément FRT est un cas bidimensionnel de l'élément SFR6. Ces éléments donnent les mêmes résultats dans cet exemple.

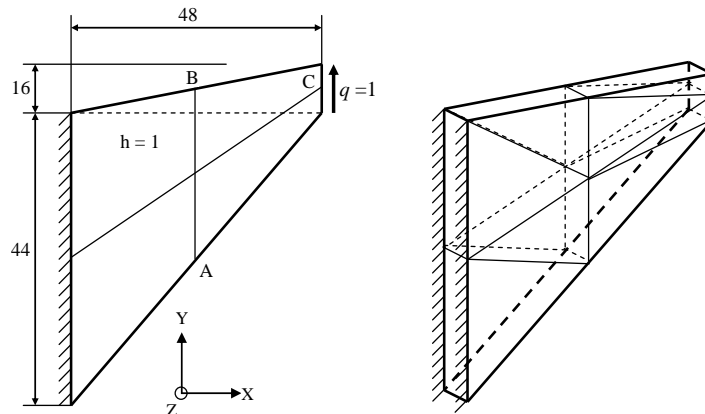


Figure 3.3. Panneau fuselé ($E = 1.0$, $\nu = 1/3$). Données et maillage avec $(2 \times 2 \times 1) \times 2$ éléments SFR6

Eléments	Maillages			
	$(2 \times 2 \times 1) \times 2$	$(4 \times 4 \times 1) \times 2$	$(8 \times 8 \times 1) \times 2$	
<i>Déplacement vertical au point C : V_C (Solution de référence : 23.96 [241])</i>				
Eléments 2D	FRT	21.20	22.88	23.57
	CST	11.88	18.00	22.02
	LST	23.07	23.75	23.87
Eléments 3D	W6	11.88	18.00	22.02
	W15	23.07	23.75	23.87
	SFR6	21.20	22.88	23.57
<i>Contrainte Max. au point A : $\sigma_{A_{\max}}$ (Solution de référence : 0.2362 [241])</i>				
Eléments 2D	FRT	0.175	0.213	0.233
	CST	0.076	0.149	0.199
	LST	0.261	0.260	0.242
Eléments 3D	W6	0.076	0.149	0.199
	W15	0.261	0.260	0.242
	SFR6	0.175	0.213	0.233
<i>Contrainte Min. au point B : $\sigma_{B_{\min}}$ (Solution de référence : -0.2023 [241])</i>				
Eléments 2D	FRT	-0.308	-0.176	-0.200
	CST	-0.059	-0.099	-0.156
	LST	-0.216	-0.205	-0.202
Eléments 3D	W6	-0.059	-0.099	-0.156
	W15	-0.216	-0.205	-0.202
	SFR6	-0.308	-0.176	-0.200

Tableau 3.7. Déplacement V_C et contraintes principales $\sigma_{A_{\max}}$ et $\sigma_{B_{\min}}$

3.2.4. Plaque circulaire sous chargement uniforme

La figure 3.4 montre la géométrie et les maillages éléments finis 3D utilisés pour l'analyse d'une plaque circulaire isotrope pour les différentes épaisseurs ($h = 0.1, 1.0$ et 2.5). Les données de géométrie, de chargement et de matériau de ce problème sont listées dans le tableau 3.8. Quatre types de maillages, définis à partir de raisons géométriques utilisant un nombre défini d'éléments $N_{elt} = 8, 18, 76$ et 128 (figure 3.4), ont été plus particulièrement étudiés. Pour les éléments SFR6 et W6 nous avons utilisés deux éléments à travers l'épaisseur et un seul élément pour W15. La solution de référence est obtenue à partir de la théorie des plaques de Kirchhoff dans la référence [242].

Rayon	$R = 5$
Epaisseur	$h = 0.1, 1.0$ et 2.5 ($R/h = 50, 5$ et 2)
Module d'Young	$E = 10.92$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Chargement	$q = 1.0$

Tableau 3.8. Données de géométrie, chargement et de matériau de la plaque circulaire

Les résultats de ce problème sont reportés dans le tableau 3.9 et comparés avec les résultats obtenus par les éléments prismatiques W6 et W15. La performance de notre élément est très satisfaisante comparons avec l'élément prismatique standard W6. Pour le rapport $R/h = 50$ et 5 les résultats numériques obtenus sont toujours mieux que ceux obtenus par l'élément W6 dans toutes les configurations de maillages et ils sont proches

des résultats de l'élément quadratique W15 respectons le même nombre total de degrés de liberté. Pour le rapport $R/h = 2$, l'élément SFR6 entraîne des résultats plus performants que ceux obtenus par l'élément W15.

Le déplacement normalisé au centre de la plaque pour l'épaisseur $h = 0.1$ ($R/h = 50$) en fonction du nombre total de degrés de liberté est représenté dans la figure 3.5 à l'échelle logarithmique. On constate aussi à partir de cette figure que l'élément SFR6 converge plus rapidement que les deux autres éléments W6 et W15.

Eléments	<i>Nelt</i>				Théorie [242]
	8	18	76	128	
<i>R/h = 50</i>					
W6	215.24	578.29	1591.3	2337.2	
W15	6395.4	7717.2	9430.5	9541.8	9783.51
SFR6	7385.3	8159.2	9368.2	9504.6	
<i>R/h = 5</i>					
W6	7.001	8.701	9.951	10.11	
W15	10.45	10.55	10.99	11.26	11.55
SFR6	9.175	10.03	11.04	11.32	
<i>R/h = 2</i>					
W6	1.126	1.153	1.171	1.180	
W15	1.177	1.186	1.204	1.211	1.339
SFR6	1.237	1.237	1.333	1.337	

Tableau 3.9. Déplacement au centre de la plaque circulaire

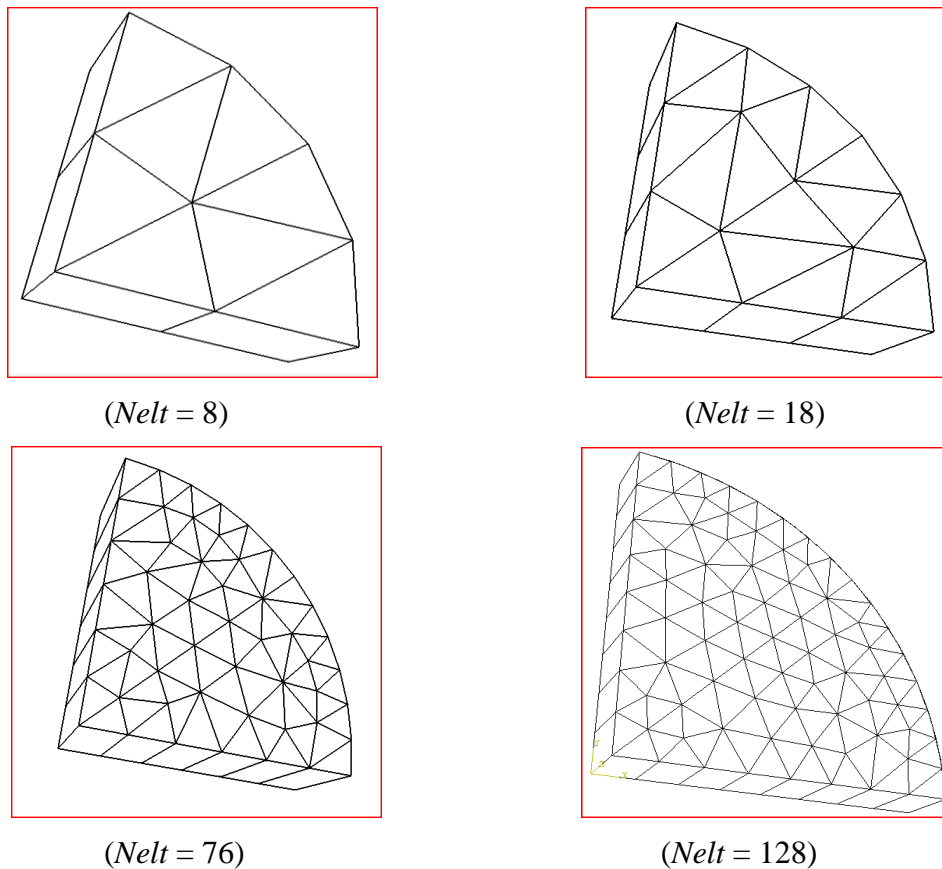


Figure 3.4. Maillage 3D d'un quart de la plaque circulaire

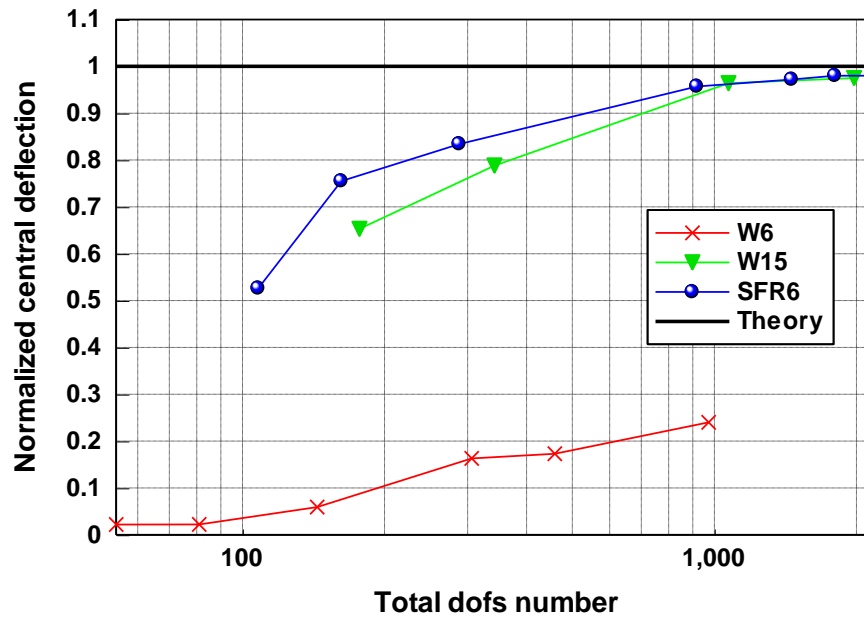


Figure 3.5. Convergence du déplacement normalisé du centre de la plaque circulaire avec $R/h = 50$

3.2.5. Plaque biaise à 30°

Ce problème est considéré comme délicat par l'ensemble des chercheurs en éléments finis à cause de la distorsion de maillage. Il s'agit d'une plaque biaise à 30° simplement supportée de dimension $L \times L$ soumise à une charge uniforme. Les propriétés mécaniques de la plaque illustrée dans la figure 3.6 sont : module de Young $E = 10.92$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Cette plaque est modélisée par cinq maillages avec $N = 4, 8, 16, 24$ et 32 éléments par côté. Un exemple de maillage ($N = 4$) composé de $(4 \times 4 \times 1) \times 2$ éléments SFR6 est montré dans la figure 3.6. Nous avons étudié ce problème en considérant deux valeurs de l'élanement ($L/h = 100$ et 1000). La solution analytique de référence proposée par Morley [243] est obtenue en utilisant la théorie de Kirchhoff pour une plaque mince ($L/h = 1000$). Dans le cas d'une plaque épaisse ($L/h = 100$) on a utilisé la solution d'élasticité tridimensionnelle obtenue par Babuska et Scapolla [244] comme une solution de référence. Comme l'exemple précédent on a utilisé deux éléments à travers l'épaisseur pour les éléments SFR6 et W6 et un élément pour W15. Les valeurs normalisées du déplacement au centre de la plaque sont données dans le tableau 3.10 pour les épaisseurs $h = 0.1$ et 1.0 . Les courbes de convergence en fonction du nombre de degrés de liberté total sont illustrées dans la figure 3.7 pour l'épaisseur $h = 0.1$ ($L/h = 1000$). Les résultats sont comparés avec les éléments classiques W6 et W15. On observe dans ce test le bon comportement de l'élément SFR6 dans des situations très délicates de distorsion de maillage. L'élément SFR6, pour les plaques minces, semble être plus performant que l'élément quadratique à 15 nœuds. Cependant, pour les plaques épaisses, l'élément SFR6 donne des résultats moins précis mais restent comparables à ceux obtenus par l'élément W15. Dans les deux cas, plaque mince et épaisse, le modèle SFR permet d'améliorer d'une manière significative les résultats de l'élément prismatique linéaire à 6 nœuds.

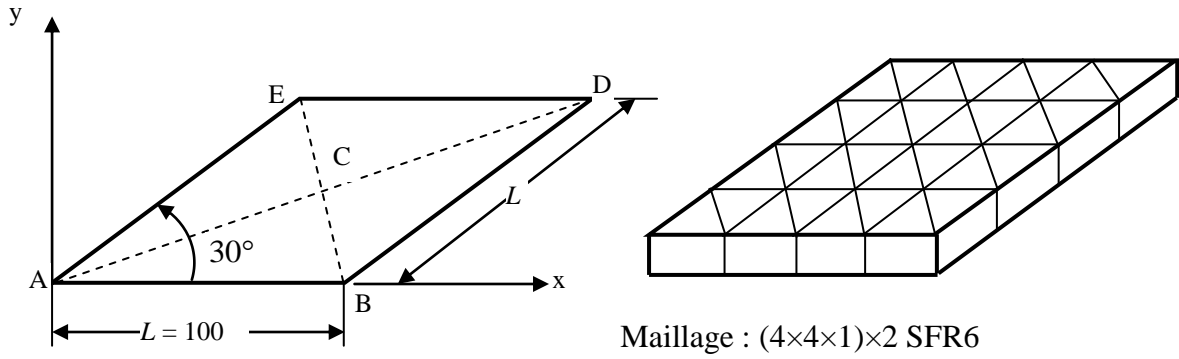


Figure 3.6. Plaque biaisée à 30° simplement supportée (conditions aux limites : $w = 0$) soumise à une charge uniforme ($q = 1.0$)

Eléments	N					Références
	4	8	16	24	32	
$\bar{w}_c = w_c 10^3 D / qL^4$						
$L/h = 1000$						
W6	0.001	0.005	0.022	0.046	0.145	Théorie des plaques de Kirchhoff [243]
W15	0.632	0.691	0.794	0.865	0.912	
SFR6	0.752	0.870	0.922	0.943	0.972	
$L/h = 100$						
W6	0.130	0.306	0.553	0.691	0.732	Solution 3D [244]
W15	0.781	0.946	1.010	1.012	1.001	
SFR6	0.755	0.872	0.929	0.948	0.985	

Tableau 3.10. Déplacement normalisé au centre de la plaque biaisée à 30°

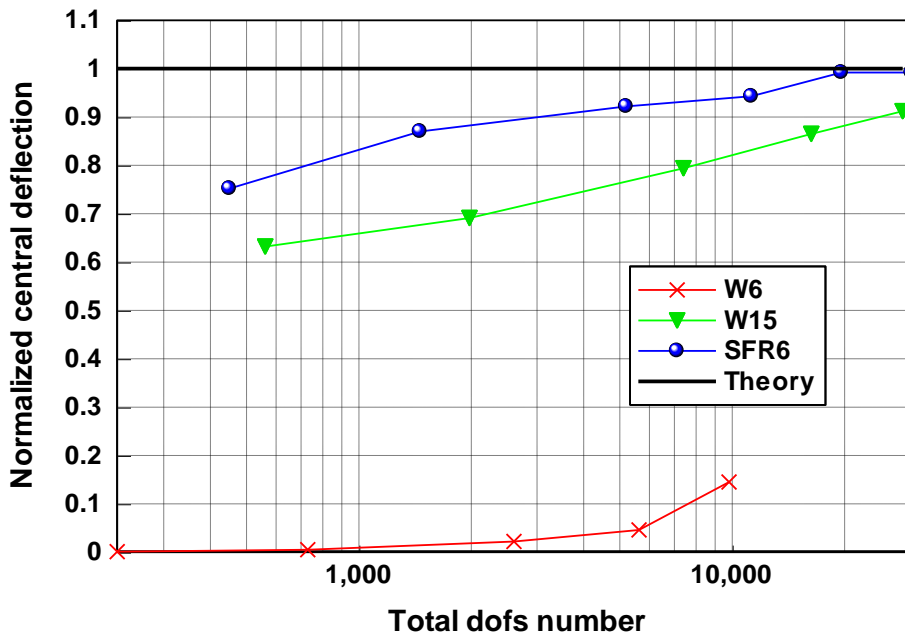


Figure 3.7. Convergence du déplacement normalisé au centre de la plaque biaisée à 30° ($R/h = 1000$)

3.2.6. Poutre vrillée

Ce problème a été proposé par MacNeal et Harder [235]. Il s'agit d'une poutre vrillée (figure 3.8) ou d'une coque hélicoïdale encastree à une extrémité et soumise à deux cas de charges concentrées à l'autre extrémité : une charge P_Z dans le plan (suivant l'axe Z) et une autre hors plan P_Y (suivant l'axe Y). Il constitue un bon examen de validation d'élément fini dans le cas des structures distordues. La géométrie et les propriétés mécaniques de la poutre sont reportées dans le tableau 3.11. Ce problème est considéré par Belytschko *et al.* [245] comme étant un bon test de verrouillage en membranaire des éléments finis. Par conséquent, et pour tester notre modèle au verrouillage membranaire, deux épaisseurs sont considérées. Trois maillages avec $12 \times 2 \times 1$, $24 \times 4 \times 1$ et $36 \times 6 \times 1$ éléments sont utilisés dans le calcul. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 3.12. Ces résultats sont normalisés à la solution de référence obtenue par Batoz *et al.* [246] avec un élément fini de poutre vrillée. Celui-ci est formulé en considérant un modèle variationnel mixte avec satisfaction des équations de l'équilibre interne. Les déplacements W et V au point A sont donnés pour deux épaisseurs différentes. Dans cet exemple les résultats sont aussi comparés avec l'élément solide-coque SHB6 développé par Trinh *et al.* [239]. Nous remarquons que l'élément SFR6 donne des résultats plus précis que ceux obtenus par l'élément W6 et sa solution est du même ordre de grandeur que celle de l'élément SHB6. On observe aussi que, pour l'épaisseur $h = 0.0032$, les résultats de notre élément reste acceptable et ne souffre pas de verrouillage membranaire. Par contre, l'élément W6 souffre naturellement de verrouillage membranaire et qui reste très pauvre dans cette situation.

Longueur ; Largeur	$L = 12 ; b = 1.1$
Epaisseur	$h = 0.32$ et 0.0032
Module d'Young	$E = 29 \times 10^6$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.22$
Chargement	$P = 1.0$

Tableau 3.11. Données de géométrie, chargement et de matériau de la poutre vrillée

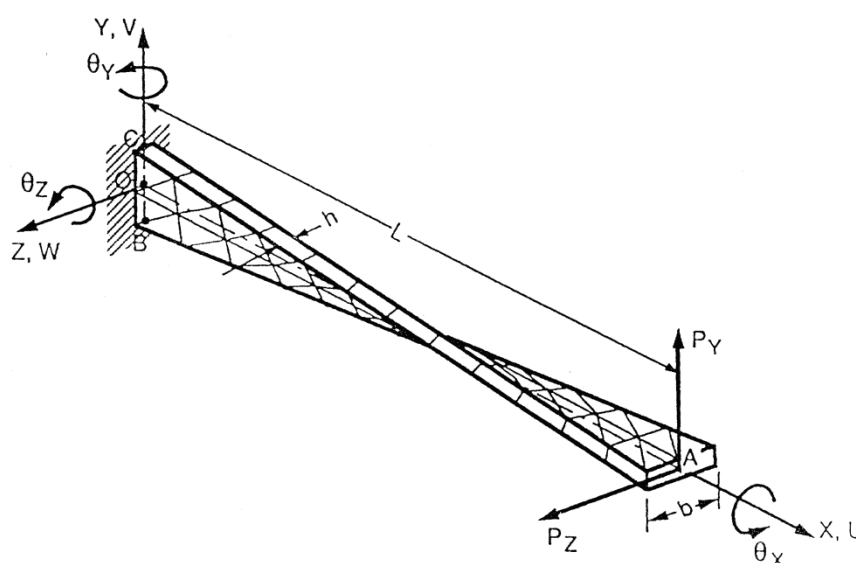


Figure 3.8. Poutre vrillée maillée avec $(12 \times 2 \times 1) \times 2$ éléments SFR6

Eléments	Maillages			Référence [246]
	$12 \times 2 \times 1$	$24 \times 4 \times 1$	$36 \times 6 \times 1$	
<i>Chargement dans le plan : $P_Z = 1.0, P_Y = 0$</i>				
<i>$h = 0.32$</i>				
W6	0.47	0.73	0.83	$W_A = 0.005424$
W15	0.99	0.99	0.99	
SHB6	0.78 ^a	0.93	0.97 ^b	
SFR6	0.86	0.91	0.93	
<i>$h = 0.0032$</i>				
W6	0.000	0.001	0.002	$W_A = 5316$
SFR6	0.65	0.73	0.89	
<i>Chargement hors plan : $P_Y = 1.0, P_Z = 0, h = 0.32$</i>				
W6	0.45	0.73	0.83	$V_A = 0.001754$
W15	0.99	1.00	1.00	
SFR6	0.91	0.94	0.96	

^a Maillage = $(12 \times 4 \times 1) \times 2$; ^b Maillage = $(36 \times 8 \times 1) \times 2$

Tableau 3.12. Déplacement normalisé au point A de la poutre vrillée

3.2.7. Hémisphère sous charges diamétralement opposées

Il s'agit d'une coque hémisphérique mince ($R/h = 250$) soumise, à la base libre, à quatre charges radiales concentrées. Les caractéristiques mécaniques et les conditions aux limites utilisées sont présentées sur la figure 3.9. Dans cet exemple, l'hémisphère subit d'importantes rotations de corps rigides et des déformations de flexion sans extension. Ce problème est un bon test pour vérifier l'absence de blocage en membrane et la bonne représentation des mouvements de corps rigide. Le problème étant symétrique, seul le quart de la structure est discrétisé en $N \times N \times 1$ éléments réguliers ($N = 2$ à 12 par côté). Nous présentons sur le tableau 3.13 les résultats obtenus pour le déplacement radial en fonction du maillage. Une solution de référence classique est donnée par MacNeal et Harder [235] :

$$U_A = -V_B = 0.094 \text{ m}$$

Nous comparons nos résultats obtenus avec l'élément SFR6, par rapport aux éléments finis prismatiques standards linéaire et quadratique (W6 et W15). Sur la figure 3.10, la convergence du déplacement normalisé U_A en fonction du nombre total de degrés de liberté est représentée. D'après les résultats obtenus, il apparaît que l'élément SFR6 ne présente pas de blocage en membrane et le modèle SFR améliore fortement les résultats de l'élément classique W6. Ce dernier présente un fort blocage en membrane et une convergence très lente. La remarque la plus intéressante dans cet exemple est que l'élément SFR6 est plus performant que l'élément quadratique W15 même pour les maillages très grossiers $(2 \times 2 \times 1) \times 2$.

Eléments	Maillage : $(N \times N \times 1) \times 2$					Référence [235]
	$2 \times 2 \times 1$	$4 \times 4 \times 1$	$6 \times 6 \times 1$	$12 \times 12 \times 1$	$24 \times 24 \times 1$	
W6	0.00003	0.00005	0.0001	0.0003	0.0014	0.094
W15	0.0009	0.0049	0.0167	0.0681	0.0908	
SFR6	0.0426	0.0482	0.0655	0.0820	0.0910	

Tableau 3.13. Résultats de l'hémisphère sous charges diamétralement opposées

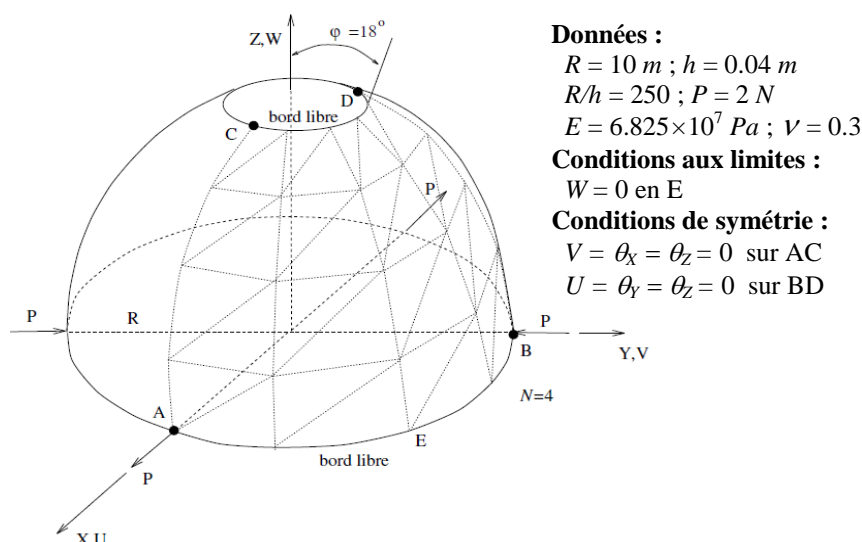


Figure 3.9. Hémisphère sous charges diamétralement opposées

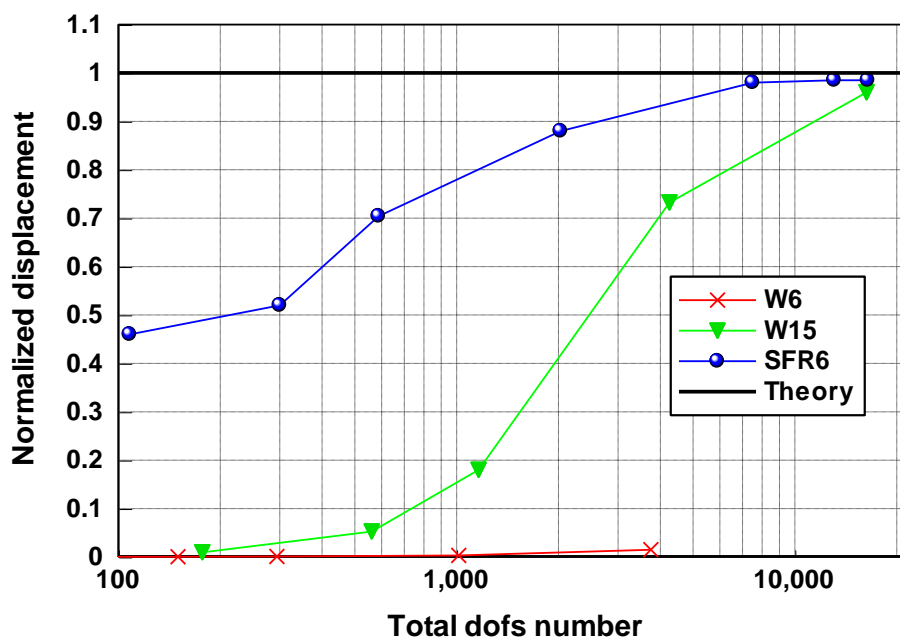


Figure 3.10. Hémisphère sous charges diamétralement opposées. Convergence du déplacement normalisé en fonction du nombre total de ddl (échelle logarithmique)

3.2.8. Cylindre pincé avec diaphragmes

Un des cas-tests qualifiés de sévères par les ingénieurs est celui d'un cylindre court ($L/R = 2$) supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités et soumis à deux charges unité concentrées diamétralement opposées (figure 3.11). Ce test permet d'examiner l'aptitude de l'élément SFR6 à simuler des états de membrane complexes avec une part importante de flexion. Le problème étant symétrique, des maillages réguliers avec $N = 2$ à 14 éléments par les côtés x, y et un (1) suivant z sont utilisés pour modéliser le huitième de la coque.

Une solution de référence basée sur une théorie de coques minces est donnée par Flügge [247] et Lindberg *et al.* [234], il s'agit du déplacement W_C suivant Z normalisé par la relation suivante :

$$W_C^{ref} = -\frac{W_C \cdot E \cdot h}{P} = 164.24$$

Nous comparons dans le tableau 3.14 nos résultats avec ceux obtenus par les éléments standards W6, W15 et l'élément solide-coque prismatique SHB6. La figure 3.12 montre la convergence du déplacement normalisé en fonction du nombre total de ddl. Le modèle proposé donne des résultats plus précis que l'élément standard W6 et l'élément solide-coque SHB6. Pour les maillages relativement grossiers ($N = 2$ et 4) l'élément SFR6 a un bon comportement par rapport à l'élément quadratique W15. En outre, sa précision est comparable à l'élément W15 pour les maillages plus raffinés ($N = 8, 12, 14$ et 24). Le bon comportement de l'élément volumique SFR6 dans ce test, indique que cet élément peut éviter non seulement le verrouillage en cisaillement, mais aussi le verrouillage en membrane. Ce qui n'est pas inattendu, car le blocage en membrane se produit principalement dans les éléments coques de formes courbes où la puissance due au terme de membrane impose une énergie excessive par rapport au terme de courbure [248].

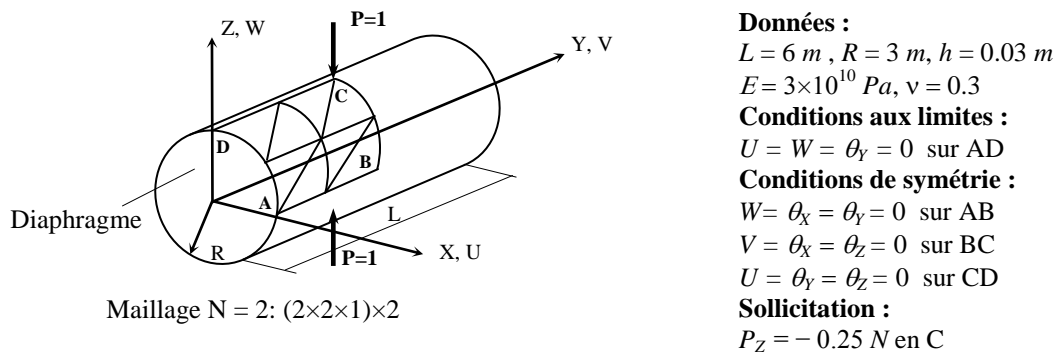


Figure 3.11. Cylindre pincé avec diaphragmes. Données

Eléments	Maillage : $(N \times N \times 1) \times 2$						Réf. [234]
	2x2x1	4x4x1	8x8x1	12x12x1	14x14x1	24x24x1	
W6	2.434	5.553	12.401	21.116	24.177	64.081	164.24
W15	15.46	43.22	107.01	137.74	145.47	154.05	
SHB6	-	-	39.417 ^a	-	107.82 ^b	-	
SFR6	23.16	66.90	106.59	121.83	127.35	150.75	

^a Maillage = $(10 \times 10 \times 1) \times 2$; ^b Maillage = $(30 \times 30 \times 1) \times 2$

Tableau 3.14. Déplacement vertical du point C de cylindre pincé

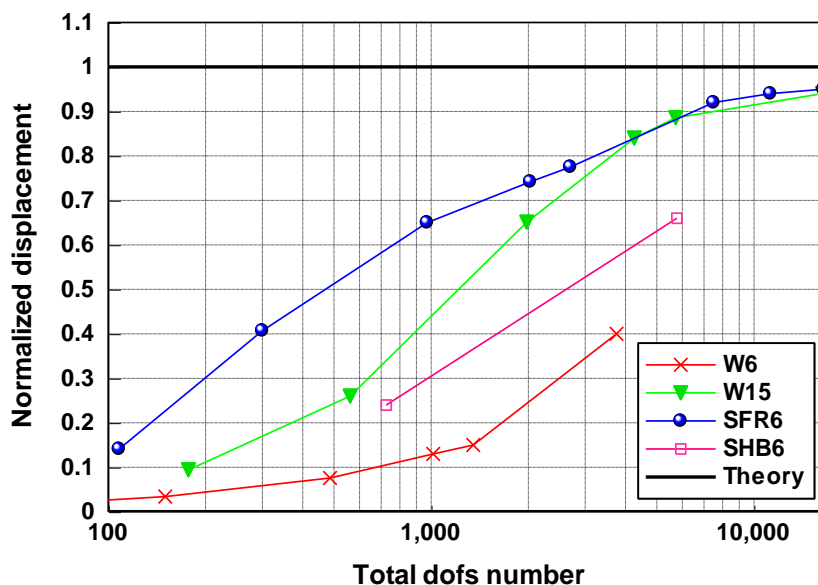
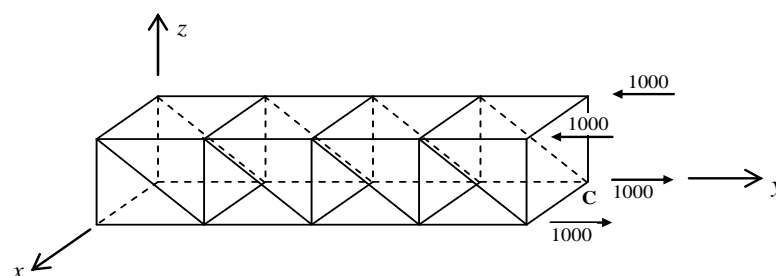


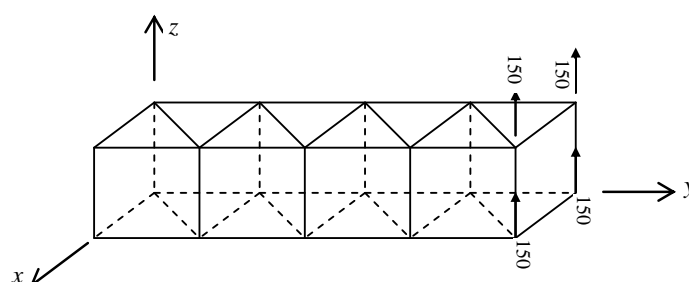
Figure 3.12. Cylindre pincé avec diaphragmes. Convergence du déplacement normalisé en fonction de nombre total de ddl (échelle logarithmique)

3.2.9. Poutre encastrée

Cet exemple est étudié par Areias *et al.* [163]. La figure 3.13 montre une poutre encastrée dont les propriétés mécaniques sont module de Young $E = 1500$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.25$. Cette poutre de dimension $2 \times 10 \times 2$ est modélisée par trois maillages de 4, 8 et 12 éléments prismatiques. L'influence de l'orientation du maillage de l'élément solide SFR6 sur les résultats numériques nous amène à étudier deux types d'orientation de maillage (figure 3.13) : maillage type (1) où la face triangulaire de l'élément est orientée vers l'axe x et maillage type (2) où la face triangulaire est orientée vers l'axe z . De plus, on a utilisé deux cas de charges à l'extrémité libre de la poutre, le premier (cas A) est une flexion pure et le second (cas B) est une force transversale. Les résultats normalisés de la déflexion au point C sont reportés dans le tableau 3.15.



a. Maillage type (1), chargement cas (A)



b. Maillage type (2), chargement cas (B)

Figure 3.13. Poutre encastrée, maillage 3D avec 8 éléments SFR6

Nous remarquons que, l'influence du maillage sur les résultats apparaît non négligeable. Pour le maillage type (2), l'élément solide SFR6 donne une solution acceptable et converge rapidement vers la solution exacte. Quoique pour le maillage type (1), les résultats obtenus sont relativement faible par rapport aux résultats de maillage type (2) qui, de par sa forme réussit à moins bien prendre en compte l'orientation des points d'intégration, provoquée par le schéma d'intégration réduite de l'élément prismatique. Cependant, l'élément volumique SFR6 est plus précis que l'élément standard prismatique à 6 nœuds W6 pour les deux types de maillages. Par conséquent, le modèle SFR est beaucoup moins sensible à l'orientation du maillage par rapport à l'élément prismatique standard à 6 nœuds. Pour cet exemple, l'élément prismatique à 15 nœuds donne des très bons résultats pour les deux types de maillages. Ceci est due au nombre de points d'intégration qui est relativement élevé (9 points).

Maillages	Eléments					
	W6		W15		SFR6	
	Type 1	Type 2	Type 1	Type 2	Type 1	Type 2
<i>Chargement cas (A): déflexion normalisée au point C, solution de réf. : $W_C^{ref} = 100$ [163]</i>						
$(1 \times 2 \times 1) \times 2$	0.09	0.64	0.96	0.97	0.58	0.89
$(1 \times 4 \times 1) \times 2$	0.19	0.86	0.98	0.98	0.69	0.92
$(1 \times 6 \times 1) \times 2$	0.24	0.90	0.99	0.99	0.86	0.95
<i>Chargement cas (B): déflexion normalisée au point C, solution de réf. : $W_C^{ref} = 102.6$ [163]</i>						
$(1 \times 2 \times 1) \times 2$	0.11	0.59	0.93	0.95	0.56	0.80
$(1 \times 4 \times 1) \times 2$	0.21	0.83	0.97	0.97	0.69	0.90
$(1 \times 6 \times 1) \times 2$	0.25	0.88	0.98	0.98	0.88	0.96

Tableau 3.15. Les résultats normalisés de la déflexion au point C de la poutre encastree

3.2.10. Plaque carrée simplement supportée

On considère une plaque carrée simplement supportée sur ses quatre cotés (figure 3.14). Cette plaque est soumise à une charge uniforme $q = 1$. De part la symétrie de la géométrie, du chargement et des conditions aux limites, seul le quart de la plaque est considéré. Le quart de la plaque est modélisé avec un maillage de $(6 \times 6 \times 1) \times 2$ éléments prismatiques. L'objectif de cet exemple est de vérifier l'absence de verrouillage en cisaillement (*shear locking*) dans l'élément volumique SFR6 quand l'épaisseur de la plaque est décroît par rapport aux autres dimensions. Les résultats de la flèche au centre de la plaque illustrés dans le tableau 3.16 sont normalisés par rapport à la solution de la théorie des plaques minces de Kirchhoff obtenue par Timoshenko et Woinowsky-Krieger [242]. Le test de convergence de la flèche normalisée en fonction de l'élancement L/h est aussi illustré dans la figure 3.15. Nous remarquons que l'élément SFR6 donne des résultats acceptables dans ce test pour les plaques épaisses et même pour les plaques très minces. Cet élément ne rencontre pas le problème de blocage en cisaillement qui apparaît lorsque l'épaisseur de la plaque devient petite par rapport à sa longueur et que les fonctions d'interpolation sont d'ordre trop faible. De plus, l'utilisation de deux éléments SFR6 à travers l'épaisseur améliore les résultats pour les cas des problèmes dominés par la flexion. On remarque aussi que l'élément classique W6 ne présente pas un bon comportement pour les cas des plaques minces. Ceci s'explique par l'influence du verrouillage en cisaillement dans ce test.

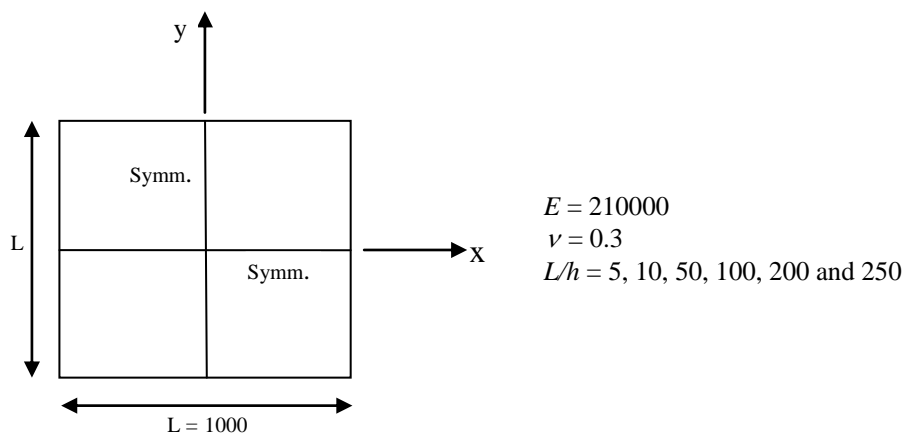


Figure 3.14. Plaque simplement supportée soumise à une charge répartie

L/h	SFR6	SFR6 2 Elt/Eps	W6	W6 2 Elt/Eps	W15
5	1.08	1.23	1.01	1.11	1.32
10	0.91	1.05	0.75	0.84	1.11
50	0.84	0.98	0.19	0.21	1.01
100	0.83	0.97	0.07	0.07	1.00
200	0.83	0.97	0.02	0.02	0.99
250	0.83	0.97	0.01	0.01	0.99

Elt/Eps : Eléments à travers l'épaisseur

Tableau 3.16. Déflexion centrale normalisée de la plaque simplement supportée

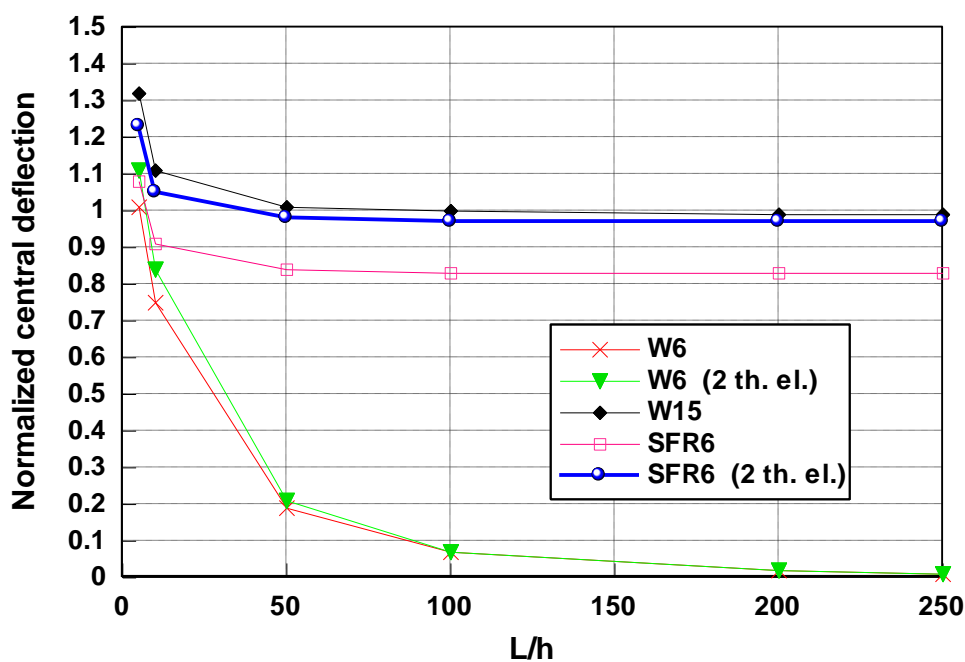


Figure 3.15. Plaque simplement supportée soumise à une charge répartie : Convergence de la déflexion centrale normalisée en fonction de l'élancement L/h

3.3. Validation des éléments SFR8 et SFR8I

3.3.1. Patches tests 3D

Les Patches tests A, B et C pour les solides 3D proposés par MacNeal et Harder [235] ont l'objectif de vérifier l'exactitude de la mise en œuvre numérique des éléments volumiques. Ces tests sont détaillés par Areias *et al.* dans [163]. La figure 3.16 montre un cube unité contenant sept éléments hexaédriques distordus. Le matériau est élastique, linéaire et isotrope avec un module de Young $E = 1 \times 10^6$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.25$. Les coordonnées initiales (x, y, z) des 16 nœuds de ce patch test sont données dans le tableau 3.17.

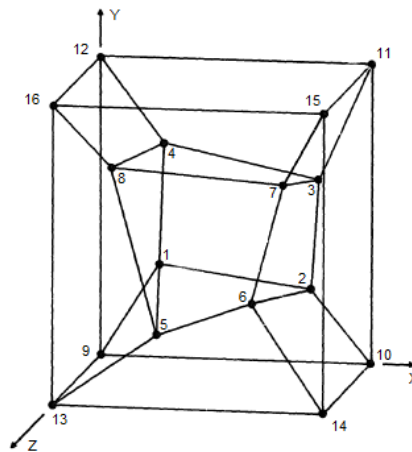


Figure 3.16. Patch test pour les solides 3D

Nœuds	Type	Coordonnées			Déplacements imposés ($\times 10^{-3}$)		
		x	y	z	u	v	w
1	Int.	0.249	0.342	0.192	-	-	-
2	Int.	0.826	0.288	0.288	-	-	-
3	Int.	0.850	0.649	0.263	-	-	-
4	Int.	0.273	0.750	0.230	-	-	-
5	Int.	0.320	0.186	0.643	-	-	-
6	Int.	0.677	0.305	0.683	-	-	-
7	Int.	0.788	0.693	0.644	-	-	-
8	Int.	0.165	0.745	0.702	-	-	-
9	Ext.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	Ext.	1.0	0.0	0.0	1.0	0.5	0.5
11	Ext.	1.0	1.0	0.0	1.5	1.5	1.0
12	Ext.	0.0	1.0	0.0	0.5	1.0	0.5
13	Ext.	0.0	0.0	1.0	0.5	0.5	1.0
14	Ext.	1.0	0.0	1.0	1.5	1.0	1.5
15	Ext.	1.0	1.0	1.0	2.0	2.0	2.0
16	Ext.	0.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5

Tableau 3.17. Coordonnées nodales et déplacements imposés (état stable)

Le premier test (Cas A) est matérialisé par une rotation de corps rigide $\theta_z = 45^\circ$ autour de l'axe définie par les nœuds 9-13 par l'imposition d'un déplacement $v = 1/\sqrt{2}$ aux nœuds 10-14 et aussi par une translation de corps rigide par le mouvement du face 10-11-14-15 à travers une valeur de déplacement $u = 1$. Ces deux mouvements de corps rigide impliquant des grands déplacements, sont suffisants pour vérifier si les valeurs des contraintes sont proches de zéro [163]. Les contraintes résiduelles illustrées dans le tableau 3.18 sont extrêmement faibles par rapport au module d'élasticité et peuvent être considérées nulles.

Composantes des contraintes	La valeur Max.	La valeur Min.	Théorie
<i>Rotation, $\theta_z = 45^\circ$</i>			
σ_{11}	1.53×10^{-10}	-6.80×10^{-10}	0
σ_{22}	1.11×10^{-10}	-1.00×10^{-09}	0
σ_{33}	2.29×10^{-10}	-7.85×10^{-10}	0
σ_{12}	1.32×10^{-10}	-1.17×10^{-09}	0
σ_{13}	4.81×10^{-10}	-6.62×10^{-11}	0
σ_{23}	6.57×10^{-10}	-6.79×10^{-10}	0
<i>Translation, $u = 1$</i>			
σ_{11}	7.04×10^{-7}	-5.89×10^{-7}	0
σ_{22}	2.30×10^{-7}	-3.80×10^{-7}	0
σ_{33}	2.63×10^{-7}	-6.77×10^{-7}	0
σ_{12}	1.76×10^{-6}	-1.00×10^{-6}	0
σ_{13}	1.43×10^{-6}	-1.33×10^{-6}	0
σ_{23}	6.03×10^{-6}	-2.08×10^{-6}	0

Tableau 3.18. Patch test (Cas A) : Mouvement d'un corps rigide (rotation et translation)

Le deuxième Patch test (Cas B) consiste à imposer deux cas de charge :

1. Une force de cisaillement $f_x = 1 \times 10^2$ aux nœuds 11, 12, 15 et 16 (figure 3.17a)
2. Une force de traction $f_x = 1 \times 10^2$ aux nœuds 10, 11, 14 et 15 (figure 3.17b)

Les résultats sont reportés dans le tableau 3.19 pour les deux cas de charge (cisaillement et traction). Ces résultats indiquent que l'élément SFR8 représente exactement l'état de contrainte constant pour les deux cas de charge.

Finalement, le Cas C est testé par l'imposition des déplacements illustrés dans le tableau 3.17 aux nœuds extérieurs seulement (9,...,16), calculés avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 u &= 5 \times 10^{-4} (2x + y + z) \\
 v &= 5 \times 10^{-4} (x + 2y + z) \\
 w &= 5 \times 10^{-4} (x + y + 2z)
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Composantes des contraintes	La valeur Max.	La valeur Min.	Théorie
<i>Cisaillement, $\tau_{12} = 400$</i>			
σ_{11}	≈ 0	≈ 0	0
σ_{22}	≈ 0	≈ 0	0
σ_{33}	≈ 0	≈ 0	0
σ_{12}	400	400	400
σ_{13}	≈ 0	≈ 0	0
σ_{23}	≈ 0	≈ 0	0
<i>Traction, $\sigma_{11} = 400$</i>			
σ_{11}	400	400	400
σ_{22}	≈ 0	≈ 0	0
σ_{33}	≈ 0	≈ 0	0
σ_{12}	≈ 0	≈ 0	0
σ_{13}	≈ 0	≈ 0	0
σ_{23}	≈ 0	≈ 0	0

Tableau 3.19. Patch test (Cas B) : Cisaillement et traction

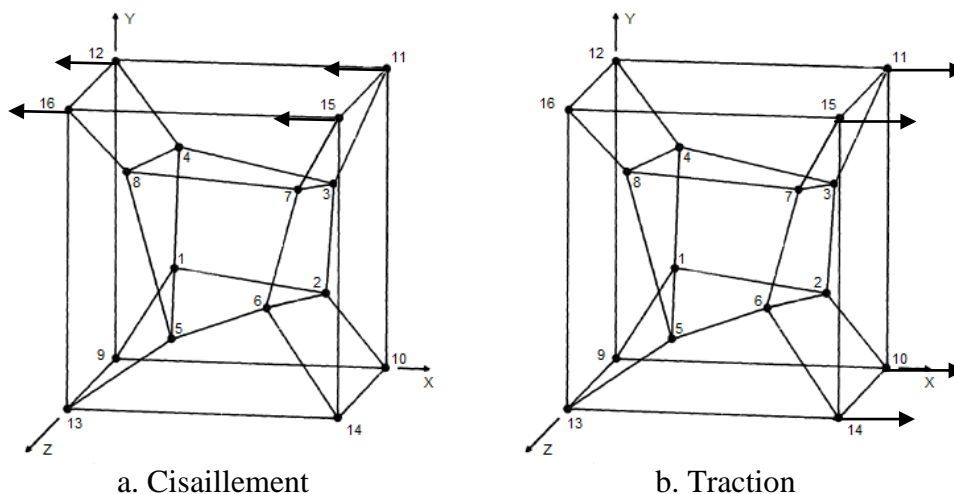


Figure 3.17. Patch test (Cas B)

Les résultats sont présentés dans le tableau 3.20. Nous remarquons que les résultats numériques sont presque confondus avec les résultats analytiques, sachant que pour assurer la convergence des résultats on doit raffiné le maillage [235].

Nœuds	Analytiques			Numériques		
	u	v	w	u	v	w
1	5.16×10^{-4}	5.63×10^{-4}	4.87×10^{-4}	5.16×10^{-4}	5.62×10^{-4}	4.87×10^{-4}
2	1.11×10^{-3}	8.45×10^{-4}	8.45×10^{-4}	1.11×10^{-3}	8.45×10^{-4}	8.45×10^{-4}
3	1.31×10^{-3}	1.21×10^{-3}	1.01×10^{-3}	1.30×10^{-3}	1.20×10^{-3}	1.01×10^{-3}
4	7.63×10^{-4}	1.00×10^{-3}	7.42×10^{-4}	7.63×10^{-4}	1.00×10^{-3}	7.41×10^{-4}
5	7.35×10^{-4}	6.68×10^{-4}	8.96×10^{-4}	7.34×10^{-4}	6.67×10^{-4}	8.96×10^{-4}
6	1.17×10^{-3}	9.85×10^{-4}	1.17×10^{-3}	1.17×10^{-3}	9.85×10^{-4}	1.17×10^{-3}
7	1.46×10^{-3}	1.41×10^{-3}	1.38×10^{-3}	1.45×10^{-3}	1.40×10^{-3}	1.38×10^{-3}
8	8.88×10^{-4}	1.18×10^{-3}	1.16×10^{-3}	8.88×10^{-4}	1.17×10^{-3}	1.15×10^{-3}

Tableau 3.20. Patch test (Cas C) : Déplacements analytiques et numériques

La solution analytique des contraintes est obtenue par la substitution des déformations calculées à partir des relations déformation-déplacement :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 10^{-3} \quad (3.8)$$

dans la loi de Hook généralisée :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 2000 \quad (3.9)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 400 \quad (3.10)$$

La figure 3.18 montre les valeurs des contraintes calculées numériquement pour les 7 éléments aux points de Gauss. Ces résultats numériques sont confondus avec la solution analytique, ce qui confirme que l'élément SFR8 représente exactement l'état des contraintes constant.

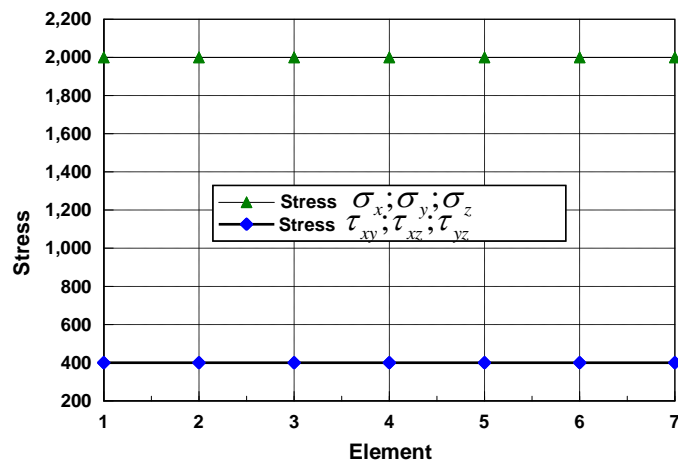


Figure 3.18. Résultats numériques des contraintes aux points de Gauss (Cas C)

L'ensemble de ces résultats nous amène à conclure que l'élément SFR8 passe les trois Patchs tests suggérés dans la référence [235] avec succès.

3.3.2. Analyse des valeurs propres

Dans cet exemple les valeurs propres de la matrice de rigidité élémentaire d'un seul élément cubique de dimension $10 \times 10 \times 10$ sont calculées pour la version initiale de l'élément SFR8 sans stabilisation proposé par Ayad [12, 13] et la présente version stabilisée. Les propriétés mécaniques du matériau sont : module de Young $E = 100$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le tableau 3.21 montre les 42 premières valeurs propres où les six valeurs propres nulles associées aux six modes de corps rigide ne sont pas illustrées. Nous remarquons que la matrice de rigidité élémentaire de l'élément SFR8 Initial (sans stabilisation) présente 12 valeurs propres nulles supplémentaires (de 31 à 42). La procédure de stabilisation développée dans la section 2.8.1 (chapitre 2) nous a permis d'obtenir un élément volumique stabilisé sans avoir les 12 valeurs propres nulles engendrés par l'intégration réduite et les modes associés à des rotations égales.

N°	SFR8 Initial	SFR8 Stabilisé	N°	SFR8 Initial	SFR8 Stabilisé	N°	SFR8 Initial	SFR8 Stabilisé
1	13205.128	13354.543	15	2136.752	2136.752	29	52.615	52.615
2	13205.128	13354.543	16	2136.752	2136.752	30	52.615	52.615
3	8676.482	8728.801	17	2136.752	2136.752	31	≈ 0	52.615
4	8676.482	8728.801	18	1250.000	1250.000	32	≈ 0	6.312
5	8676.482	8728.801	19	317.175	317.175	33	≈ 0	6.312
6	6685.040	6685.040	20	317.175	317.175	34	≈ 0	6.312
7	6685.040	6685.040	21	317.175	317.175	35	≈ 0	4.430
8	6685.040	6685.040	22	256.410	256.410	36	≈ 0	4.430
9	6477.695	6477.695	23	174.737	174.737	37	≈ 0	9.807×10^{-3}
10	6477.695	6477.695	24	174.737	174.737	38	≈ 0	9.807×10^{-3}
11	6477.695	6477.695	25	174.737	174.737	39	≈ 0	9.807×10^{-3}
12	2199.585	2294.801	26	64.102	153.846	40	≈ 0	9.615×10^{-3}
13	2199.585	2294.801	27	64.102	64.102	41	≈ 0	9.615×10^{-3}
14	2199.585	2294.801	28	52.615	64.102	42	≈ 0	9.615×10^{-3}

Tableau 3.21. Les valeurs propres de l'élément SFR8

3.3.3. Flexion plane d'une poutre encastree

On considère les mêmes données que le test 3.2.2. Pour vérifier le bon comportement des éléments SFR8 et SFR8I, nous adaptons 6 maillages (3 réguliers et 3 distordus). Nous avons également analysé l'influence du maillage sur les résultats. Les maillages éléments finis 2D et 3D utilisés sont représentés respectivement sur les figures 3.19 et 3.20. Nous présentons sur le tableau 3.22 les résultats obtenus par les éléments SFR8 et SFR8I, comparés à ceux obtenus par quelques éléments volumiques 3D et plans 2D connus de la littérature. Nous remarquons que :

- Pour les maillages sans distorsions M1, M2 et M3, le modèle SFR améliore remarquablement la solution donnée par l'élément classique H8. Sa solution est du même ordre de grandeur que celle de l'élément quadratique H20.
- Pour les maillages avec distorsions M4, M5 et M6, à un nombre de degrés de liberté total égal, l'élément SFR8 donne des résultats meilleurs que l'élément quadratique H20 qui, rappelons le, est un élément très coûteux.

- Pour les maillages distordus M4 et M6, l'élément SFR8 est plus performant que les éléments plans Q4PS et Q4WT.
- Les résultats de l'élément SFR8 sont naturellement identiques à ceux du modèle 2D correspondant FRQ, pour tous les maillages.
- L'élément SFR8I et les éléments plans Q4PS et Q4WT donnent des résultats similaires pour les maillages réguliers. Pour les maillages distordus, le modèle incompatible SFR8I donne des résultats beaucoup plus précis.
- Les modèles SFR hexaédriques semblent être les plus insensibles aux maillages distordus que les autres éléments de comparaison.

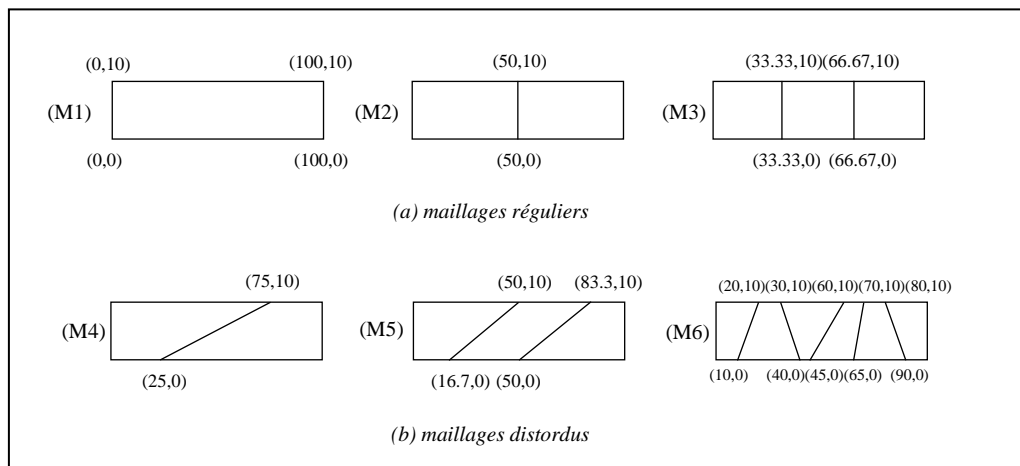


Figure 3.19. Maillages plans utilisés

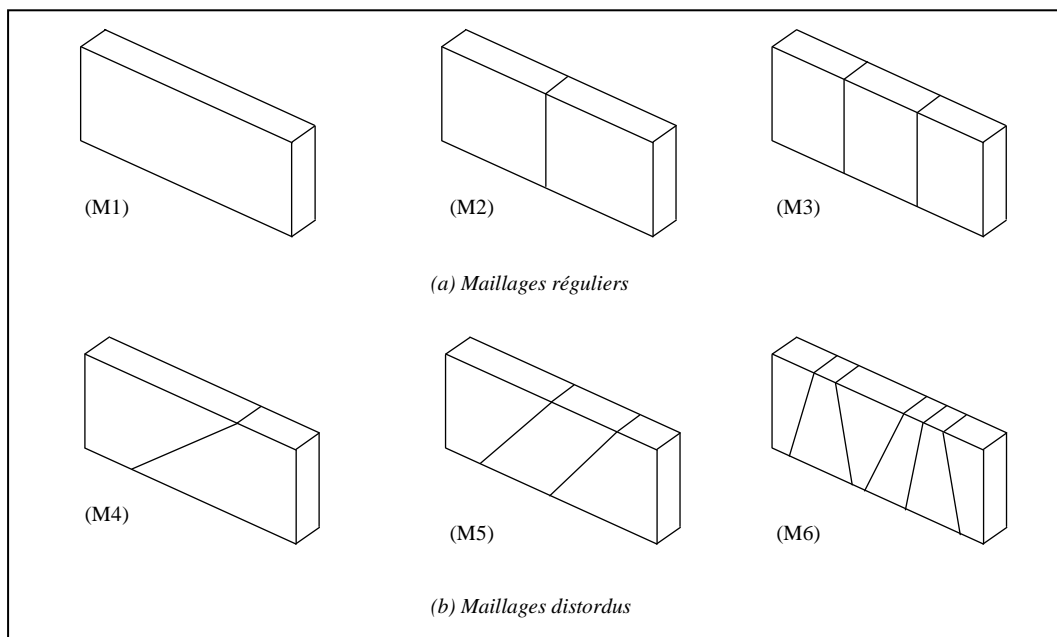


Figure 3.20. Maillages 3D utilisés

Maillages (nombre total de ddl)	Eléments 3D				Eléments 2D				
	SFR8	SFR8I	H8	H20	FRQ [10]	Q4	Q4PS [78]	Q4WT [237, 238]	Q8
	I.R: 2×2×2	I.R: 2×2×2	I.E: 2×2×2	I.E: 3×3×3	I.R: 2×2	I.E: 2×2	I.E: 2×2	I.E: 2×2	I.E: 3×3
M1	2.76 (48)	3.03 (51)*	0.10 (24)	3.03 (60)	2.76 (12)	0.10 (8)	3.03 (8)	3.03 (8)	3.03 (16)
M2	3.44 (72)	3.78 (78)	0.38 (36)	3.70 (96)	3.44 (18)	0.38 (12)	3.78 (12)	3.78 (12)	3.70 (26)
M3	3.56 (96)	3.91 (105)	0.75 (48)	3.84 (132)	3.56 (24)	0.75 (16)	3.92 (16)	3.92 (16)	3.84 (36)
M4	1.03 (72)	1.07 (78)	0.12 (36)	0.64 (96)	1.09 (18)	0.12 (12)	0.49 (12)	0.30 (12)	0.64 (26)
M5	1.61 (96)	2.03 (105)	0.22 (48)	1.79 (132)	1.61 (24)	0.22 (16)	1.94 (16)	1.79 (16)	1.76 (36)
M6	3.45 (168)	3.50 (183)	0.71 (84)	3.51 (240)	3.45 (42)	0.71 (28)	1.32 (28)	1.18 (28)	3.51 (66)

Solution de Référence : $W_C^{ref} = 4.03$

* Nombre total de ddl plus les variables internes

Tableau 3.22. Résultats de la poutre en flexion plane

3.3.4. Poutre courbée

La figure 3.21 montre la géométrie, les conditions aux limites et les propriétés mécaniques du matériau de la poutre courbée considérée. Ce problème est déjà étudié par Areias *et al.* [163] et Liu *et al.* [184]. La poutre est encastree parfaitement à l'extrémité droite. Le chargement est une force F appliquée à l'extrémité gauche de la poutre ce qui entraîne un déplacement de référence $V_{ref} = 3.14149$ obtenue par Holzapfel [249]. Cette poutre courbée est modélisée par des maillages réguliers composés de $5 \times 1 \times 1$, $10 \times 2 \times 2$ et $20 \times 4 \times 4$ éléments hexaédriques SFR.

Nous présentons dans le tableau 3.23 les déplacements normalisés obtenus avec les éléments SFR8, SFR8I, C3D8, C3D8I, HIS et NUHEXIN-4. Ce test nous a permis aussi de valider la prise en compte de la stabilisation présentée dans la section (2.8.1). Nous remarquons que l'élément SFR8 stabilisé donne des résultats acceptables et converge vers la solution de référence. Cependant, pour l'élément SFR8 sans stabilisation, les résultats obtenus pour les deux premiers maillages sont erronés et pour le troisième maillage sont identiques à ceux du modèle SFR8 avec stabilisation. Ce qui confirme une autre fois la nécessité de la technique de stabilisation introduite dans le modèle SFR hexaédrique.

La comparaison des résultats avec l'élément quadratique C3D20 montre un comportement intéressant du modèle SFR8. Ces résultats sont comparables à ceux des éléments HIS et NUHEXIN-4. Ce modèle donne des résultats très satisfaisants, surtout si l'on prend en considération sa simplicité. La convergence est de meilleure qualité avec l'élément SFR8I, dont le comportement est très proche de celui des éléments HIS et NUHEXIN-4. Les résultats de l'élément SFR8I sont les plus précis pour le premier et le deuxième maillage par rapport aux autres éléments de comparaison. L'utilisation des modes incompatibles améliorent donc remarquablement les résultats.

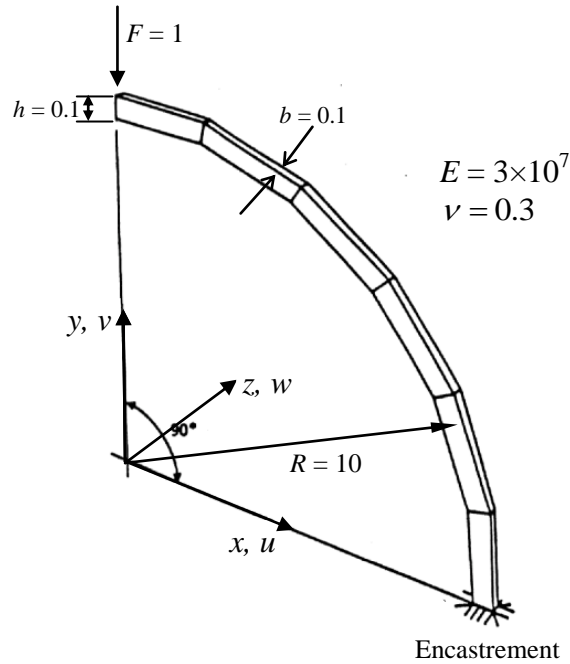


Figure 3.21. Poutre courbée. Géométrie, chargement et conditions aux limites

Maillages (Nbre total de ddl)	SFR8	SFR8I	C3D8	C3D8I	C3D20	HIS [163]	NUHEXIN-4 [184]
$5 \times 1 \times 1$	0.815 (144)	0.997 (159)*	2.496×10^{-3} (72)	0.302 (137)*	0.128 (204)	0.841	0.787
$10 \times 2 \times 2$	0.973 (594)	1.026 (714)	1.035×10^{-2} (297)	0.875 (817)	0.139 (963)	0.995	0.998
$20 \times 4 \times 4$	1.002 (3150)	1.016 (4110)	0.040 (1575)	0.998 (5735)	0.852 (5595)	1.012	1.023

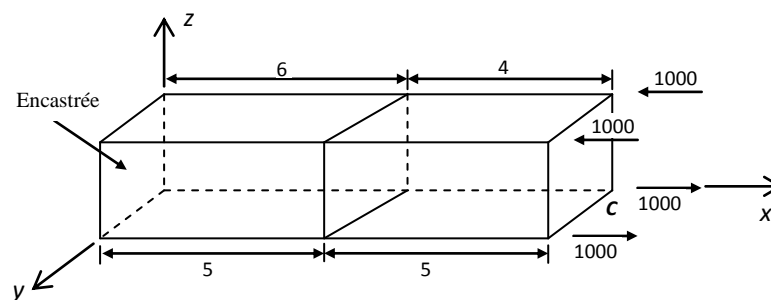
* Nombre total de ddl plus les variables internes

Tableau 3.23. Déplacements normalisés de la poutre courbée

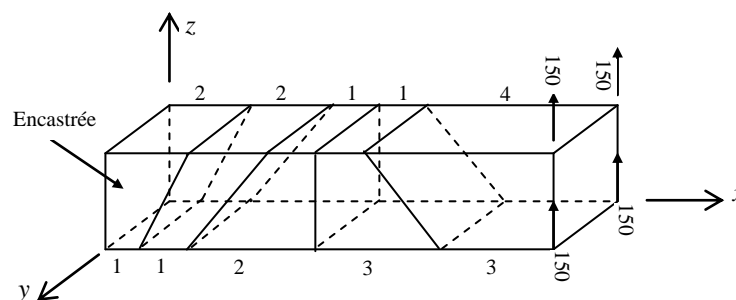
3.3.5. Poutre encastrée

La figure 3.22 montre une poutre encastrée de dimension $10 \times 2 \times 2$ proposée dans la référence [163] soumise à deux cas de charges à l'extrémité libre de la poutre, le premier (cas A) est une flexion pure et le second (cas B) est une force transversale. Les propriétés mécaniques sont : module de Young $E = 1500$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.25$. La solution de référence pour les deux cas de charges, le premier (cas A) est $W_A^{ref} = 100$ et le second (cas B) est $W_B^{ref} = 102.6$ [163]. Deux types de maillages distordus sont utilisés pour modéliser la poutre : type (1) deux éléments SFR8 (figure 3.22a) et type (2) cinq éléments SFR8 (figure 3.22b). Les flèches obtenues par les éléments SFR8 et SFR8I à l'extrémité de la poutre (point C) sont normalisées et comparées à celles obtenues par les éléments C3D8, C3D8I, C3D20, HIS et QSN/E9. Les résultats sont reportés dans le tableau 3.24.

Nous remarquons que l'élément SFR8 donne des bons résultats dans cet exemple. Ces résultats sont plus précis que ceux obtenus avec l'élément incompatible C3D8I et l'élément hexaédrique QSN/E9 basé sur la méthode de déformation améliorée « *enhanced strain technique* » pour le maillage distordu type (1). Cependant, pour le maillage distordu type (2), l'élément SFR8 est moins précis que les autres éléments de comparaison sauf l'élément linéaire C3D8 et il souffre de verrouillage de Poisson. On peut aussi observer, pour le maillage type (1), que l'élément SFR8I converge plus rapidement que l'élément SFR8 et ses résultats sont les plus précis que ceux des autres éléments de comparaison pour le cas de chargement (A). Il fournit une très bonne précision qui est comparable à celle du C3D20 pour le cas de charge (B). Même pour le maillage type (2), la précision de l'élément SFR8I est encore satisfaisante (les résultats sont comparables à ceux obtenus avec les éléments C3D8I et HIS) et confirme qu'il ne souffre pas de verrouillage de Poisson ou d'épaisseur. Ceci montre l'intérêt des modes incompatibles ajoutés dans le modèle SFR hexaédrique.



a. Maillage distordu type (1), chargement cas (A)



b. Maillage distordu type (2), chargement cas (B)

Figure 3.22. Poutre encastrée

Maillages (Nbre total de ddl)	Cas de charge	SFR8	SFR8I	C3D8	C3D8I	C3D20	HIS [163]	QSN/E9 [65]
Type (1)	A	0.924 (72)	0.991 (78)*	0.262 (36)	0.744 (62)*	0.962 (96)	0.924	0.892
	B	0.858	0.921	0.262	0.685	0.924	0.882	0.846
Type (2)	A	0.931 (144)	0.971 (159)	0.787 (72)	0.950 (137)	0.982 (204)	0.958	0.995
	B	0.912	0.955	0.849	0.943	0.975	0.953	0.990

* Nombre total de ddl plus les variables internes

Tableau 3.24. Résultats normalisés de la poutre encastree

3.3.6. Poutre vrillée

Nous reprenons les mêmes données du test 3.2.6. La solution analytique pour le cas de charge dans le plan est : $U^{ref} = 5.424 \times 10^{-3}$ et pour le cas de charge hors plan est : $V^{ref} = 1.754 \times 10^{-3}$. Ces solutions sont obtenues par MacNeal et Harder [235] et Belytschko *et al.* [245]. La poutre vrillée est modélisée par des maillages réguliers composés de 6×1 (six élément le long de la longueur et un élément le long de la largeur), 12×2 et 24×4 éléments (figure 3.23). Les résultats pour les deux cas de chargements sont reportés sur les tableaux 3.25 et 3.26.

Les résultats obtenus par les éléments SFR8 et SFR8I sont acceptables comparés aux autres éléments et améliorent remarquablement la solution donnée par l'élément C3D8. Les résultats de ces éléments sont identiques à ceux des éléments hexaédriques avec ddl de rotation HEX8R et HEX8RX [47]. Cependant, l'élément SFR8 semble qu'il souffre de verrouillage de Poisson ou d'épaisseur « *Poisson's thickness locking* » où l'utilisation de deux éléments à travers l'épaisseur augmente la précision des résultats. A ce sujet, on peut faire une remarque intéressante : si deux éléments SFR8 sont utilisés à travers l'épaisseur, les résultats du modèle SFR8 sont très proches et comparables à ceux obtenus par l'élément quadratique C3D20, compte tenu du nombre total de degrés de liberté. Pour le cas de l'élément avec modes incompatibles SFR8I, on trouve que cet élément converge plus rapidement (dès le premier maillage) avec une performance nettement plus élevée que celle montrée par les autres éléments de comparaisons. Par conséquent, l'élément non conforme SFR8I ne souffre pas de verrouillage de Poisson.

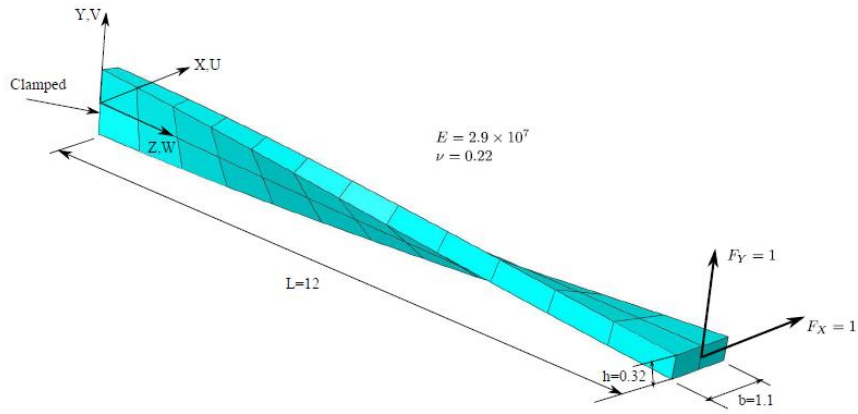


Figure 3.23. Poutre vrillée. Maillage composé de $12 \times 2 \times 1$ éléments SFR8

Maillages (nombre total de ddl)	SFR8	SFR8 2 Elt/Eps	SFR8I	C3D8 2 Elt/Eps	C3D8I	C3D20	HEX8R [47]	HEX8RX [47]	NUHEXIN-4 [184]
6x1	0.954 (168)	0.990 (252)	1.007 (183)*	0.068 (126)	0.951 (162)*	0.962 (240)	-	-	1.129
12x2	0.951 (468)	0.985 (702)	1.001 (540)	0.214 (351)	0.995 (546)	0.990 (723)	0.951	1.001	1.157 2 Elt/Eps
24x4	0.951 (1500)	0.985 (2250)	1.001 (1788)	0.530 (1125)	0.999 (1998)	0.996 (2445)	-	-	1.026 4 Elt/Eps

Elt/Eps : Éléments à travers l'épaisseur ; * Nombre total de ddl plus les variables internes

Tableau 3.25. Déplacements normalisés de la poutre vrillée. Chargement dans le plan

Maillages (nombre total de ddl)	SFR8	SFR8 2 Elt/Eps	SFR8I	C3D8 2 Elt/Eps	C3D8I	C3D20	HEX8R [47]	HEX8RX [47]
6x1	0.952 (168)	0.979 (252)	1.001 (183)*	0.185 (126)	0.942 (162)*	0.974 (240)	-	-
12x2	0.960 (468)	0.986 (702)	0.999 (540)	0.354 (351)	0.988 (546)	0.995 (723)	0.960	0.999
24x4	0.962 (1500)	0.988 (2250)	0.999 (1788)	0.627 (1125)	0.996 (1998)	0.998 (2445)	-	-

Tableau 3.26. Déplacements normalisés de la poutre vrillée. Chargement hors plan

3.3.7. Plaque carrée simplement supportée soumise à une charge concentrée

Nous considérons une plaque carrée simplement supportée soumise à une charge concentrée au centre (figure 3.24). La charge est choisie d'une façon à obtenir un déplacement transversal égal à un (1). Grâce à la symétrie du problème, on ne modélisera qu'un quart de la plaque et on considèrera les conditions de symétries. La plaque est modélisée par des maillages réguliers avec $N = 2, 4, 8$ et 16 éléments par côté. Les résultats normalisés sont représentés dans le tableau 3.27.

Nous remarquons que la solution obtenue avec l'élément SFR8 est dépend du nombre d'éléments à travers l'épaisseur. Celle-ci est clairement améliorée dans le cas de deux éléments suivant l'épaisseur. Ceci confirme la présence de verrouillage de Poisson ou d'épaisseur « *Poisson's thickness locking* ». Néanmoins, l'élément SFR8 donne des résultats relativement acceptables. Comme on peut l'observer, une bonne performance de l'élément SFR8 pour un maillage très grossier ($N = 2$) par rapport à l'élément hexaédrique incompatible C3D8I.

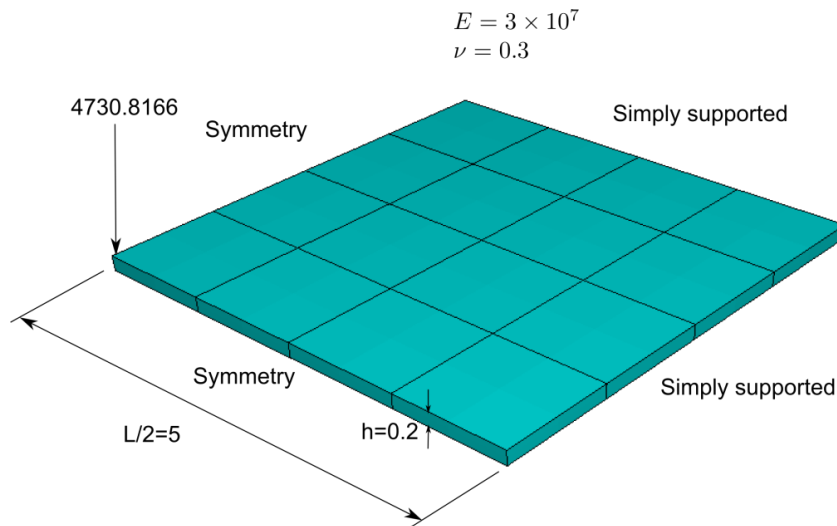


Figure 3.24. Plaque carrée simplement supportée

N (Nombre total de ddl)	SFR8	SFR8 2 Elt/Eps	C3D8I	C3D20	HIS [163]	NUHEXIN-4 [184]	HEXDS [185]
2	0.730 (108)	0.847 (162)	0.399 (106)	0.868 (153)	1.063	-	-
4	0.797 (300)	0.923 (450)	0.908 (358)	0.978 (465)	1.016	1.151 2 Elt/Eps	1.162 2 Elt/Eps
8	0.820 (972)	0.951 (1458)	0.999 (1318)	1.007 (1593)	1.011	1.034 4 Elt/Eps	1.045 4 Elt/Eps
16	0.892 (3468)	0.962 (5202)	1.012 (5062)	1.017 (5865)	1.015	1.036 4 Elt/Eps	1.052 4 Elt/Eps

Tableau 3.27. Plaque carrée simplement supportée. Déplacement transverse normalisé au centre de la plaque

3.3.8. Plaque carrée encastrée soumise à une charge concentrée

La figure 3.25 montre la géométrie et les conditions aux limites d'une plaque carrée mince encastrée soumise à une charge ponctuelle au centre. On remarquera, par ailleurs la symétrie du problème. On ne modélisera qu'un quart de la plaque et on considérera les conditions de symétries. Le déplacement transverse de référence au centre de la plaque est calculé par la théorie de Kirchhoff et égal à un (1). Le quart de la plaque est modélisé par des maillages réguliers avec $N = 2, 4, 8$ et 16 éléments par côté. Cet exemple a été déjà étudié dans le cadre de validation des éléments volumiques par Areias *et al.* [163], Andelfinger et Ramm [63] ainsi que par de Sousa *et al.* [68]. Les résultats normalisés obtenus avec les éléments HIS, HCiS12 et 3D.EAS-9 développés par ces auteurs et les présents éléments SFR8 et SFR8I sont reportés au tableau 3.28. Nous remarquons que l'élément SFR8 donne des résultats acceptables spécialement pour le cas aux deux éléments à travers l'épaisseur sont considérés. Ainsi que l'élément SFR8 semble être plus performant que les éléments 3D.EAS-9 et C3D8I pour les deux maillages grossiers $N = 2$ et 4 . Les autres éléments de comparaisons, basés sur les variables internes, montrent une bonne convergence vers la solution de référence dans cet exemple. Par conséquent, il semble que ces éléments ne souffrent pas de verrouillage de Poisson ou d'épaisseur « *Poisson's thickness locking* ». Comme on peut le voir à partir des résultats, l'élément incompatible SFR8I converge plus rapidement et donne une meilleure précision que les éléments SFR8, C3D8I et 3DEAS-9.

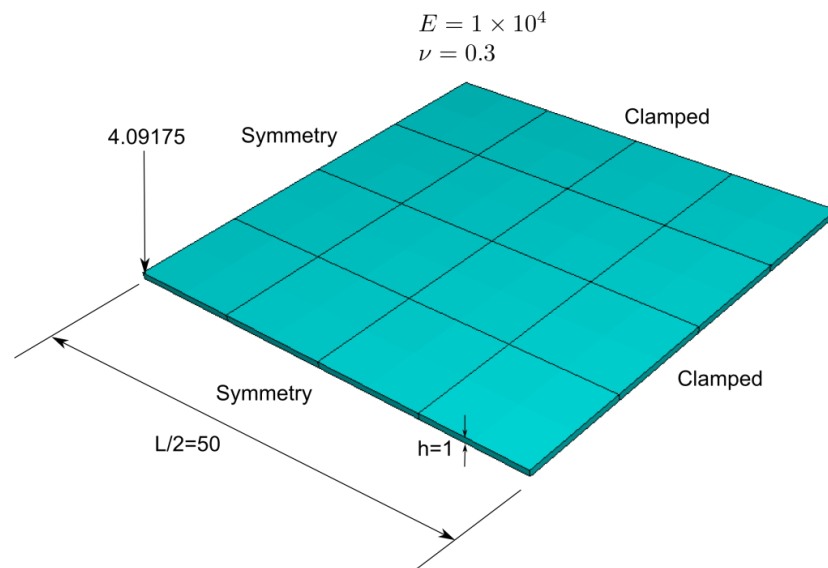


Figure 3 .25. Plaque carrée encastrée soumise à une charge ponctuelle

N (Nombre total de ddl)	SFR8	SFR8 2 Elt/Eps	SFR8I	C3D8I	C3D20	HIS [163]	HCiS12 [68]	3D.EAS-9 [63]
2	0.095 (108)	0.097 (162)	0.098 (120)*	0.073 (106)*	0.219 (153)	0.933	0.869	0.073
4	0.683 (300)	0.780 (450)	0.818 (348)	0.556 (358)	0.873 (465)	0.992	0.970	0.553
8	0.797 (972)	0.920 (1458)	0.974 (1164)	0.944 (1318)	0.971 (1593)	1.003	-	-
16	0.816 (3468)	0.943 (5202)	0.998 (4236)	1.000 (5062)	0.996 (5865)	1.006	-	-

Elt/Eps : Éléments à travers l'épaisseur ; * Nombre total de ddl plus les variables internes

Tableau 3.28. Plaque carrée encastrée. Déplacement transverse normalisé au centre

3.3.9. Panneau fuselé

Nous reprenons les mêmes données du test 3.2.3. Ce cas test est généralement utilisé pour vérifier l'existence de verrouillage en membrane pour les éléments 2D dans le cas où la déformation de cisaillement est dominante. Cette fois-ci, la solution de référence de déplacement transverse du point C de la figure 3.26 est donnée dans les références [5, 250] : $V_C^{ref} = 23.9$. Le panneau fuselé est modélisé par des maillages réguliers avec $N = 2, 4, 8$ et 16 éléments par côté. Les résultats des déplacements normalisés présentés dans le tableau 3.29 établissent également que les éléments SFR8 et SFR8I améliorent clairement la solution de l'élément C3D8 et donnent une solution du même ordre de grandeur que celle de l'élément quadratique C3D20 spécialement pour les maillages avec $N = 4, 8$ et 16. D'autre part, les éléments SFR hexaédriques donnent des résultats plus précis que l'élément incompatible C3D8I.

N (Nombre total de ddl)	SFR8	SFR8I	C3D8	C3D8I	C3D20
2	0.893 (108)	0.933 (120)*	0.588 (54)	0.856 (106)*	0.930 (153)
4	0.982 (300)	0.974 (348)	0.834 (150)	0.947 (358)	0.961 (465)
8	0.992 (972)	0.989 (1164)	0.948 (486)	0.982 (1318)	0.994 (1593)
16	0.998 (3468)	0.997 (4236)	0.985 (1734)	0.994 (5062)	0.998 (5865)

* Nombre total de ddl plus les variables internes

Tableau 3.29. Panneau fuselé. Déplacements transverses normalisés au point C

Pour tester la sensibilité des éléments volumiques SFR8, SFR8I, C3D8, C3D8I et C3D20 aux maillages distordus, nous considérons dans la suite le panneau fuselé de la figure 3.26 modélisé avec $2 \times 2 \times 1$ éléments. A fin d'obtenir un maillage distordu, on a varié les valeurs des excentricités e_1 et e_2 . Les déplacements normalisés du point C sont donnés dans le tableau 3.30 et les courbes de convergence de ces éléments solides en fonction de l'excentricité e_1 sont représentées dans la figure 3.27. On remarque que les éléments SFR8 et SFR8I sont moins sensible à la distorsion du maillage par rapport aux autres éléments volumiques comme indiqué dans la figure 3.27. En fait, par un simple calcul de la différence entre les déplacements normalisés du maillage 7 et du maillage 1 (tableau 3.30), on trouve que les éléments C3D8, C3D8I, C3D20, SFR8 et SFR8I perdent respectivement 27.6%, 21.8%, 17%, 10.9% et 12.6% de leur précision. De plus, on remarque que l'élément SFR8 devient plus précis que l'élément C3D20 pour les situations où les valeurs des excentricités e_1 et e_2 sont élevées (maillages 6 et 7). L'élément incompatible SFR8I est le plus performant des autres éléments de comparaisons.

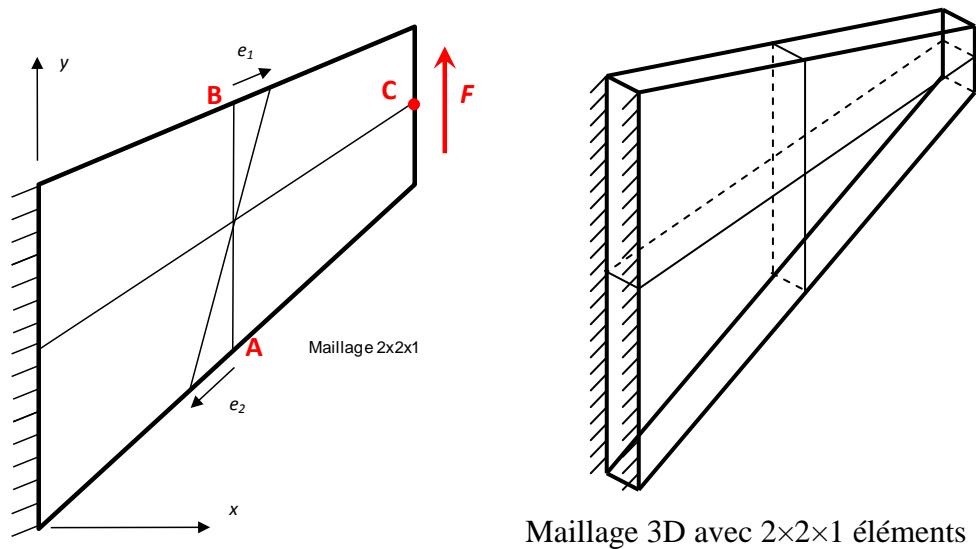


Figure 3.26. Panneau fuselé. Données du problème

Dans le tableau 3.31, nous présentons les contraintes maximale et minimale aux point A et B respectivement. Les contraintes extrêmes $\sigma_{A_{\max}}$ et $\sigma_{B_{\min}}$ sont en général assez bonnes pour le maillage grossier ($2 \times 2 \times 1$). Pour le maillage relativement raffiné ($4 \times 4 \times 1$) l'élément SFR8, avec un seul élément à travers l'épaisseur, donne des résultats comparables et proches des résultats obtenus par les autres éléments où quatre éléments à travers l'épaisseur sont utilisés. Les résultats des contraintes $\sigma_{A_{\max}}$ et $\sigma_{B_{\min}}$ sont globalement satisfaisants. Une très bonne corrélation avec les solutions de référence est en effet observée. Là encore, cette comparaison nous a permis de conclure que l'utilisation du concept SFR dans l'élément hexaédrique permet de représenter l'ensemble des contraintes avec une précision acceptable sans réclamer un nombre de degrés de liberté trop important.

Maillages		SFR8	SFR8I	C3D8	C3D8I	C3D20
N°	Excentricités : e_1 et e_2 Positions des points A et B					
1	$e_1 = e_2 = 0$ A(24,22) ; B(24,52)	0.893	0.933	0.588	0.856	0.930
2	$e_1 = 8.44$; $e_2 = 10.85$ A(16,14.67) ; B(32,54.67)	0.859	0.901	0.441	0.836	0.903
3	$e_1 = 15.17$; $e_2 = 19.53$ A(9.6,8.8) ; B(38.4,56.8)	0.819	0.857	0.366	0.760	0.854
4	$e_1 = 18.07$; $e_2 = 23.25$ A(6.85,6.28) ; B(41.14,57.71)	0.805	0.826	0.343	0.718	0.823
5	$e_1 = 19.67$; $e_2 = 25.32$ A(5.34,4.89) ; B(42.67,58.22)	0.798	0.826	0.331	0.692	0.803
6	$e_1 = 20.69$; $e_2 = 26.63$ A(4.36,4) ; B(43.63,58.54)	0.793	0.819	0.324	0.674	0.789
7	$e_1 = 21.47$; $e_2 = 29.13$ A(2.52,2.31) ; B(45.47,59.15)	0.784	0.807	0.312	0.638	0.759

Tableau 3.30. Panneau fuselé (figure 3.26). Déplacement transverse normalisé au point C avec un maillage distordu ($2 \times 2 \times 1$ éléments)

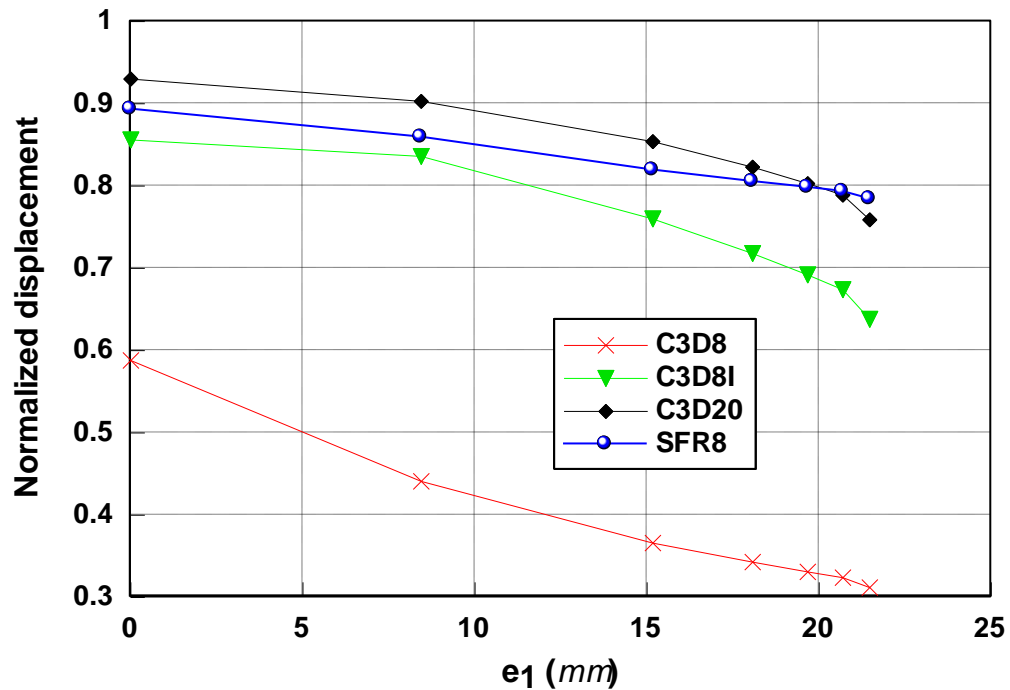


Figure 3.27. Panneau fuselé. Effet du maillage distordu sur la convergence des éléments volumiques

Maillages	SFR8	C3D8	C3D8R	C3D8I	Wilson_H8 [237]	HVCC8-EM [125]
<i>Contrainte maximale en A : $\sigma_{A_{\max}}$ (Solution de référence : 0.2362 [241])</i>						
$2 \times 2 \times 1$	0.1751	0.1389	0.1299	0.1741	0.1433	0.2155
$4 \times 4 \times 1$	0.2205	0.1889 (4 Elt/Ep)	0.1861 (4 Elt/Ep)	0.2172 (4 Elt/Ep)	0.2165 (4 Elt/Ep)	0.2227 (4 Elt/Ep)
<i>Contrainte minimale en B : $\sigma_{B_{\min}}$ (Solution de référence : -0.2023 [241])</i>						
$2 \times 2 \times 1$	-0.1836	-0.0970	-0.0664	-0.1689	-0.1790	-0.2024
$4 \times 4 \times 1$	-0.1983	-0.1337 (4 Elt/Ep)	-0.1282 (4 Elt/Ep)	-0.1804 (4 Elt/Ep)	-0.2236 (4 Elt/Ep)	-0.2000 (4 Elt/Ep)

Tableau 3.31. Panneau fuselé. Résultats des contraintes principales $\sigma_{A_{\max}}$ et $\sigma_{B_{\min}}$

3.3.10. Cylindre pincé avec diaphragmes

Nous reprenons les mêmes données du test 3.2.8. Ce cas test permet de vérifier le comportement de l'élément en flexion et cisaillement. La solution de référence a été établie par la méthode des éléments finis par Kasper et Taylor [75] : $W^{ref} = -1.82488 \times 10^{-5}$. Grâce aux symétries du problème un huitième du cylindre est modélisé avec des maillages réguliers composés de $N = 2, 4, 8, 16$ et 32 éléments par côté. Le tableau 3.32 donne les résultats des déplacements normalisés et la figure 3.28 illustre la courbe de convergence en fonction du nombre total de degrés de liberté (DDL).

On remarque que les résultats donnés par l'élément SFR8 comparés aux autres éléments sont satisfaisants. En particulier, sur la figure 3.28 les déplacements obtenus par le modèle SFR8 sont beaucoup plus précis à ceux obtenus par l'élément standard d'Abaqus C3D8. Pour les maillages grossiers, il semble que l'élément SFR8 à la même précision que les éléments C3D8I et C3D20 respectons le même nombre total de ddl (figure 3.28). De plus, l'élément SFR8 est plus précis que l'élément hexaédrique H1/E9 (pour $N = 16$) qui utilise aussi deux éléments à travers l'épaisseur.

N (Nombre total de ddl)	SFR8 2 Elt/Eps	C3D8 2 Elt/Eps	C3D8I	C3D20	H1/ME9 [75]	H1/E9 [61]
2	0.036 (162)	0.016 (81)	0.028 (106)	0.043 (153)	-	-
4	0.331 (450)	0.035 (225)	0.081 (358)	0.140 (465)	0.107	0.081
8	0.668 (1458)	0.069 (729)	0.406 (1318)	0.523 (1593)	0.496	0.405
16	0.867 (5202)	0.150 (2601)	0.837 (5062)	0.887 (5865)	0.914	0.835 2 Elt/Eps
32	0.943 (19602)	0.325 (9801)	0.975 (19846)	0.988 (22473)	0.992	0.976

Tableau 3.32. Cylindre pincé. Déplacement vertical normalisé

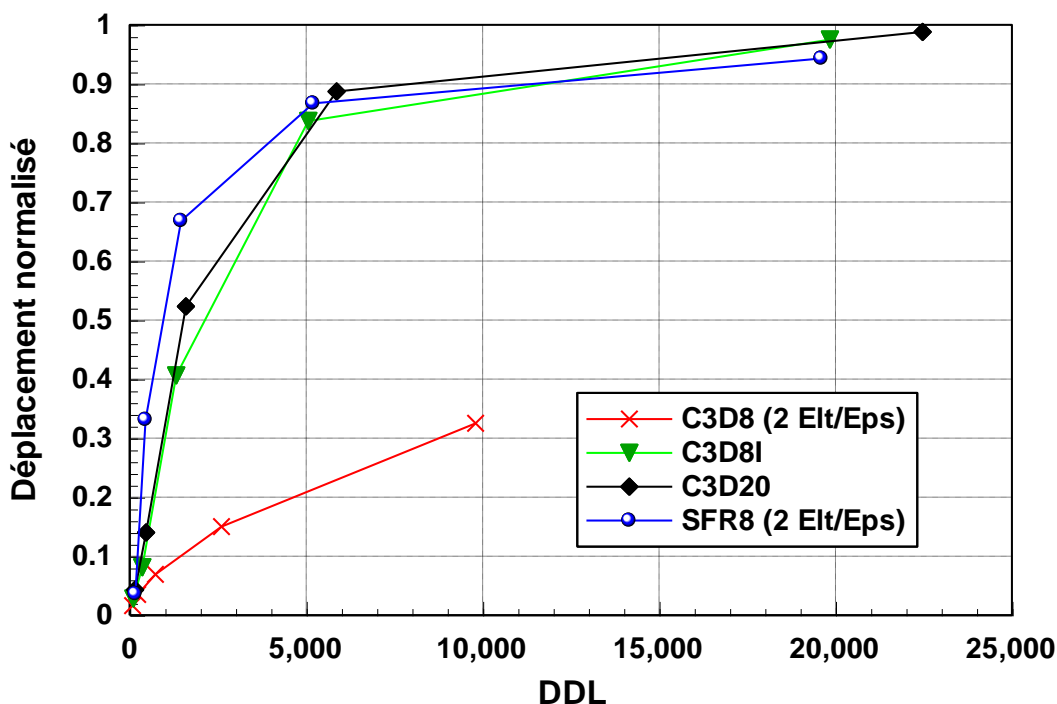


Figure 3.28. Cylindre pincé. Convergence du déplacement normalisé en fonction du nombre total de ddl

3.3.11. Toit cylindrique soumis à son poids propre (Scordelis-Lo roof)

Le toit cylindrique de la figure 3.29 repose sur deux diaphragmes rigides à ses extrémités (bords courbes) et soumis à son propre poids. Ce test est proposé par MacNeal et Harder [235] et appelé (Scordelis-Lo roof). Les rapports d'épaisseur sont importants ($R/h = 100$ et $L/h = 200$). L'exemple est donc un problème de coque mince où les déformations liées à la membrane sont importantes par rapport à celles de la flexion. Ce problème permet de tester l'aptitude d'un élément à simuler des états complexes de déformations de membrane. Grâce à la symétrie du problème, nous discrétisons seulement un quart du toit avec des maillages réguliers de $N = 4, 8, 16$ et 32 éléments sur les bords. La solution de référence basée sur la théorie des coques surbaissées « *shallow shell theory* » est obtenue par Scordelis et Lo [251]. Le déplacement vertical de référence au point A est : $V^{ref} = 0.3086$. Les résultats du déplacement vertical normalisé au point A sont reportés dans le tableau 3.33. Nous avons traité ce problème en utilisant les éléments SFR8, C3D8I, C3D20, HIS, NUHEXIN-4 et HEXDS. Ces deux derniers éléments proposés dans les références [184, 185] ont adopté une solution de référence égale à 0.3024, c'est qui nous amené donc à renormalisés les résultats obtenus par ces éléments utilisant la valeur 0.3086.

Dans cet exemple, l'élément SFR8 donne des très bons résultats et converge rapidement vers la solution de référence. L'élément SFR8 réussit donc parfaitement à modéliser les déformations de membrane et entraîne des résultats plus performants que ceux obtenus par les autres éléments de comparaisons. En effet, pour un maillage trop grossier ($N = 4$), l'élément SFR8 peut entraîner des résultats corrects sur des problèmes où l'élément hexaédrique à 8 nœuds standard souffre de verrouillage numérique.

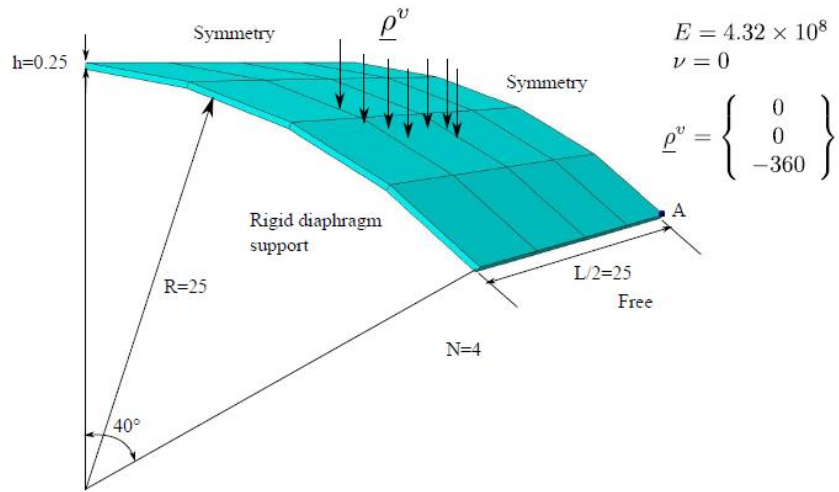


Figure 3.29. Toit cylindrique soumis à son poids propre (Scordelis-Lo roof)

N	SFR8	C3D8I	C3D20	HIS [163]	NUHEXIN-4 [184]	HEXDS [185]
4	1.002 (300)	0.539 (358)	0.809 (465)	1.029	-	-
8	0.993 (972)	0.947 (1318)	0.978 (1593)	1.001	1.138	1.133
16	0.994 (3468)	0.991 (5062)	0.992 (5865)	0.992	1.121	1.114
32	0.994 (13068)	0.993 (19846)	0.993 (22473)	0.991	1.117	1.109

Tableau 3.33. Toit cylindrique (Scordelis-Lo roof). Déplacement vertical normalisé du point A

3.4. Validation des éléments SFR en vibrations libres

Cette section est consacrée au calcul des valeurs propres. Le problème des valeurs propres est important à tous les niveaux scientifiques et également dans les calculs numériques d'ingénieur. Une matrice de masse $[M]$ cohérente complète est déterminée et on cherche les fréquences f obtenues en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$[K] \cdot \{U_i\} = \lambda_i [M] \cdot \{U_i\} \text{ avec } \lambda_i = \omega_i^2 ; f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (3.11)$$

Les λ_i sont appelés les valeurs propres, $\{U_i\}$ sont les vecteurs propres (ou modes propres) associés et f_i est une fréquence propre de la structure. $[K]$ et $[M]$ étant symétriques, les valeurs propres λ_i sont réelles. Il existe beaucoup de méthodes mathématiques formulant le problème de valeurs propres et de méthodes numériques résolvant ce problème [252]. Dans le cadre de ce travail de thèse, on utilise l'algorithme de la méthode d'itération inverse avec l'orthogonalisation de Gram-Schmidt proposé par Batoz et Dhatt [16] pour obtenir les plus petites valeurs propres.

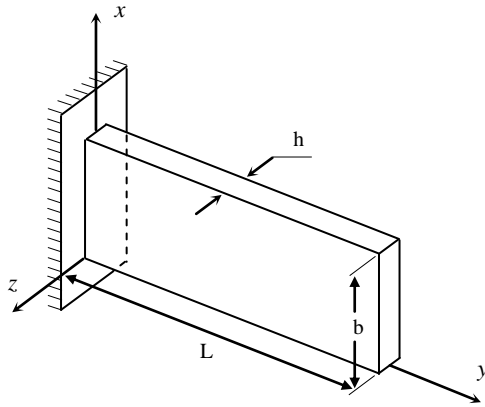
Les matrices de masse des éléments SFR6 et SFR8 sont évaluées à l'aide de deux approches différentes. Dans la première approche les matrices de masse sont calculées en utilisant seulement les degrés de liberté de translations (termes en u , v et w) tandis que les termes associés aux rotations sont négligés. La deuxième approche consiste à évaluer les matrices de masse totales (pleines) en utilisant les degrés de liberté de translation et de rotation. À partir des tests numériques, il a été observé que l'utilisation de la matrice masse totale donne des résultats plus précis que la matrice masse qui néglige les termes associés aux degrés de liberté de rotation. Par conséquent, l'approche de la matrice masse totale a été retenue dans la suite des tests de validation des modèles SFR en vibrations libres.

Dans cette section, nous allons mettre en œuvre les éléments SFR en vibration libre et montrer qu'ils sont efficaces pour étudier les modes et fréquences propres de vibration des structures 3D. La validation de ces éléments en vibrations libres a pour but de confirmer l'exactitude de la formulation de la matrice de masse. Pour cela, nous allons nous appuyer sur deux structures tests : une poutre isotrope à section rectangulaire et une aube de compresseur très mince. Le calcul des modes et fréquences propres d'une poutre est très utilisés dans l'analyse vibratoire. Il permet de déterminer la réponse intrinsèque à la structure, c'est-à-dire qui ne dépend pas des sollicitations extérieures, et qui définit le spectre des fréquences et des déformées (modes). Le modèle simplifié d'aube de compresseur est également très souvent utilisé pour valider les modèles dynamiques [18, 253].

3.4.1. Vibrations libres d'une poutre libre/encastree

Ce test a pour objectif de tester les éléments volumiques basés sur le modèle SFR (SFR6 et SFR8) en vibrations libres. Nous cherchons à déterminer les différentes fréquences comprises entre 0 et 150 Hz, d'une poutre dont une extrémité est encastree. Les données géométriques et les propriétés du matériau de la poutre sont illustrées dans la figure 3.30. Les solutions de référence qui servent à la comparaison sont des solutions analytiques obtenues par la théorie des poutres pour les fréquences propres de vibration en flexion dans les deux directions (*i.e.*, plans yz et xy) classées dans un ordre croissant :

$$\omega_k = \frac{\lambda_k}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \text{ avec } \cos(\lambda_k) \cosh(\lambda_{k+1}) = 0 \quad (3.12)$$



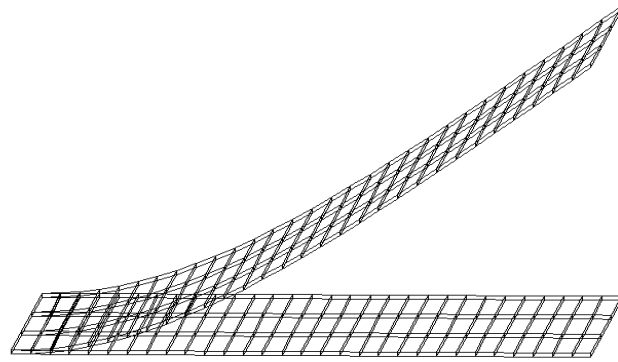
Longueur : $L = 1 \text{ m}$
 Largeur : $b = 0.1 \text{ m}$
 Epaisseur : $h = 0.01 \text{ m}$
 Module d'Young : $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
 Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$
 Densité volumique : $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$

Figure 3.30. Vibrations libres d'une poutre encastree

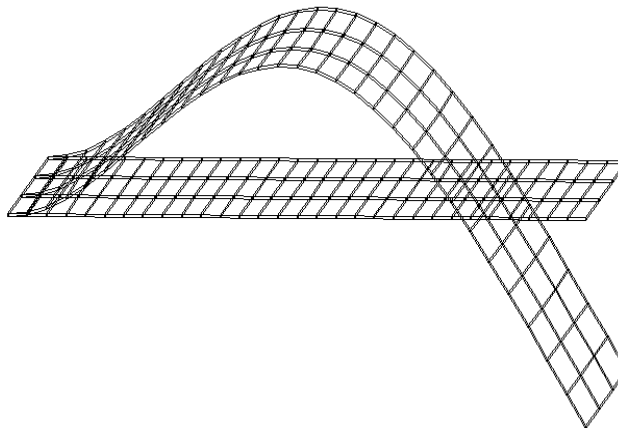
Les résultats numériques des fréquences propres pour les deux éléments SFR6 et SFR8 sont présentés dans le tableau 3.34. Ces résultats sont comparés aux résultats analytiques de la théorie des poutres et aussi aux résultats obtenus avec l'élément prismatique solide-coque SHB6 [21]. Les résultats obtenus par les éléments volumiques linéaires W6 et H8 (prismatique à 6 nœuds et hexaédrique à 8 nœuds) seront également introduits dans la comparaison. D'après le tableau des résultats, on peut dire que le modèle SFR améliore remarquablement les résultats des éléments linéaires prismatique à 6 nœuds W6 et hexaédrique à 8 nœuds H8. De plus, l'élément prismatique SFR6 donne des résultats plus précis que l'élément solide-coque à 6 nœuds SHB6 présenté par Trinh [21]. Une autre observation intéressante est que, même pour le troisième mode propre qui implique un nombre plutôt petit des points d'intégration (1 point dans le plan x - y), l'élément prismatique à 6 nœuds SFR6 montre encore un comportement satisfaisant et moins sensible à l'orientation du maillage. Sur la figure 3.31 sont représentés les modes 1, 2 et 4 de vibrations libres obtenus par l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8.

Maillages	Eléments	$f_1^{ref} = 8.4$		$f_2^{ref} = 52.5$		$f_3^{ref} = 83.8$		$f_4^{ref} = 147.1$	
		f_1	$\frac{f_1}{f_1^{ref}}$	f_2	$\frac{f_2}{f_2^{ref}}$	f_3	$\frac{f_3}{f_3^{ref}}$	f_4	$\frac{f_4}{f_4^{ref}}$
$(30 \times 3 \times 1) \times 2$	W6	12.61	1.50	79.17	1.50	95.89	1.14	223.40	1.51
	SHB6	9.56	1.14	59.61	1.14	97.06	1.16	165.60	1.13
	SFR6	8.90	1.06	55.83	1.06	81.09	0.96	156.17	1.06
$(30 \times 3 \times 1)$	H8	19.77	2.35	85.96	1.63	124.0	1.48	168.25	1.14
	SFR8	8.94	1.06	55.91	1.06	84.02	1.00	156.88	1.06

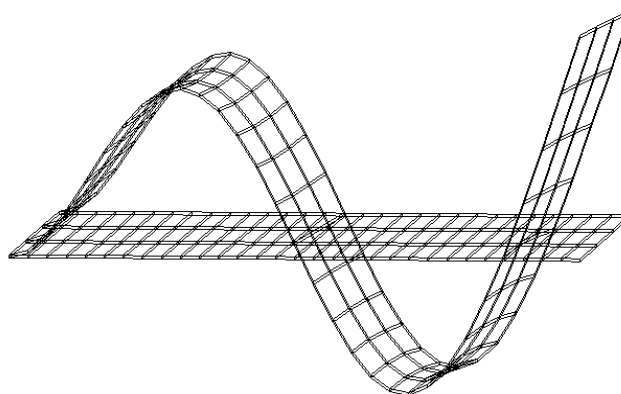
Tableau 3.34. Fréquences propres de la poutre encastree



(a). 1^{er} mode de flexion suivant l'épaisseur



(b). 2^{ème} mode de flexion suivant l'épaisseur

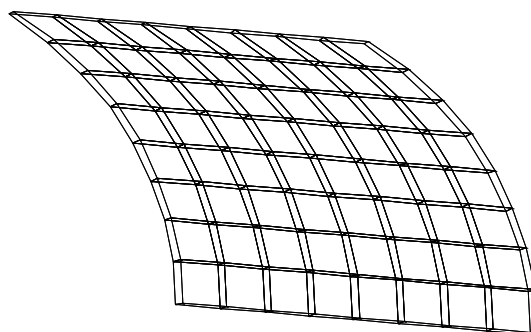
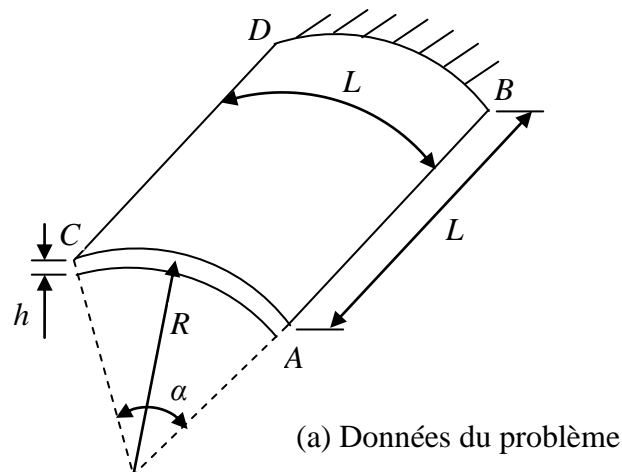


(c). 4^{ème} mode de flexion

Figure 3.31. Modes propres de la poutre encastree obtenus avec un maillage consistant en $30 \times 3 \times 1$ éléments SFR8

3.4.2. Vibrations libres d'une aube de compresseur

La figure 3.32 montre la géométrie d'une aube de compresseur encastrée à une extrémité et libre sur les autres côtés. Ce test est étudié par Batoz et Dhatt [18] pour valider les modèles coques en dynamiques. Les données géométriques et les propriétés mécaniques de l'aube sont reportées dans le tableau 3.35. Cette aube est relativement courte ($L/R = 0.5$) et mince ($L/h = 100$). On modélise l'aube entière avec un maillage de $(8 \times 8 \times 1) \times 2$ éléments prismatiques et $(8 \times 8 \times 1)$ éléments hexaédriques. Les fréquences obtenues par les éléments SFR6 et SFR8 sont comparées avec les résultats expérimentaux obtenus par Olson et Lindberg [253] et numériques obtenus avec les éléments volumiques classiques W6 et H8. Nous rajoutons aussi à cette comparaison les solutions obtenues par l'élément quadrilatéral à 8 nœuds HSQ20 (5ddl/nœud) proposé par Bouabdallah [254] et l'élément coque 3D de code de calcul par éléments finis Aster [255]. Les résultats des différentes fréquences associées aux modes de vibrations sont représentés dans le tableau 3.36. Les fréquences obtenues par les modèles SFR semblent tout à fait satisfaisantes. Les éléments SFR6 et SFR8 sont plus précis que les éléments linéaires W6 et H8 respectivement, et conduisent à un meilleur conditionnement de la matrice de masse. Leurs résultats sont comparables et proches des résultats de l'élément coque 3D [255] et meilleurs de ceux de l'élément quadrilatéral à 8 nœuds HSQ20 [254]. Les modes 3 et 5 sont représentés sur la figure 3.33.



(b) Maillage 3D avec $8 \times 8 \times 1$ éléments SFR8

Figure 3.32. Vibrations libres d'une aube de compresseur

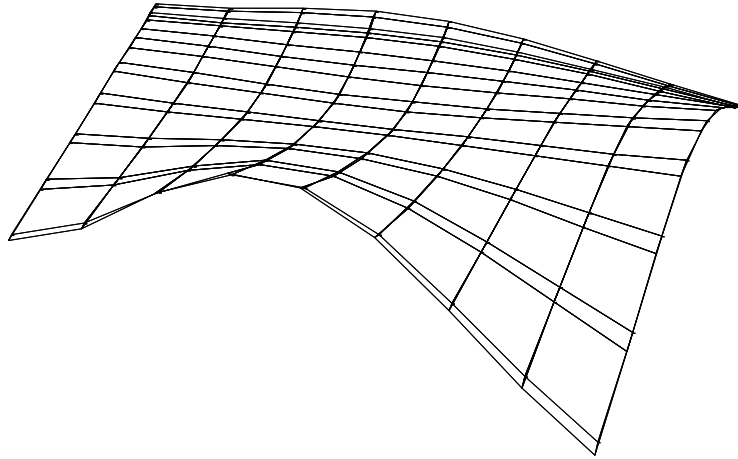
Longueur ; Rayon	$L = 0.3048 \text{ m} ; R = 0.6096 \text{ m}$
Epaisseur ; Angle	$h = 3.048 \times 10^{-3} \text{ m} ; \alpha = 0.5 \text{ rad}$
Module d'Young ; Coefficient de Poisson	$E = 2.0685 \times 10^{11} \text{ Pa} ; \nu = 0.3$
Densité volumique	$\rho = 7857.2 \text{ Kg/m}^3$
Conditions aux limites (encastrement sur DB)	$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

Tableau 3.35. Aube de compresseur. Données [18]

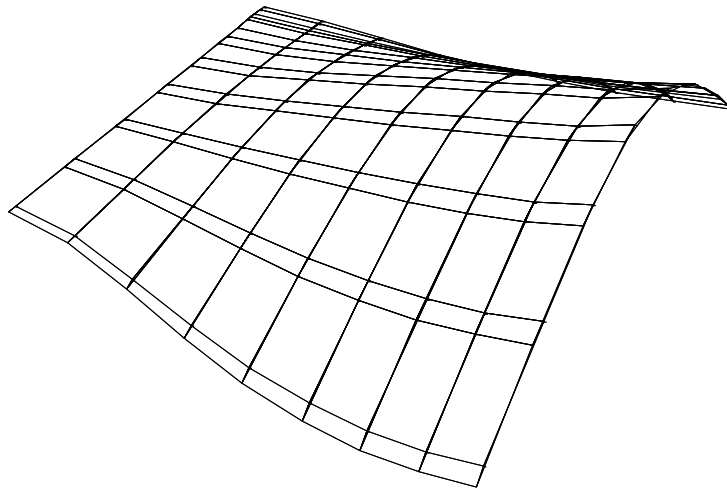
Modes	Fréquences (Hz)	Eléments						
		H8 (8×8×1)	Coque 3D (6×6) [255]	HSQ20 (4×4) [254]	W6 (8×8×1)×2	SFR8 (8×8×1)	SFR6 (8×8×1)×2	
Mode 1 (A)	$f_1^{réf} = 85.6$	f_1	229.8	85.8	85.52	179.7	86.3	85.8
		$f_1/f_1^{réf}$	2.68	1.00	0.99	2.09	1.01	1.00
Mode 2 (S)	$f_2^{réf} = 134.5$	f_2	265.7	138.5	141.2	433.8	140.0	140.7
		$f_2/f_2^{réf}$	1.97	1.03	1.05	3.22	1.04	1.04
Mode 3 (S)	$f_3^{réf} = 259$	f_3	1392	246.9	245.72	730.7	257.7	257.8
		$f_3/f_3^{réf}$	5.37	0.95	0.95	2.82	0.99	0.99
Mode 4 (A)	$f_4^{réf} = 351$	f_4	1453	342.7	370.64	1152	352.6	329.9
		$f_4/f_4^{réf}$	4.13	0.97	1.05	3.28	1.00	0.94
Mode 5 (S)	$f_5^{réf} = 395$	f_5	1413	386.6	410.38	1399	400.2	375.1
		$f_5/f_5^{réf}$	3.57	0.98	1.04	3.54	1.01	0.95
Mode 6 (A)	$f_6^{réf} = 531$	f_6	1794	531.6	554.81	1472	587.3	524.7
		$f_6/f_6^{réf}$	3.37	1.00	1.04	2.77	1.10	0.99

(A) mode antisymétrique ; (S) : mode symétrique

Tableau 3.36. Fréquences propres d'une aube de compresseur



(a) Mode de vibration 3, fréquence 259 Hz



(b) Mode de vibration 5, fréquence 395 Hz

Figure 3.33. Modes propres d'une aube de compresseur encastrée obtenus avec un maillage consistant en $8 \times 8 \times 1$ éléments SFR8

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, les tests les plus classiques rencontrés dans la littérature technique en élasticité linéaire isotrope ont été analysés. Pour la plupart de ces tests, les comparaisons ont été effectuées par rapport aux éléments volumiques classiques d'interpolation linéaires : prismatique à 6 nœuds W6 et hexaédrique à 8 nœuds H8 ; et d'interpolation quadratiques : prismatique à 15 nœuds W15 et hexaédrique à 20 nœuds H20. Si nous analysons les résultats de cette étude, les éléments SFR apparaissent beaucoup plus efficaces que les éléments classiques du premier ordre W6 et H8. De plus, les éléments SFR sont beaucoup moins sensibles au type de maillage utilisé, que ce soit pour la densité ou pour la distorsion du maillage. Le concept de la fibre spatiale en rotation, expliqués dans le chapitre 2, a permis d'améliorer remarquablement les résultats des éléments volumiques standards et d'éviter certains verrouillages numériques. A côté de ces améliorations, cette nouvelle formulation conserve les principaux avantages de l'intégration numérique réduite. Ainsi, nous avons pu montrer que les éléments volumiques SFR6 et SFR8 réussissent tous les patch-tests 3D de modes rigides et de déformations constantes. Pour résoudre le problème de verrouillage de Poisson détecté dans la version conforme de l'élément SFR8 nous avons recouru à la méthode de modes incompatibles en ajoutant trois modes dans ce dernier. Une amélioration intéressante des résultats est observée dans la version non conforme SFR8I et l'élément est libre du verrouillage de Poisson.

A travers les différents tests de convergence et de précision appliqués aux éléments volumiques SFR6, SFR8 et SFR8I, nous avons démontré l'intérêt de notre approche dans le cadre de la modélisation des solides et des structures tridimensionnelles. L'examen du rang de la matrice de rigidité des éléments SFR sous-intégrés stabilisés a permis de conclure que l'utilisation de la technique proposée de stabilisation était suffisante pour assurer le bon comportement de ces éléments et d'obtenir un rang correct des matrices de rigidités élémentaires. Lors de ces tests, nous avons constaté aussi que les résultats des modèles SFR n'ont pas été trop altérés par ce traitement des modes parasites.

Nous avons, en outre, apprécié le temps de calcul en analysant le nombre total de degrés de liberté de la structure et cela en comparant le nombre des ddl des éléments SFR, 6 ddl par nœud, sous-intégrés et ceux des éléments quadratiques, 3 ddl de translation par nœud, intégrés exactement. Sachant que les éléments SFR6 et SFR8 possèdent respectivement 36 et 48 ddl par élément, et les éléments quadratiques W15 et H20 possèdent respectivement 45 et 60 ddl par élément, ceci nous amène à dire que les éléments SFR ont les mêmes performances des éléments quadratiques, respectons le même nombre de degrés de liberté total. Ainsi, la méthode d'intégration réduite a connu une forte popularité grâce principalement à son faible coût en termes de temps de calcul. Nous avons également testé les éléments SFR en vibrations libres à travers deux tests standards. Les résultats obtenus ont montrés l'efficacité des éléments SFR. L'utilisation des matrices de masse cohérentes complètes avec une intégration numérique réduite peut permettre aussi une bonne estimation des fréquences pour un maillage relativement grossier.

En conclusion, on peut remarquer que les éléments SFR, en élasticité linéaire pour des cas de chargements statiques et dynamiques (vibrations libres), apportent des résultats tout à fait satisfaisants en regard de leur formulation qui reste relativement simple. Les résultats donnés par ces éléments sont relativement corrects en ce qui concerne le calcul des déplacements et des contraintes. D'autres résultats de ces travaux sont publiés dans les références Meftah *et al.* [58] et Ayad *et al.* [51]. Les éléments SFR apparaissent donc comme une alternative intéressante aux éléments finis volumiques standards.

Après avoir étudié les éléments SFR en élasticité linéaire pour les matériaux isotrope, nous allons présenter dans le chapitre suivant des procédures d'adaptations du modèle SFR aux structures composites stratifiées.

Chapitre 4.

Adaptation du modèle SFR aux structures composites

Sommaire

4.1. Introduction	121
4.2. Adaptation du modèle SFR aux composites multicouches. Approche par couche orthotrope élémentaire	123
4.2.1. Dédution de la matrice de rigidité pour le modèle SFR Orthotrope	123
4.2.2. Matrice d'élasticité pour une couche orthotrope élémentaire	123
4.2.3. Validation numérique des éléments SFR Orthotropes	125
4.3. Formulation des éléments SFR Multicouches	135
4.3.1. Matrice de rigidité élémentaire	135
4.3.2. Calcul des contraintes	137
4.3.3. Validation numérique des éléments SFR Multicouches	141
4.4. Conclusion	154

4.1. Introduction

Les matériaux composites sont largement rencontrés dans de nombreuses applications où ils apportent une rigidité accrue sans augmentation de la masse excessive. La modélisation du comportement de tels matériaux, et en particulier les matériaux multicouches, est cependant toujours difficile à mettre en œuvre. La modélisation des structures composites épaisses avec des éléments finis bidimensionnels produit souvent des estimations erronées des contraintes et des déformations dans la direction transversale. Ce qui rend la modélisation par éléments finis 3D plus adaptée dans ce cas. L'analyse des structures composites épaisses doit impliquer non seulement le comportement global structurel, mais devrait également inclure l'état de contrainte tridimensionnel complet. Traditionnellement, différentes approches ont été utilisées pour modéliser les structures composites stratifiées épaisses (figure 4.1) [256]. Elles peuvent être modélisées avec des éléments de type coque 3D. Ces éléments ont six degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) par nœud. En outre, des éléments de type solide-coque sans degrés de liberté en rotation (seulement les ddl de translation) ont été aussi utilisés [257, 258]. Une autre approche évidente de discrétisation consiste d'utiliser un élément solide dans l'épaisseur pour chaque couche de la stratifiée. En dehors de la modélisation par éléments ci-dessus, différentes techniques d'homogénéisation, comme la théorie classique des stratifiés, ont été utilisées. Ces approches permettent d'économiser le temps de calcul et peuvent être utilisées pour représenter le comportement global structurel dans le domaine linéaire élastique. Cependant, elles ne peuvent pas être utilisées dans l'analyse contrainte-déformation tridimensionnelle spécialement en ce qui concerne la représentation des

contraintes à travers l'épaisseur ou dans le cas d'évolution de l'endommagement dans le stratifié [256].

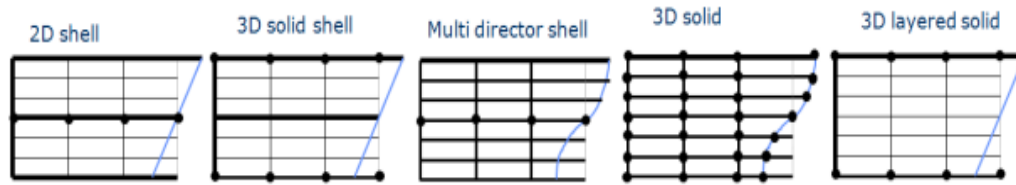


Figure 4.1. Modélisation cinématique des structures composites stratifiées avec différents modèles [256, 259]

A l'heure actuelle, il est évident qu'on devrait aborder le dimensionnement des structures multicouches par les éléments finis volumiques. En effet, les stratifications seront prises en compte dans le modèle 3D-volumique. Rappelons qu'un des avantages de ces modèles est d'éviter l'introduction de facteurs de correction du cisaillement transversal (CT) pour les structures stratifiées utilisés par des éléments finis de plaques et de coques épaisses. Ces facteurs étant nécessaires pour palier au problème de distribution constante des contraintes de CT à travers l'épaisseur, induite par l'utilisation de l'hypothèse cinématique de Mindlin. Les structures stratifiées sont souvent minces ou modérément épaisses et peuvent être modélisées par des éléments coques. Les modèles de type coque, reposent sous les hypothèses de contraintes planes et par conséquent n'intègrent pas les effets tridimensionnels locaux qu'engendrent le phénomène de cisaillement transversal. Par ailleurs, une modélisation 3D complète avec des éléments finis volumiques classiques occasionne des coûts de calculs prohibitifs ainsi des problèmes de blocages numériques pour les structures minces. Une alternative réside en l'élaboration d'éléments finis volumiques de premier ordre destinés aux calculs des structures composites stratifiées, garantissant ainsi une haute précision. L'utilisation des éléments volumiques SFR [51, 58] pour les matériaux élastiques isotropes a montré qu'ils sont capable de donner des résultats meilleurs que les éléments volumiques classiques de premier ordre et parfois équivalents à ceux des éléments volumiques quadratiques. Ce constat nous a donc motivé à adapté les éléments SFR aux structures composites multicouches.

C'est dans ce cadre que le présent chapitre traitera l'adaptation des éléments volumiques SFR aux cas des matériaux composites multicouches. Nous développons dans un premier lieu (§ 4.2), deux éléments volumiques de type composite orthotrope (un élément solide par couche), nommés SFR8O et SFR6O (Space Fiber Rotation – Orthotrope), basés sur le concept SFR destinés aux calculs des structures composites multicouches minces et épaisses. Ces éléments développés sont de formes hexaédrique à 8 nœuds et prismatique à 6 nœuds avec 6 ddl par nœuds. La modélisation des structures multicouches par ces éléments volumiques consiste à utiliser un élément SFR par couche à travers l'épaisseur. Nous développerons en second lieu (§ 4.3) deux modèles d'éléments finis volumiques iso-paramétriques multicouches SFR6M et SFR8M (Space Fiber Rotation – Multilayer) basée aussi sur le modèle SFR décrit dans le chapitre 2. Ces formulations consistent à intégrer l'empilement de plusieurs couches directement dans un seul élément dans l'épaisseur de l'élément volumique SFR. Le tenseur complet des contraintes est calculé à travers deux étapes. Dans la première étape, les contraintes planes sont calculées par l'utilisation de la loi constitutive. Dans la deuxième étape, les contraintes transversales sont calculées par l'utilisation des lois d'équilibre 3D. Pour la validation de ces éléments volumiques composites orthotropes et multicouches, des exemples académiques sont effectués à la fin de chaque formulation.

4.2. Adaptation du modèle SFR aux composites multicouches. Approche par couche orthotrope élémentaire

Dans cette section on présente deux éléments finis volumiques relativement simple, basés sur le modèle SFR, destiné à l'analyse des structures réalisées en matériaux composites renforcés par des fibres unidirectionnelles. Ces éléments, baptisés SFR8O et SFR6O (Space Fiber Rotation-Orthotrope), sont hexaèdre et prisme à 8 et à 6 nœuds, respectivement, où l'épaisseur de l'élément est égale à celle d'une couche (un élément solide par couche orthotrope).

4.2.1. Déduction de la matrice de rigidité pour le modèle SFR Orthotrope

Pour chaque couche, un composite unidirectionnel est considéré où la direction de renforcement étant caractérisée par l'angle θ entre la direction des fibres et celle de l'axe Ox (figure 4.2). Le système d'axes local $(O,1,2,3)$ est choisi de telle manière que l'axe $O1$ soit orienté sur la direction des fibres de renforcement, $O2$ perpendiculaire à celle-ci et $O3 \equiv Oz$ perpendiculaire sur le plan de la couche. Dans cette étude, on a considéré que les couches sont orthotropes, parallèles les unes aux autres et bien collées de tel sorte que les effets d'interface fibre-matrice sont négligeables.

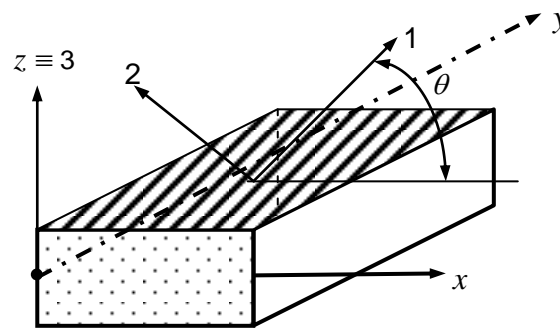


Figure 4.2. Systèmes d'axes local (1,2,3) et global (x,y,z) pour un stratifié plan

4.2.2. Matrice d'élasticité pour une couche orthotrope élémentaire

La relation entre les contraintes locales et les déformations locales pour une couche est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\bar{\varepsilon}\} = [\bar{C}] \cdot \{\bar{\sigma}\} \quad (4.1)$$

avec :

E_1 , E_2 et E_3 : Modules de traction dans les directions d'orthotropie 1, 2 et 3.

G_{12} , G_{13} et G_{23} : Modules de cisaillement dans les plans 1-2, 1-3 et 2-3.

ν_{12} , ν_{13} et ν_{23} : Coefficients de Poisson vérifiant les conditions de symétrie.

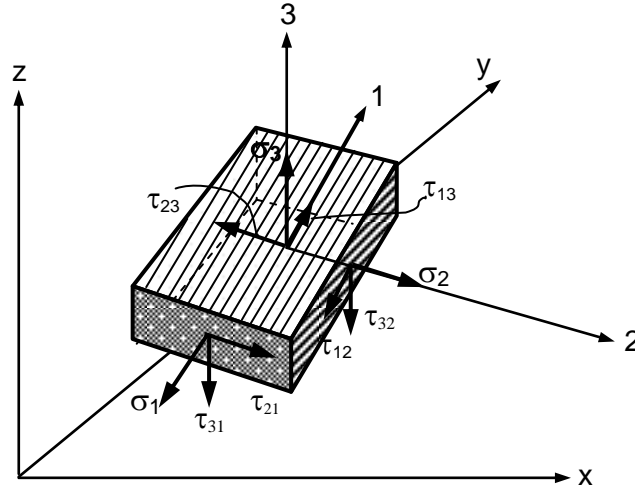


Figure 4.3. Tenseur des contraintes dans une couche, en coordonnées locales

$\{\bar{\varepsilon}\}$ est le tenseur des déformations pour une couche, en coordonnées locales, $\{\bar{\sigma}\}$ est le tenseur des contraintes pour une couche (figure 4.3), en coordonnées locales et $[\bar{C}]$ est la matrice de souplesse, rapportée au système d'axes local.

En inversant la relation (4.1), on obtient la relation suivante :

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{H}] \cdot \{\bar{\varepsilon}\} \quad \text{où} \quad [\bar{H}] = [\bar{C}]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} & \bar{H}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{H}_{12} & \bar{H}_{22} & \bar{H}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{H}_{13} & \bar{H}_{23} & \bar{H}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{H}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{H}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{H}_{66} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Reportons la relation (4.2) au système des coordonnées global $Oxyz$ on obtient :

$$\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\} \quad (4.3a)$$

où

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T ; \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (4.3b)$$

et

$$[H] = [T] \cdot [\bar{H}] \cdot [T]^T \quad (4.4)$$

avec

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ cs & -cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}, \quad c = \cos(\theta) \text{ et } s = \sin(\theta). \quad (4.5)$$

$[H]$ est la matrice d'élasticité dans le repère global (Annexe C), $[T]$ est la matrice de transformation reliant $\{\bar{\varepsilon}\}$ et $\{\varepsilon\}$ et θ est l'angle d'orientation des fibres (figure 4.2).

Les matrices de rigidité élémentaire des éléments SFR8O et SFR6O sont :

$$[K^e]_{SFR8O} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [H] [B] \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (4.6)$$

$$[K^e]_{SFR6O} = \int_{-1}^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{\eta} [B]^T [H] [B] \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (4.7)$$

4.2.3. Validation numérique des éléments SFR Orthotropes

Afin de valider la pertinence des éléments SFR Orthotropes, différents exemples sont étudiés. Ces exemples traitent la flexion d'une plaque carrée multicouche. Dans un premier temps, la plaque est soumise à une charge uniforme. Sans solution analytique d'élasticité 3D connue, une comparaison avec les résultats des éléments finis 3D et quelque modèle théoriques et numériques connus dans la littérature sera présentée. Dans un second temps, nous étudions la même plaque mais cette fois-ci, elle soumise à une charge doublement sinusoïdale. La solution de référence est tirée de l'analyse élastique 3D [260]. Nous étudierons également cette plaque en changeant le rapport d'élanement et le nombre de couches ou de stratifications ainsi que pour diverses géométries et conditions aux limites. Notons que pour tous ces tests, on modélise chaque couche avec un élément solide SFR ou plus à travers l'épaisseur et les contraintes sont calculées directement aux nœuds de chaque élément.

Les dimensions de la plaque multicouche suivant x , y et z sont L , L et h , respectivement (figure 4.4). Le problème est symétrique, nous prend 1/4 de la plaque. Les données géométriques, les propriétés mécaniques du matériau et les conditions aux limites sont données dans le tableau 4.1. Cinq cas seront étudiés :

Cas 1 : Plaque carrée avec une couche orthotrope (0°) soumise à une charge uniforme,

Cas 2 : Plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à une charge uniforme,

Cas 3 : Plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à une charge doublement sinusoïdale,

Cas 4 : Plaque carrée stratifiée à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à un chargement doublement sinusoïdal avec différentes conditions aux limites,

Cas 5 : Plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à une charge sinusoïdale.

Les contraintes et les déplacements rapportés dans les tableaux suivants sont de forme adimensionnelles :

$$\bar{w}(x = L/2, y = L/2, z = 0) = \frac{100E_2h^3}{q_0 \cdot L^4} w ; \bar{u}(x = 0, y = \frac{L}{2}, z = \mp \frac{h}{2}) = \frac{E_2h^2}{q_0 \cdot L^3} w \quad (4.8a)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(x = L/2, y = L/2) = \frac{h^2}{q_0 \cdot L^2} \sigma_{xx} ; \bar{\sigma}_{yy}(x = L/2, y = L/2) = \frac{h^2}{q_0 \cdot L^2} \sigma_{yy} \quad (4.8b)$$

$$\bar{\tau}_{xy}(x = 0, y = 0) = \frac{h^2}{q_0 \cdot L^2} \tau_{xy} ; \bar{\tau}_{yz}(x = L/2, y = 0) = \frac{h}{q_0 \cdot L} \tau_{yz} \quad (4.8c)$$

$$\bar{\tau}_{xz}(x = 0, y = L/2) = \frac{h}{q_0 \cdot L} \tau_{xz} ; \bar{\sigma}_{zz}(x = L/2, y = L/2) = \frac{h}{q_0 \cdot L} \sigma_{zz} \quad (4.8d)$$

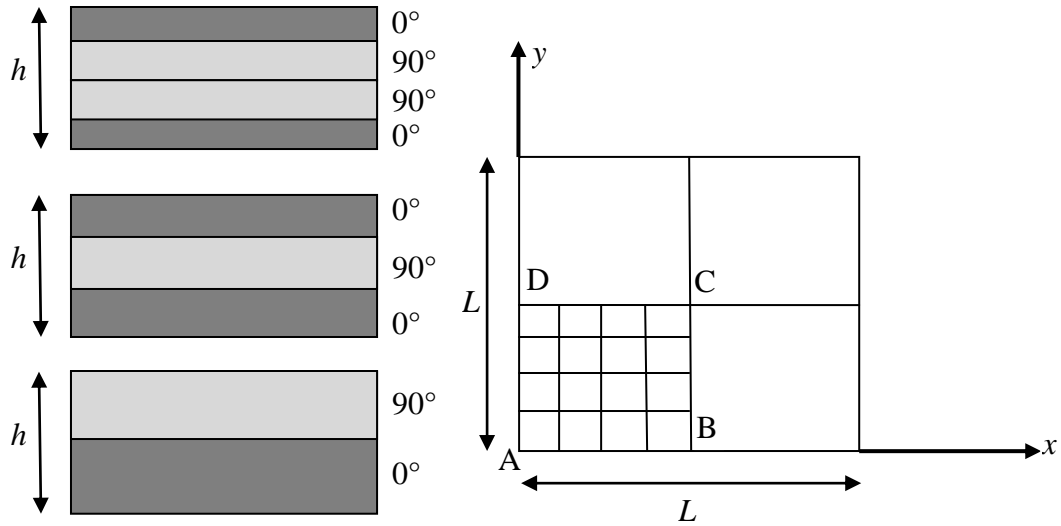


Figure 4.4. Plaque carrée stratifiée à 2, 3 et 4 couches

Géométrie	$L = 20 \text{ cm} ; h = 1, 2 \text{ et } 4 \text{ cm}$
Matériau orthotrope	$E_1 = 250 \text{ GPa} ; E_2 = E_3 = 10 \text{ GPa} ; \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25$ $G_{12} = G_{13} = 5 \text{ GPa} ; G_{23} = 2 \text{ GPa}$
Conditions aux limites : SS (Simplement supportée)	Sur $x = 0$ et $x = L : v = w = \theta_x = \theta_z = 0$ Sur $y = 0$ et $y = L : u = w = \theta_y = \theta_z = 0$
Stratifications	1. Une couche 0° ; $h^k = h$
	2. Deux couches $0/90^\circ$; $h^k = \frac{1}{2}h$
	3. Trois couches $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$; $h^k = \frac{1}{3}h$
	4. Quatre couches $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$; $h^k = \frac{1}{4}h$
Chargements	Uniforme : $q_0 = 100 \text{ kN/m}^2$
	Doublement sinusoïdal : $q = q_0 \sin(\frac{\pi x}{L}) \sin(\frac{\pi y}{L}) ; q_0 = 100 \text{ kN/m}^2$

Tableau 4.1. Plaque carrée multicouche. Données du problème

4.2.3.1. Plaque carrée avec une couche (0°) orthotrope soumise à une charge uniforme

Dans cet exemple, le test académique de plaque carrée avec une couche (0°) orthotrope en flexion est étudié. La plaque est soumise à une charge uniforme pour différentes valeurs de l'élanement $h/L = 0.05, 0.1$ et 0.2 . Les résultats obtenus par les éléments SFR Orthotropes sont reportés sur le tableau 4.2. Ces résultats sont comparés avec la solution analytique obtenue avec la théorie des plaques FSDT « *First-order Shear Deformation Theory* » [261], la méthode EFG « *Element-free Galerkin* » basée sur la théorie FSDT [262] et la solution numérique par la méthode des éléments finis 3D (FEM-3D) obtenue par Xiao *et al.* [263] avec l'élément volumique hexaédrique à 20 nœuds du code commercial ABAQUS. Les résultats présentés par FEM-3D sont obtenus avec un maillage de $20 \times 20 \times 12$ éléments hexaédriques à 20 nœuds. Nous avons aussi utilisé deux autres modèles numériques comme solution de référence, il s'agit de MQ-MLPG1 et TPS-MLPG1 développés par Xiao *et al.* [263] à l'aide de la théorie HOSNDPT « *Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory* ». Les maillages considérés dans cet exemple pour les éléments SFR Orthotropes sont : $4 \times 4 \times 3$ et $8 \times 8 \times 3$ éléments SFR8O et $(8 \times 8 \times 3) \times 2$ éléments SFR6O. Nous remarquons que les modèles SFR orthotropes donnent des résultats généralement acceptables pour les déplacements et les contraintes. L'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8O, donne des résultats très proches des résultats obtenus par le modèle FEM-3D pour tous les élanements h/L . L'élément SFR8O montre un très bon accord avec les résultats de référence disponibles dans la littérature. Cependant, les résultats de l'élément prismatique à 6 nœuds SFR6O sont moins précis que ceux du modèle FEM-3D.

h/L	Modèles	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
0.05	FEM-3D [263]	0.7255	0.7961	0.0277	0.0504	0.7674	0.1921
	FSDT-Exact [261]	0.7262	0.7828	0.0272	0.0487	0.6194	0.1466
	FSDT-EFG [262]	0.7281	0.7776	0.0285	0.0467	0.6041	0.1476
	MQ-MLPG1 [263]	0.6988	0.7725	0.0310	0.0462	0.5200	0.1495
	TPS-MLPG1 [263]	0.6919	0.7650	0.0310	0.0460	0.4760	0.1310
	SFR8O (4×4×3)	0.7063	0.7772	0.0284	0.0432	0.6746	0.0947
	SFR8O (8×8×3)	0.7197	0.7920	0.0290	0.0476	0.7186	0.1471
	SFR6O ((8×8×3)×2)	0.6800	0.7366	0.0281	0.0414	0.6839	0.0643
0.1	FEM-3D [263]	0.9478	0.8227	0.0370	0.0616	0.7346	0.1914
	FSDT-Exact [261]	0.9519	0.7706	0.0352	0.0539	0.6147	0.1529
	FSDT-EFG [262]	0.9537	0.7655	0.0362	0.0523	0.5949	0.1463
	MQ-MLPG1 [263]	0.8870	0.7640	0.0386	0.0513	0.5420	0.1530
	TPS-MLPG1 [263]	0.8820	0.7600	0.0386	0.0514	0.5220	0.1430
	SFR8O (4×4×3)	0.9281	0.8029	0.0375	0.0450	0.6773	0.1204
	SFR8O (8×8×3)	0.9421	0.8182	0.0384	0.0552	0.7004	0.1576
	SFR6O ((8×8×3)×2)	0.8929	0.7612	0.0367	0.0483	0.6769	0.1254
0.2	FEM-3D [263]	1.7783	0.9234	0.0667	0.1005	0.6595	0.2060
	MQ-MLPG1 [263]	1.6056	0.7280	0.0620	0.0664	0.5880	0.1956
	TPS-MLPG1 [263]	1.5992	0.7240	0.0620	0.0568	0.5700	0.1848
	SFR8O (4×4×3)	1.7569	0.9026	0.0681	0.0690	0.6244	0.1482
	SFR8O (8×8×3)	1.7690	0.9184	0.0683	0.0753	0.6351	0.1778
	SFR6O ((8×8×3)×2)	1.6969	0.7980	0.0633	0.0633	0.6255	0.1639

Tableau 4.2. Plaque carrée stratifiée avec une seule couche (0°) orthotrope simplement supportée sous chargement uniforme. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximales

4.2.3.2. Plaque carrée stratifiée à 3 et à 4 couches soumise à une charge uniforme

Dans ce cas test, on considère une plaque stratifiée simplement supportée soumise à une charge uniforme (les données du problème sont illustrées dans la figure 4.4 et le tableau 4.1). Deux cas de stratifications, 3 couches (0°/90°/0°) et 4 couches (0°/90°/90°/0°), sont considérés. Les tableaux 4.3 et 4.4 illustrent les résultats des déplacements au centre de la plaque ainsi que les contraintes aux différents points pour la stratification à 3 couches et 4 couches respectivement. Nous comparons les résultats avec ceux obtenus par les théories classiques, et avec la solution éléments finis tridimensionnels FEM-3D [263] obtenue avec six éléments à travers l'épaisseur d'une couche. Les maillages utilisés pour les éléments SFR sont : Pour la plaque stratifiée à 3 couches : ((8×8×3)×2) éléments SFR6O et (8×8×3) éléments SFR8O ; Pour la plaque stratifiée à 4 couches : ((8×8×4)×2) éléments SFR6O et (8×8×4) éléments SFR8O, où chaque couche est modélisée par un élément suivant l'épaisseur.

Nous remarquons que les résultats des déplacements et des contraintes planes obtenus par le modèle SFR sont acceptables et proches de la solution FEM-3D présentée dans la référence [263]. Cependant, pour les contraintes de cisaillement le modèle SFR donne des résultats moins précis que le modèle FEM-3D mais plus précis que le modèle FSDT-EFG. Pour la stratification à 3 couches, les résultats de l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8O

sont très bons, mais moyens pour l'élément prismatique à 6 nœuds SFR6O du fait de l'orientation de maillage. Entre parenthèses, les éléments prismatiques à base triangulaire ont besoins du raffinement de maillage. Les mêmes remarques pour la stratification à 4 couches. Une performance globalement satisfaisante est obtenue par les éléments SFR, comparativement aux résultats des modèles FSDT, MQ et TPS utilisés pour la comparaison.

h/L	Modèles	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx} (h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy} (h/6)$	$\bar{\tau}_{xy} (h/2)$	$\bar{\tau}_{xz} (0)$	$\bar{\tau}_{yz} (0)$
0.05	FEM-3D [263]	0.7951	0.8247	0.2391	0.0493	0.690	0.3910
	FSDT-Exact [261]	0.7572	0.7983	0.2227	0.0453	0.770	0.2902
	FSDT-EFG [262]	0.7583	0.7905	0.2279	0.0441	0.744	0.2264
	MQ-MLPG1 [263]	0.7256	0.7875	0.2175	0.0430	0.645	0.2760
	TPS-MLPG1 [263]	0.7188	0.7800	0.2160	0.0425	0.590	0.2315
	SFR8O (4×4×3)	0.7714	0.8026	0.2514	0.0424	0.635	0.1579
	SFR8O (8×8×3)	0.7880	0.8196	0.2428	0.0460	0.669	0.2519
	SFR6O ((8×8×3)×2)	0.7398	0.7546	0.2286	0.0398	0.647	0.0792
0.1	FEM-3D [263]	1.1541	0.8709	0.3621	0.0661	0.630	0.4060
	FSDT-Exact [261]	1.0219	0.7719	0.3072	0.0514	0.775	0.3107
	FSDT-EFG [262]	1.0225	0.7646	0.3105	0.0500	0.725	0.2958
	MQ-MLPG1 [263]	0.9465	0.7660	0.2900	0.0484	0.660	0.2850
	TPS-MLPG1 [263]	0.9415	0.7630	0.2900	0.0484	0.637	0.2640
	SFR8O (4×4×3)	1.1239	0.8493	0.3692	0.0527	0.496	0.2307
	SFR8O (8×8×3)	1.1450	0.8654	0.3631	0.0571	0.616	0.2891
	SFR6O ((8×8×3)×2)	1.0855	0.8008	0.3418	0.0503	0.606	0.2045
0.2	FEM-3D [263]	2.3218	1.0215	0.6629	0.1140	0.595	0.4690
	MQ-MLPG1 [263]	1.7572	0.7000	0.5000	0.0632	0.684	0.3520
	TPS-MLPG1 [263]	1.7504	0.6960	0.5000	0.0636	0.666	0.3360
	SFR8O (4×4×3)	2.3012	0.9985	0.6461	0.0775	0.474	0.3169
	SFR8O (8×8×3)	2.3160	1.0169	0.6492	0.0832	0.486	0.3611
	SFR6O ((8×8×3)×2)	2.2244	0.9031	0.6108	0.0729	0.486	0.3157

Tableau 4.3. Plaque carrée stratifiée à 3 couches (0°/90°/0°) simplement supportée sous chargement uniforme. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximales

h/L	Modèles	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
0.05	FEM-3D [263]	0.8029	0.8228	0.4168	0.0457	0.622	0.4738
	FSDT-Exact [261]	0.7694	0.8045	0.3968	0.0420	0.831	0.3228
	FSDT-EFG [262]	0.7698	0.7948	0.3970	0.0414	0.796	0.3108
	MQ-MLPG1 [263]	0.7369	0.7950	0.3850	0.0400	0.690	0.2845
	TPS-MLPG1 [263]	0.7306	0.7875	0.3825	0.0395	0.640	0.2385
	SFR8O (8×8×4)	0.7965	0.8164	0.4179	0.0432	0.615	0.4757
	SFR6O ((8×8×4)×2)	0.7589	0.7627	0.3969	0.0390	0.576	0.2177
0.1	FEM-3D [263]	1.1401	0.8280	0.5617	0.0603	0.554	0.498
	FSDT-Exact [261]	1.0250	0.7577	0.5006	0.0470	0.798	0.350
	FSDT-EFG [262]	1.0248	0.7494	0.4988	0.0458	0.763	0.332
	MQ-MLPG1 [263]	0.9520	0.7570	0.4750	0.0452	0.700	0.313
	TPS-MLPG1 [263]	0.9465	0.7530	0.4730	0.0448	0.675	0.279
	SFR8O (8×8×4)	1.1330	0.8211	0.5599	0.0534	0.563	0.540
	SFR6O ((8×8×4)×2)	1.0836	0.7695	0.5338	0.0478	0.532	0.300
0.2	FEM-3D [263]	2.2383	0.908	0.861	0.1072	0.568	0.448
	MQ-MLPG1 [263]	1.7208	0.664	0.696	0.0564	0.704	0.402
	TPS-MLPG1 [263]	1.7136	0.660	0.684	0.0560	0.682	0.338
	SFR8O (8×8×4)	2.2282	0.901	0.849	0.0763	0.637	0.449
	SFR6O ((8×8×4)×2)	2.1240	0.817	0.798	0.0675	0.429	0.403

Tableau 4.4. Plaque carrée stratifiée à 4 couches (0°/90°/90°/0°) simplement supportée sous chargement uniforme. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximales

4.2.3.3. Plaque carrée stratifiée à 4 couches (0°/90°/90°/0°) soumise à une charge sinusoïdale

Il s'agit d'une plaque stratifiée simplement supportée avec 4 couches (0°/90°/90°/0°) soumise à une charge sinusoïdale décrite dans la figure 4.4 et le tableau 4.1. Le déplacement au centre de la plaque et les contraintes sont calculés avec les élancements différents : $h/L = 0.05, 0.1$ et 0.2 . Les résultats obtenus par les modèles SFR sont reportés dans le tableau 4.5 et comparés avec la théorie d'ordre supérieur HSDT proposée par Reddy [264], la solution d'élasticité 3D de Pagano [260] et les modèles MLPG1 basés sur la théorie HOSNDPT. Nous avons ajouté à cette comparaison les résultats du modèle proposé par Ferreira *et al.* [265]. Ce dernier est basé sur la méthode des fonctions radiales et ses résultats sont obtenus avec un maillage de 21×21 éléments. Les maillages utilisés pour les éléments SFR sont les mêmes maillages de l'exemple précédant concernant la stratification de 4 couches.

Dans ce test, les éléments SFR montrent une très bonne performance pour les déplacements au centre de la plaque et les contraintes maximales. Les résultats obtenus sont confondus avec la solution d'élasticité 3D [260]. De plus ces résultats sont plus précis que ceux obtenus par d'autres modèles de comparaisons. Une remarque similaire aux exemples précédents pour les résultats de l'élément prismatique SFR6O, qui sont moins précis par rapport à l'élément hexaédrique SFR8O. Rappelons que les éléments hexaédriques conduisent des résultats d'ensemble plus précis que les éléments prismatiques à base triangulaire, parce que le facteur de convergence est plus faible pour des éléments finis de forme hexaédrique [228].

h/L	Modèles	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}(h/4)$	$\bar{\tau}_{xy}(h/2)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{yz}(0)$
0.25	HSDT [264]	1.8937	0.6651	0.6322	0.0440	0.2064	-
	Elasticité [260]	1.9540	0.7200	0.6660	0.0467	0.2700	-
	Ferreira <i>et al.</i> [265]	1.8864	0.6659	0.6313	0.0430	0.1352	-
	MQ-MLPG1 [263]	1.5016	0.4200	0.5506	0.0300	0.3175	0.1675
	TPS-MLPG1 [263]	1.4984	0.4188	0.6169	0.0301	0.3125	0.1633
	SFR8O (8×8×4)	1.9260	0.7029	0.6429	0.0452	0.2214	0.3361
	SFR6O ((8×8×4)×2)	1.8283	0.6165	0.5807	0.0406	0.2165	0.2169
0.1	HSDT [264]	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	0.153*
	Elasticité [260]	0.7430	0.5590	0.4030	0.0276	0.3010	0.196*
	Ferreira <i>et al.</i> [265]	0.5070	0.5405	0.3648	0.0228	0.3818	-
	MQ-MLPG1 [263]	0.6170	0.5010	0.3460	0.0233	0.3460	0.103
	TPS-MLPG1 [263]	0.6155	0.5000	0.3450	0.0233	0.3370	0.093
	SFR8O (8×8×4)	0.7319	0.5520	0.3960	0.0274	0.3035	0.224
	SFR6O ((8×8×4)×2)	0.6997	0.5149	0.3729	0.0249	0.2941	0.116
0.05	HSDT [264]	0.5061	0.5393	0.3043	0.0233	0.2825	-
	Elasticité [260]	0.5170	0.5430	0.3090	0.0230	0.3280	-
	Ferreira <i>et al.</i> [265]	0.4365	0.5413	0.3359	0.0215	0.4106	-
	MQ-MLPG1 [263]	0.4724	0.5225	0.2875	0.0213	0.3500	0.0785
	TPS-MLPG1 [263]	0.4700	0.5200	0.2875	0.0212	0.3180	0.0520
	SFR8O (8×8×4)	0.5083	0.5373	0.3057	0.0228	0.3280	0.1717
	SFR6O ((8×8×4)×2)	0.4838	0.5011	0.2879	0.0280	0.3152	0.0665

* Référence [266]

Tableau 4.5. Plaque carrée stratifiée à 4 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximales.

4.2.3.4. Plaque carrée stratifiée à 2 couches soumise à différentes conditions aux limites

Dans cet exemple, on considère une plaque carrée stratifiée à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) soumise à une charge doublement sinusoïdale (figure 4.4). L'étude est réalisée pour deux différents élancements ($h/L = 0.2$ et 0.1) et trois types de conditions aux limites (SSSS, SCSC et SFSF) où S : simplement supportée, C : encastree et F : libre. Ce test est étudié analytiquement par Vel et Batra [267-269] pour les plaques épaisses. Les résultats obtenus par les modèles SFR sont reportés aux tableaux 4.6 et 4.7 pour les élancements $h/L = 0.2$ et 0.1 , respectivement. Les maillages utilisés pour cet exemple sont : $8 \times 8 \times 4$ éléments SFR8O et $(8 \times 8 \times 4) \times 2$ éléments SFR6O où deux éléments sont utilisés à travers l'épaisseur de chaque couche. Les résultats des éléments SFR sont comparés avec la solution analytique 3D obtenue par Vel et Batra [267], la théorie d'ordre supérieur des plaques présentée par Khdeir et Reddy [270] et les modèles MLPG1 [263]. Notons que les résultats décrits par Vel et Batra [267] sont renormalisés utilisant les relations (4.8).

Les résultats obtenus par les éléments SFR sont très proches de la solution analytique 3D présentée par Vel et Batra [267] pour les deux élancements sauf peut être pour les contraintes $\bar{\sigma}_{zz}$ et $\bar{\tau}_{xy}$ pour les conditions aux limites de types SSSS et SFSF, respectivement, dans le cas d'élancement $h/L = 0.1$. On remarque aussi que les éléments SFR donnent des résultats en termes de contraintes de cisaillement plus précis que ceux obtenus par les modèles MPLPG1.

4.2. Adaptation du modèle SFR aux composites multicouches. Approche par couche orthotrope élémentaire

C.L	Modèles	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}(-h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{zz}(0)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	$\bar{\tau}_{yz}(0)$
SSSS	3D Analytique [267]	1.712	-0.7671	0.7894	0.0990	0.0527	0.1211
	HSDT [270]	1.667	-0.8385	0.8385	-	-	0.3155
	FSDT [270]	1.758	-0.7157	0.7157	-	-	0.2729
	MQ-MLPG1 [263]	1.613	-0.7000	0.7120	0.0984	0.0476	0.2180
	TPS-MLPG1 [263]	1.608	-0.6960	0.7080	0.0992	0.0476	0.2120
	SFR8O (8×8×4)	1.697	-0.7592	0.7751	0.1070	0.0563	0.1262
	SFR6O ((8×8×3)×2)	1.675	-0.7246	0.6975	0.1046	0.0511	0.0999
SCSC	3D Analytique [267]	1.217	-0.4630	0.5723	0.1158	0.0313	0.0875
	HSDT [270]	1.088	-0.5679	0.5505	-	-	0.2095
	FSDT [270]	1.257	-0.3911	0.5153	-	-	0.1958
	MQ-MLPG1 [263]	1.124	-0.3868	0.5000	0.1044	0.0271	0.1510
	TPS-MLPG1 [263]	1.122	-0.3860	0.5000	0.1042	0.0268	0.1462
	SFR8O (8×8×4)	1.202	-0.4535	0.5577	0.1026	0.0266	0.0916
	SFR6O ((8×8×3)×2)	1.181	-0.4100	0.4966	0.1053	0.0247	0.0703
SFSF	3D Analytique [267]	2.753	-0.2660	1.2877	0.0718	0.0108	0.1541
	HSDT [270]	2.624	-0.3171	1.3551	-	-	0.4457
	FSDT [270]	2.777	-0.2469	1.1907	-	-	0.3901
	MQ-MLPG1 [263]	2.587	-0.2280	1.1880	0.0828	0.0104	0.3160
	TPS-MLPG1 [263]	2.590	-0.2272	1.1920	0.0828	0.0104	0.3260
	SFR8O (8×8×4)	2.732	-0.2598	1.2652	0.0903	0.0033	0.1586
	SFR6O ((8×8×3)×2)	2.622	-0.2125	1.1693	0.0706	0.0052	0.1263

Tableau 4.6. Plaque carrée stratifiée à 2 couches (0°/90°) sous chargement doublement sinusoïdal. Déplacement transversal et contraintes maximales ($h/L = 0.2$)

C.L	Modèles	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}(-h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{zz}(0)$	$\bar{\tau}_{xy}(-h/2)$	$\bar{\tau}_{yz}(0)$
SSSS	3D Analytique [267]	1.227	-0.7304	0.7309	0.0500	0.0497	0.1219
	HSDT [270]	1.216	-0.7468	0.7468	-	-	0.3190
	FSDT [270]	1.237	-0.7157	0.7157	-	-	0.2729
	MQ-MLPG1 [263]	1.177	-0.7040	0.7040	0.0498	0.0471	0.2150
	TPS-MLPG1 [263]	1.172	-0.7010	0.7010	0.0498	0.0469	0.1970
	SFR8O (8×8×4)	1.215	-0.7238	0.7230	0.1082	0.0531	0.1256
	SFR6O ((8×8×3)×2)	1.205	-0.6984	0.6685	0.1103	0.0480	0.0892
SCSC	3D Analytique [267]	0.649	-0.4653	0.3888	0.0640	0.0221	0.0713
	HSDT [270]	0.617	-0.4952	0.3803	-	-	0.1725
	FSDT [270]	0.656	-0.4450	0.3799	-	-	0.1523
	MQ-MLPG1 [263]	0.610	-0.4430	0.3650	0.1116	0.0203	0.1170
	TPS-MLPG1 [263]	0.608	-0.4400	0.3640	0.0559	0.0200	0.1060
	SFR8O (8×8×4)	0.637	-0.4573	0.3803	0.0716	0.0132	0.0746
	SFR6O ((8×8×3)×2)	0.630	-0.4183	0.3512	0.1053	0.0123	0.0495
SFSF	3D Analytique [267]	2.026	-0.2503	1.2100	0.0360	0.0119	0.1490
	HSDT [270]	2.624	-0.3171	1.3551	-	-	0.4489
	FSDT [270]	2.777	-0.2469	1.1907	-	-	0.3882
	MQ-MLPG1 [263]	1.957	-0.2360	1.1700	0.0321	0.0110	0.3110
	TPS-MLPG1 [263]	1.958	-0.2360	1.1800	0.0337	0.0111	0.3370
	SFR8O (8×8×4)	2.008	-0.2444	1.1950	0.0333	0.0050	0.1530
	SFR6O ((8×8×3)×2)	1.960	-0.1965	1.1517	0.0403	0.0066	0.1154

Tableau 4.7. Plaque carrée stratifiée à 2 couches (0°/90°) sous chargement doublement sinusoïdal. Déplacement transversal et contraintes maximales ($h/L = 0.1$)

4.2.3.5. Plaque carrée stratifiée à 3 couches simplement supportée sous chargement sinusoïdal

Une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) de même épaisseur, simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal est étudiée dans cette exemple pour différentes valeurs de l'élancement $L/h = 4, 10, 50$ et 100 . La géométrie de la plaque et les propriétés du matériau sont illustrées dans le tableau 4.8. Les symétries du problème par rapport aux plan $x = L/2$ et $y = L/2$ permettent de nous ramener à un quart de la structure. Les maillages utilisés sont $8 \times 8 \times 3$ éléments SFR8O et $(8 \times 8 \times 3) \times 2$ éléments SFR6O (un élément par couche à travers l'épaisseur). Les résultats des déplacements et des contraintes sont reportés dans le tableau 4.9. Les résultats des modèles SFR Orthotropes sont comparés, d'une part avec la solution d'élasticité 3D obtenue par Pagano [260], et d'autre part avec les modèles HSDT et FSDT proposés par Reddy [264] et Whitney [271], respectivement. Les résultats sont aussi comparés avec l'élément plaque DMQPml présenté par Sakami [272] avec un maillage de (6×6) éléments.

On remarque que les résultats obtenus par nos modèles sont en bon accord avec la solution analytique pour les déplacements et même pour les contraintes planes. Cependant, les résultats des contraintes de cisaillement sont moins précis. L'ensemble des résultats des éléments SFR (spécialement l'élément SFR8O) montrent un très bon accord avec les résultats de référence disponible dans la littérature.

Géométrie	$L = 1000 ; h = 250, 100, 20$ et 10
Matériau orthotrope	$E_1 = 25 ; E_2 = E_3 = 1 ; \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25$ $G_{12} = G_{13} = 0.5 ; G_{23} = 0.2$
Conditions aux limites	Sur $x = 0$ et $x = L : v = w = \theta_x = \theta_z = 0$ Sur $y = 0$ et $y = L : u = w = \theta_y = \theta_z = 0$
Stratification	3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) ; $h^k = \frac{1}{3}h$
Chargement	Doublement sinusoïdal : $q = q_0 \sin(\frac{\pi x}{L}) \sin(\frac{\pi y}{L}) ; q_0 = 1$

Tableau 4.8. Plaque carrée stratifiée simplement supportée. Données du problème

4.2. Adaptation du modèle SFR aux composites multicouches. Approche par couche orthotrope élémentaire

L/h	Modèles	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_{xx}(\mp h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}(\mp h/6)$	$\bar{\tau}_{xy}(\mp h/2)$	$\bar{\tau}_{xz}(0)$	$\bar{\tau}_{yz}(0)$	$\bar{u}(\mp h/2)$
4	Elasticité 3D [260]	2.006	- 0.755 + 0.801	- 0.556 + 0.534	+ 0.0505 - 0.0511	0.282	0.217	+ 0.00936 - 0.00969
	DMQPml [272]	2.238	\mp 0.391	\mp 0.613	\pm 0.0439	0.307	0.195	-
	HSDT [264]	1.922	\mp 0.734	\mp 0.503	\pm 0.0500	0.286	0.209	-
	FSDT [271]	1.891	\mp 0.620	\mp 0.661	\pm 0.0450	0.262	0.254	-
	SFR8O (8×8×3)	2.090	- 0.740 + 0.775	- 0.543 + 0.510	\pm 0.0494	0.250	0.172	+ 0.00921 - 0.00941
	SFR6O (8×8×3)×2	1.991	- 0.644 + 0.653	- 0.509 + 0.476	+ 0.0446 - 0.0449	0.255	0.155	+ 0.00817 - 0.00841
10	Elasticité 3D [260]	0.753	\mp 0.590	- 0.288 + 0.285	\pm 0.0289	0.357	0.1228	+ 0.00738 - 0.00735
	DMQPml [272]	0.773	\mp 0.502	\mp 0.293	\pm 0.0271	0.373	0.1000	-
	HSDT	0.713	\mp 0.568	\mp 0.269	\pm 0.0280	0.369	0.1170	-
	FSDT	0.723	\mp 0.549	\mp 0.289	\pm 0.0270	0.364	0.1230	-
	SFR8O (8×8×3)	0.746	\mp 0.584	- 0.286 + 0.281	\pm 0.0287	0.353	0.0925	+ 0.00734 - 0.00730
	SFR6O (8×8×3)×2	0.701	\mp 0.537	- 0.271 + 0.262	\pm 0.0260	0.354	0.0504	+ 0.00699 - 0.00696
50	Elasticité 3D [260]	0.445	\mp 0.541	\mp 0.185	\pm 0.0234	0.393	0.0842	\pm 0.00680
	DMQPml [272]	0.445	\mp 0.540	\mp 0.184	\pm 0.0214	0.394	0.0768	-
	SFR8O (8×8×3)	0.440	\mp 0.535	\mp 0.184	\pm 0.0214	0.369	0.0770	\pm 0.00677
	SFR6O (8×8×3)×2	0.420	\mp 0.496	\mp 0.174	\pm 0.0198	0.375	0.0750	\pm 0.00652
100	Elasticité 3D [260]	0.435	\mp 0.539	\mp 0.181	\pm 0.0213	0.395	0.0828	\pm 0.00678
	DMQPml [272]	0.434	\mp 0.542	\mp 0.179	\pm 0.0212	0.395	0.0805	-
	SFR8O (8×8×3)	0.429	\mp 0.533	\mp 0.180	\pm 0.0211	0.305	0.0504	\pm 0.00673
	SFR6O (8×8×3)×2	0.410	\mp 0.493	\mp 0.171	\pm 0.0197	0.289	0.0330	\pm 0.00650

Tableau 4.9. Plaque carrée stratifiée à 3 couches (0°/90°/0°) simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison des déplacements et des contraintes maximales

4.3. Formulation des éléments SFR Multicouches

La modélisation de chaque couche avec un élément solide présentée dans la section précédente conduit généralement à un large système d'équations et un grand effort de calcul. Par conséquent, cette modélisation n'est pas pratique pour les grandes structures. A cet égard, la représentation de plusieurs couches dans un seul élément solide à travers l'épaisseur est souhaitée. En outre, les éléments solides sont nécessaires pour représenter l'état des contraintes 3D complet [256].

En se basant sur le modèle SFR isotrope 3D présenté dans le chapitre 2, deux éléments volumiques SFR multicouches destinés à l'analyse globale de structures stratifiées sont développés. Ces éléments sont formulés en suivant une démarche tridimensionnelle qui consiste à intégrer l'empilement des plusieurs couches directement dans un seul élément dans l'épaisseur de l'élément volumique (figure 4.5). Cette approche est utilisée par Kuhlmann et Rolfes [224] pour formuler un élément solide multicouche basé sur l'interpolation hiérarchique. Les éléments développés dans cette section sont : l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8M et l'élément prismatique à 6 nœuds SFR6M (Space Fiber Rotation Multilayer) ayant six degrés de liberté (trois translations et trois rotations) par nœud. Le nombre de ces degrés de liberté est indépendant du nombre de couches du stratifié. On suppose que l'adhérence entre les couches soit parfaite. A noter aussi qu'un schéma d'intégration réduite est utilisé pour les deux éléments SFR avec deux points d'intégration suivant l'épaisseur de chaque couche. Cette intégration permet d'améliorer l'efficacité des calculs et d'atténuer certains phénomènes de verrouillage. Les modes parasites à énergie nulle sont efficacement contrôlés par la technique de stabilisation présentée dans le deuxième chapitre.

4.3.1. Matrice de rigidité élémentaire

Les matrices de rigidité élémentaire des éléments multicouches SFR8M et SFR6M sont :

$$\left[K_{SFR8M}^e \right] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [H] [B] \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (4.9a)$$

$$\left[K_{SFR6M}^e \right] = \int_{-1}^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{\eta} [B]^T [H] [B] \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (4.9b)$$

La matrice d'élasticité $[H]$ dans l'équation (4.9) est réécrite sous la forme suivante :

$$[H] = [T] [\bar{H}] [T]^T \quad (4.10)$$

où $[\bar{H}]$ est la matrice d'élasticité locale. Un matériau orthotrope possède deux plans orthogonaux de symétrie élastique. La matrice $[\bar{H}]$ (relation 4.2) est définie en fonction de neuf caractéristiques mécaniques indépendantes dans les axes d'orthotropie [16].

La matrice $[T]$ est orthogonale (6×6) qui transforme la relation contrainte-déformation du système de coordonnées globales aux coordonnées locales [16]. La matrice de transformation est exprimée par la relation (4.5).

L'intégrale de l'équation (4.9) est évaluée numériquement par la méthode de quadrature de Gauss suivant la direction transversale ζ . La matrice d'élasticité $[H]$ est différente d'une couche à l'autre et dépendante de l'orientation des fibres, de la séquence des plis et du type de matériaux (figure 4.5). Par conséquent, la matrice d'élasticité n'est pas une

fonction continue sur ζ . Donc l'intégration numérique est effectuée couche par couche afin d'obtenir les coefficients de la matrice de rigidité élémentaire entière [224]. Afin d'appliquer les coefficients de la formule de quadrature de Gauss, les limites devraient être entre -1 et $+1$. Ceci est réalisé en modifiant de manière appropriée la coordonnée transverse normalisée ζ par ζ_k dans la couche k tel que ζ_k varie de -1 à $+1$ dans cette couche :

$$\zeta = -1 + \frac{1}{h} \left(-h_k(1 - \zeta_k) + 2 \sum_{j=1}^k h_j \right) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_k} = \frac{h_k}{h} \rightarrow \partial \zeta = \frac{h_k}{h} \partial \zeta_k \quad (4.12)$$

où h_k est l'épaisseur de la couche k .

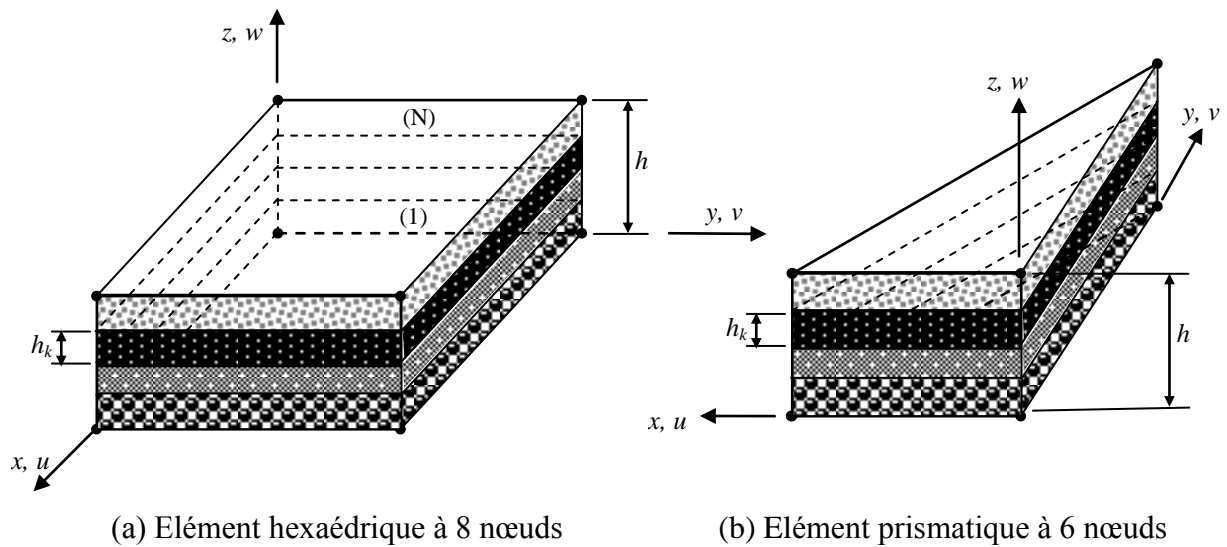


Figure 4.5. Modèles SFR Multicouches (SFR8M et SFR6M)

En substituant les équations (4.11) et (4.12) dans l'équation (4.9), nous obtenons :

$$[K^e]_{SFR8M} = \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [H]^k [B] \frac{h_k}{h} \det J d\xi d\eta d\zeta_k \quad (4.13a)$$

$$[K^e]_{SFR6M} = \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \int_0^{1-\eta} [B]^T [H]^k [B] \frac{h_k}{h} \det J d\xi d\eta d\zeta_k \quad (4.13b)$$

où N est le nombre de couches par élément. Les différents termes de la matrice $[H]$ sont exposés dans l'Annexe C.

L'évaluation de ces matrices de rigidité est réalisée par l'intégration numérique réduite avec 2 points d'intégration de Gauss par couche à travers l'épaisseur.

4.3.2. Calcul des contraintes

Le calcul des contraintes pour les deux éléments SFR Multicouches (prismatique SFR6M et hexaédrique SFR8M) s'effectue en deux étapes inspirés de la référence [224]. Dans la première étape, les contraintes planes sont calculées à partir de la loi constitutive en utilisant l'approximation du déplacement. Dans la deuxième étape, les contraintes transversales sont calculées à partir des équations d'équilibre 3D. L'approximation quadratique du champ des déplacements \underline{u}_q (équation 2.15), induite par la fibre spatiale, a pour conséquence une évaluation plus précise des contraintes.

4.3.2.1. Contraintes planes

Suivant la loi constitutive on peut obtenir le tenseur des contraintes par la relation suivante :

$$\sigma^{(k)} = H^{(k)} \varepsilon = H^{(k)} B u \quad (4.14)$$

Les contraintes et les déformations peuvent s'écrire en vecteurs de composantes planes et transversales séparément [224] :

$$\sigma_G^{(k)} = \begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}^{(k)} ; \sigma_L^{(k)} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}^{(k)} ; \varepsilon_G = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} ; \varepsilon_L = \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Les variables globales (identifiées par G) sont celles continues à travers l'épaisseur de la structure stratifiée et également aux interfaces des couches. Les variables locales (identifiées par L) sont celles continues seulement à travers l'épaisseur de chaque couche, mais pas nécessairement continue aux interfaces des couches. Donc on peut écrire l'équation constitutive sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_G \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^T & H_3 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_G \\ \varepsilon_L \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Alors les contraintes planes sont données par :

$$\sigma_L^{(k)} = [H_1 \quad H_2]^{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_G \\ \varepsilon_L \end{pmatrix} = H_L^{(k)} B u \quad (4.17)$$

4.3.3. Validation numérique des éléments SFR Multicouches

Les développements effectués lors des sections précédentes, sauf l'évaluation numérique des contraintes transversales, sont mis en œuvre au sein du code de calcul par éléments finis Reflex [16-18].

Dans cette section, nous validons notre approche à l'échelle des structures composites multicouches, à travers d'exemples de validation numérique. Pour chaque exemple présenté, les solutions numériques obtenues sont comparées à des solutions de référence d'origine analytique ou numérique.

Les quatre premiers exemples concernent le problème de plaque stratifiée simplement supportée soumise à une charge doublement sinusoïdale. Les dimensions de cette plaque sont a et b suivant les directions x et y respectivement. L'épaisseur de la plaque est h . La figure 4.6 illustre la géométrie, les conditions aux limites et le chargement sinusoïdal appliqué sur la plaque. Les cas tests considérés sont les suivants :

Cas 1 : Plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$),

Cas 2 : Plaque rectangulaire stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$),

Cas 3 : Plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$).

Pour chaque test présenté, les contraintes planes et les déflexions centrales rapportées dans les tableaux et les figures suivantes sont données sous la forme adimensionnelle :

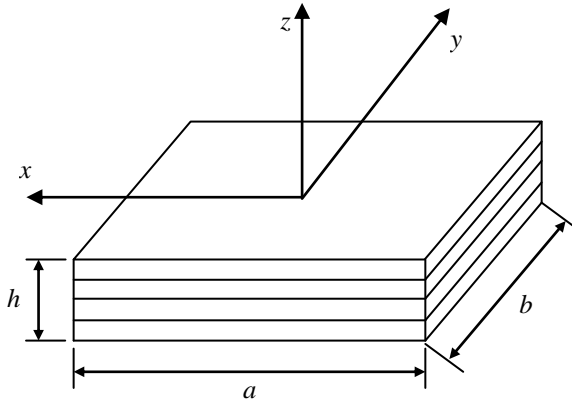
$$(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_{xy}) = \frac{1}{q_0 \cdot S^2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}), \quad \bar{w} = \frac{100E_2}{h \cdot q_0 \cdot S^4} w, \quad S = \frac{a}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \quad (4.38)$$

Les contraintes planes et les déflexions sont calculées aux points :

$$(0, 0, z) \text{ pour } \sigma_x, \sigma_y \quad (4.39a)$$

$$(0.5a, 0.5b, z) \text{ pour } \sigma_{xy} \quad (4.39b)$$

$$(0, 0, 0) \text{ pour } w \quad (4.39c)$$



Les conditions aux limites

$$\text{Sur } x = a/2 : v = w = \theta_x = \theta_z = 0$$

$$\text{Sur } y = b/2 : u = w = \theta_y = \theta_z = 0$$

Chargement

$$\bar{q}(x, y) = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$$

$$q_0 = 1 \text{ MPa}$$

Figure 4.6. Plaque stratifiée simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale

Nous traitons, ensuite, l'exemple du cylindre mince orthotrope soumis à une pression interne. Il permet de valider la bonne prise en compte des pressions internes ainsi que les matériaux élastiques orthotropes. Nous étudions, enfin, l'exemple de la poutre encastree pour chercher l'effet de la distorsion du maillage sur les résultats des éléments SFR.

4.3.3.1. Plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

Une plaque carrée de longueur $a = b = L$ simplement supportée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) de même épaisseur soumise à une charge sinusoïdale est considérée pour valider les modèles SFR Multicouches. Les résultats des éléments SFR Multicouches sont comparés, d'une part, avec la solution d'élasticité 3D [266] et la solution obtenue avec la théorie d'ordre supérieur des plaques « *Higher-Order Plate Theory* » proposée par Pandya et Kant [275], et d'autre part avec la solution élément fini volumique multicouche obtenue par Kuhmann et Rolfes [224] avec un maillage de $5 \times 5 \times 2$ éléments. Les propriétés du matériau considéré pour cet exemple sont :

$$E_1 = 250 \text{ GPa} ; E_2 = E_3 = 10 \text{ GPa} ; \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25$$

$$G_{12} = G_{13} = 5 \text{ GPa} ; G_{23} = 2 \text{ GPa}$$

Le calcul est effectué avec un maillage de $8 \times 8 \times 2$ éléments hexaédriques SFR8M et $(8 \times 8 \times 2) \times 2$ éléments prismatiques SFR6M où nous avons utilisé deux couches par élément suivant l'épaisseur.

Les courbes de variation de la déflexion centrale en fonction de l'élancement $S = L/h$ pour les éléments SFR8M et SFR6M sont rapportées respectivement sur les figures 4.7 et 4.8. Ces résultats de déplacements démontrent le caractère relativement satisfaisant des éléments SFR Multicouches. Les résultats obtenus par l'élément SFR8M sont en bon accord avec la solution analytique d'élasticité 3D. Pour l'élément SFR6M, les résultats sont relativement moins précis spécialement pour l'élancement $S = 4$. Il s'avère que le maillage a besoin d'être raffiné plus que l'élément SFR8M surtout suivant l'épaisseur de la plaque.

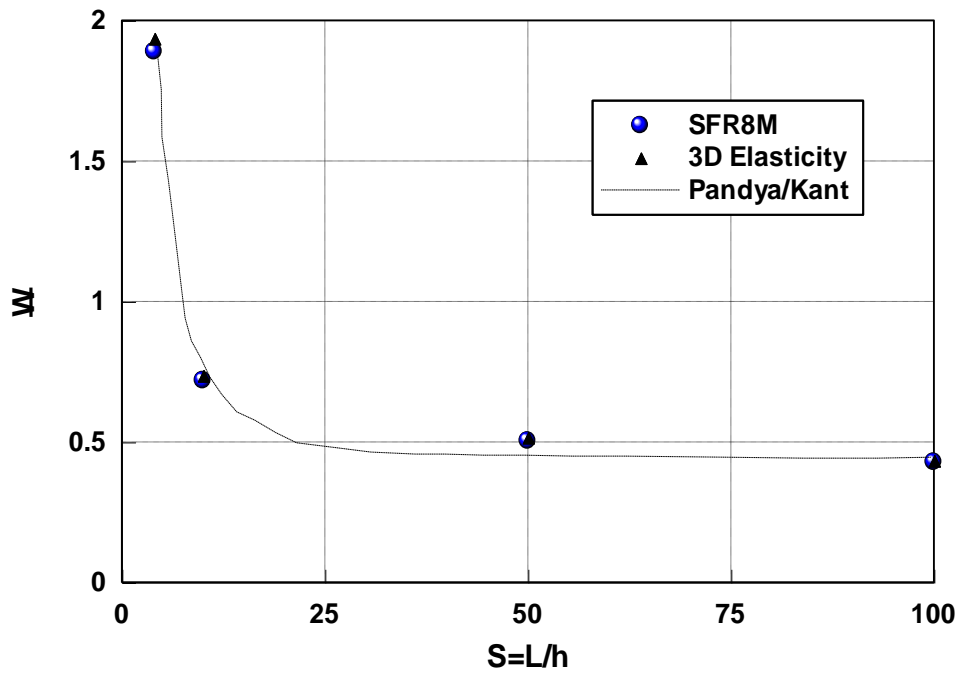


Figure 4.7. Effet de l'élancement $S = L/h$ sur la déflexion centrale \bar{w} pour une plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0$) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR8M

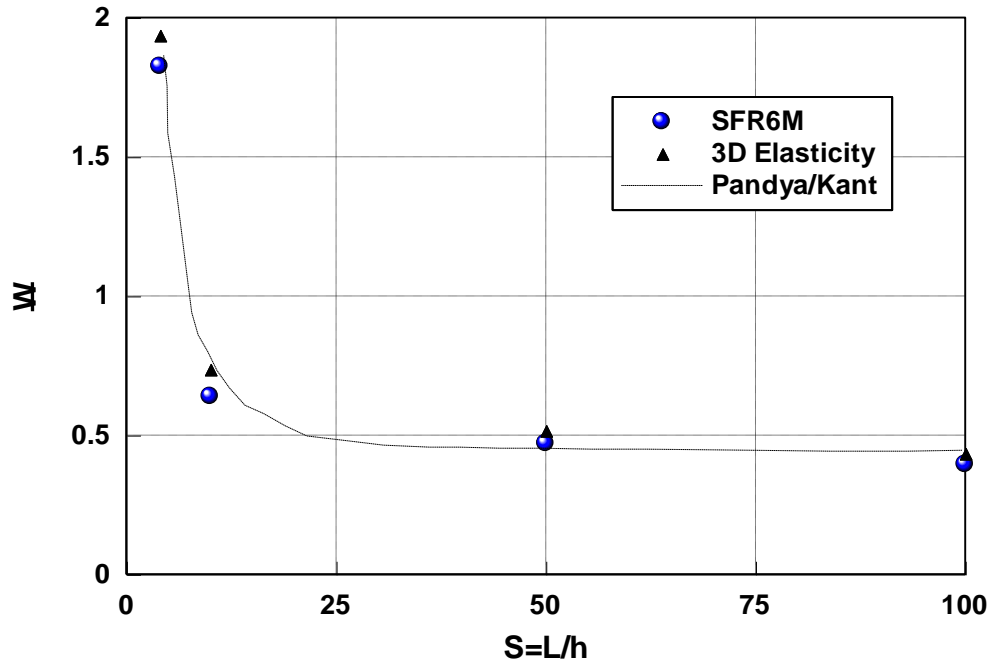


Figure 4.8. Effet de l'élancement $S = L/h$ sur la déflexion centrale \bar{w} pour une plaque carrée stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0$) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR6M

Les courbes de variation de la contrainte plane $\bar{\sigma}_x$ en fonction de l'élancement $S = L/h$ pour les éléments SFR8M et SFR6M sont présentées respectivement dans les figures 4.9 et 4.10. Dans ces figures les résultats obtenus par les modèles SFR Multicouches sont comparés avec la solution d'élasticité 3D [260] et la solution élément fini volumique multicouche EF-3D [224]. Nous remarquons que les résultats des modèles SFR sont très proches du modèle proposé par Kuhmann et Rolfes [224]. Les résultats de l'élément SFR8M montre un très bon accord avec la solution d'élasticité 3D.

Cette étude comparative (figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10) nous a permis de montrer la bonne performance des modèles SFR Multicouches pour les problèmes de flexion des plaques épaisses et minces et aussi l'absence de verrouillage de cisaillement.

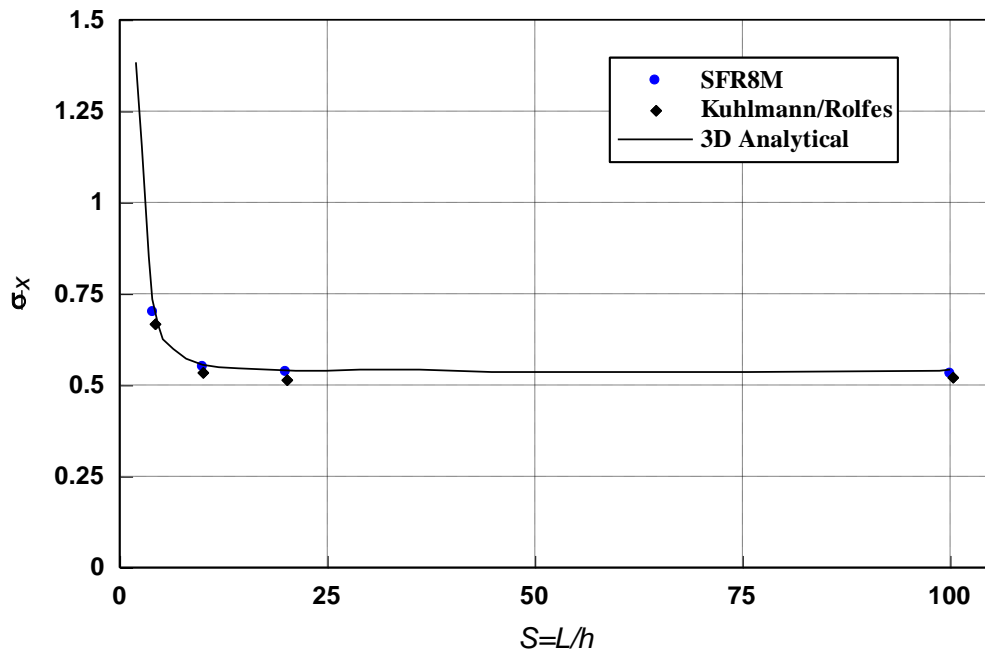


Figure 4.9. Effet de l'élancement $S = L/h$ sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0$) soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR8M

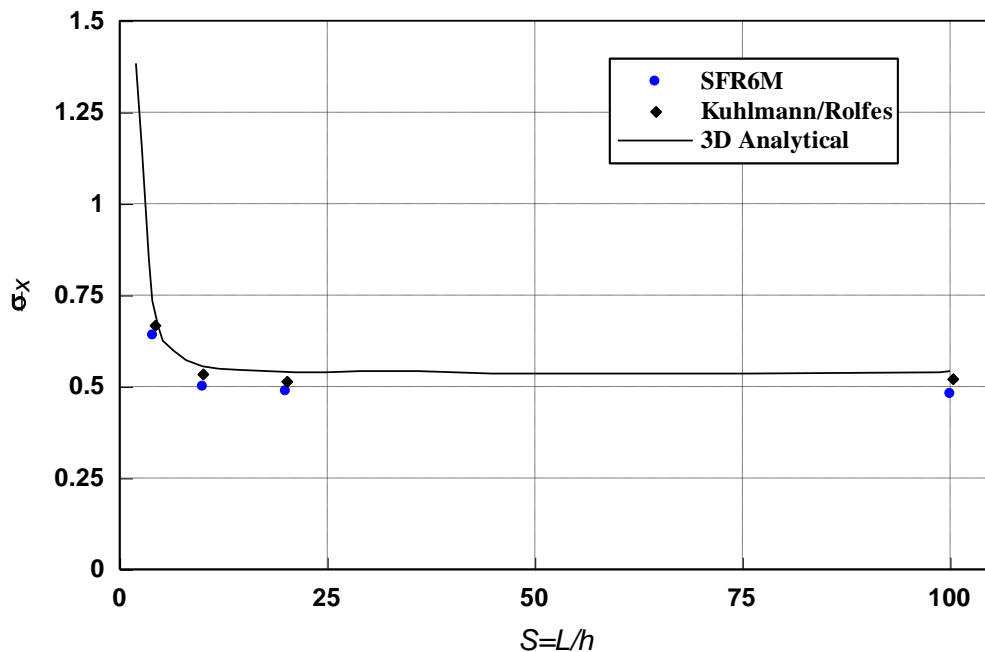


Figure 4.10. Effet de l'élancement $S = L/h$ sur la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque stratifiée à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0$) soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR6M

La figure 4.11 illustre la distribution de la contrainte plane $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la plaque avec l'élancement $S = 4$. Les résultats de l'élément SFR8M sont comparés avec la solution d'élasticité 3D [260], la solution obtenue par la théorie d'ordre supérieur des plaques proposée par Pandya et Kant [275], la théorie du premier ordre FSDT « *First Order Shear Deformation Theory* » [276] et l'élément volumique multicouche développé

par Kuhmann et Rolfes [224]. Nous constatons que notre modèle se comporte bien pour la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ et donne des résultats satisfaisants. L'élément SFR8M montre une bonne concordance avec l'élément volumique multicouche de Kuhmann et Rolfes [224]. Ces résultats sont justifiés par la formulation de base qui nous a permis d'augmenter l'ordre d'approximation.

Les déflexions maximales et les contraintes planes maximales sont rapportées dans le tableau 4.10 pour deux élancements différents ($L/h = 10$ et 100). Les résultats des éléments SFR Multicouches sont comparés avec les résultats de la théorie d'ordre supérieur des plaques HSDT obtenus par Reddy [264] et la solution d'élasticité 3D proposée par Pagano et Hatfield [266]. Nous comparons également ces résultats, pour l'élancement $L/h = 10$, avec ceux obtenus par Ferreira *et al.* [265] avec la méthode « *Meshless collocation* » et les fonctions radiales « *Radial Basis Function – RBFs* ». Nous rajoutons aussi à cette comparaison les solutions obtenues par les modèles MQ-MLPG1 et TPS-MLPG1 développés par Xiao *et al.* [263] à l'aide de la théorie HOSNDPT « *Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theory* » et la méthode MLPG « *Meshless Local Petrov-Galerkin* ». Cette dernière est basée sur l'utilisation de deux types de fonctions radiales « *Radial Basis Function – RBFs* » : la fonction MQ : *multiquadrics* et la fonction TPS : *thin plate splines*.

Encore une fois, une bonne corrélation entre le modèle proposé SFR8M et la solution d'élasticité 3D est trouvée pour la déflexion centrale \bar{w} et les contraintes planes $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$ et $\bar{\tau}_{xy}$. Cependant, les résultats sont de moins bonne qualité quand on utilise l'élément prismatique SFR6M où il est nécessaire d'augmenter le nombre d'éléments pour obtenir des résultats acceptables.

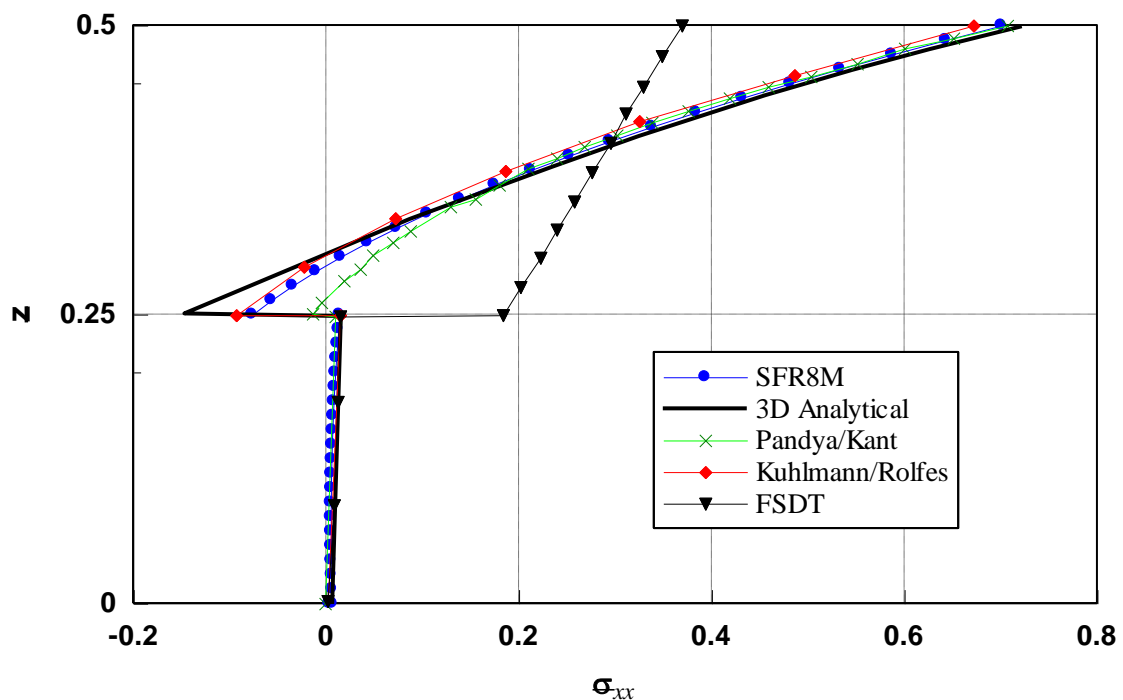


Figure 4.11. Distribution de la contrainte plane $\bar{\sigma}_x$ suivant l'épaisseur de la plaque stratifiée à 4 couches soumise à une charge sinusoïdale ($S = 4$). Elément SFR8M

L/h	Modèles	$\bar{w}(0)$	$\bar{\sigma}_{xx}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}(h/4)$	$\bar{\tau}_{xy}(h/2)$
10	HSDT [264]	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268
	Elasticité 3D [266]	0.7370	0.5590	0.4010	0.0275
	Ferreira <i>et al.</i> [265]	0.5070	0.5405	0.3648	0.0228
	MQ-MLPG1 [263]	0.6170	0.5010	0.3460	0.0233
	TPS-MLPG1 [263]	0.6155	0.5000	0.3450	0.0233
	SFR8M (8×8×2)	0.7188	0.5526	0.3874	0.0268
	SFR6M ((8×8×2)×2)	0.6390	0.4958	0.3008	0.0216
100	HSDT [264]	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213
	Elasticité 3D [266]	0.4347	0.5390	0.2710	0.0214
	SFR8M (8×8×2)	0.4290	0.5324	0.2660	0.0211
	SFR6M ((8×8×2)×2)	0.3948	0.4948	0.2620	0.0165

Tableau 4.10. Plaque carrée stratifiée à 4 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes planes maximales

4.3.3.2. Plaque rectangulaire stratifiée à 4 couches (0°/90°/90°/0°)

Dans cet exemple on considère une plaque rectangulaire ($a = 5$, $b = 3.5$, $S = a/h = 5$) stratifiée à 4 couches (0°/90°/90°/0°) de même épaisseur. Cette plaque est simplement supportée et soumise à une charge sinusoïdale. Les données géométriques du problème sont représentées dans la figure 4.12. Les propriétés du matériau sont :

$$E_1 = 138000 \text{ MPa} ; E_2 = E_3 = 9300 \text{ MPa} ; \nu_{LT} = 0.3 ; \nu_{TT} = 0.5$$

$$G_{LT} = 4600 \text{ MPa} ; G_{TT} = 3100 \text{ GPa}$$

La plaque est modélisée avec un maillage de 8×8×2 éléments SFR8M et (8×8×2)×2 éléments SFR6M. Les résultats des éléments SFR sont comparés avec la solution analytique d'élasticité 3D [260] et aussi avec les résultats de l'élément solide multicouche B2000 développé par Kuhmann et Rolfes [224] utilisant un maillage de 7×5×1 éléments. Les figures 4.14 et 4.15 représentent la variation dans l'épaisseur de la contrainte plane adimensionnelle $\bar{\sigma}_y$ au centre de la plaque avec un rapport d'élancement $S = 5$ des éléments SFR8M et SFR6M respectivement. Les éléments SFR montrent une fois de plus le bon comportement pour les contraintes planes. Les résultats obtenus sont comparables à la solution obtenue par l'élément solide B2000 [224]. Ces résultats sont en très bon accord avec la solution analytique d'élasticité 3D.

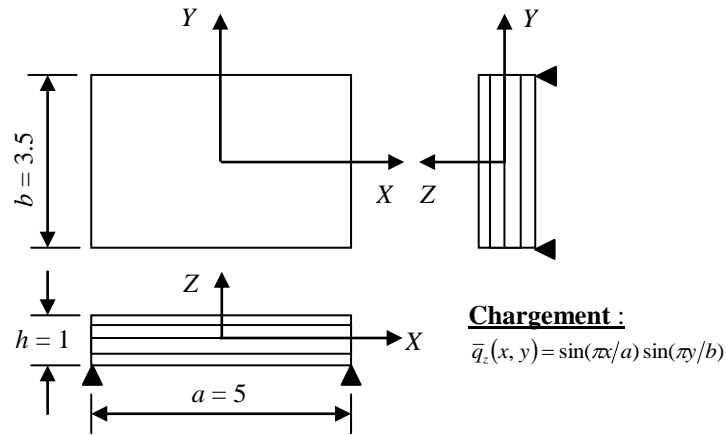


Figure 4 .12. Plaque rectangulaire stratifiée à 4 couches. Géométrie du problème

Finalement, nous avons présenté dans le tableau 4.11 les déplacements au centre de la plaque et les contraintes planes maximales (sans normalisations) des éléments SFR Multicouches. Ces résultats sont comparés avec les éléments coques développés par Actis *et al.* [277] ainsi que le modèle d'élément fini solide 3D [277]. Les résultats obtenus avec le modèle SFR8M sont comparables et très proches de ceux obtenus avec le modèle d'élément fini solide 3D. D'autre part, il est fondamental d'insister sur le fait que le modèle SFR6M nécessite le raffinement du maillage.

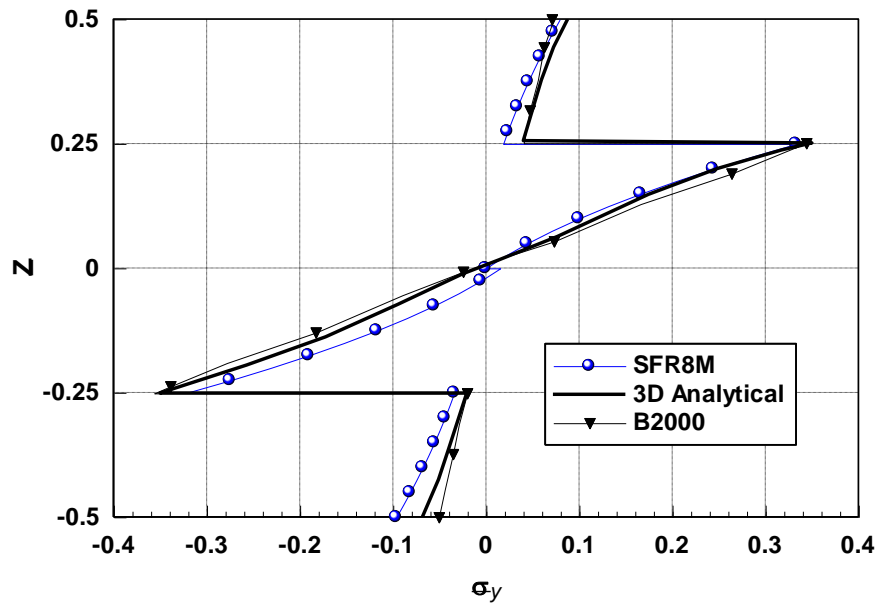


Figure 4 .13. Distribution de la contrainte plane $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur pour une plaque rectangulaire à 4 couches soumise à une charge sinusoïdale ($S = 5$). Élément SFR8M

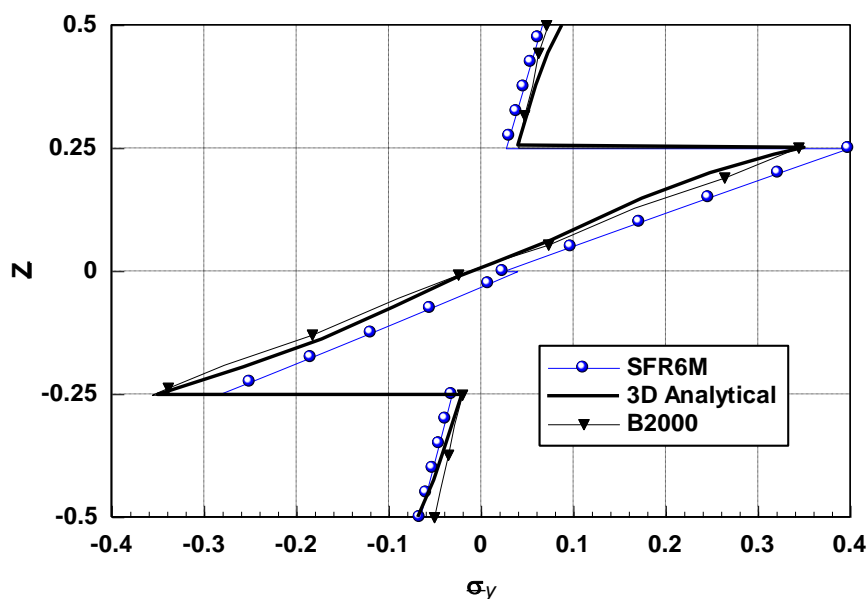


Figure 4.14. Distribution de la contrainte plane $\bar{\sigma}_y$ à travers l'épaisseur pour une plaque rectangulaire à 4 couches soumise à une charge sinusoïdale ($S = 5$). Élément SFR6M

a/h	Modèles	$w(0, 0, 0)$	$\sigma_{xx}(0, 0, h/2)$	$\sigma_{yy}(0, 0, h/2)$	$\tau_{xy}(a/2, b/2, h/2)$
5	3D-Solid element [277]	5.7263×10^{-4}	7.7388	1.9267	-0.8602
	Shell 1 [277]	5.2565×10^{-4}	6.4389	1.4035	-0.7274
	Shell 2 [277]	5.5671×10^{-4}	7.3924	1.9688	-0.8154
	SFR8M ($8 \times 8 \times 2$)	5.9637×10^{-4}	7.9134	1.9721	-0.8689
	SFR6M ($8 \times 8 \times 2$) $\times 2$	5.1973×10^{-4}	7.5034	1.6467	-0.7588

Tableau 4.11. Plaque rectangulaire stratifiée à 4 couches sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes planes

4.3.3.3. Plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

Il s'agit d'une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement supportée. La plaque de dimension $L \times L \times h$ est soumise à une charge sinusoïdale et modélisée avec un maillage de $8 \times 8 \times 2$ éléments SFR8M et $(8 \times 8 \times 2) \times 2$ éléments SFR6M. Les propriétés du matériau considéré pour cet exemple sont :

$$E_1 = 250 \text{ GPa} ; E_2 = E_3 = 10 \text{ GPa} ; \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0.25$$

$$G_{12} = G_{13} = 5 \text{ GPa} ; G_{23} = 2 \text{ GPa}$$

Les figures 4.15 et 4.16 montrent la variation du déplacement au centre de la plaque à travers l'épaisseur pour les différents élancements ($S = L/h = 2, 4, 10$ et 100) des éléments SFR8M et SFR6M respectivement. Les résultats sont comparés avec la solution analytique d'élasticité 3D [260]. Encore une fois, une bonne concordance entre les modèles proposés et la solution analytique d'élasticité 3D est alors observée pour les élancements ($S = 10$ et 100). Cependant, pour les élancements $S = 2$ et 4 , les résultats des éléments SFR8M et SFR6M sont moins précis.

Les variations des contraintes planes $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur pour l'élancement $S = 4$ de l'élément SFR8M sont illustrées respectivement dans les figures 4.17 et 4.18. Nous constatons clairement que les résultats obtenus sont en très bon accord avec la solution

analytique d'élasticité 3D. Ces résultats montrent une bonne approximation pour les contraintes planes de l'élément SFR8M par rapport à la solution élastique tridimensionnelle.

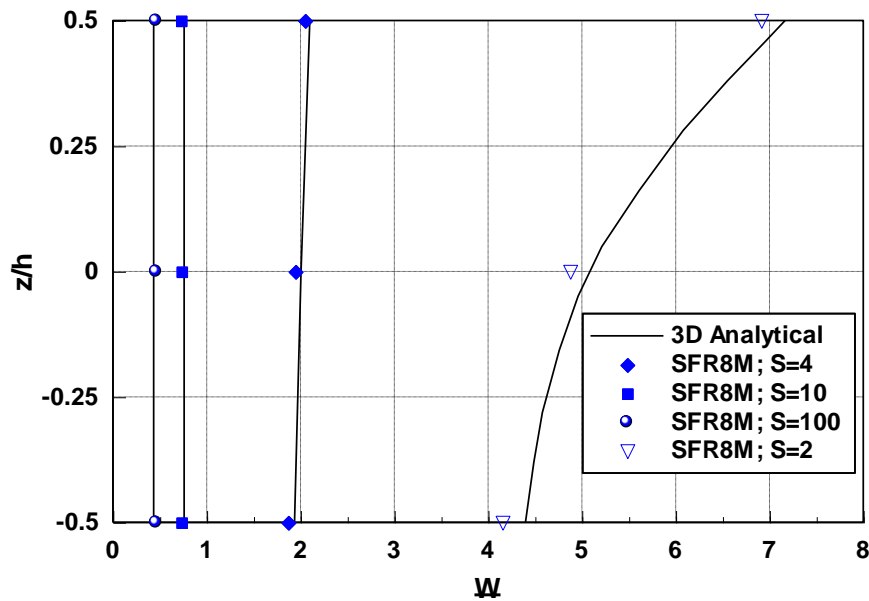


Figure 4.15. Déplacement \bar{w} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR8M

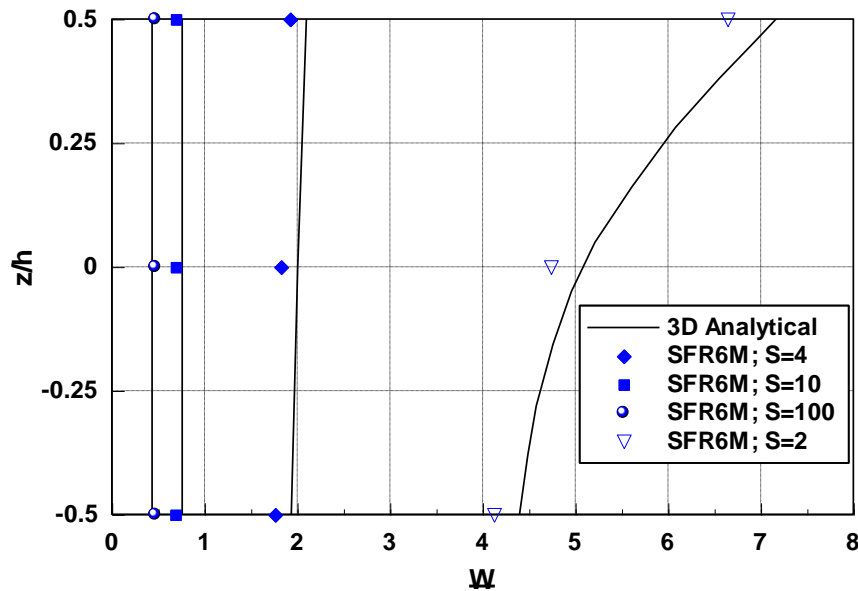


Figure 4.16. Déplacement \bar{w} à travers l'épaisseur d'une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement supportée soumise à une charge sinusoïdale. Élément SFR6M

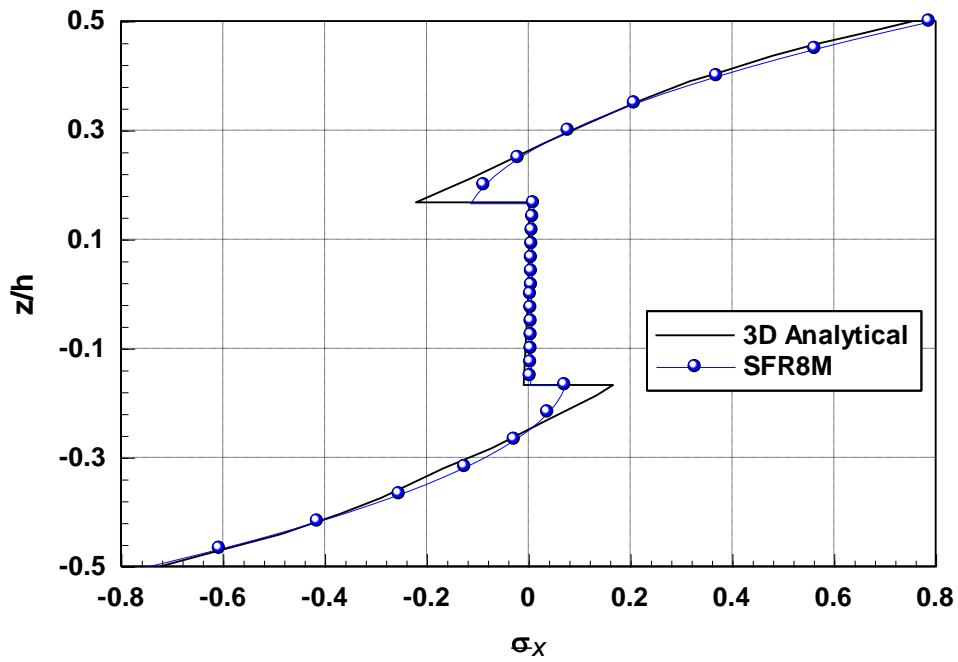


Figure 4 .17. Variation de la contrainte plane $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur pour une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à une charge sinusoïdale ($S = 4$). Elément SFR8M

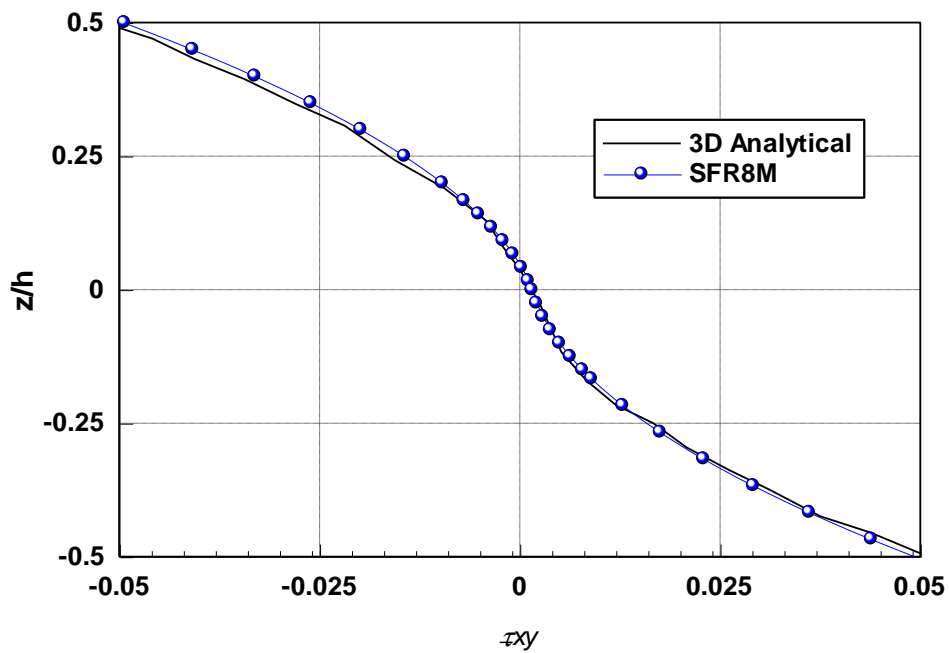


Figure 4 .18. Variation de la contrainte plane $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur pour une plaque carrée stratifiée à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à une charge sinusoïdale ($S = 4$). Elément SFR8M

4.3.3.4. Cylindre orthotrope sous pression interne

Il s'agit d'étudier un cylindre constitué d'un matériau orthotrope, encastré à ses deux extrémités et soumis à l'action d'une pression interne uniforme. Les données du problème sont représentées sur la figure 4.19. Cet exemple permet de valider la bonne prise en compte des pressions, ainsi que le comportement des matériaux élastiques orthotropes. Grâce à la symétrie du problème, un huitième seulement du cylindre sera considéré et discrétisé à l'aide d'un maillage régulier à $8 \times 8 \times 1$ éléments SFR8M. Dans le tableau 4.12, nous présentons la flèche maximale au point D obtenue par l'élément multicouche SFR8M. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats obtenus, d'une part par la théorie des coques minces [278], et d'autre part par les éléments finis coques existants dans la littérature telle que : l'élément coque plane DMTS [12], les éléments mixtes MiSP3-CST, MiSP4-Q4 [12] et l'élément quadratique DSQ24 [279]. Les résultats des éléments coques quadrilatéraux sont très proches de la solution théorique : 2.1% d'écart pour l'élément DSQ24 et 3.2% d'écart pour l'élément MiSP4-Q4. Cependant, l'élément SFR8M donne 8.6% d'écart, ce qui s'explique par le fait que la solution théorique est une solution coque mince.

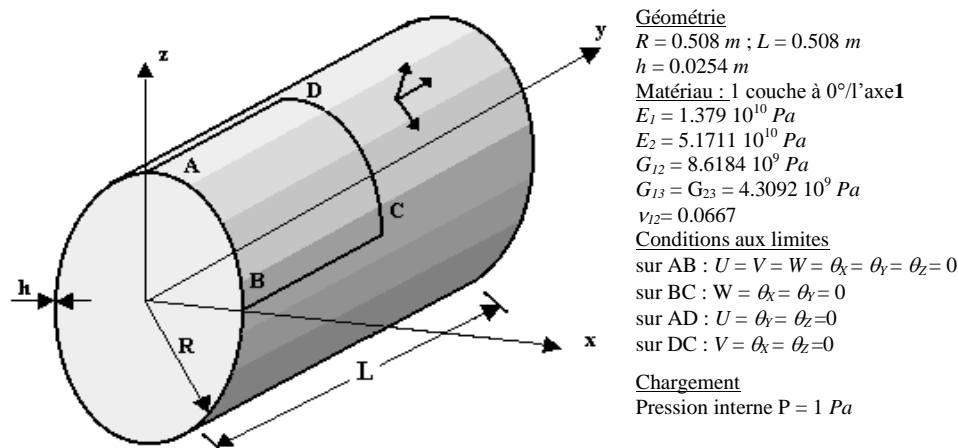


Figure 4.19. Cylindre orthotrope. Géométrie et données du problème [278]

Théorie des coques minces	DMTS	MiSP3-CST	MiSP4-Q4	DSQ24	SFR8M
0.663×10^{-9}	0.616×10^{-9}	0.612×10^{-9}	0.684×10^{-9}	0.677×10^{-9}	0.720×10^{-9}
Erreur	7.1%	7.7%	3.2%	2.1%	8.6%

Tableau 4.12. Cylindre orthotrope sous pression interne. Flèche maximale au point D

4.3.3.5. Poutre encastrée

L'effet de distorsion du maillage est étudié à travers une poutre console proposée par MacNeal et Harder [235] de longueur $L = 6.0$ et d'une section rectangulaire avec $h = 2 \times b = 0.2$ (figure 4.21). Cette poutre est modélisée par six éléments hexaédriques prenant respectivement la forme rectangulaire (maillage A), parallélépipédique (maillage B) et trapézoïdale (maillage C). On a effectué le test de la poutre pour différentes charges qui sont une force unitaire appliquée dans le plan à l'extrémité libre et une force hors plan. Le tableau 4.13 présente les résultats des déplacements pour un matériau isotrope avec :

$$E = 10^7, \nu = 0.3$$

et un matériau orthotrope avec :

$$E_1 = 4E_2 = 5E_3 = 10^7 ; \nu_{12} = \nu_{13} = 0.3 ; \nu_{23} = 0.05 ; G_{12} = G_{13} = 5G_{23} = 3.846 \times 10^6$$

Les résultats du modèle SFR8M sont comparés avec les résultats obtenus par :

- L'élément hexaédrique à 8 nœuds iso-paramétrique H8,
- L'élément hexaédrique à 8 nœuds avec intégration réduite sélective HEXA8(SR) [102, 235, 280],
- L'élément hexaédrique quadratique HEXA16 de Nastran [102, 280],
- L'élément brique incompatible QM6 de Taylor *et al.* [238],
- L'élément hexaédrique PT18 β de Pian et Tong [79] avec 18 modes de contrainte,
- L'élément hexaédrique à 8 nœuds avec ddl de rotation HEX8X [47].

Les résultats obtenus par l'élément SFR8M sont très satisfaisants, même dans le cas où le maillage est distordu. Le modèle SFR8M est plus précis que les modèles utilisés dans la comparaison pour les maillages distordus de type parallélépipédique (maillage B). Ses résultats sont comparables et proches à ceux obtenus par l'élément HEXA16 pour le maillage trapézoïdal (maillage C).

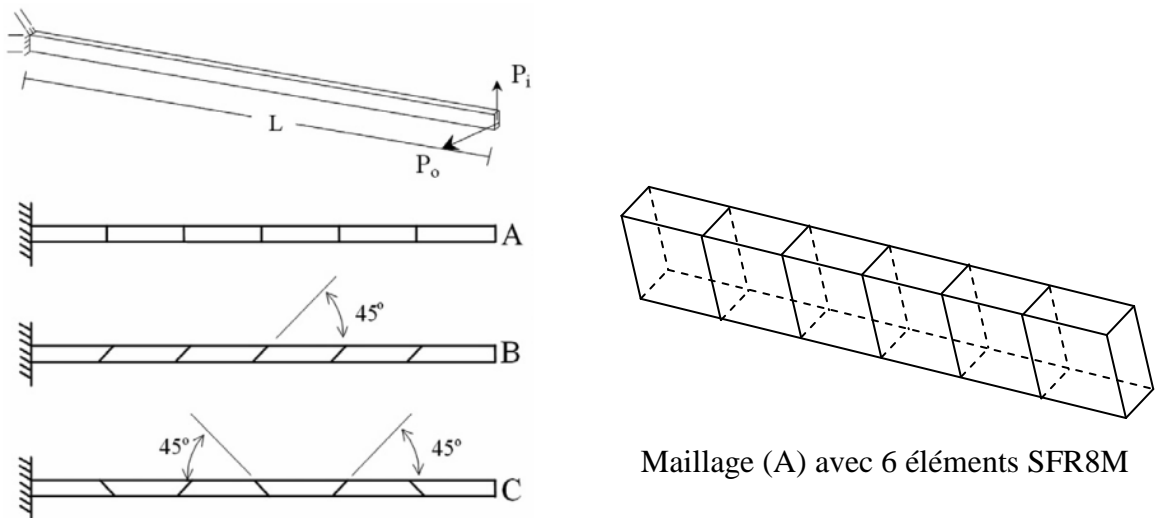


Figure 4.20. Poutre encastrée avec des maillages distordus

Matériaux	isotrope						orthotrope					
	Dans le plan $V^{réf} = 0.1081$ [235]			Hors plan $W^{réf} = 0.4321$ [235]			Dans le plan $V^{réf} = 0.1081$ [102]			Hors plan $W^{réf} = 0.4321$ [102]		
Charges	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
Maillages												
H8	0.093	0.032	0.026	0.025	0.014	0.010	-	-	-	-	-	-
HEXA8(SR)	0.981	0.080	0.069	0.961	0.055	0.051	0.992	0.182	0.138	0.993	0.069	0.069
HEXA16	0.975	0.817	0.898	0.970	0.820	0.961	0.996	0.908	0.968	0.998	0.930	0.990
QM6	0.978	0.624	0.047	0.973	0.528	0.030	-	-	-	-	-	-
PT18 β	0.981	0.625	0.047	0.981	0.587	0.031	-	-	-	-	-	-
HEX8X	0.978	0.624	0.047	0.973	0.528	0.030	-	-	-	-	-	-
SFR8M	0.886	0.845	0.797	0.895	0.885	0.869	0.969	0.907	0.860	0.972	0.971	0.956

Tableau 4.13. Déplacements normalisés de la poutre encastree

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux approches d'adaptation du modèle SFR aux structures composites stratifiées. La première approche consiste à utiliser un élément volumique SFR par couche à travers l'épaisseur (approche par couche orthotrope élémentaire). Deux éléments volumiques hexaédrique à 8 nœuds et prismatique à 6 nœuds, baptisés respectivement SFR8O et SFR6O (Space Fiber Rotation–Orthotrope), sont formulés par cette approche. La deuxième méthode est issue de l'approche multicouche où deux éléments finis volumiques multicouches SFR8M et SFR6M (Space Fiber Rotation – Multilayer) ont été formulés. Cette méthode est basée sur la théorie d'élasticité 3D où la loi constitutive est utilisée pour calculer les contraintes normales et la loi d'équilibre 3D est utilisée pour évaluer les contraintes transversales. La formulation de ces modèles consiste à prendre en compte les contraintes de CT ainsi que les contraintes normales. Toutes ces méthodes sont implantées dans le code de calcul éléments finis Reflex [16-18] pour des applications linéaires des matériaux composites multicouches.

De nombreux problèmes de structures composites stratifiées ont été traités. Nos résultats ont été comparés à des solutions de référence obtenues par la méthode analytique d'élasticité 3D, par des modèles éléments finis 3D et par des théories d'ordre supérieur et du premier ordre des plaques. Une bonne concordance a été constatée pour les modèles orthotropes SFR8O et SFR6O. La formulation de ces modèles nous est donc apparue comme un moyen efficace et simple de modélisation de structures composites multicouches. Cependant, cette formulation peut devenir très coûteuse en temps de calcul surtout quand le nombre de degrés de liberté grandit donc inapplicable à des applications industrielles complexes. En ce qui concerne les modèles SFR Multicouches (SFR8M et SFR6M) les tests de validation sur les structures stratifiées, montrent que la version actuelle de ces modèles se comporte de façon relativement satisfaisante. Les résultats obtenus en déplacements sont excellents pour tous les rapports d'élançement. La prédiction des contraintes planes est également satisfaisante. Nous ajouterons, que l'utilisation des éléments solides SFR Multicouches offre certaines possibilités avantageuses pour modéliser en détail les structures composites stratifiées épaisses. Notons que ces modèles multicouches ont un avantage particulier par rapport à la modélisation des éléments solides (un élément ou plus par couche), c'est que le nombre total des équations est indépendant du nombre de couches. Ce qui nous amène à dire que cette méthode est très efficace en ce qui concerne le temps de calcul et la taille de mémoire. Cependant, ces modèles nécessitent des améliorations numériques pour les calculs des contraintes transversales. Cette approche est en cours d'étude.

Après avoir formulé les éléments SFR en élasticité linéaire pour les matériaux isotrope et orthotrope, nous présenterons dans le chapitre suivant la formulation des éléments SFR en non linéaire géométrique. Notons que, la possibilité de modéliser simplement et efficacement les grands déplacements semble un attrait non négligeable pour la famille des éléments volumiques SFR. Cette formulation sera validée à travers quelques tests représentatifs en grands déplacements et petites déformations.

Chapitre 5.

Formulation du modèle SFR Non linéaire géométrique

Sommaire

5.1. Introduction	155
5.2. La description Lagrangienne	156
5.3. Formulation non linéaire géométrique des éléments SFR	157
5.3.1. Principe des travaux virtuels	157
5.3.2. Formulation Lagrangienne totale	157
5.3.3. Approximation des champs de déplacements et de déformations	159
5.4. Méthodes numériques de résolution	163
5.5. Validation numérique des éléments SFR non linéaires	165
5.5.1. Poutre console soumise à un effort tranchant	165
5.5.2. Coque cylindrique sans diaphragmes soumise à une force ponctuelle	168
5.5.3. Panneau cylindrique soumis à une charge concentrée	171
5.5.4. Coque sphérique soumise à une force ponctuelle	176
5.6. Conclusion	181

5.1. Introduction

Dans le deuxième chapitre nous avons formulé les deux éléments volumiques prismatique à 6 nœuds SFR6 et hexaédrique à 8 nœuds SFR8 basés sur le modèle « Space Fiber Rotation » en supposant que les déformations ainsi que les déplacements qui se produisaient étaient petits et le matériau est linéaire élastique. Ainsi, on a considéré que la géométrie reste identique à elle-même pendant tout le chargement et que les déformations sont assimilées à des infiniment petits du premier ordre. Dans la pratique, ces hypothèses ne sont pas toujours valables. Il est nécessaire parfois de prendre en considération les non-linéarités géométriques. C'est pourquoi, nous proposons dans ce chapitre d'étendre notre formulation tridimensionnelle à la prise en compte des effets non-linéaires géométriques, où les problèmes de grands déplacements trouvent leur origine. Les procédures les plus utilisées dans la formulation des éléments finis volumiques en non linéaire géométrique sont : la description Lagrangienne totale et la description Lagrangienne actualisée. La méthode que nous avons choisie ici est une formulation Lagrangienne totale.

Afin d'étudier le problème de la non linéarité géométrique, quelques rappels de cinématiques vont être présentés dans ce chapitre. Après avoir rappelé les différentes descriptions Lagrangiennes (D.L), nous établirons la formulation non linéaire géométrique des éléments finis volumiques SFR à partir du principe des travaux virtuels. Nous aborderons également l'approximation des champs de déplacements et de déformations en utilisant la formulation Lagrangienne totale associée à la méthode de résolution de

Newton-Raphson. Enfin, nous conclurons ce chapitre par des tests de validation représentatifs.

Nous nous limitons, dans ce chapitre, au cas d'une loi de comportement linéaire, ce qui restreint nos applications aux problèmes en petites déformations sachant qu'ils englobent les problèmes en grands déplacements.

5.2. La description Lagrangienne

Dans un espace euclidien, on étudie le mouvement d'un corps constitué d'une infinité de points matériels. Sous l'effet de sollicitations mécaniques, les points se déplacent et ce corps se déforme. Nous allons suivre le trajet de l'ensemble des points matériels constitutifs du corps. L'ensemble des positions qu'occupent ces points à chaque instant s'appelle une configuration. La figure 5.1 représente les trois configurations typiques dans l'analyse non linéaire : C_0 est la configuration initiale connue, C_1 est la configuration connue et en équilibre au début d'un pas de chargement et C_2 est la configuration recherchée satisfaisant les conditions d'équilibre.

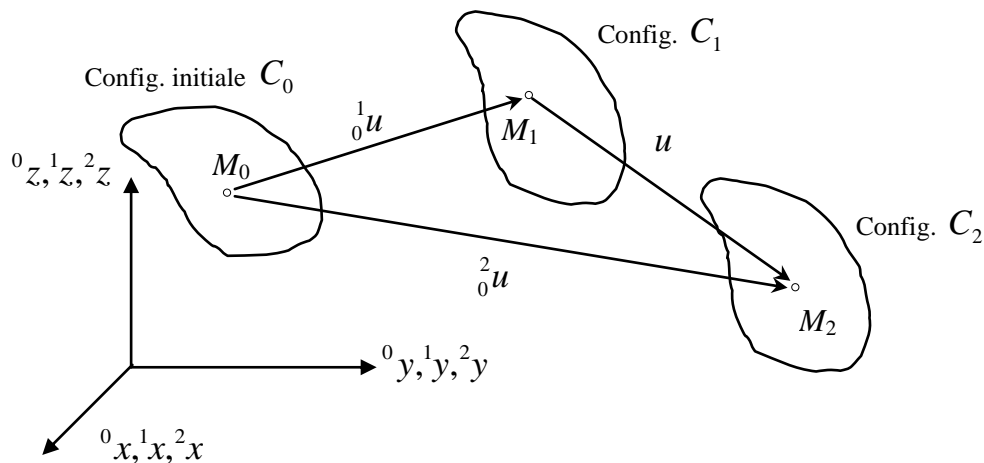


Figure 5.1. Configurations initiale, intermédiaire et finale d'un corps solide (D.L)

Si l'on prend pour configuration de référence la configuration initiale C_0 , la description est dite Lagrangienne totale (D.L.T). Si l'on prend pour configuration de référence la configuration courante, la description est dite Lagrangienne actualisée (D.L.A) [282] :

- **La formulation Lagrangienne totale** où la configuration de référence est représentée par la configuration initiale C_0 . L'attrait pour cette formulation se justifie par deux avantages essentiels : la constance du domaine d'intégration et la facilité de changement des conditions aux limites. Cependant, la présence d'une configuration de référence fixe devient un inconvénient lors du calcul des contraintes.

- **La formulation Lagrangienne actualisée** où la configuration de référence est représentée par la dernière position d'équilibre connue du corps. Cette formulation permet de palier à l'inconvénient majeur présenté par la formulation Lagrangienne totale : le calcul des contraintes se fait dans la configuration actuelle, ce qui permet de redonner un sens physique aux valeurs obtenues. Ces contraintes sont confondues avec les contraintes de Piola-Kirchhoff dans la configuration de référence. Cette formulation nécessite l'actualisation de la configuration de référence à chaque instant. Cette opération peut apparaître comme un inconvénient de la méthode par le surcroît de calcul qu'elle entraîne et la variation permanente des domaines d'intégration.

5.3. Formulation non linéaire géométrique des éléments SFR

5.3.1. Principe des travaux virtuels

Les modèles d'éléments finis de type déplacements sont basés sur le principe des travaux virtuels, ou encore des déplacements virtuels. Le principe exige que la somme du travail virtuel externe appliqué sur un corps et le travail virtuel interne stocké dans le corps doit être égale à zéro [281] :

$$\delta W = \int_{^2V} {}^2\sigma_{ij} \delta({}^2e_{ij}) d^2V - \delta {}^2R = 0 \quad (5.1)$$

où $\delta {}^2R$ est le travail virtuel externe des forces volumiques 2f_i appliquées sur le volume 2V de la configuration C_2 et des forces surfaciques 2t_i appliquées sur la surface externe 2S de la configuration C_2 .

Le travail virtuel des forces externes peut être écrit sur la configuration actuelle C_2 sous la forme :

$$\delta {}^2R = \int_{^2V} {}^2f_i \delta u_i d^2V + \int_{^2S} {}^2t_i \delta u_i d^2S \quad (5.2)$$

La configuration actuelle déformée C_2 étant inconnue, l'équation (5.1) est inexploitable sous cette forme et nécessite d'être exprimée par rapport à une configuration de référence connue. Le choix particulier d'une configuration de référence permet quelques simplifications. Ce choix n'affecte pas généralement les résultats du calcul. Il s'agit de choisir comme configuration de référence une configuration adaptée au problème à traiter.

Le principe des travaux virtuels s'exprime avec des contraintes, des déformations, des volumes et des surfaces se rapportant à la configuration C_2 , qui est inconnue *a priori*. On doit donc se ramener à des configurations connues, soit C_0 en description Lagrangienne totale, soit C_1 en description Lagrangienne actualisée. Pour notre formulation, nous retrouverons la formulation Lagrangienne totale.

5.3.2. Formulation Lagrangienne totale

En description Lagrangienne totale, on adopte comme configuration de référence, la configuration initiale C_0 . L'utilisation de cette description nous conduit à écrire le travail virtuel de l'équation (5.1) sous la forme suivante [281] :

$$\delta W = \int_{^0V} {}^0S_{ij} \delta({}^0E_{ij}) d^0V - \int_{^0V} {}^0f_i \delta u_i d^0V - \int_{^0S} {}^0t_i \delta u_i d^0S = 0 \quad (5.3)$$

avec 0f_i est le vecteur des forces volumiques et 0t_i est le vecteur des forces surfaciques rapportés à la configuration C_0 .

A un instant donné, le tenseur des déformations virtuelles en chaque point du corps est :

$$\delta({}^0E_{ij}) = \delta({}^1E_{ij}) + \delta({}^0\varepsilon_{ij}) = \delta({}^0\varepsilon_{ij}) \quad (5.4a)$$

où $\delta({}^1E_{ij}) = 0$

Donc le tenseur des déformations virtuelles s'exprime classiquement par la somme de deux tenseurs :

$$\delta({}^0\varepsilon_{ij}) = \delta({}^0e_{ij}) + \delta({}^0\eta_{ij}) \quad (5.4b)$$

où la partie linéaire du tenseur des déformations virtuelles est donnée par :

$$\delta({}_0e_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^0x_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial {}^1u_k}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial {}^1u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (5.5a)$$

et la partie quadratique du tenseur des déformations virtuelles traduisant la non linéarité géométrique est :

$$\delta({}_0\eta_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (5.5b)$$

Les tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce dans les configurations C_1 et C_2 sont respectivement ${}_0^1S_{ij}$ et ${}_0^2S_{ij}$. Ces deux tenseurs sont liés par la relation suivante :

$${}_0^2S_{ij} = {}_0^1S_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (5.6)$$

où ${}_0S_{ij}$ est le tenseur des contraintes de Kirchhoff.

Remplaçons les équations (5.4b) et (5.6) dans l'équation (5.3), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{0V} {}_0^2S_{ij} \delta({}_0^2E_{ij}) d^0V - \delta({}_0^2R) &= \int_{0V} ({}_0^1S_{ij} + {}_0S_{ij}) \delta({}_0\varepsilon_{ij}) d^0V - \delta({}_0^2R) = 0 \\ \int_{0V} \{ {}_0S_{ij} \delta({}_0\varepsilon_{ij}) + {}_0^1S_{ij} [\delta({}_0e_{ij}) + \delta({}_0\eta_{ij})] \} d^0V - \delta({}_0^2R) &= 0 \\ \int_{0V} {}_0S_{ij} \delta({}_0\varepsilon_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V + \delta({}_0^1R) - \delta({}_0^2R) &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

où $\delta({}_0^1R)$ est l'énergie virtuelle interne du corps dans la configuration C_1 exprimé par :

$$\delta({}_0^1R) = \int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0e_{ij}) d^0V \quad (5.8)$$

Le corps solide est en équilibre dans la configuration C_1 . En appliquant le principe des travaux virtuels pour la configuration C_1 , nous avons la relation suivante :

$$\int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0e_{ij}) d^0V - \int_{0V} {}_0^1f_i \delta u_i d^0V - \int_{0S} {}_0^1t_i \delta u_i d^0S = 0 \quad (5.9)$$

avec

$$\delta({}_0^1R) = \int_{0V} {}_0^1f_i \delta u_i d^0V + \int_{0S} {}_0^1t_i \delta u_i d^0S \quad (5.10)$$

Remplaçons la loi constitutive dans l'équation (5.7) on obtient :

$$\int_{0V} {}_0C_{ijkl} {}_0\varepsilon_{kl} \delta({}_0\varepsilon_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V = \delta({}_0^2R) - \delta({}_0^1R) \quad (5.11)$$

Nous avons la simplification suivante :

$${}_0S_{ij} \approx {}_0C_{ijkl} {}_0e_{ij} \text{ et } \delta({}_0\varepsilon_{ij}) \approx \delta({}_0e_{ij}) \quad (5.12)$$

Donc l'équation (5.11) se simplifiée comme suit :

$$\int_{0V} {}_0C_{ijkl} {}_0e_{kl} \delta({}_0e_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_0^1S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V = \delta({}_0^2R) - \delta({}_0^1R) \quad (5.13)$$

L'équation (5.13) est la forme faible pour le modèle élément fini basé sur la formulation Lagrangienne totale. Les composantes de contrainte ${}^1S_{ij}$ sont évaluées en utilisant la relation constitutive suivante :

$${}^1S_{ij} = {}_0C_{ijkl} {}^1E_{kl} \quad (5.14a)$$

où ${}^1E_{kl}$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange défini par :

$${}^1E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^1u_i}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial {}^1u_j}{\partial {}^0x_i} + \frac{\partial {}^1u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial {}^1u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (5.14b)$$

5.3.3. Approximation des champs de déplacements et de déformations

Dans cette section, nous nous intéressons à la discrétisation par la méthode des éléments finis utilisant le modèle SFR décrit par les deux éléments SFR6 et SFR8 présentés dans le chapitre 2. On a adopté l'hypothèse des petites déformations en grands déplacements pour les problèmes tridimensionnels non linéaires géométriques en utilisant la formulation Lagrangienne totale. Soit les notations suivantes :

$$({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) = (x, y, z) ; ({}^1u_1, {}^1u_2, {}^1u_3) = (u, v, w) ; (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \quad (5.15)$$

On peut écrire le premier terme de l'équation (5.13) sous la forme suivante :

$$\int_{0V} {}_0C_{ijkl} {}_0e_{kl} \delta({}_0e_{ij}) d^0V = \int_{0V} \{\delta_0e\}^T [{}_0C] \{{}_0e\} d^0V \quad (5.16)$$

avec

$$\{{}_0e\} = \begin{Bmatrix} {}_0e_{xx} \\ {}_0e_{yy} \\ {}_0e_{zz} \\ 2 {}_0e_{xy} \\ 2 {}_0e_{xz} \\ 2 {}_0e_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x} + u_{,x} \bar{u}_{,x} + v_{,x} \bar{v}_{,x} + w_{,x} \bar{w}_{,x} \\ \bar{v}_{,y} + u_{,y} \bar{u}_{,y} + v_{,y} \bar{v}_{,y} + w_{,y} \bar{w}_{,y} \\ \bar{w}_{,z} + u_{,z} \bar{u}_{,z} + v_{,z} \bar{v}_{,z} + w_{,z} \bar{w}_{,z} \\ \bar{u}_{,x} + \bar{v}_{,y} + u_{,x} \bar{u}_{,y} + v_{,x} \bar{v}_{,y} + w_{,x} \bar{w}_{,y} + u_{,y} \bar{u}_{,x} + v_{,y} \bar{v}_{,x} + w_{,y} \bar{w}_{,x} \\ \bar{u}_{,x} + \bar{w}_{,z} + u_{,x} \bar{u}_{,z} + v_{,x} \bar{v}_{,z} + w_{,x} \bar{w}_{,z} + u_{,z} \bar{u}_{,x} + v_{,z} \bar{v}_{,x} + w_{,z} \bar{w}_{,x} \\ \bar{v}_{,y} + \bar{w}_{,z} + u_{,y} \bar{u}_{,z} + v_{,y} \bar{v}_{,z} + w_{,y} \bar{w}_{,z} + u_{,z} \bar{u}_{,y} + v_{,z} \bar{v}_{,y} + w_{,z} \bar{w}_{,y} \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

où $[{}_0C]$ est la matrice d'élasticité pour un matériau homogène et isotrope.

On peut aussi écrire le deuxième terme de l'équation (5.13) comme suit :

$$\int_{0V} {}^1S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V = \int_{0V} \{\delta_0\eta\}^T \{{}^1S\} d^0V \quad (5.18)$$

où sous forme matricielle :

$$\int_{0V} \{\delta_0\eta\}^T \{{}^1S\} d^0V = \int_{0V} \{\partial \delta \bar{u}\}^T [{}^1S] \{\partial \bar{u}\} d^0V \quad (5.19)$$

avec

$$[{}^1S] = \begin{bmatrix} {}^1\tilde{S} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & {}^1\tilde{S} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & {}^1\tilde{S} \end{bmatrix} ; \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; {}^1\tilde{S} = \begin{bmatrix} {}^1S_{xx} & {}^1S_{xy} & {}^1S_{xz} \\ {}^1S_{xy} & {}^1S_{yy} & {}^1S_{yz} \\ {}^1S_{xz} & {}^1S_{yz} & {}^1S_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Les champs des déplacements totaux et incrémentaux proposés dans cette étude (modèles SFR) sont :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_d} \begin{Bmatrix} N_i u_i + N_i(z - z_i)\theta_{yi} - N_i(y - y_i)\theta_{zi} \\ N_i v_i - N_i(z - z_i)\theta_{xi} + N_i(x - x_i)\theta_{zi} \\ N_i w_i + N_i(y - y_i)\theta_{xi} - N_i(x - x_i)\theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (5.21a)$$

$$\{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_d} \begin{Bmatrix} N_i \bar{u}_i + N_i(z - z_i)\theta_{yi} - N_i(y - y_i)\theta_{zi} \\ N_i \bar{v}_i - N_i(z - z_i)\theta_{xi} + N_i(x - x_i)\theta_{zi} \\ N_i \bar{w}_i + N_i(y - y_i)\theta_{xi} - N_i(x - x_i)\theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (5.21b)$$

où n_d est le nombre des nœuds par élément (6 pour l'élément prismatique SFR6 et 8 pour l'élément hexaédrique SFR8).

ou sous une forme matricielle :

$$\{u\} = [N_q] \{u_n\} ; \{\bar{u}\} = [N_q] \{\bar{u}_n\} ; [N_q] = \begin{bmatrix} < N_{ui} > & & \\ \dots & & \\ < N_{vi} > & \dots i=1, n_d & \\ < N_{wi} > & & \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

où

$$\begin{aligned} < N_{ui} > &= \langle N_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_i(z - z_i) \quad -N_i(y - y_i) \rangle \\ < N_{vi} > &= \langle 0 \quad N_i \quad 0 \quad -N_i(z - z_i) \quad 0 \quad N_i(x - x_i) \rangle \\ < N_{wi} > &= \langle 0 \quad 0 \quad N_i \quad N_i(y - y_i) \quad -N_i(x - x_i) \quad 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.23)$$

et $\{u_n\}$ est le vecteur des degrés de liberté nodaux contenant trois translations et trois rotations fictives par nœud :

$$\langle u_n \rangle = \langle \dots \quad u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad \dots \quad i=1, n_d \rangle \quad (5.24)$$

$$\langle \bar{u}_n \rangle = \langle \dots \quad \bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{w}_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad \dots \quad i=1, n_d \rangle \quad (5.25)$$

La partie quadratique du tenseur des déformations virtuelles traduisant la non-linéarité géométrique est :

$$\{\delta {}_0 \eta\} = \begin{Bmatrix} \delta {}_0 \eta_{xx} \\ \delta {}_0 \eta_{yy} \\ \delta {}_0 \eta_{zz} \\ 2\delta {}_0 \eta_{xy} \\ 2\delta {}_0 \eta_{xz} \\ 2\delta {}_0 \eta_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{u}_{,x} \bar{u}_{,x} + \delta \bar{v}_{,x} \bar{v}_{,x} + \delta \bar{w}_{,x} \bar{w}_{,x} \\ \delta \bar{u}_{,y} \bar{u}_{,y} + \delta \bar{v}_{,y} \bar{v}_{,y} + \delta \bar{w}_{,y} \bar{w}_{,y} \\ \delta \bar{u}_{,z} \bar{u}_{,z} + \delta \bar{v}_{,z} \bar{v}_{,z} + \delta \bar{w}_{,z} \bar{w}_{,z} \\ \delta \bar{u}_{,x} \bar{u}_{,y} + \delta \bar{v}_{,x} \bar{v}_{,y} + \delta \bar{w}_{,x} \bar{w}_{,y} + \delta \bar{u}_{,y} \bar{u}_{,x} + \delta \bar{v}_{,y} \bar{v}_{,x} + \delta \bar{w}_{,y} \bar{w}_{,x} \\ \delta \bar{u}_{,x} \bar{u}_{,z} + \delta \bar{v}_{,x} \bar{v}_{,z} + \delta \bar{w}_{,x} \bar{w}_{,z} + \delta \bar{u}_{,z} \bar{u}_{,x} + \delta \bar{v}_{,z} \bar{v}_{,x} + \delta \bar{w}_{,z} \bar{w}_{,x} \\ \delta \bar{u}_{,y} \bar{u}_{,z} + \delta \bar{v}_{,y} \bar{v}_{,z} + \delta \bar{w}_{,y} \bar{w}_{,z} + \delta \bar{u}_{,z} \bar{u}_{,y} + \delta \bar{v}_{,z} \bar{v}_{,y} + \delta \bar{w}_{,z} \bar{w}_{,y} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce est :

$$\begin{Bmatrix} {}^1 S \\ {}_0 S \end{Bmatrix} = [{}_0 C] \begin{Bmatrix} {}^1 E \\ {}_0 E \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange est :

$$\left\{ \begin{matrix} {}^1E \\ {}_0E \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} {}^1E_{xx} \\ {}^1E_{yy} \\ {}^1E_{zz} \\ 2 {}^1E_{xy} \\ 2 {}^1E_{xz} \\ 2 {}^1E_{yz} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_{,x} + 0.5 \left[(u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2 \right] \\ v_{,y} + 0.5 \left[(u_{,y})^2 + (v_{,y})^2 + (w_{,y})^2 \right] \\ w_{,z} + 0.5 \left[(u_{,z})^2 + (v_{,z})^2 + (w_{,z})^2 \right] \\ u_{,y} + v_{,x} + u_{,x} u_{,y} + v_{,x} v_{,y} + w_{,x} w_{,y} \\ u_{,z} + w_{,x} + u_{,x} u_{,z} + v_{,x} v_{,z} + w_{,x} w_{,z} \\ v_{,z} + w_{,y} + u_{,y} u_{,z} + v_{,y} v_{,z} + w_{,y} w_{,z} \end{matrix} \right\} \quad (5.28a)$$

En injectant ces discrétisations dans les équations 5.16 et 5.19, on obtient finalement les relations suivantes :

$$\int_{0V} \{ \delta_0 e \}^T [{}_0C] \{ {}_0 e \} d^0V = \int_{0V} \{ \delta \bar{u}_n \}^T [B_L]^T [{}_0C] [B_L] \{ \bar{u}_n \} d^0V \quad (5.29a)$$

$$\int_{0V} \{ \delta \bar{u}_n \}^T [{}_0S] \{ \bar{u}_n \} d^0V = \int_{0V} \{ \delta \bar{u}_n \}^T [B_{NL}]^T [{}_0S] [B_{NL}] \{ \bar{u}_n \} d^0V \quad (5.29b)$$

Remplaçons l'équation (5.29) dans l'équation (5.13), on obtient le système matriciel suivant :

$$\left([{}^1K_L] + [{}^1K_{NL}] \right) \{ \bar{u}_n \} = \{ {}^2F \} - \{ {}^1F \} \quad (5.30)$$

avec

$$[{}^1K_L] = \int_{0V} [B_L]^T [{}_0C] [B_L] d^0V \quad (5.31)$$

$$[{}^1K_{NL}] = \int_{0V} [B_{NL}]^T [{}_0S] [B_{NL}] d^0V \quad (5.32)$$

où $\{ {}^2F \}$ représente les sollicitations extérieures indépendantes des déplacements,

$[{}^1K_L]$ est la matrice de rigidité linéaire,

$[{}^1K_{NL}]$ est la matrice de rigidité non linéaire.

Les matrices $[B_{NL}]$ et $[B_L]$ de dimensions $(9 \times 6n_d)$ et $(6 \times 6n_d)$ sont définies par les relations suivantes :

$$[B_{NL}] = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{NL}^u \\ \tilde{B}_{NL}^v \\ \tilde{B}_{NL}^w \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

et

$$[B_L] = [B_{L0}] + [B_{L1}] \quad (5.34)$$

Sachant que la matrice $[B_{L0}]$ est la même matrice déformation-déplacement $[B]$ définie par l'équation (2.10) dans le deuxième chapitre et la matrice $[B_{L1}]$ est définie par :

$$[B_{L1}] = [\dots B_{L1i}^U \dots B_{L1i}^0 \dots] \quad i = 1, n_d \quad (5.36)$$

Les dérivées des fonctions de forme sont obtenues par les relations standards suivantes :

$$\begin{aligned}
 \langle N_{i,x} \rangle &= j_{11} \langle N_{i,\xi} \rangle + j_{12} \langle N_{i,\eta} \rangle + j_{13} \langle N_{i,\zeta} \rangle \\
 \langle N_{i,y} \rangle &= j_{21} \langle N_{i,\xi} \rangle + j_{22} \langle N_{i,\eta} \rangle + j_{23} \langle N_{i,\zeta} \rangle \\
 \langle N_{i,z} \rangle &= j_{31} \langle N_{i,\xi} \rangle + j_{32} \langle N_{i,\eta} \rangle + j_{33} \langle N_{i,\zeta} \rangle
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

où j_{jk} sont les termes de la matrice Jacobienne inverse $[j] = [J]^{-1}$.

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

Finalement, le vecteur des forces internes s'exprime comme suit :

$$\begin{Bmatrix} {}^1F \\ {}^0F \end{Bmatrix} = \int_{{}^0V} [B_L]^T \begin{Bmatrix} {}^1\hat{S} \\ {}^0\hat{S} \end{Bmatrix} d^0V \tag{5.41}$$

où

$$d^0V = \det J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{5.42}$$

et le vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce est :

$$\begin{Bmatrix} {}^1\hat{S} \\ {}^0\hat{S} \end{Bmatrix}^T = \begin{bmatrix} {}^1S_{xx} & {}^1S_{yy} & {}^1S_{zz} & {}^1S_{xy} & {}^1S_{xz} & {}^1S_{yz} \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

5.4. Méthodes numériques de résolution

Les méthodes numériques de résolution consistent à discrétiser le problème en incréments et le résoudre de telle manière à ce que à l'intérieur de chaque incrément se déroule un processus itératif permettant d'approcher la solution. Pour le cas de chargements statiques, cette discrétisation correspond à une discrétisation en incréments de chargement. Une bibliographie importante sur ces méthodes est disponible dans tous les livres d'éléments finis traitant les problèmes non linéaires [281, 283, 284]. Ces méthodes sont adaptées pour résoudre les problèmes avec tous les non linéarités possibles, géométrique ou matérielle. Parmi ces méthodes, la plus classique est la méthode de Newton-Raphson.

La résolution directe du système (5.30) est remplacée par la recherche itérative du champ des déplacements $\{u_n\}$ qui annulera le vecteur résidu R à la fin de chaque incrément de chargement. On peut alors définir le vecteur résidu par :

$$R(\{u_n\}) = [K_L + K_{NL}]\{u_n\} - F \tag{5.44}$$

Ce vecteur résidu peut aussi s'interpréter comme la différence entre les efforts intérieurs et les efforts extérieurs imposés :

$$R(\{u_n\}) = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\} = \{0\} \tag{5.45}$$

Notons $\{u_n\}^i$ une approximation supposée connue de la solution à l'itération (i) d'un incrément de chargement (j) donné, on peut alors calculer :

$$R(\{u_n\}^i) = \{F_{ext}\}^j - \{F_{int}\}_i^j = \sum_{k=1}^{n_d} (\{F_{int}(\sigma)\}_k)_i^j \quad (5.46)$$

La méthode consiste alors à rechercher la solution $\{u_n\}^{i+1}$ à l'itération ($i+1$) telle que :

$$R(\{u_n\}^{i+1}) = \{0\} \quad (5.47)$$

$$\{u_n\}^{i+1} = \{u_n\}^i + \{\Delta u_n\}^{i+1} \quad (5.48)$$

En développant en série de Taylor le vecteur résidu $R(\{u_n\}^i)$ au voisinage de $\{u_n\}^i$ on obtient :

$$R(\{u_n\}^{i+1}) = R(\{u_n\}^i) + \frac{\partial R}{\partial u}(\{u_n\}^i) \cdot \{\Delta u_n\}^{i+1} + \dots = \{0\} \quad (5.49)$$

Une approximation au premier ordre conduit à l'expression suivante :

$$[K_T] \{\Delta u_n\}^{i+1} = \{F_{ext}\}^j - \{F_{int}\}_i \quad (5.50)$$

La solution est donc de trouver $\{\Delta u_n\}^{i+1}$ tel que :

$$\{\Delta u_n\}^{i+1} = [K_T]^{-1} \cdot R(\{u_n\}^i) \quad (5.51)$$

où $[K_T]$ désigne la matrice tangente donnée comme suit :

$$[K_T] = - \left[\frac{\partial R}{\partial u}(\{u_n\}^i) \right] \quad (5.52)$$

Partant d'une valeur initiale $\{u_n\}^0$ fixée par l'utilisateur, le processus itératif de résolution est poursuivi jusqu'à la convergence. Afin de contrôler le processus itératif, il est nécessaire d'introduire des tests de convergence. On utilise ceux portant sur les rapports de normes des déplacements, des forces résiduelles et de l'énergie au cours d'une itération. Au moins l'un des critères suivants doit être satisfait :

$$\frac{\|\{\Delta u_n\}_i\|}{\|\{u_n\}_i^j\|} < \varepsilon_1 \quad (5.53a)$$

$$\frac{\|\{R\}_i\|}{\|\{R\}_0^j\|} < \varepsilon_2 \quad (5.53b)$$

$$\frac{|\{R\}_i \langle \Delta u_n \rangle_i|}{|\{R\}_0^j \langle u_n \rangle_i|} < \varepsilon_3 \quad (5.53c)$$

où $\|\bullet\|$ représente la norme. Les tolérances ε_1 , ε_2 , et ε_3 sont des données du calcul choisies par l'utilisateur (en général prises égales à 0.1%).

5.5. Validation numérique des éléments SFR non linéaires

Dans cette section, nous examinons la validité des éléments SFR non linéaires géométriques et nous discutons de l'efficacité de ces éléments en comparaison avec d'autres modèles disponibles dans la littérature. Un certain nombre de tests représentatifs seront analysés : Tout d'abord, nous avons étudié le comportement d'une poutre console soumise à un effort tranchant. Ce test faisant intervenir principalement de la flexion est assez sévère sur la convergence des modèles. Ensuite, le cas d'une coque cylindrique sans diaphragmes soumise à une force ponctuelle sera étudié. Le test d'un panneau cylindrique épais et mince soumis à une charge concentrée sera aussi présenté. Finalement, nous étudions l'exemple d'une coque sphérique soumise à une force ponctuelle.

Pour chaque cas test, les résultats obtenus sont comparés d'une part, avec la solution de référence, et d'autre part, avec les éléments classiques prismatique à 6 nœuds et hexaédrique à 8 nœuds. Les éléments SFR et les éléments volumiques linéaires standards W6 et H8 sont formulés en non linéaire géométrique et implémentés dans le code de calcul éléments finis Reflex [16-18] utilisant la description Lagrangienne totale. Les équations d'équilibre sont résolues par des incréments successifs et une procédure itérative basée sur la méthode de Newton-Raphson. L'intégration numérique utilisée dans les éléments SFR est une intégration réduite avec $2 \times 2 \times 2$ points de Gauss pour l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8 et 1×2 points de Gauss-Hammer pour l'élément prismatique à 6 nœuds SFR6. La technique de stabilisation introduite dans ces éléments est la même que celle présentée dans le deuxième chapitre.

5.5.1. Poutre console soumise à un effort tranchant

La figure 5.2 montre une poutre encastree à l'une de ses extrémités et soumise à une charge linéique \mathbf{P} uniformément répartie sur l'extrémité opposée. Ce test est présenté par Sze *et al.* [285] afin de vérifier la bonne performance de l'élément de coque S4R du code de calcul éléments finis Abaqus avec un maillage de 16×1 éléments. Cette solution est considérée comme une solution de référence et ces résultats sont représentés dans le tableau 5.1.

En regardant le comportement du modèle face à un chargement induisant de grands déplacements, on va solliciter la poutre par une charge \mathbf{P}_{max} par incréments de 20 %.

$$P_0 = EI/L^2 = 1 \text{ et } P_{max} = 4 P_0$$

Le calcul est effectué avec un maillage de $(100 \times 10 \times 1) \times 2$ éléments prismatiques SFR6 et $100 \times 10 \times 1$ éléments hexaédriques SFR8. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 5.2 et sur les figures 5.3 et 5.4. Ces figures représentent les courbes de la force normalisée en fonction du déplacement au point d'extrémité libre dans les deux directions Ox et Oz . Nous comparons les résultats obtenus par les éléments SFR avec ceux obtenus par les éléments volumiques linéaires classiques W6 et H8. Nous rajoutons aussi à cette comparaison les résultats obtenus par le modèle solide-coque prismatique SHB6 proposé par Trinh [21] avec un maillage de $(100 \times 10 \times 1) \times 2$ éléments.

Ce premier test montre une performance acceptable des éléments SFR par rapport à la solution de référence. On peut remarquer que les éléments SFR donnent une très bonne précision par rapport aux éléments volumiques standards W6 et H8. Le modèle SFR6 a montré son efficacité par comparaison avec l'élément SHB6. Cependant, l'élément SFR8 semble être un peu moins précis mais ces résultats sont beaucoup mieux que ceux de l'élément classique H8. La figure 5.5 montre le maillage initial et déformé de la poutre console soumise à une charge linéique maximale \mathbf{P}_{max} .

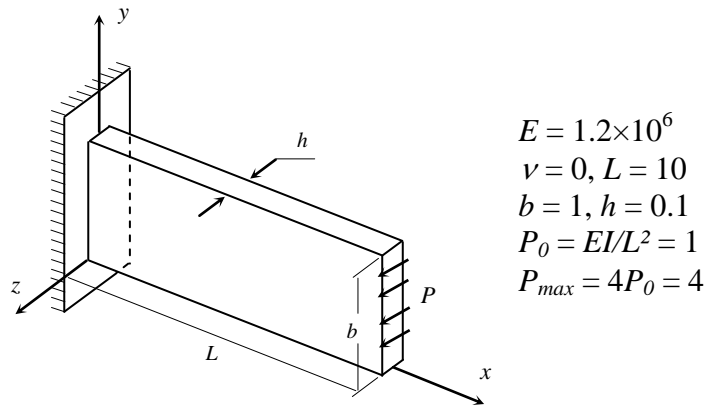


Figure 5.2. Poutre console en non linéaire géométrique. Données du problème [285]

P/P_{max}	$-U$	W	P/P_{max}	$-U$	W	P/P_{max}	$-U$	W
0.05	0.026	0.663	0.40	1.184	4.292	0.75	2.541	6.031
0.10	0.103	1.309	0.45	1.396	4.631	0.80	2.705	6.190
0.15	0.224	1.922	0.50	1.604	4.933	0.85	2.861	6.335
0.20	0.381	2.493	0.55	1.807	5.202	0.90	3.010	6.467
0.25	0.563	3.015	0.60	2.002	5.444	0.95	3.151	6.588
0.30	0.763	3.488	0.65	2.190	5.660	1.00	3.286	6.698
0.35	0.971	3.912	0.70	2.370	5.855			

Tableau 5.1. Poutre console en non linéaire géométrique : Solution de référence [285]

P/P_{max}	W6		SFR6		H8		SFR8	
	$-U$	W	$-U$	W	$-U$	W	$-U$	W
0.05	0.009	0.460	0.021	0.660	0.008	0.445	0.022	0.664
0.10	0.043	0.913	0.094	1.312	0.041	0.885	0.093	1.305
0.15	0.100	1.353	0.211	1.929	0.095	1.315	0.198	1.873
0.20	0.177	1.776	0.365	2.504	0.169	1.731	0.332	2.397
0.25	0.271	2.177	0.545	3.030	0.260	2.129	0.482	2.865
0.30	0.380	2.556	0.742	3.507	0.366	2.507	0.642	3.284
0.35	0.500	2.912	0.950	3.935	0.484	2.864	0.807	3.660
0.40	0.628	3.245	1.162	4.318	0.611	3.198	0.974	3.997
0.45	0.763	3.555	1.418	4.660	0.745	3.511	1.141	4.301
0.50	0.901	3.843	1.581	4.965	0.883	3.802	1.306	4.576
0.60	1.184	4.359	1.980	5.480	1.166	4.322	1.625	5.053
0.70	1.465	4.802	2.347	5.895	1.448	4.770	1.928	5.451
0.80	1.739	5.183	2.683	6.233	1.723	5.154	2.212	5.786
0.90	2.001	5.511	2.989	6.513	1.986	5.485	2.477	6.071
1.00	2.250	5.795	3.146	6.625	2.236	5.771	2.723	6.316

Tableau 5.2. Résultats des déflexions U et W de la poutre console en non linéaire géométrique

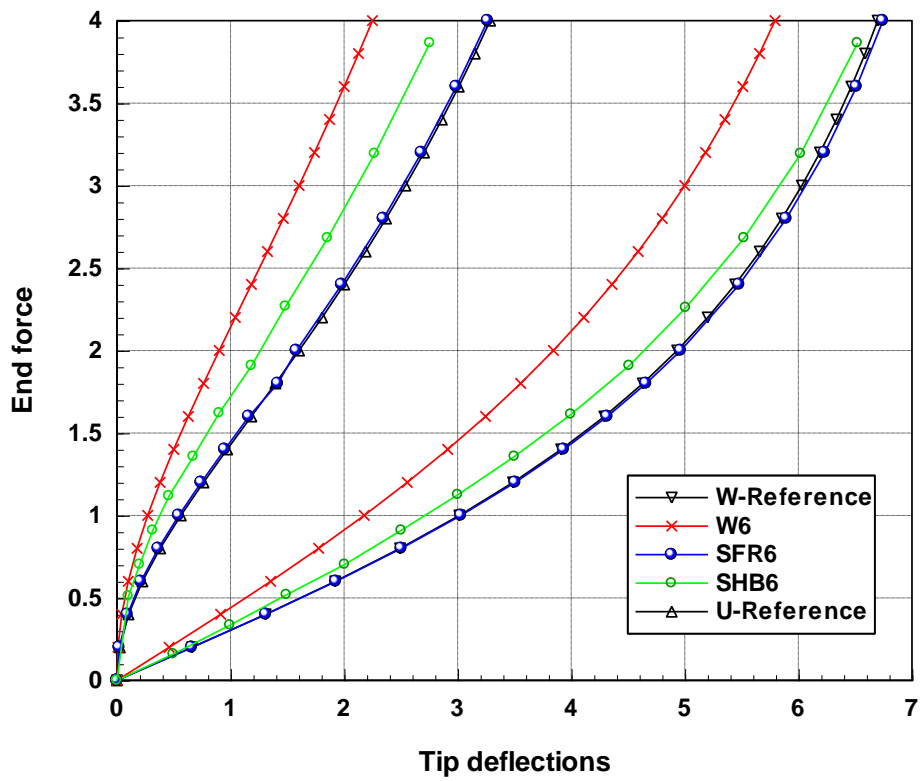


Figure 5.3. Poutre console en non linéaire géométrique. Résultats de l'élément SFR6

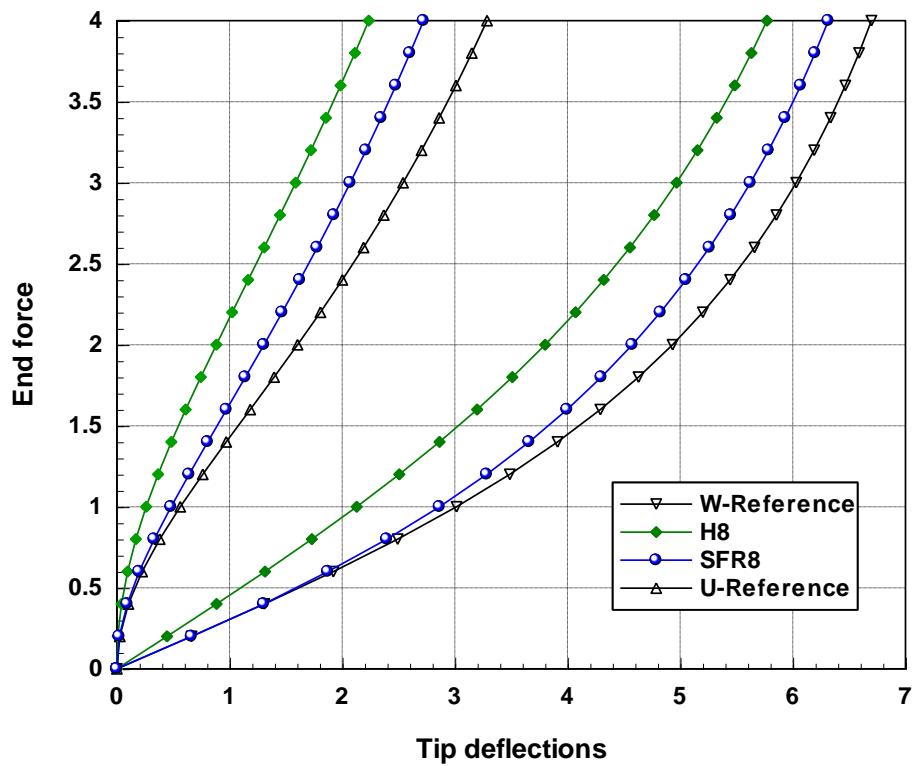


Figure 5.4. Poutre console en non linéaire géométrique. Résultats de l'élément SFR8

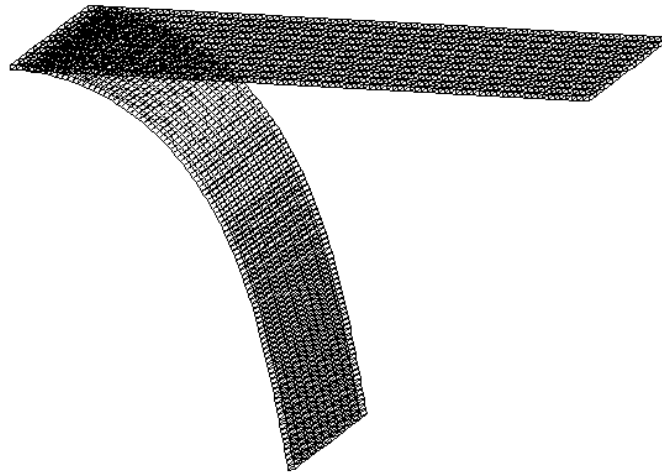
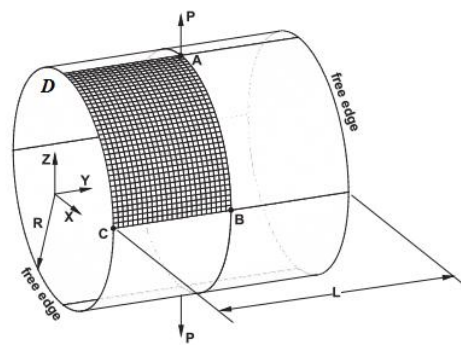


Figure 5 .5. Configuration initiale ($P = 0$) et déformée ($P = P_{\max}$) de la poutre console soumise à une charge linéique

5.5.2. Coque cylindrique sans diaphragmes soumise à une force ponctuelle

La figure 5.6 montre une coque cylindrique sans diaphragmes soumise à une charge concentrée. Ce cas test a été étudié par Sze *et al.* [285, 286] et Ooi *et al.* [114] . Le problème est doublement symétrique, nous avons donc étudiés seulement un huitième de la structure.



Données :

$$L = 10.35, R = 4.953, h = 0.094$$

$$E = 10.5 \times 10^6, \nu = 0.3125$$

Chargement :

$$P_{\max} = 18000$$

Figure 5 .6. Coque cylindrique soumise à une force ponctuelle. Géométrie, chargement et conditions aux limites [285]

La coque est libre sur le côté CD et soumise à un chargement concentré \mathbf{P} au point A suivant la direction verticale Oz (figure 5.6). La force \mathbf{P} est appliquée par incréments successifs pour aller de 0 à \mathbf{P}_{\max} . Nous avons utilisé dans ce test un maillage de $(32 \times 32 \times 1) \times 2$ éléments prismatiques SFR6 et $32 \times 32 \times 1$ éléments hexaédriques SFR8. Les courbes charge/déplacement du point A suivant Oz obtenues avec les éléments SFR6 et

SFR8 sont représentées respectivement sur les figures 5.7 et 5.8. Ces résultats sont comparés avec les résultats obtenus par :

- Les éléments volumiques standards W6 et H8 avec un maillage de $(32 \times 32 \times 1) \times 2$ et $32 \times 32 \times 1$ éléments respectivement,
- L'élément hybride-contrainte « *Hybrid-stress* » proposé par Sze *et al.* [286] avec un maillage de 8×12 ; l'élément coque S4R avec un maillage de 24×36 (Sze *et al.* [285]),
- L'élément quadratique hexaédrique à 20 nœuds standard HEXA20 (les résultats sont présentés dans la référence [114]),
- L'élément hexaédrique à 20 nœuds « *unsymmetric* » US-HEXA20 présenté par Ooi *et al.* [114] avec un maillage de 8×12 ,
- Le modèle développé par Gruttmann *et al.* [287].

Nous remarquons que les éléments SFR donnent des résultats bien satisfaisants. La courbe charge/déflexion obtenue par l'élément SFR6 coïncide avec la solution obtenue par l'élément HEXA20 et comparable avec la solution obtenue par Gruttmann *et al.* [287].

Les conclusions concernant cet exemple sont similaires à celles de l'exemple précédent, avec une fois de plus un grand avantage pour les éléments SFR par rapport aux éléments standards W6 et H8 dans ce cas précis. On peut aussi remarquer de nouveau que, pour une précision égale, l'élément SFR8 nécessite un maillage plus fin que l'élément SFR6. La figure 5.9 illustre le maillage initial et déformé du quart de la coque cylindrique à l'incrément $P_{\max} = 18000$.

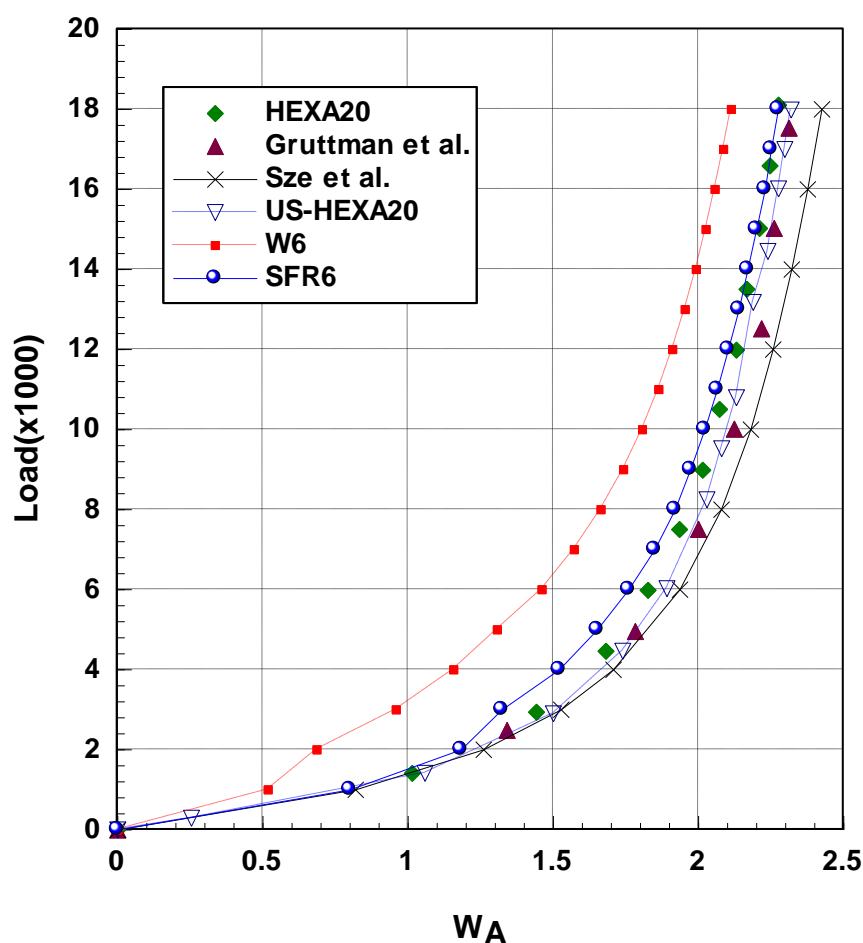


Figure 5.7. Déflexion W_A de la coque cylindrique soumise à une charge ponctuelle. Résultats de l'élément SFR6

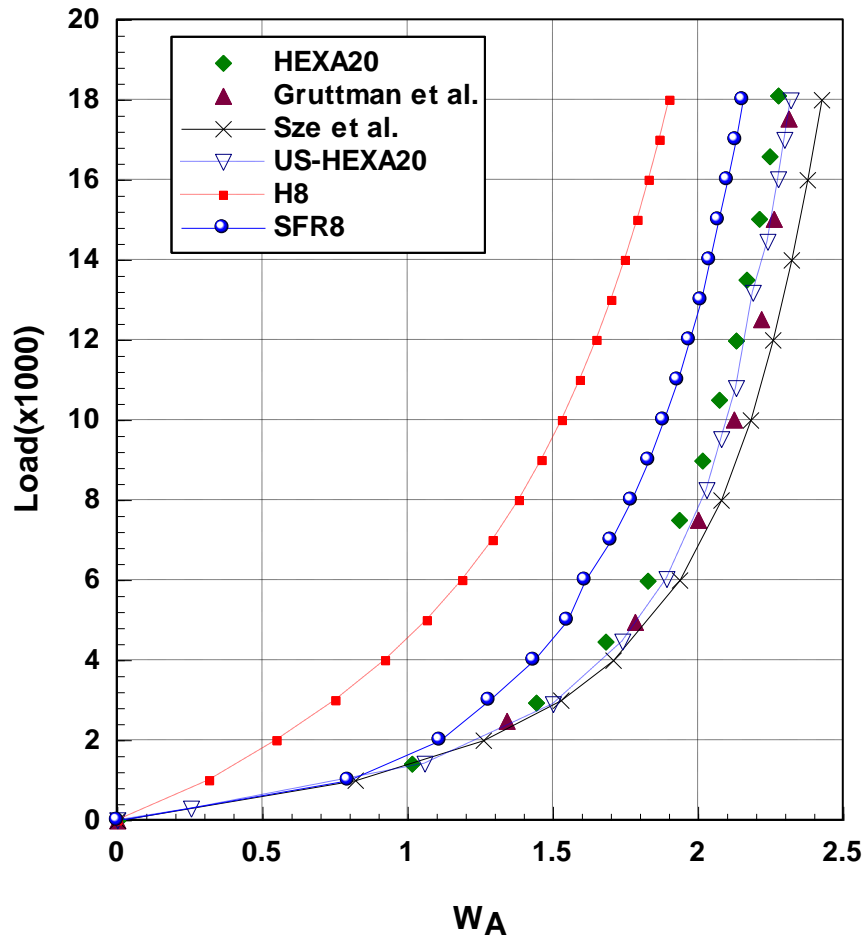


Figure 5.8. Déflexion W_A de la coque cylindrique soumise à une charge ponctuelle.
Résultats de l'élément SFR8

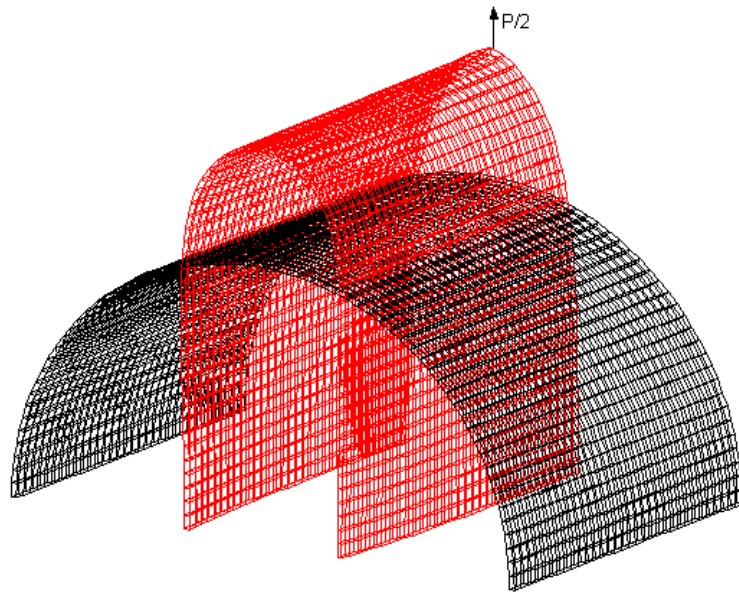


Figure 5.9. Configuration initiale et déformée du quart de la coque cylindrique soumise à une charge maximale $P_{\max} = 18000$

5.5.3. Panneau cylindrique soumis à une charge concentrée

Dans cet exemple, nous présentons un test bien connu et largement cité dans la littérature. Il s'agit d'un panneau cylindrique soumis à une charge ponctuelle avec deux épaisseurs ($t = 12.7 \text{ mm}$ et 6.35 mm). Les données géométriques et du matériau sont représentées sur la figure 5.10. Les côtés rectilignes sont simplement appuyés et immobiles (déplacements nuls, rotations libres); les côtés curvilignes sont totalement libres. Grâce à la symétrie du problème, nous discrétisons seulement un quart de la structure avec des maillages réguliers de $25 \times 25 \times 2$ éléments SFR8 et $(25 \times 25 \times 2) \times 2$ éléments SFR6.

Les stratégies de calcul utilisées dans ce cas test sont :

- Pour le panneau épais ($t = 12.7 \text{ mm}$) nous avons utilisé le pilotage en déplacement.
- Pour le panneau mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) nous avons utilisé le pilotage en déplacement imposé jusqu'à $W_A = 6 \text{ mm}$ et aussi le pilotage en longueur d'arc.

Les courbes charge/déplacement des éléments SFR6 et SFR8 pour le panneau d'épaisseur de 12.7 mm sont présentées respectivement sur les figures 5.11 et 5.12. Les résultats des déplacements obtenus par les éléments SFR sont donnés dans le tableau 5.3. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus avec les éléments volumiques standards prismatique à 6 nœuds W6 et hexaédrique à 8 nœuds H8 et avec la solution de référence tirée du travail de Klinkel et Wagner [149]. Ce dernier est obtenue avec un élément hexaédrique à 8 nœuds basé sur la méthode EAS « *enhanced assumed strains* ». Nous avons également comparé nos résultats avec ceux obtenus par l'élément coque à 4 nœuds proposé par Wagner [288] et l'élément solide-coque prismatique à 6 nœuds SHB6_Bar [21, 289, 290]. La comparaison entre les résultats des éléments SFR et la solution de référence démontre la capacité du modèle SFR à fournir des résultats très précis avec une efficacité beaucoup plus importante par rapport aux éléments finis volumiques standards. Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus avec l'élément coque présenté dans la référence [288] et très proches des résultats obtenus par Klinkel et Wagner [149].

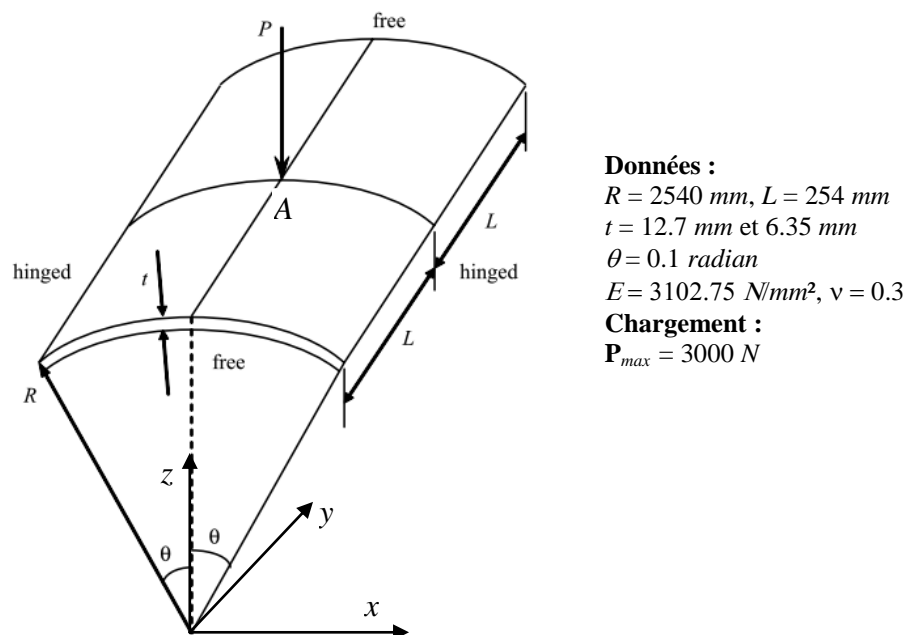


Figure 5.10. Panneau cylindrique soumis à une force ponctuelle

Déplacement W_A (mm)	P (N)						
	3D-EAS [149]	Coque [288]	W6	H8	SHB6_Bar [21]	SFR6	SFR8
2	706	730	744.03	773.67	651.97	699.88	717.16
4	1273	1315	1342.35	1400.67	1189.92	1264.57	1296.63
6	1707	1760	1798.23	1886.19	1616.83	1702.73	1743.58
8	2007	2066	2108.05	2229.22	1930.47	2013.16	2056.14
10	2160	2221	2257.55	2418.80	2119.03	2182.66	2220.27
12	2129	2189	2216.73	2427.47	2151.30	2166.77	2191.89
14	1827	1876	1942.38	2189.41	1948.47	1895.39	1884.51
16	1180	1178	1445.96	1734.21	1316.44	1359.78	1296.61
18	677	654	960.15	1239.58	527.37	779.24	680.78
20	592	782	815.54	1146.83	339.53	740.39	677.79

Tableau 5.3. Panneau cylindrique épais ($t = 12.7$ mm) soumis à une charge concentrée. Forces **P** pour différents déplacements W_A

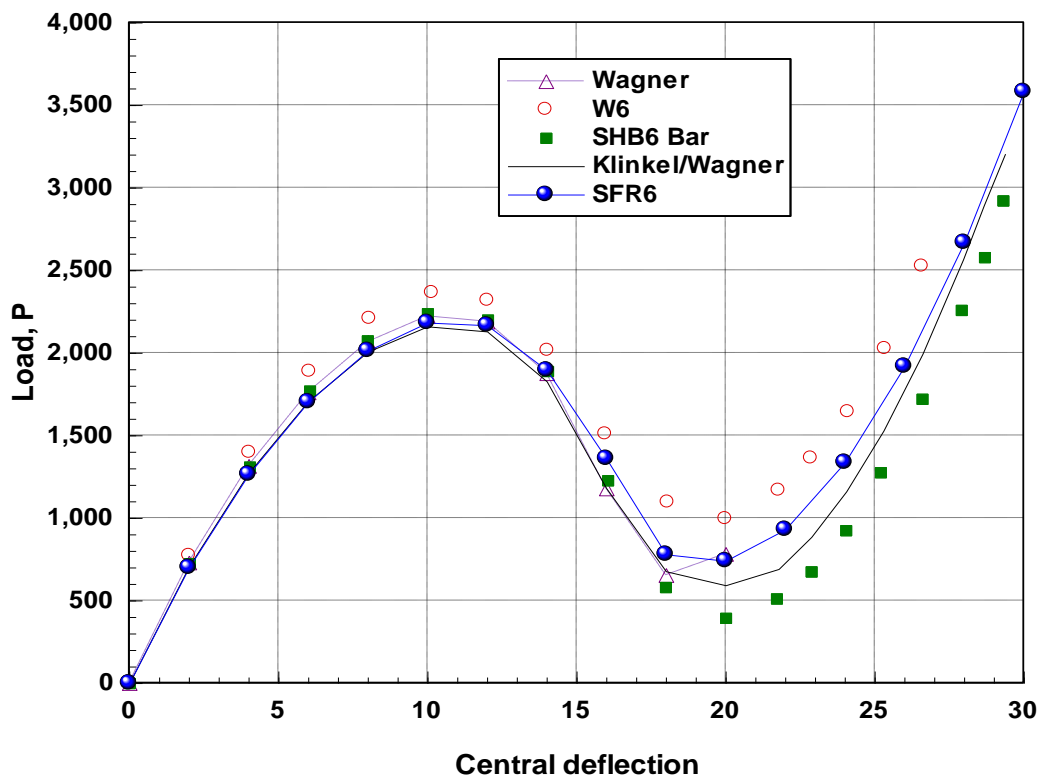


Figure 5.11. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique épais ($t = 12.7$ mm) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR6

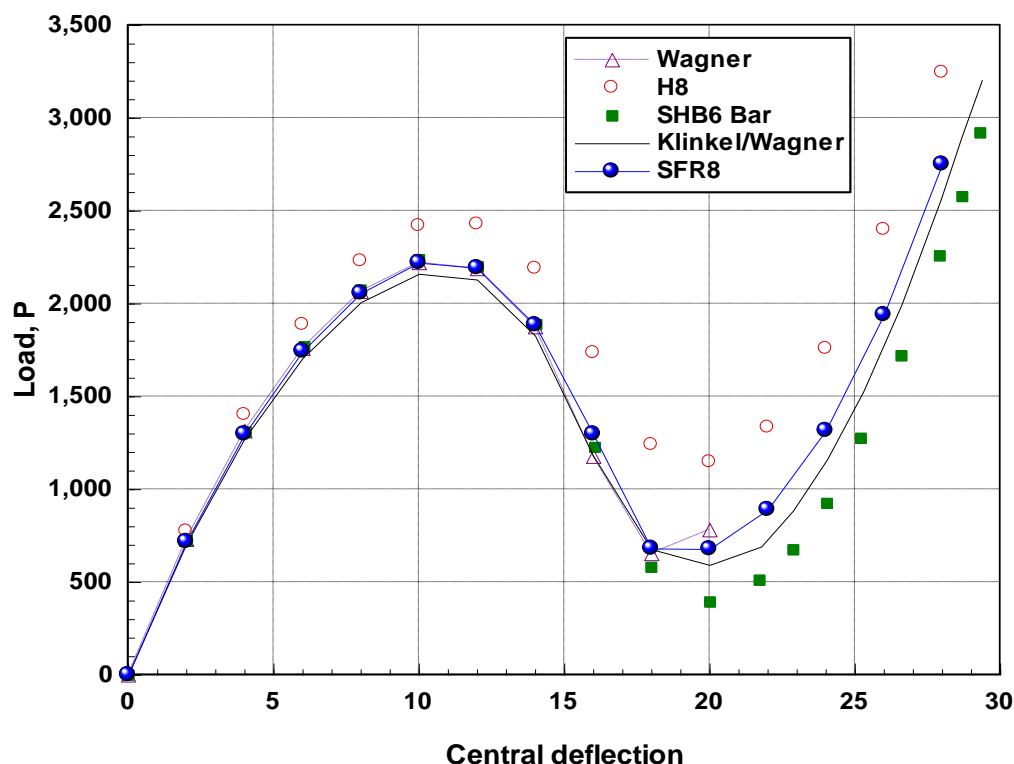


Figure 5.12. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique épais ($t = 12.7 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR8

Les courbes charge/déplacement des éléments SFR6 et SFR8 pour le panneau d'épaisseur de 6.35 mm sont présentées respectivement sur les figures 5.13 et 5.14. Les résultats des éléments SFR sont comparés dans ce cas avec ceux obtenus par les éléments :

- Hexaédrique à 20 nœuds US-HEXA20 proposé par Ooi *et al.* [114],
- Coque triangulaire de Kuo-Mo Hsiao [291],
- Coque triangulaire avec 24 ddl proposé par Meek et Tan [292],
- Coque/plaque triangulaire de Zhang et Cheung [293].

Les résultats de l'élément quadratique hexaédrique standard à 20 nœuds du code de calcul ANSYS obtenus par Ooi *et al.* [114] sont utilisés dans ce cas comme une solution de référence. On trouve que les résultats sont en accord satisfaisants avec la solution de référence. La performance des éléments SFR est comparable avec les solutions obtenues par ANSYS et par l'élément US-HEXA20. De plus, les résultats des éléments SFR sont conformes aux résultats obtenus par les éléments proposés par Kuo-Mo Hsiao [291] et Zhang et Cheung [293]. Ces résultats des éléments SFR montrent la capacité de ces modèles à traiter les problèmes de coques minces avec non linéarités géométriques.

Finalement, des études antérieures [255, 285] montrent que le comportement du panneau mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) change complètement et montre nettement des points de retour en charge et en déplacement (snap-through/snap-back), ce qui rend insatisfaisant le pilotage en déplacement (divergence des résultats). On effectue alors dans ce cas un pilotage en longueur d'arc. Les courbes charge/déplacement obtenues par les éléments SFR avec, cette fois-ci, un maillage de $15 \times 15 \times 2$ éléments SFR8 et $(15 \times 15 \times 2) \times 2$ éléments SFR6 sont rapportées dans les figures 5.15 et 5.16. On compare nos résultats à ceux obtenus par Sze *et al.* [285] avec un maillage de 24×24 éléments coques S4R de Abaqus. Les éléments SFR montrent dans cet exemple une grande efficacité et une bonne précision pour l'analyse des structures dans le domaine non linéaire géométrique en présence de fortes

instabilités. Ils sont aptes à représenter les deux points limites de déplacements (l'erreur maximum est 0.12% pour l'élément SFR6 et 0.02% pour l'élément SFR8) et les deux points de charges limites (l'erreur maximum est 0.15% pour l'élément SFR6 et 0.08% pour l'élément SFR8). Ces éléments ont captés de façon précise les phénomènes de pré-flambement et de post-flambement.

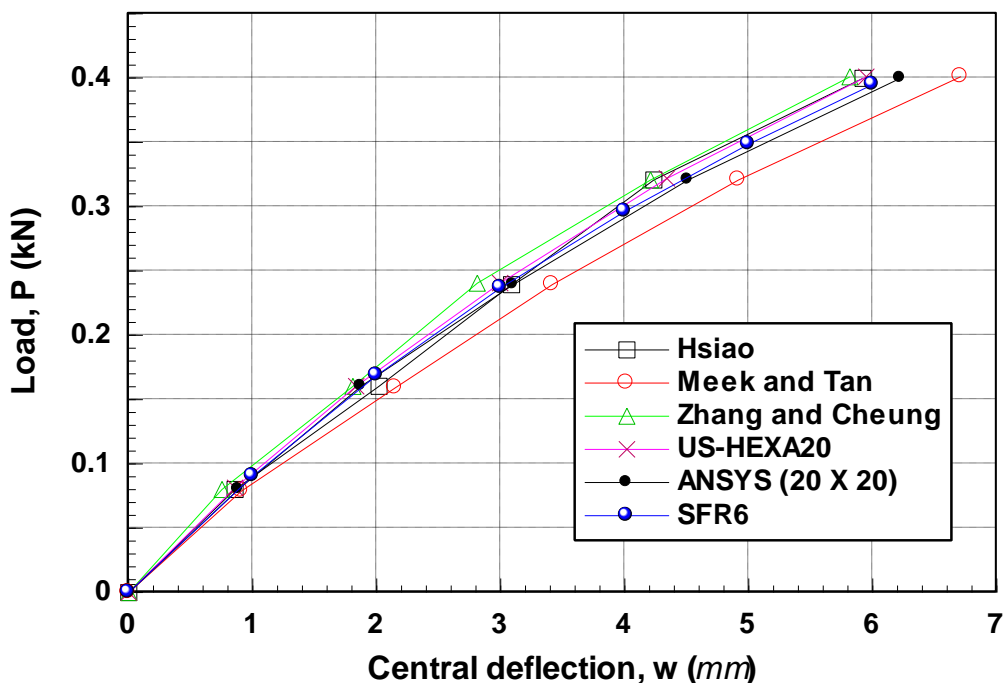


Figure 5.13. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR6 (pilotage en déplacement)

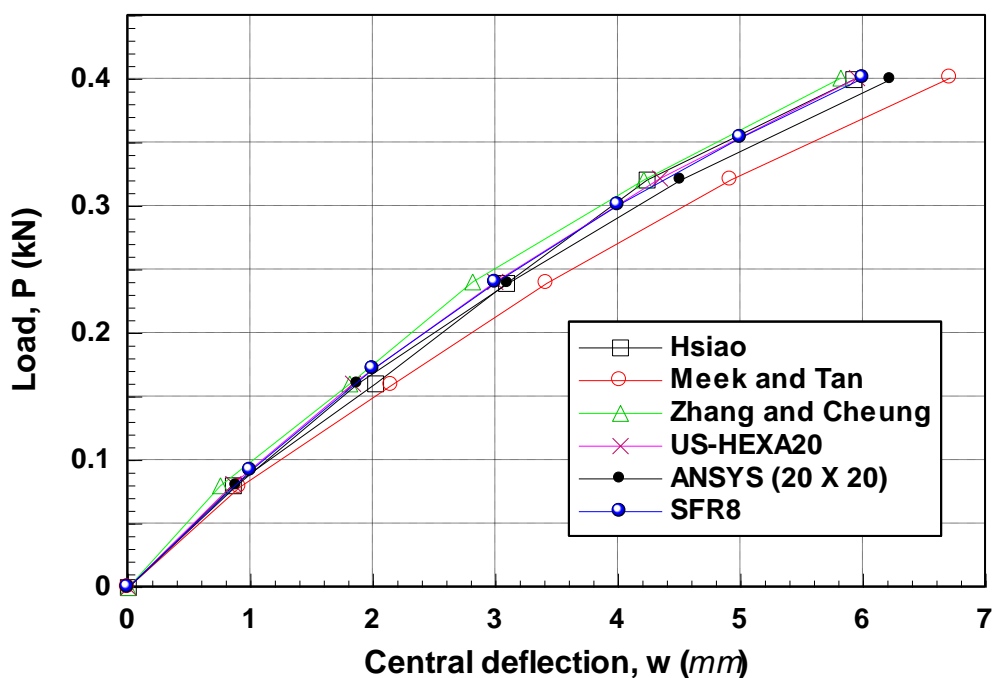


Figure 5.14. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR8 (pilotage en déplacement)

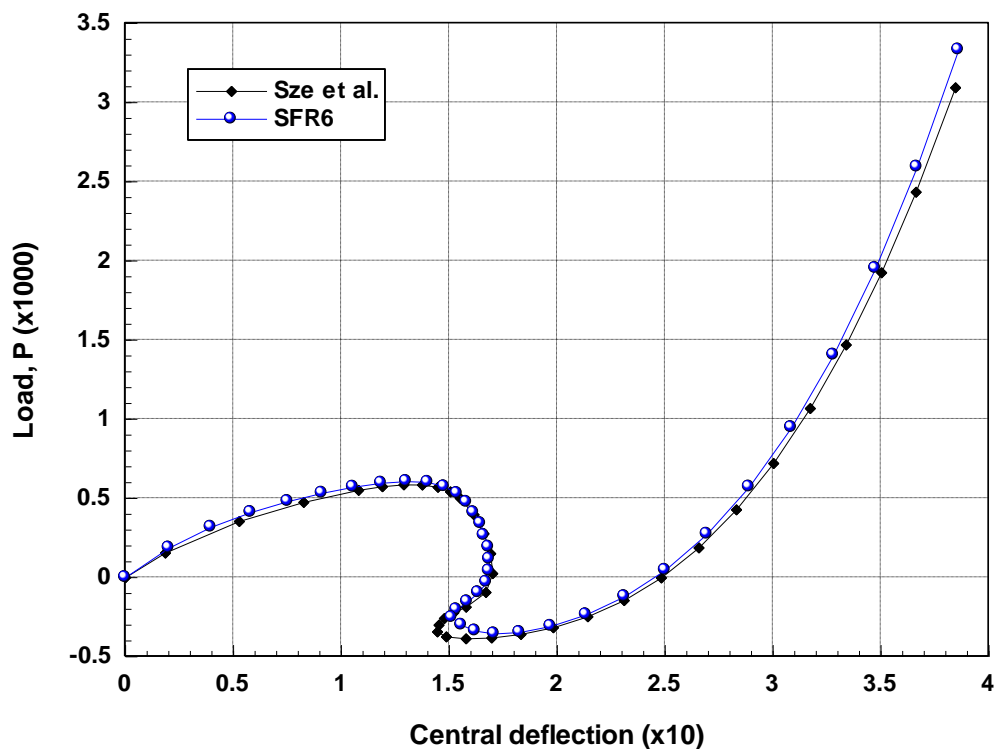


Figure 5.15. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR6 (pilotage en longueur d'arc)

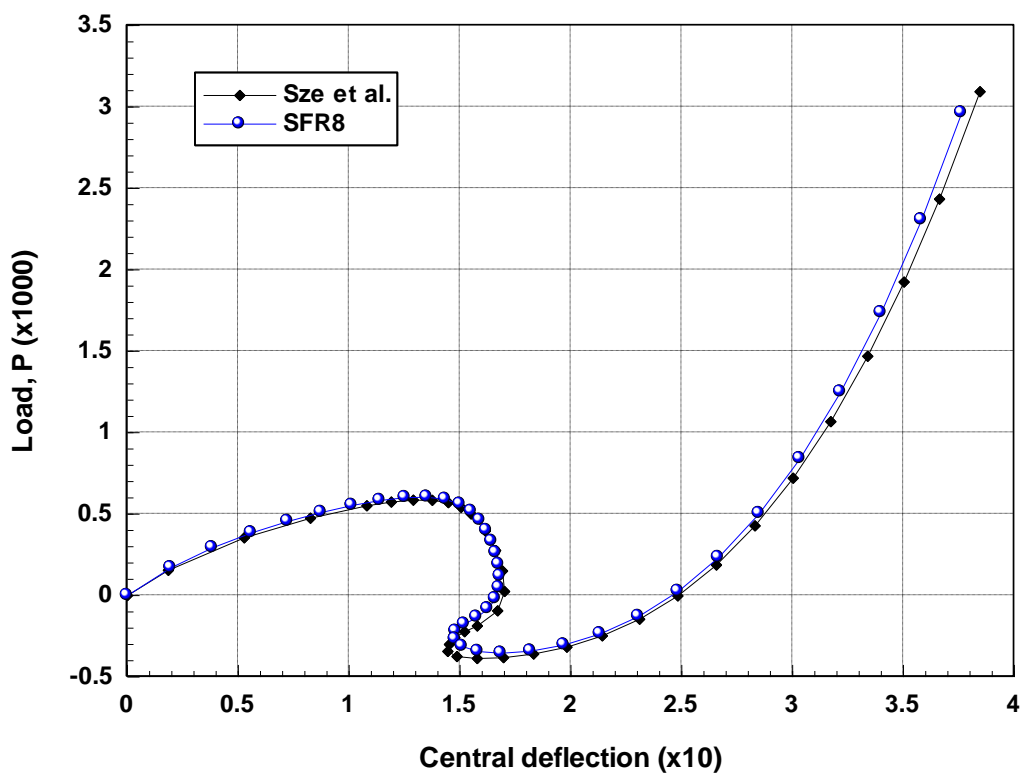


Figure 5.16. Courbes charge/déflexion du panneau cylindrique mince ($t = 6.35 \text{ mm}$) soumis à une force ponctuelle. Résultats de l'élément SFR8 (pilotage en longueur d'arc)

5.5.4. Coque sphérique soumise à une force ponctuelle

Ce dernier exemple non linéaire géométrique consiste en une coque sphérique soumise à un effort concentré suivant l'axe Z ($= -P$) en son centre (figure 5.17). En raison des conditions de symétrie, seulement un quart de la structure a été modélisée avec un maillage régulier de $(5 \times 5 \times 2) \times 2$ éléments SFR6 et $5 \times 5 \times 2$ éléments SFR8. Ces maillages sont constitués de deux éléments suivant l'épaisseur pour les mêmes raisons que celles évoquées dans l'exemple précédent. Ce problème est déjà étudié par Thomas et Gallagher [294] et Ooi *et al.* [114].

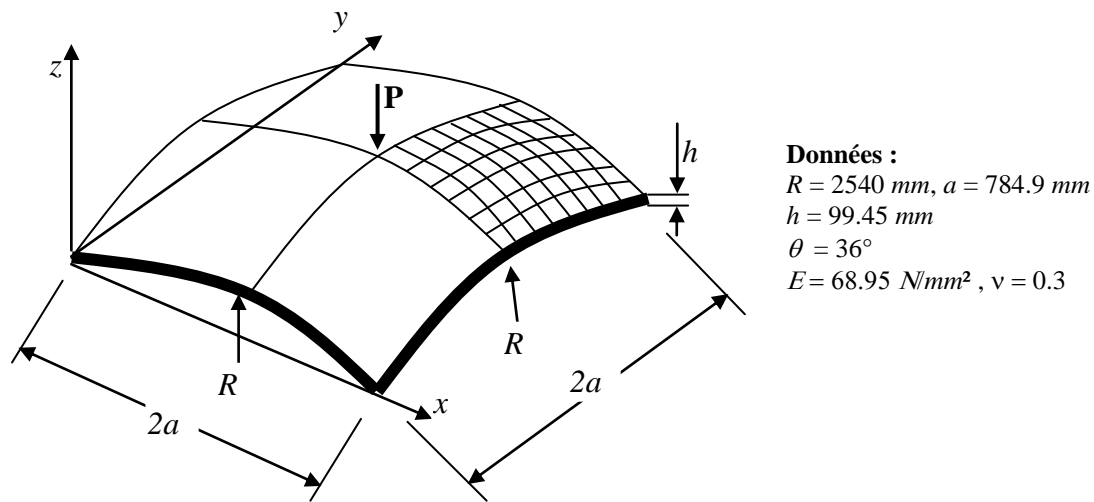


Figure 5.17. Coque sphérique soumise à une charge concentrée

Dans un premier lieu on effectue un pilotage en charge, en multipliant la force par un facteur de charge λ prenant les valeurs entre 0 et 40 avec un pas de 5. Ce pilotage est utilisé pour faciliter la comparaison avec l'exemple étudié par Ooi *et al.* [114].

Les courbes charge/déplacement des éléments SFR6 et SFR8 sont décrites respectivement dans les figures 5.18 et 5.19. Dans ces figures les résultats des éléments SFR sont comparés avec ceux obtenus par :

- L'élément plaque/coque triangulaire proposé par Zhang et Cheung [293] avec un maillage de 4×4 ;
- L'élément coque parabolique courbé présenté par Surana [51] avec un maillage de 2×2 ;
- L'élément hexaédrique à 20 nœuds US-HEXA20 proposé par Ooi *et al.* [114] avec un maillage de $4 \times 4 \times 1$.

La solution de l'élément hexaédrique à 20 nœuds de l'ANSYS obtenue par Ooi *et al.* [114] avec un maillage de 20×20 est utilisée comme une solution de référence. Les résultats des éléments SFR sont comparables à ceux obtenus par les autres éléments et ils montrent un bon accord avec la solution de référence.

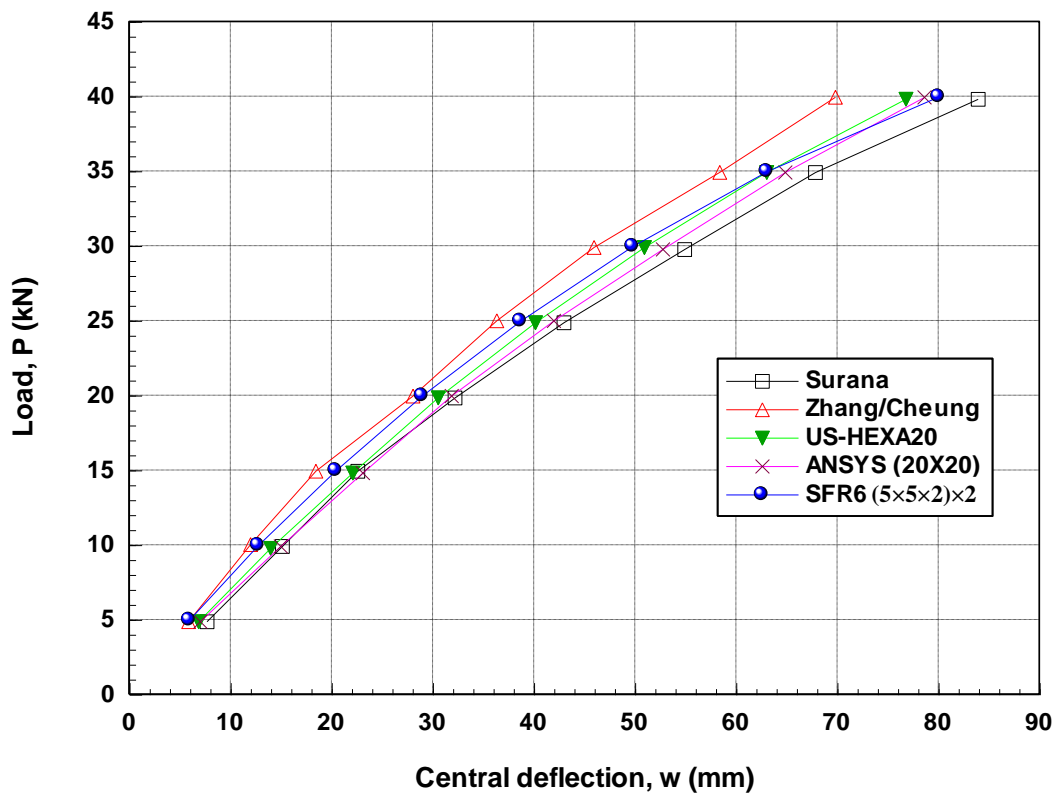


Figure 5.18. Courbes charge/déplacement de la coque sphérique. Résultats de l'élément SFR6 (pilotage en charge)

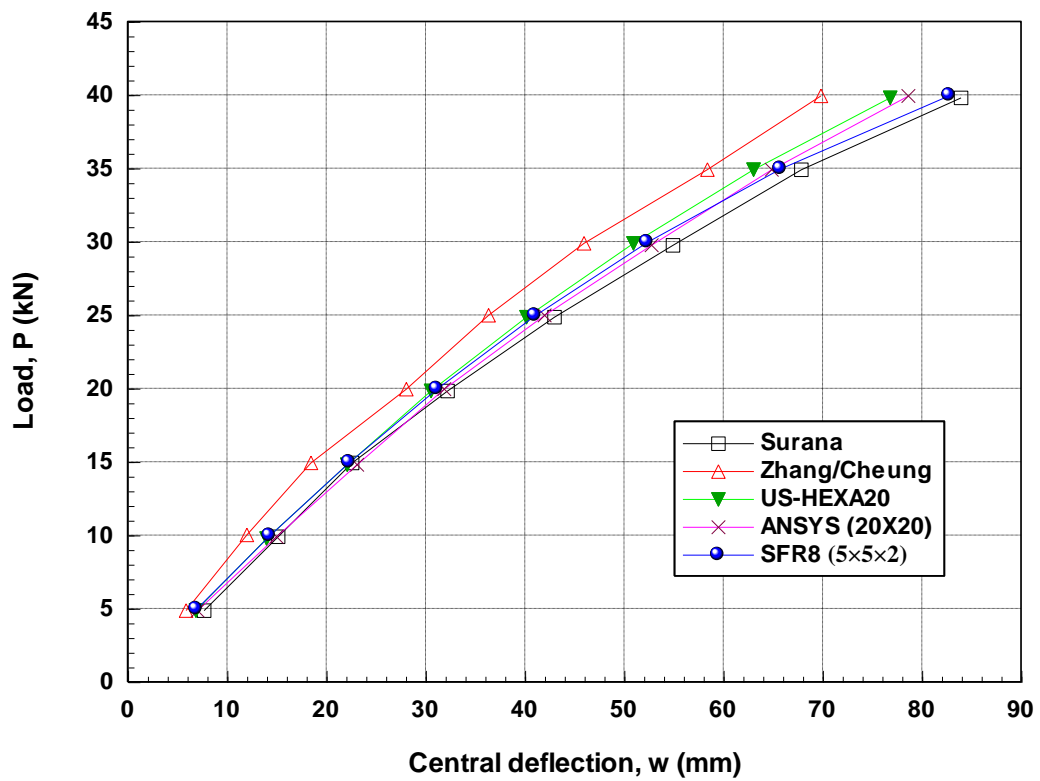


Figure 5.19. Courbes charge/déplacement de la coque sphérique. Résultats de l'élément SFR8 (pilotage en charge)

Le comportement de la coque sphérique change et montre des points de retour en charge (snap-through). Des analyses antérieures [293, 294] montrent que ce problème présente un phénomène de flambement, ce qui rend insatisfaisant le pilotage classique en charge. On effectue alors dans ce cas un pilotage en déplacements imposés, en contrôlant le déplacement des points sous la charge. Pour ce pilotage, on fait varier le déplacement de 0 jusqu'à 300 mm par incréments de 10, soit 30 pas de pilotage.

Les courbes charge/déplacement des éléments SFR6 et SFR8 sont décrites dans les figures 5.20 et 5.21. La solution analytique obtenue par Leicester [295] basée sur la théorie des coques surbaissées « *shallow shell theory* » est considérée comme solution de référence dans ce cas. Les résultats obtenus par l'élément coque triangulaire proposé par Thomas et Gallagher [294] avec un maillage de 3×3 (18 éléments triangulaires) et l'élément quadrilatéral à 16 nœuds « *16-node element* » avec une intégration de 4×4×2 PG [294] sont également utilisés pour la comparaison. Les courbes charge/déplacement des éléments SFR montrent un bon accord avec la solution analytique de référence et la valeur de point de retour en charge est reproduite avec une précision acceptable par ces éléments SFR. De plus, les résultats de l'élément prismatique SFR6 reportés dans la figure 5.20 montrent que cet élément donne des résultats pratiquement identiques à ceux obtenus avec l'élément coque triangulaire proposé par Thomas et Gallagher [294]. Pour l'élément hexaédrique SFR8, il semble être un peu moins précis mais ces résultats sont proches de ceux obtenus avec l'élément quadrilatéral à 16 nœuds présenté dans [294].

Enfin, et de même que pour le premier et le deuxième exemple, nous avons présenté le maillage initial et déformé du quart de la coque sphérique pour différents incréments de chargement dans les figures 5.22, 5.23 et 5.24.

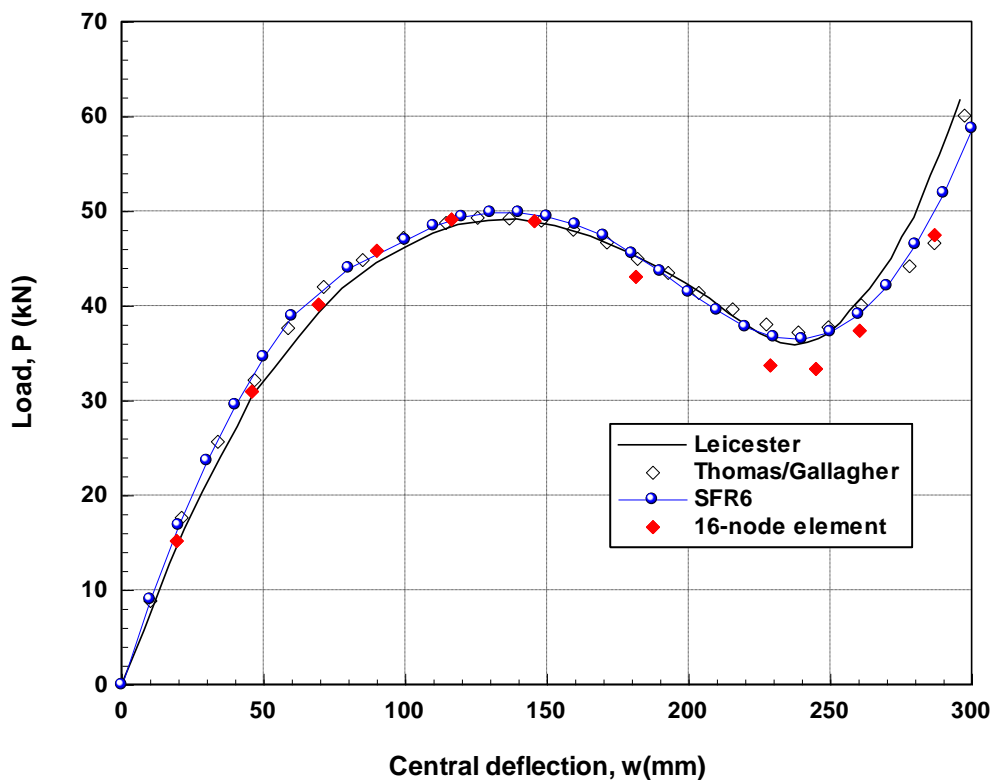


Figure 5.20. Courbes charge/déplacement de la coque sphérique. Résultats de l'élément SFR6 (pilotage en déplacement)

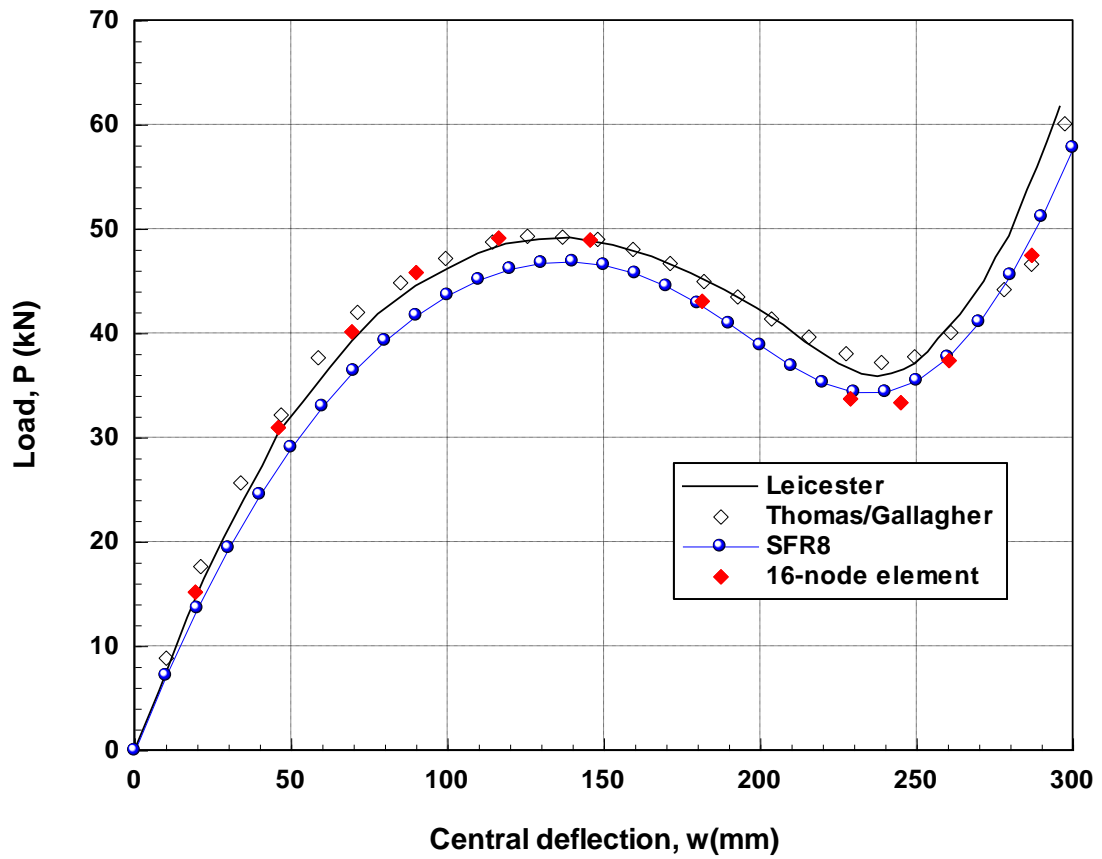


Figure 5.21. Courbes charge/déplacement de la coque sphérique. Résultats de l'élément SFR8 (pilotage en déplacement)

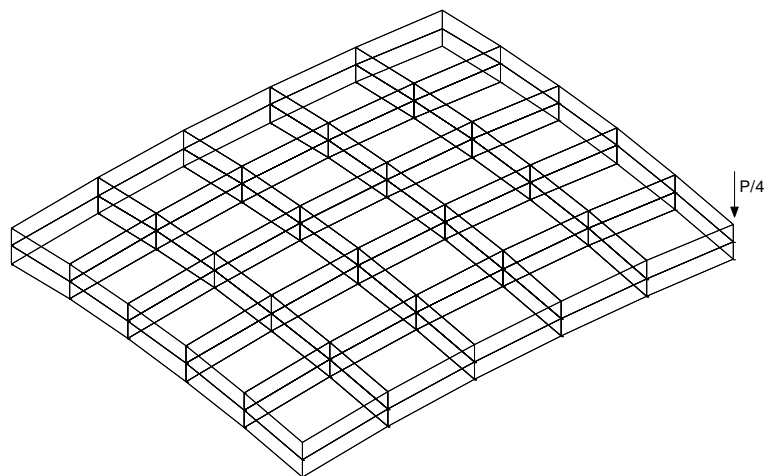


Figure 5.22. Maillage initial du quart de la coque sphérique ($P = 0$)

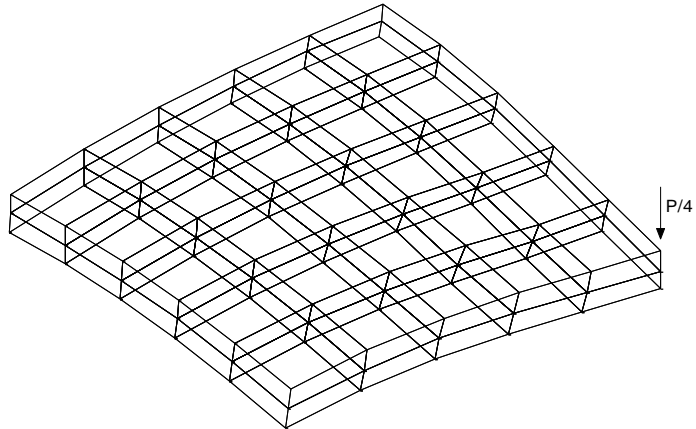


Figure 5 .23. Maillage déformé du quart de la coque sphérique soumise à une charge $P = 46.56 \text{ kN}$

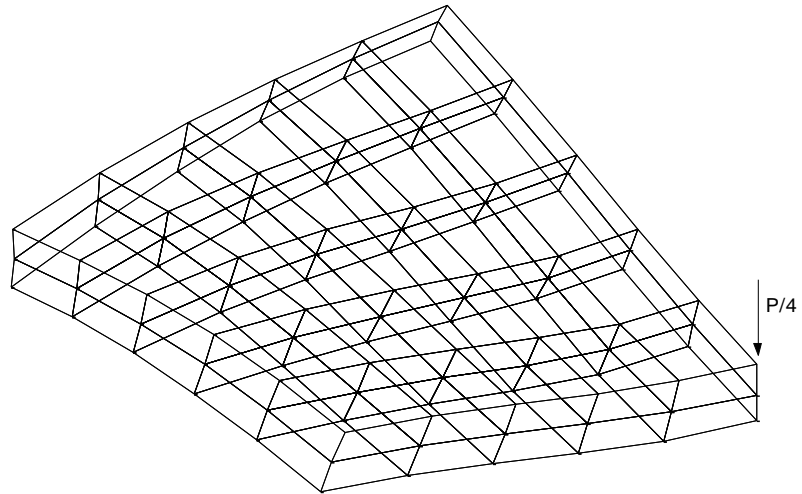


Figure 5 .24. Maillage déformé du quart de la coque sphérique soumise à une charge maximale $P_{\max} = 57.79 \text{ kN}$

5.6. Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons présenté une extension de la famille d'éléments finis volumiques SFR pour l'analyse non linéaire géométrique des solides et des structures tridimensionnelles. Plus précisément, deux éléments solides tridimensionnels prismatique à 6 nœuds (SFR6) et hexaédrique à 8 nœuds (SFR8) sont formulés en non linéaire géométrique. Ces éléments permettant d'étudier les problèmes de grands déplacements et petites déformations. Nous avons utilisé pour cela une formulation Lagrangienne totale. Dans cette formulation la configuration de référence est définie par la position initiale du solide. La mesure des déformations que nous retenons est celle de Green-Lagrange, énergétiquement conjuguée aux contraintes de Poila-Kirchhoff de deuxième espèce. L'adoption de la description Lagrangienne totale, présente l'avantage de la simplicité de sa mise en œuvre. Cette mise en œuvre réside dans la détermination des efforts internes ainsi que la matrice de rigidité tangente. De plus, un schéma d'intégration numérique réduite est utilisé afin d'améliorer l'efficacité de calcul et d'atténuer certains phénomènes de verrouillages (membrane et cisaillement). Rappelons que la technique de stabilisation proposée dans le deuxième chapitre est utilisée ici efficacement pour contrôler les modes parasites. La non-linéarité des équations d'équilibre nous a conduits à résoudre le système d'équations de façon itérative par la méthode de Newton-Raphson.

Les deux éléments volumiques, ayant effectivement été programmés, sont basés sur le modèle SFR qui utilise la rotation d'une fibre matérielle élémentaire dans l'espace. Ces éléments solides SFR6 et SFR8 ont été évalués sur un ensemble de cas tests et ils répondent de façon satisfaisante. D'une manière globale, les résultats des références sont bien identifiés et représentés par les éléments SFR. Les résultats numériques obtenus dans le domaine non linéaire géométrique ont permis de conclure que le modèle SFR gardait tout son intérêt pour une éventuelle extension. L'analyse de ces résultats nous a permis de conclure également que le modèle SFR est adéquat pour modéliser les solides et les structures tridimensionnelles en grands déplacements et petites déformations. La comparaison entre les résultats obtenus par l'élément SFR6 et ceux donnés par d'autres éléments existant dans la littérature montre qu'il y a un très bon accord et que l'élément ne semble pas être affecté par des effets de verrouillages. Cependant, l'élément hexaédrique SFR8 semble être un peu moins précis dans certains cas mais ses résultats sont acceptables par rapport aux autres éléments de comparaisons spécialement l'élément hexaédrique classique H8. Nous voulons également insister sur le fait que le concept SFR est particulièrement simple et facile à mettre en œuvre.

Finalement, l'influence des matrices de stabilisation sur le comportement non linéaire géométrique a été étudiée à travers le paramètre α . Quelques valeurs de α ont été examinées. Nous trouvons que plus la valeur de α est petite, plus les résultats non linéaires sont exacts. Cependant, lorsque la valeur de α est trop petite, la convergence est difficile.

Conclusion générale et perspectives

Sommaire

Conclusion	182
Perspectives	184

Conclusion

L'objectif de ce travail a été de développer des éléments finis volumiques adoptés aux problèmes, généralement tridimensionnels, rencontrés lors de la modélisation des solides et des structures. Les différents modèles développés ont eu pour améliorer principalement la réponse des éléments finis volumiques linéaires classiques par l'exploitation de la rotation d'une fibre matérielle élémentaire dans l'espace. Ainsi l'objectif visé a été de mettre en œuvre un cadre de modélisation numérique des solides par éléments finis volumiques spéciaux dans le domaine linéaire et non linéaire pour des cas de chargement statique et dynamique (vibration libre des structures).

La recherche bibliographique effectuée au début de cette thèse, a été dédiée à l'état de l'art sur la récente formulation des éléments finis volumiques développée dans le cadre de la modalisation des solides et des structures dans le domaine linéaire et non linéaire. Cette revue bibliographique a montré qu'à cause des difficultés de formulation et de temps de calcul des éléments volumiques d'ordre supérieur, les tendances actuelles sont amenées à des formulations des éléments finis de premier ordre à précision améliorée. De nombreux éléments volumiques efficaces ont été proposés sur la base de formulations mixtes et/ou avec des méthodes de déformations postulées enrichies « *Enhanced Assumed Strain* » ainsi que des éléments avec degrés de liberté de rotation afin d'éviter les problèmes de verrouillage numérique. Ces formulations montrent généralement une efficacité de calcul et une simplicité d'application à des nombreux types de structures.

Trois grands sujets ont été plus particulièrement abordés et étudiés au cours de ce travail. Tout d'abord, la formulation d'un modèle original d'éléments finis volumiques a été mise au point à travers deux types d'éléments finis, le premier est un élément hexaédrique à 8 nœuds et le deuxième est un élément prismatique à 6 nœuds. Ce modèle, appelé SFR (Space Fiber Rotation) a réussi, à partir de l'élément prismatique SFR6 et les deux éléments hexaédriques conforme SFR8 et non conforme SFR8I avec trois modes incompatibles, à enrichir le champ des déplacements qui devient quadratique, tout en maintenant le nombre de nœuds des éléments linéaires. Il apporte des résultats intéressants tant du point de vue des calculs en petits déplacements. Dans le cas de l'élasticité linéaire, le modèle SFR est moins sensible à la distorsion du maillage. L'évaluation de la matrice de rigidité par des schémas d'intégration numérique réduite assure le bon comportement numérique des éléments et évite certains verrouillages (cisaillement et membrane). L'utilisation de la méthode de modes incompatibles nous a permis d'éviter avec une efficacité significative le verrouillage de Poisson ou d'épaisseur. Dans certains cas, à nombre de degrés de liberté égal, les éléments volumiques SFR apportent des résultats du même ordre de grandeur que les éléments quadratiques classiques. Ainsi, le modèle SFR possède une capacité à modéliser des solides tridimensionnels avec peu d'éléments de maillage et grâce à l'élément prismatique SFR6, on peut mailler les géométries de formes

complexes quelconques. En plus, ce type d'élément se connecte naturellement à l'élément solide à huit-nœuds SFR8 dans le cas où l'on ne peut pas utiliser un seul type d'éléments pour modéliser les structures avec des formes géométriques complexes.

Parmi les points étudiés, on peut également citer l'adaptation du modèle SFR aux structures composites multicouches utilisant deux approches. La première est de modéliser chaque couche par un élément solide (approche par couche orthotrope élémentaire). Deux éléments volumiques sont formulés par cette technique, baptisés SFR8O et SFR6O (Space Fiber Rotation–Orthotrope). La deuxième approche est de formuler un modèle SFR multicouche et supposer que l'élément volumique contient plusieurs couches. Ceci consiste en un élément hexaédrique à 8 nœuds multicouche, appelé le SFR8M, et un élément prismatique à 6 nœuds multicouche, nommé le SFR6M (Space Fiber Rotation–Multilayer). Le calcul du tenseur des contraintes dans ces éléments multicouches se fait en deux étapes : d'abord, les contraintes planes sont calculées à partir de la loi constitutive et ensuite, les contraintes transversales sont calculées à partir des équations d'équilibre 3D. Les résultats obtenus par les deux approches sont satisfaisants et ont été mis en évidence sur plusieurs tests des structures composites stratifiées. Pour les éléments SFR Orthotropes basés sur l'approche par couche (un élément par couche orthotrope), les divers tests réalisés montrent que ces éléments sont aptes à simuler simplement les problèmes des structures composites multicouches. Les éléments volumiques multicouches SFR Multicouches apportent des résultats intéressants tant du point de vue des déplacements et des contraintes planes que du point de vue du gain de temps de calcul. Les modèles restent néanmoins besoins d'accomplir les tâches numériques pour évaluer les contraintes transversales.

Le dernier point présenté dans ce travail a consisté à la mise au point des éléments volumiques SFR non linéaires dans le contexte des grands déplacements et petites déformations. Nous avons proposé deux modèles éléments finis volumiques basés sur le concept SFR permettant de simuler le comportement non linéaire géométrique élastique des solides et des structures tridimensionnelles. Dans un premier temps, nous avons présenté la formulation de la description lagrangienne totale et les équations incrémentielles des modèles proposés. La méthode de Newton-Raphson est choisie pour présenter la stratégie de résolution en vue d'une implémentation numérique de la non-linéarité géométrique. Nous nous sommes ensuite concentrés sur les aspects d'approximation des éléments finis volumiques SFR en non linéaire géométrique. Dans un second temps, nous avons présenté, à travers des cas simples de validations, les résultats obtenus par ces deux modèles SFR confrontés avec les résultats numériques obtenus par les autres modèles. Les comparaisons sont satisfaisantes et les modèles développés peuvent prédire avec précision le comportement non linéaire géométrique lorsqu'il s'agit de modéliser les structures tridimensionnelles en grands déplacements et petites déformations. Les cas tests étudiés ont montrés la valeur ajoutée de ces éléments qui, s'est avéré pratiquement, améliore la solution des éléments volumiques standards de premier ordre.

En conclusion, les développements effectués durant cette étude ont été mis en œuvre au sein du code de calcul par éléments finis Reflex. Des résultats numériques de nombreux problèmes d'élasticité linéaires et non-linéaires pour des matériaux isotropes et composites stratifiés sont obtenus, analysés et comparés d'une part, à des solutions de références d'origine analytique ou expérimentale extraits de la littérature technique, et d'autre part, à des solutions numériques obtenues avec d'autres éléments finis volumiques 3D linéaires (prismatique à 6 nœuds et hexaédrique à 8 nœuds) et quadratiques (prismatique à 15 nœuds et hexaédrique à 20 nœuds). D'après les tests que nous avons réalisés, les éléments SFR s'avèrent beaucoup plus efficace que les éléments volumiques classiques et ceci pour la

classe de problèmes traités dans le présent travail. En effet, ils sont fiables et simples à utiliser car le modèle SFR n'altère en aucune manière la conformité des modèles éléments finis choisis ou considérés. Cette qualité des éléments SFR se manifeste clairement en absence des verrouillages numériques de cisaillement, de membrane et aussi de Poisson. La formulation des éléments volumiques basés sur le modèle SFR nous est donc apparue comme un moyen fidèle de modélisation des solides et des structures tridimensionnelles.

Perspectives

Malgré ces résultats prometteurs, cette formulation présente quelques limites qui rendent nécessaires des développements ultérieurs, en particulier au travers des exigences de la pratique courante des ingénieurs. Des perspectives apparaissent clairement au vu des résultats obtenus sur les diverses études entamées. Les quelques propositions qui suivent constituent des extensions possibles de notre travail qu'il est nécessaire de mener à bien pour compléter cette démarche :

- La première extension consiste à examiner la possibilité d'éliminer localement les trois rotations de la fibre spatiale. Cela permettra d'obtenir peut-être des éléments simples de géométrie et performants en terme de précision sur les résultats.
- Une autre extension consiste à tenir compte du phénomène de verrouillage numérique spécialement le verrouillage volumétrique. En effet, le blocage numérique inhérent aux éléments finis solides lorsque le matériau est incompressible ou presque incompressible peut être évité par des modifications et des techniques efficaces cités dans la littérature spécialisée.
- D'un point de vue numérique, il reste à mettre en œuvre dans le code de calcul REFLEX les problèmes de grands déplacements et grandes déformations en combinant les effets non-linéaires géométriques avec les non-linéarités matérielles. De plus, il sera intéressant d'évaluer la performance du modèle SFR en termes de convergence et de temps de calcul par rapport aux éléments volumiques tridimensionnels pour une série plus complète de cas tests non-linéaires.
- En ce qui concerne les contraintes transversales des éléments SFR multicouches, la formulation de ces éléments montre la possibilité d'accéder aux dérivées secondes du champ de déplacements et d'utiliser la loi d'équilibre 3D pour calculer les contraintes transversales. Cette technique pourrait être implémentée dans le code de calcul éléments finis REFLEX. Des études sur ces aspects sont en cours.
- Enfin, les applications de la modélisation développée, de leur généralité peuvent être appliquées à la formulation de l'élément tétraédrique à 4 nœuds SFR4 afin de compléter ce travail et ainsi être capable de reproduire tout type de géométrie. Une version stabilisée de cet élément avec une intégration exacte (4 points d'intégration) est formulée et validée dans l'Annexe D.

Annexes

Sommaire

Annexe A. Fonctions de forme des éléments finis volumiques	185
Annexe B. Passage du repère global vers le repère local d'une face de l'élément SFR.	189
Annexe C. Comportement d'un matériau orthotrope	191
Annexe D. Élément volumique tétraédrique à 4 nœuds SFR4	193
D.1. Formulation de l'élément SFR4	193
D.2. Formules d'intégration pour l'élément SFR4	194
D.3. Contrôle des modes parasites pour l'élément SFR4	195
D.4. Validation : Flexion plane d'une poutre encastree	196

Annexe A. Fonctions de forme des éléments finis volumiques

Nous employons, dans notre travail, les éléments finis volumiques iso-paramétriques hexaédrique 8 nœuds et prismatiques 6 nœuds (figure A.1) [16, 296].

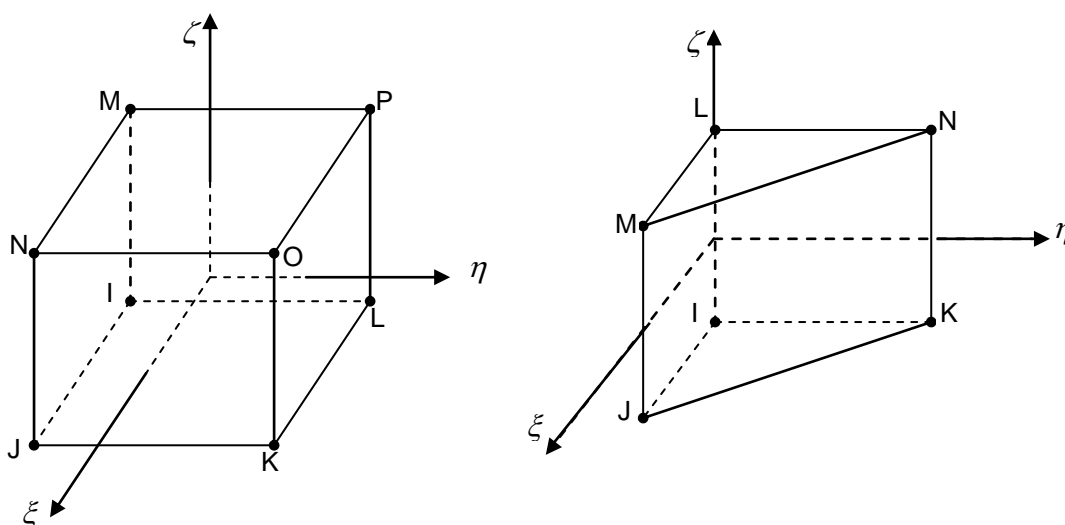


Figure A.1. Eléments volumiques iso-paramétriques hexaédrique à 8 nœuds et prismatique à 6 nœuds dans le système des coordonnées naturelles

Les éléments iso-paramétriques interpolent les coordonnées et les déplacements par les mêmes fonctions de forme :

$$x = \sum_{i=1, n_d} N_i x_i ; y = \sum_{i=1, n_d} N_i y_i ; z = \sum_{i=1, n_d} N_i z_i \quad (A.1)$$

dans lesquels (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du nœud i et n_d est le nombre de nœuds par élément.

Pour un élément hexaédrique à 8 nœuds, les fonctions de forme sont données par :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) ; N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) ; N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) ; N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) ; N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

Pour un élément prismatique à 6 nœuds :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1-\xi-\eta)\frac{(1-\zeta)}{2} ; N_2 = \xi\frac{(1-\zeta)}{2} \\
 N_3 &= \eta\frac{(1-\zeta)}{2} ; N_4 = (1-\xi-\eta)\frac{(1+\zeta)}{2} \\
 N_5 &= \xi\frac{(1+\zeta)}{2} ; N_6 = \eta\frac{(1+\zeta)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

Les fonctions de forme $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ sont définies aux limites du domaine naturel normalisé avec : $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ et $-1 \leq \zeta \leq 1$ pour l'élément hexaédrique et $\xi \geq 0, \eta \geq 0, 1 - \xi - \eta \geq 0$ et $-1 \leq \zeta \leq 1$ pour l'élément prismatique. Les formes des éléments sont cubique et prismatique dans le système des coordonnées naturelle (ξ, η, ζ) ; elles peuvent représenter une forme distordue dans le système des coordonnées physiques (x, y, z) (figure A.2).

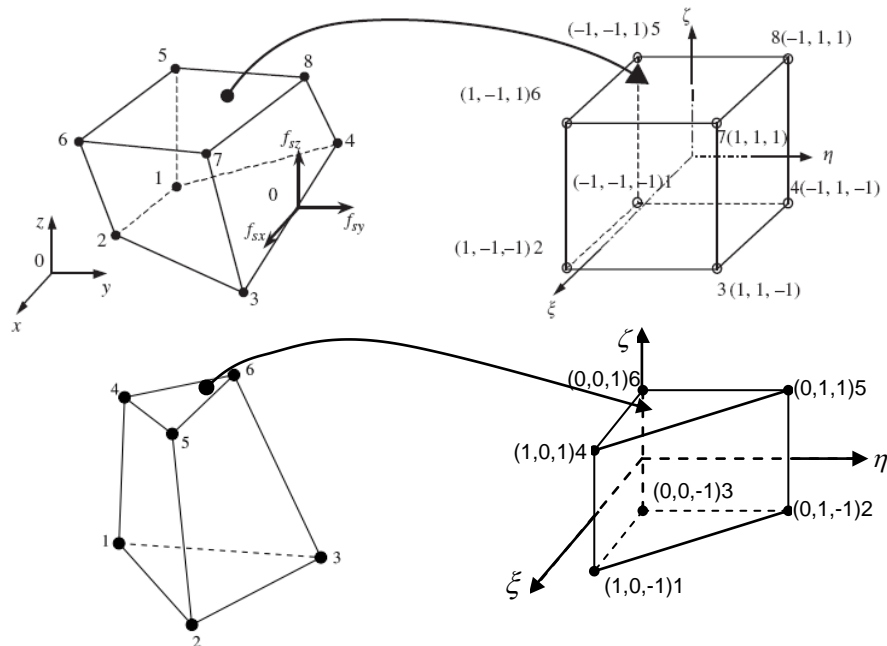


Figure A.2. Eléments hexaédrique à 8 nœuds et prismatique à 6 nœuds dans le système des coordonnées physiques

Nous avons besoins de calculer les dérivées $\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y}$, $\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z}$,

respectivement. En utilisant les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Soit en forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Ici, la dérivation dans le vecteur de colonne de gauche est appelée « dérivée locale », tandis que la dérivation dans le vecteur de colonne à droite est appelé « dérivée globale ». La matrice 3×3, dans l'équation (A.5), est nommée « matrice Jacobienne » pour le domaine tridimensionnel et désignée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Dans laquelle :

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} x_i ; & J_{12} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} y_i \\ J_{13} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} z_i ; & J_{21} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} x_i \\ J_{22} &= \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} y_i ; & J_{23} &= \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} z_i \\ J_{31} &= \frac{\partial x}{\partial \zeta} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} x_i ; & J_{32} &= \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} y_i \\ J_{33} &= \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} z_i \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

où (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du nœud i .

L'inverse de la matrice Jacobienne est désignée par :

$$[J]^{-1} = [j] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Alors, l'équation (A.5) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Les dérivations d'une fonction de forme par rapport à x , y et z peuvent être obtenues à partir de l'équation (A.9) précédente :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Annexe B. Passage du repère global vers le repère local d'une face de l'élément SFR

L'élément hexaédrique dans le repère global (X, Y, Z) est défini par les coordonnées globales X_i, Y_i et Z_i (figure B.1). Pour la face quadrilatérale (1-2-3-4) de l'hexaèdre, on peut calculer les coordonnées locales des nœuds 1, 2, 3 et 4 en utilisant la méthode suivante :

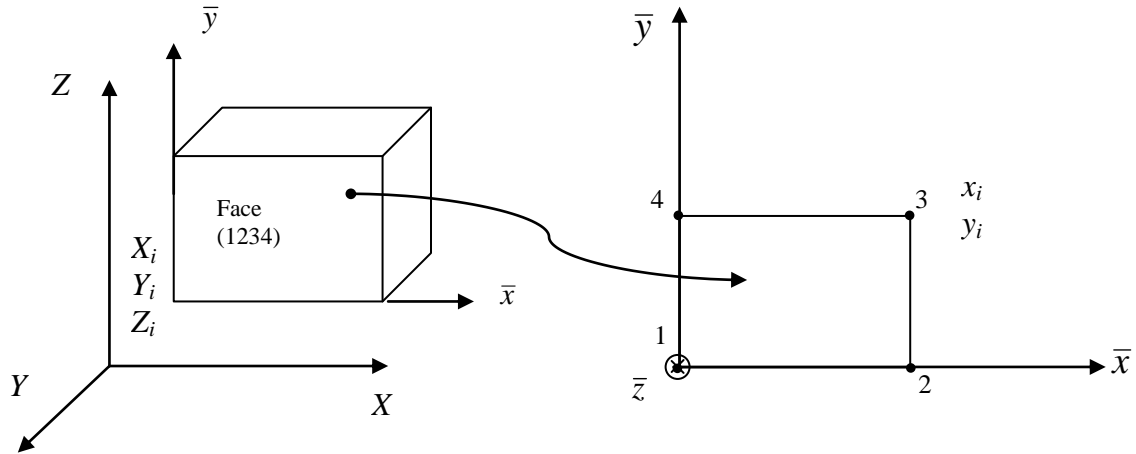


Figure B.1. Élément hexaédrique dans le repère global (X, Y, Z) et une face de l'hexaèdre dans le repère local $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Les vecteurs de base \tilde{a}_1 et \tilde{a}_2 sont :

$$\{a_1\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix} ; \{a_2\} = \begin{Bmatrix} X_{41} \\ Y_{41} \\ Z_{41} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

On peut définir un repère local $[Q] = [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$ (figure B.1) par :

$$\bar{z} = \frac{\tilde{a}_1 \wedge \tilde{a}_2}{|\tilde{a}_1 \wedge \tilde{a}_2|} ; \bar{x} = \frac{\tilde{a}_1}{L_{21}} ; \bar{y} = \bar{z} \wedge \bar{x} ; |\tilde{a}_1 \wedge \tilde{a}_2| = A \quad (\text{B.2})$$

avec :

$$L_{21} = (X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2)^{1/2} ; X_{21} = X_2 - X_1 ; \dots \dots \dots \quad (\text{B.3})$$

et A est l'aire du rectangle.

Dans le programme, le repère $[Q]$ est défini en utilisant la relation (B12) de l'exemple 6.1.2 de la référence [18], soit :

$$\langle x \rangle = \left\langle n_z + \frac{n_y^2}{a} \quad -\frac{n_x n_y}{a} \quad -n_x \right\rangle \quad (\text{B.4})$$

$$\langle y \rangle = \left\langle -\frac{n_x n_y}{a} \quad n_z + \frac{n_x^2}{a} \quad -n_y \right\rangle \quad (\text{B.5})$$

$$\langle z \rangle = \langle n_x \quad n_y \quad n_z \rangle \quad (\text{B.6})$$

$$a = 1 + n_z \quad (\text{B.7})$$

Si $a = 0$ ($n_x = n_y = 0$; $n_z = -1$) :

$$\langle x \rangle = \langle 1 \quad 0 \quad 0 \rangle ; \langle y \rangle = \langle 0 \quad -1 \quad 0 \rangle \quad (\text{B.8})$$

Le choix du repère est ainsi indépendant de la numérotation des nœuds d'une face.

Le repère orthonormé $[Q]$ est constant en tout point de l'élément. La matrice $[Q]$ s'écrit dans ce cas :

$$[Q] = [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Cette matrice est obtenue par une rotation rigide du repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ autour de l'axe $\vec{k} \wedge \vec{n}$ de telle sorte que le vecteur \vec{k} coïncide avec la normale \vec{n} après la rotation. \vec{n} est supposé non parallèle à \vec{k} . Si $1 + C \neq 0$, c'est-à-dire $\vec{k} = -\vec{n}$, alors la matrice $[Q]$ prendra la forme suivante :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Les coordonnées des nœuds 1, 2, 3 et 4 dans le repère local d'une face sont :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [\bar{x} : \bar{y}]^T \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = [\bar{x} : \bar{y}]^T \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} = [\bar{x} : \bar{y}]^T \begin{Bmatrix} X_{41} \\ Y_{41} \\ Z_{41} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Annexe C. Comportement d'un matériau orthotrope

Dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire, chaque composante du tenseur de déformations $\{\varepsilon_{ij}\}$ est une fonction linéaire des composantes du tenseur des contraintes $\{\sigma_{ij}\}$:

$$\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\} \quad (C.1)$$

$[H]$ est la matrice d'élasticité.

Compte tenu des trois plans de symétrie, la matrice $[H]$ s'écrit alors dans le repère local L, T, N lié aux symétries, sous la forme suivante :

$$[\bar{H}] = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} & \bar{H}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{H}_{22} & \bar{H}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{H}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \bar{H}_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \bar{H}_{55} & 0 \\ Sym. & & & & & \bar{H}_{66} \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{H}_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} ; \bar{H}_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} ; \\ \bar{H}_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} ; \bar{H}_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\ \bar{H}_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} ; \bar{H}_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\ \bar{H}_{44} &= G_{23} ; \bar{H}_{55} = G_{31} ; \bar{H}_{66} = G_{12} \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{aligned} \quad (C.3)$$

Si on effectue une rotation θ autour de l'axe 3, le matériau conserve une symétrie, et la matrice $[H]$ à la forme suivante :

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & H_{26} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & 0 & 0 & H_{36} \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} & 0 \\ H_{16} & H_{26} & H_{36} & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

où

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \bar{H}_{11} \cos^4(\theta) + 2(\bar{H}_{12} + 2\bar{H}_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \bar{H}_{22} \sin^4(\theta) \\
 H_{12} &= \bar{H}_{12} \cos^4(\theta) + (\bar{H}_{11} + \bar{H}_{22} - 4\bar{H}_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \bar{H}_{12} \sin^4(\theta) \\
 H_{13} &= \bar{H}_{13} \cos^2(\theta) + \bar{H}_{23} \sin^2(\theta) \\
 H_{16} &= (\bar{H}_{11} - \bar{H}_{12} - 2\bar{H}_{66}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (2\bar{H}_{66} + \bar{H}_{12} - \bar{H}_{22}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\
 H_{26} &= (\bar{H}_{12} - \bar{H}_{22} - 2\bar{H}_{66}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (\bar{H}_{11} - \bar{H}_{12} - 2\bar{H}_{66}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\
 H_{36} &= (\bar{H}_{13} - \bar{H}_{23}) \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 H_{22} &= \bar{H}_{22} \cos^4(\theta) + 2(\bar{H}_{12} + 2\bar{H}_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \bar{H}_{11} \sin^4(\theta) \\
 H_{23} &= \bar{H}_{23} \cos^2(\theta) + \bar{H}_{13} \sin^2(\theta) \\
 H_{33} &= \bar{H}_{33} \\
 H_{44} &= \bar{H}_{44} \cos^2(\theta) + \bar{H}_{55} \sin^2(\theta) \\
 H_{45} &= (\bar{H}_{55} - \bar{H}_{44}) \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 H_{55} &= \bar{H}_{55} \cos^2(\theta) + \bar{H}_{44} \sin^2(\theta) \\
 H_{66} &= (\bar{H}_{11} + \bar{H}_{22} - 2\bar{H}_{12} - 2\bar{H}_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \bar{H}_{66} (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

avec θ est l'angle entre l'axe x du repère global et l'axe 1 du repère local (figure C.1).

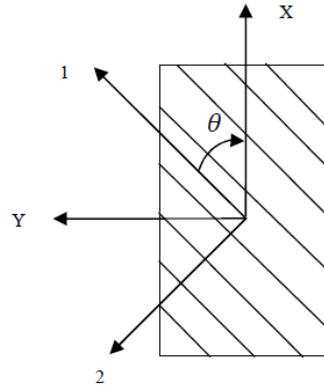


Figure C.1. Repère local et repère globale (orientation des fibres)

Annexe D. Elément volumique tétraédrique à 4 nœuds SFR4

D.1. Formulation de l'élément SFR4

Comme on l'a vu au chapitre 2, cette formulation est basée sur le concept SFR, rotation dans l'espace tridimensionnel d'une fibre matérielle élémentaire. La figure D.1 représente la géométrie nodale de l'élément fini tétraédrique à 4 nœuds SFR4.

D'après le principe des travaux virtuels on a :

$$W = \sum_e (W_{\text{int}}^e - W_{\text{ext}}^e) = 0 ; \forall \vec{u}_q^* \quad (\text{D.1})$$

$$W_{\text{int}}^e = \int_{V^e} \langle \varepsilon^* \rangle [H] \{\varepsilon\} dV \quad (\text{D.2})$$

La matrice de rigidité associée à la discrétisation de W_{int}^e est donnée par :

$$[k^e] = \int_{V^e} [B]^T [H] [B] dV \quad (\text{Dimension } 24 \times 24) \quad (\text{D.3})$$

où $[H]$ est la matrice d'élasticité 3D et $[B]$ est la matrice relation déformations-déplacements.

$$[B] = [B_{TET4} ; B_\theta] ; \langle u_n \rangle = \langle \langle u_i \quad v_i \quad w_i \rangle \langle \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \rangle \dots i=1,4 \rangle \quad (\text{D.4})$$

$[B_{TET4}]$: Matrice déformation-déplacement de l'élément tétraèdre classique.

$$[B_{TET4}] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 & & \\ 0 & c_i & 0 & & \\ 0 & 0 & d_i & \dots & i=1,4 \\ c_i & b_i & 0 & & \\ 0 & d_i & c_i & & \\ d_i & 0 & b_i & & \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$[B_\theta]$: Matrice déformation-déplacement correspondant à la rotation de la fibre spatiale.

$$[B_\theta] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 0 & b_i(z-z_i) & -b_i(y-y_i) & & \\ -c_i(z-z_i) & 0 & c_i(x-x_i) & & \\ d_i(y-y_i) & d_i(x-x_i) & 0 & \dots & i=1,4 \\ -b_i(z-z_i) & c_i(z-z_i) & b_i(x-x_i) - c_i(y-y_i) & & \\ c_i(y-y_i) - d_i(z-z_i) & -c_i(x-x_i) & d_i(x-x_i) & & \\ b_i(y-y_i) & d_i(z-z_i) - b_i(x-x_i) & -d_i(y-y_i) & & \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$\text{avec : } b_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} ; c_i = \frac{\partial N_i}{\partial y} ; d_i = \frac{\partial N_i}{\partial z} ; N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)$$

Les fonctions de forme de l'élément tétraédrique à 4 nœuds (SFR4) sont :

$$\langle N \rangle = \langle 1 - \xi - \eta - \zeta \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \rangle \quad (D.7)$$

où $\xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0$ et $1 - \xi - \eta - \zeta \geq 0$.

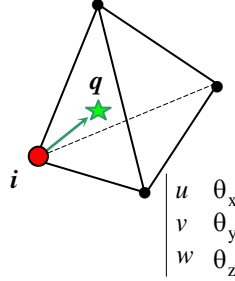


Figure D.1. Géométrie nodale de l'élément SFR4

La matrice de rigidité de l'élément tétraédrique à 4 nœuds (SFR4) est:

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_{V^e} [B]^T [H][B] dV^e = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \int_0^{1-\zeta-\eta} ([B]^T [H][B] DetJ)_{\xi, \eta, \zeta} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^{Npi} w_i ([B]^T [H][B] DetJ)_{\xi_i, \eta_i, \zeta_i} \end{aligned} \quad (D.8)$$

D.2. Formules d'intégration pour l'élément SFR4

Une intégration numérique à 4 points de Hammer (tableau D.1) est par conséquent nécessaire pour évaluer exactement la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ de l'élément tétraédrique SFR4. La figure D.2 représente l'élément de référence SFR4 et le schéma d'intégration quadratique avec 4 points.

Ordre	Nombre de points d'intégration	Coordonnées (ξ_i, η_i, ζ_i)	Coefficients de pondération ω_i
Linéaire	1	$(1/4, 1/4, 1/4)$	1/6
Quadratique	4	(a, b, b)	1/24
		(b, a, b)	1/24
		(b, b, a)	1/24
		(b, b, b)	1/24

$$a = (5 + 3\sqrt{5})/20 = 0.5854101966249685$$

$$b = (5 - 3\sqrt{5})/20 = 0.1381966011250105$$

Tableau D.1. Formules d'intégration numérique de Hammer pour des tétraèdres

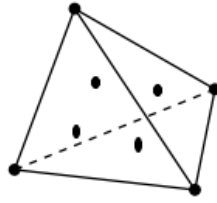


Figure D.2. Élément de référence SFR4 et ses points d'intégration (4 PH)

D.3. Contrôle des modes parasites pour l'élément SFR4

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément SFR4, intégrée exactement (4 PH), a un rang égal à 14. Il existe donc quatre modes parasites cinématiques qui sont [53] :

Mode 1 : $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = k_1 \underline{12}$; $\theta_3 = k_1 \underline{13}$; $\theta_4 = k_1 \underline{14}$

Mode 2 : $\theta_1 = k_2 \underline{21}$; $\theta_2 = 0$; $\theta_3 = k_2 \underline{23}$; $\theta_4 = k_2 \underline{24}$

Mode 3 : $\theta_1 = k_3 \underline{31}$; $\theta_2 = k_3 \underline{32}$; $\theta_3 = 0$; $\theta_4 = k_3 \underline{34}$

Mode 4 : $\theta_1 = k_4 \underline{41}$; $\theta_2 = k_4 \underline{42}$; $\theta_3 = k_4 \underline{43}$; $\theta_4 = 0$

avec : $\theta_i = \begin{Bmatrix} \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{Bmatrix}$; $\underline{ij} = \begin{Bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{Bmatrix}$ est un vecteur dirigé de nœud i vers le nœud j et k_i est un

coefficient arbitraire. Ces modes parasites à énergie nulle sont décrits sur la figure suivante :

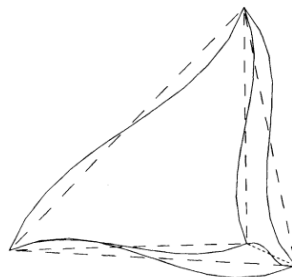


Figure D.3. Les quatre modes parasites dans l'élément SFR4

Pour éliminer ces modes parasites, nous devons introduire une matrice de pénalité proposée par MacNeal [7] à chaque face triangulaire du tétraèdre (figure D.4) et suivre la même démarche de la face triangulaire de l'élément prismatique SFR6 (§ 2.8.2.1).

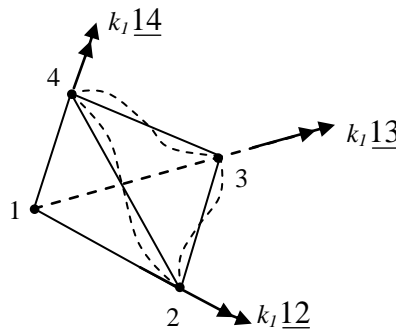


Figure D.4. Un mode parasite par une face triangulaire de l'élément SFR4

D.4. Validation : Flexion plane d'une poutre encastrée

Il s'agit d'une poutre encastrée soumise à une charge verticale uniforme de l'exemple (3.2.2). Les maillages éléments finis utilisés dans la modélisation sont représentés sur la figure D.5. Les résultats obtenus par l'élément SFR4 stabilisé sont représentés dans le tableau D.2. Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus avec l'élément tétraédrique classique à 4 nœuds (Tet4), l'élément membranaire à 3 nœuds (T3) et l'élément membranaire triangulaire FRT proposé par Ayad [10]. On remarque que le modèle SFR améliore les résultats de l'élément tétraédrique à 4 nœuds. Les résultats de l'élément SFR4 sont identiques à ceux du modèle 2D correspondant FRT, pour tous les maillages. Une remarque aussi très importante sur l'élément SFR4 c'est que l'utilisation de l'intégration réduite avec 1 point rend l'élément très efficace mais nécessite un contrôle des modes parasites supplémentaires. C'est un travail en cours de développement.

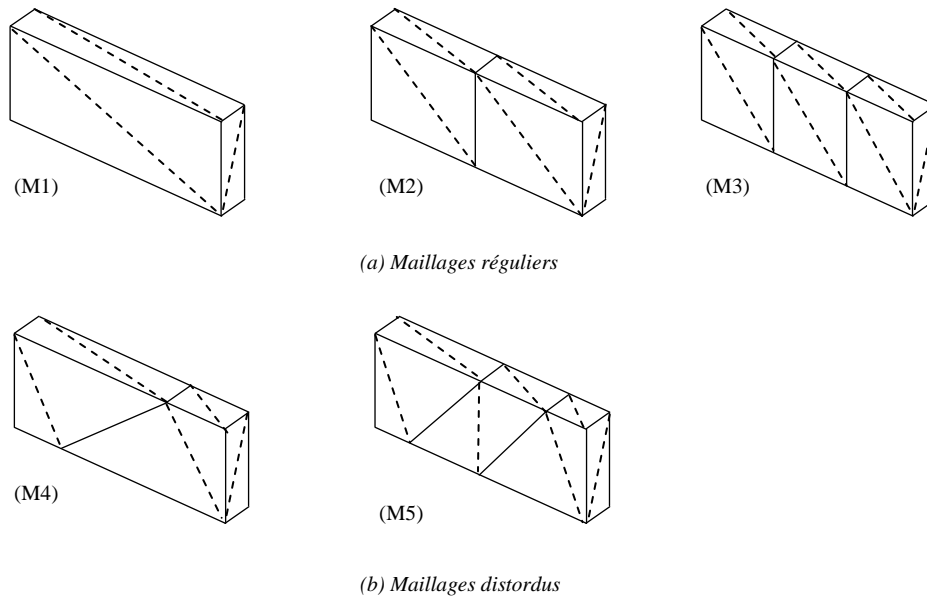


Figure D.5. Maillages 3D utilisés

Maillages	Eléments 3D			Eléments 2D
	SFR4 IE : 4 PH	Tet4 IE : 1PH	T3 (CST) IE : 1PH	FRT [10] IE : 3 PH
M1	0.24	0.05	0.05	0.24
M2	0.89	0.14	0.14	0.89
M3	1.54	0.26	0.26	1.54
M4	0.44	0.06	0.06	0.44
M5	0.65	0.10	0.10	0.65

$$W_c^{ref} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA} = 4 + 0.03 = 4.03$$

Tableau D.2. Résultats de la poutre en flexion plane

Références Bibliographiques

- [1] Ghomari T. Contribution à la modélisation 3D volumique de la mise en forme des corps plastiques creux: Thèse de doctorat, Université de Reims, France; 2007.
- [2] Zouari W. Développement d'éléments finis ferroélectriques et ferroélastiques de type solide et coque curvilignes: Thèse de doctorat, Université de Nancy, France; 2010.
- [3] Allman D. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Computers & Structures*. 1984;19:1-8.
- [4] Allman D. Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1988;26:2645-55.
- [5] Bergan P, Felippa C. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1985;50:25-69.
- [6] Cook RD. On the Allman triangle and a related quadrilateral element. *Computers & Structures*. 1986;22:1065-7.
- [7] MacNeal RH, Harder RL. A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom. *Computers & Structures*. 1988;28:75-84.
- [8] Cook RD. A plane hybrid element with rotational dof and adjustable stiffness. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987;24:1499-508.
- [9] Yunus SM. A study of different hybrid elements with and without rotational DOF for plane stress/plane strain problems. *Computers & Structures*. 1988;30:1127-33.
- [10] Ayad R. Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement: Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne (UTC), France; 1993.
- [11] Ghomari T, Talbi N, Ayad R, Kerdal D, Ziane M. An Axisymmetric Hyperelastic Solid Model for Forming Processes of Hollow Plastic Bodies. *Journal of Applied Sciences*. 2006;6:1251-7.
- [12] Ayad R. Contribution à la Modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non newtoniens. Application à des matériaux d'emballage: Thèse d'Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Reims, France; 2002.
- [13] Ayad R. A 3D 8-node solid finite element based upon the space fiber rotation concept. *Proceedings of the 16th French Congress on Mechanics*; 2003.
- [14] Zouari W, Ayad R, Zineb TB, Benjeddou A. A piezoelectric 3D hexahedral curvilinear finite element based on the space fiber rotation concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2012;90:87-115.
- [15] Ghomari T, Meftah K, Ayad R, Talbi N. A space fibre as added value in finite element modelling for optimal analysis of problems involving contact. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*. 2012;21:141-57.
- [16] Batoz JL, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis: solides élastiques: Hermès Editeur, Paris; 1990.
- [17] Batoz JL, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis : Poutres et Plaques: Hermès Editeur, Paris; 1990.

- [18] Batoz JL, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis : Coques: Hermès Editeur, Paris; 1992.
- [19] Craveur JC. Modélisation par éléments finis: cours et exercices corrigés: Dunod; 2008.
- [20] Dhatt G, Touzot G. Une présentation de la méthode des éléments finis: Maloine; Québec: Presses de l'Université Laval; 1981.
- [21] Trinh VD. Formulation, Développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous-intégrés stabilisés utilisables pour des problèmes à cinématique et comportement non linéaires: Thèse de doctorat, ENSAM Paris, France; 2009.
- [22] Lemosse D. Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces: Thèse de doctorat, Ecole Doctorale SPMI/INSA-Rouen; 2000.
- [23] Turner M, Clough R, Martin H, Topp L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1956;23:805-23.
- [24] Clough RW. The finite element method in plane stress analysis. *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa; 1960. p. 345.
- [25] Felippa C. Parametric unification of matrix structural analysis: classical formulation and d-connected mixed elements. *Finite elements in analysis and design*. 1995;21:45-74.
- [26] Felippa CA. A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts. *Computers & Structures*. 2001;79:1313-24.
- [27] Venkatesh D, Shrinivasa U. Solid finite elements through three decades. *Sadhana: Academy Proceedings in Engineering Sciences*. 1994;19:271-87.
- [28] Gallagher RH, Claudon JL. Introduction aux éléments finis: Pluralis; 1976.
- [29] Yamakawa S, Shimada K. Fully-automated hex-dominant mesh generation with directionality control via packing rectangular solid cells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003;57:2099-129.
- [30] Yamakawa S, Shimada K. Converting a tetrahedral mesh to a prism-tetrahedral hybrid mesh for FEM accuracy and efficiency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009;80:74-102.
- [31] George PL. Tet meshing: construction, optimization and adaptation. *Citeseer*; 1999. p. 133-41.
- [32] Shewchuk JR. Constrained Delaunay tetrahedralizations and provably good boundary recovery. *Citeseer*; 2002. p. 193-204.
- [33] Yamakawa S, Shimada K. Anisotropic tetrahedral meshing via bubble packing and advancing front. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003;57:1923-42.
- [34] Blacker TD, Meyers RJ. Seams and wedges in plastering: a 3-D hexahedral mesh generation algorithm. *Engineering with computers*. 1993;9:83-93.
- [35] Hariya M, Nishigaki I, Kataoka I, Hiro Y. Automatic hexahedral mesh generation with feature line extraction. *Springer*; 2006. p. 453-67.
- [36] Kwak DY, Im YT. Remeshing for metal forming simulations—Part II: Three-dimensional hexahedral mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;53:2501-28.

- [37] Schneiders R. A grid-based algorithm for the generation of hexahedral element meshes. *Engineering with computers*. 1996;12:168-77.
- [38] Tautges TJ, Blacker T, Mitchell SA. The whisker weaving algorithm: A connectivity-based method for constructing all-hexahedral finite element meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996;39:3327-49.
- [39] Lai M, Benzley S, White D. Automated hexahedral mesh generation by generalized multiple source to multiple target sweeping. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;49:261-75.
- [40] White DR, Tautges TJ. Automatic scheme selection for toolkit hex meshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;49:127-44.
- [41] Yamakawa S, Shimada K. Hexhoop: Modular templates for converting a hex-dominant mesh to an all-hex mesh. *Engineering with computers*. 2002;18:211-28.
- [42] Owen SJ, Saigal S. Formation of pyramid elements for hexahedra to tetrahedra transitions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001;190:4505-18.
- [43] Kallinderis Y, Kavouklis C. A dynamic adaptation scheme for general 3-D hybrid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005;194:5019-50.
- [44] Yamakawa S, Shimada K. Hex-dominant mesh generation with directionality control via packing rectangular solid cells. *IEEE*; 2002. p. 107-18.
- [45] Owen SJ, Saigal S. H-Morph: an indirect approach to advancing front hex meshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;49:289-312.
- [46] Yunus SM, Saigal S, Cook RD. On improved hybrid finite elements with rotational degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989;28:785-800.
- [47] Yunus SM, Pawlak TP, Cook RD. Solid elements with rotational degrees of freedom: Part 1—hexahedron elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1991;31:573-92.
- [48] MacNeal RH. Toward a defect-free four-noded membrane element. *Finite elements in analysis and design*. 1989;5:31-7.
- [49] Ibrahimbegovic A, Wilson EL. Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1991;31:1393-414.
- [50] Sze K, Ghali A. A hybrid brick element with rotational degrees of freedom. *Computational mechanics*. 1993;12:147-63.
- [51] Ayad R, Zouari W, Meftah K, Ben Zineb T, Benjeddou A. Enrichment of Linear Hexahedral Finite Elements using Rotations of a Virtual Space Fiber. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2013;accepted.
- [52] Pawlak TP, Yunus SM, Cook RD. Solid elements with rotational degrees of freedom: Part II—tetrahedron elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1991;31:593-610.
- [53] Sze K, Pan Y. Hybrid stress tetrahedral elements with Allman's rotational DOFs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;48:1055-70.
- [54] Matsubara H, Iraha S, Tomiyama J, Yamashiro T, Yagawa G. Free Mesh Method Using Tetrahedral Element Including the Vertex Rotations. *Dotoku Gakkai*; 2004. 97-108.

- [55] Tian R, Yagawa G. Generalized nodes and high-performance elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005;64:2039-71.
- [56] Tian R, Matsubara H, Yagawa G, Iraha S, Tomiyama J. Accuracy Improvements on Free Mesh Method: A High Performance Quadric Triangular/Tetrahedral Element with Only Corners. *Proc of the 2004 Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI)* ; 2004.
- [57] Tian R, Matsubara H, Yagawa G. Advanced 4-node tetrahedrons. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006;68:1209-31.
- [58] Meftah K, Ayad R, Hecini M. A new 3D 6-node solid finite element based upon the "Space Fibre Rotation" concept. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*. 2012;22:1-29.
- [59] Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*: Pergamon press Oxford, UK; 1975.
- [60] Simo JC, Rifai MS. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1990;29:1595-638.
- [61] Simo J, Armero F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1992;33:1413-49.
- [62] Simo J, Armero F, Taylor R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1993;110:359-86.
- [63] Andelfinger U, Ramm E. EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:1311-37.
- [64] Freischläger C, Schweizerhof K. On a systematic development of trilinear three-dimensional solid elements based on Simo's enhanced strain formulation. *International Journal of Solids and Structures*. 1996;33:2993-3017.
- [65] Korelc J, Wriggers P. Efficient enhanced strain element formulation for 2D and 3D problems. *Advances in Finite Element Technology*. Wiberg ed: CIMNE: Barcelona, Spain; 1996.
- [66] Weissman S. High-accuracy low-order three-dimensional brick elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996;39:2337-61.
- [67] Cao YP, Hu N, Lu J, Fukunaga H, Yao ZH. A 3D brick element based on Hu-Washizu variational principle for mesh distortion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;53:2529-48.
- [68] de Sousa RJA, Jorge RMN, Valente RAF, de Sá JMAC. A new volumetric and shear locking-free 3D enhanced strain element. *Engineering Computations*. 2003;20:896-925.
- [69] Fredriksson M, Ottosen NS. Accurate eight-node hexahedral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2007;72:631-57.
- [70] Chavan K, Lamichhane BP, Wohlmuth BI. Locking-free finite element methods for linear and nonlinear elasticity in 2D and 3D. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2007;196:4075-86.

- [71] Mueller-Hoeppe DS, Loehnert S, Wriggers P. A finite deformation brick element with inhomogeneous mode enhancement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009;78:1164-87.
- [72] Belytschko T, Bindeman LP. Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1993;105:225-60.
- [73] Zhu Y, Cescotto S. Unified and mixed formulation of the 8-node hexahedral elements by assumed strain method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996;129:177-209.
- [74] Chen YI, Stolarski HK. Extrapolated fields in the formulation of the assumed strain elements Part II: Three-dimensional problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998;154:1-29.
- [75] Kasper EP, Taylor RL. A mixed-enhanced strain method: Part I: Geometrically linear problems. *Computers & Structures*. 2000;75:237-50.
- [76] Kasper EP, L. Taylor R. A mixed-enhanced strain method: Part II: Geometrically nonlinear problems. *Computers & Structures*. 2000;75:251-60.
- [77] Pian THH. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA journal*. 1964;2:1333-6.
- [78] Pian THH, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1984;20:1685-95.
- [79] Pian THH, Tong P. Relations between incompatible displacement model and hybrid stress model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986;22:173-81.
- [80] Sze KY, Ghali A. Hybrid hexahedral element for solids, plates, shells and beams by selective scaling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:1519-40.
- [81] Yuan K-Y, Huang Y-S, Pian THH. New strategy for assumed stresses for 4-node hybrid stress membrane element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:1747-63.
- [82] Yuan KY, Huang YS, Yang HT, Pian THH. The inverse mapping and distortion measures for 8-node hexahedral isoparametric elements. *Computational mechanics*. 1994;14:189-99.
- [83] Sze KY. Editorial Recent advancements in the hybrid/mixed finite element method. *Finite elements in analysis and design*. 1995;21:3.
- [84] Sze KY. Recent advancements in the hybrid/mixed finite element method. *Finite elements in analysis and design*. 1996;24:i.
- [85] Yeo ST, Lee BC. New stress assumption for hybrid stress elements and refined four-node plane and eight-node brick elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:2933-52.
- [86] Sze K, Lo S. A 12-node hybrid stress brick element for beam/column analysis. *Engineering Computations*. 1999;16:752-66.
- [87] Sze KY, Yi S, Tay MH. An explicit hybrid stabilized eighteen-node solid element for thin shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:1839-56.

- [88] Lo S. Analysis of building structures using solid finite elements. Structural Engineering Mechanics and Computation, SEMC2001, Cape Town, South Africa. 2001:703-9.
- [89] Chen YI, Wu GY. A mixed 8-node hexahedral element based on the Hu-Washizu principle and the field extrapolation technique. Structural Engineering and Mechanics. 2004;17:113-40.
- [90] Jog CS. A 27-node hybrid brick and a 21-node hybrid wedge element for structural analysis. Finite elements in analysis and design. 2005;41:1209-32.
- [91] Mijuca D. On hexahedral finite element HC8/27 in elasticity. Computational mechanics. 2004;33:466-80.
- [92] Wu D, Lo SH, Sheng N, Sze KY. Universal three-dimensional connection hexahedral elements based on hybrid-stress theory for solid structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010;81:307-34.
- [93] Sze KY, Liu XH, Lo SH. Hybrid-stress six-node prismatic elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2004;61:1451-70.
- [94] de Freitas JAT, Cismaşiu C. Numerical implementation of hybrid-Trefftz displacement elements. Computers & Structures. 1999;73:207-25.
- [95] de Freitas JAT, Bussamra FLS. Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000;47:927-50.
- [96] Trefftz E. Ein gegenstück zum ritzschen verfahren. Proc 2nd Int Cong Appl Mech, Zurich, 1926. 1926:131-7.
- [97] Cheng AHD, Cheng DT. Heritage and early history of the boundary element method. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2005;29:268-302.
- [98] Bussamra FLS, Pimenta PM, Freitas JAT. Hybrid-Trefftz stress elements for three-dimensional elastoplasticity. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. 2001;8:235-46.
- [99] De Freitas JAT, Ji ZY. Hybrid-trefftz finite element formulation for simulation of singular stress fields. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996;39:281-308.
- [100] De Freitas JAT, Ji ZY. Hybrid-trefftz equilibrium model for crack problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996;39:569-84.
- [101] Ponciano WM, Bussamra F, Lucena Neto E. Hybrid-Trefftz elements applied to the stress concentration problems in linear elasticity. Proceedings of the 11th Pan-American congress of applied mechanics, Foz do Iguaçu, Brazil; 2009.
- [102] Bussamra FLS, Lucena Neto E, Raimundo Jr DS. Hybrid quasi-Trefftz 3-D finite elements for laminated composite plates. Computers & Structures. 2012;92–93:185-92.
- [103] Dhondt G. The right solid element: a challenge to industry. Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria; 2002.
- [104] Hoit M, Krishnamurthy K. A 14-Point reduced integration scheme for solid elements. Computers & Structures. 1995;54:725-30.
- [105] Sauer G. Alternative reduced integration avoiding spurious modes for 8-node quadrilateral and 20-node hexahedron finite elements. Forschung im Ingenieurwesen. 1999;65:131-5.

- [106] Lo SH, Ling C. Improvement on the 10-node tetrahedral element for three-dimensional problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;189:961-74.
- [107] Shiakolas PS, Nambiar RV, Lawrence KL, Rogers WA. Closed-form stiffness matrices for the linear strain and quadratic strain tetrahedron finite elements. *Computers & Structures*. 1992;45:237-42.
- [108] Shiakolas PS, Lawrence KL, Nambiar RV. Closed-form expressions for the linear and quadratic strain tetrahedral finite elements. *Computers & Structures*. 1994;50:743-7.
- [109] Cheung Y, Lo S, Leung A. *Finite element implementation*: Blackwell Science England; 1996.
- [110] Borouchaki H, George PL, Lo SH. Optimal Delaunay point insertion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996;39:3407-37.
- [111] Lo SH. Optimization of tetrahedral meshes based on element shape measures. *Computers & Structures*. 1997;63:951-61.
- [112] Lee CK, Lo SH. Automatic adaptive 3-D finite element refinement using different-order tetrahedral elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:2195-226.
- [113] Ooi ET, Rajendran S, Yeo JH. A 20-node hexahedron element with enhanced distortion tolerance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004;60:2501-30.
- [114] Ooi ET, Rajendran S, Yeo JH. Extension of unsymmetric finite elements US-QUAD8 and US-HEXA20 for geometric nonlinear analyses. *Engineering Computations*. 2007;24:407-31.
- [115] Venkatesh DN, Shrinivasa U. Hexahedral elements using PN functions—Applications to beams. *Computers & Structures*. 1996;60:305-13.
- [116] Bassayya K, Bhattacharya K, Shrinivasa U. Eight-node brick, PN340, represents constant stress fields exactly. *Computers & Structures*. 2000;74:441-60.
- [117] Bassayya K, Shrinivasa U. A 14-node brick element, PN5X1, exactly representing linear stress fields. *Computers & Structures*. 2000;74:147-65.
- [118] Venkatesh DN, Shrinivasa U. Generation of an eight node brick element using Papcovitch-Neuber functions. *Computers & Structures*. 1995;54:1077-84.
- [119] Venkatesh DN, Shrinivasa U. Plate bending with hexahedral PN elements. *Computers & Structures*. 1996;60:635-41.
- [120] Bassayya K, Shrinivasa U. A 14-node brick element, PN5X1, for plates and shells. *Computers & Structures*. 2000;74:167-78.
- [121] Jiao Z-P, Li C. A new formulation of eight-node hexagonal solid element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;187:213-7.
- [122] Taig I. *Structural analysis by the matrix displacement method*: English Electric Aviation Limited; 1962.
- [123] Irons B. Engineering applications of numerical integration in stiffness methods. *AIAA journal*. 1966;4:2035-7.

- [124] Lee N-S, Bathe K-J. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:3553-76.
- [125] Li HG, Cen S, Cen ZZ. Hexahedral volume coordinate method (HVCM) and improvements on 3D Wilson hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008;197:4531-48.
- [126] Li C-J, Chen J, Chen W-J. A 3D hexahedral spline element. *Computers & Structures*. 2011;89:2303-8.
- [127] Chen J, Li C-J, Chen W-J. A 3D pyramid spline element. *Acta Mechanica Sinica*. 2011;27:986-93.
- [128] Jim Douglas Jr. n, Santos JE, Sheen D, Ye X. Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 1999;33:747-70.
- [129] Lee C-O, Lee J, Sheen D. A Locking-Free Nonconforming Finite Element Method for Planar Linear Elasticity. *Advances in Computational Mathematics*. 2003;19:277-91.
- [130] Jang G-W, Lee S, Kim YY, Sheen D. Topology optimization using non-conforming finite elements: three-dimensional case. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005;63:859-75.
- [131] Gremaud P. Numerical Analysis of a Nonconvex Variational Problem Related to Solid-Solid Phase Transitions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1994;31:111-27.
- [132] Luskin M. On the computation of crystalline microstructure. *Acta Numerica*. 1996;5:191-257.
- [133] Ma L, Walkington N. On Algorithms for Nonconvex Optimization in the Calculus of Variations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1995;32:900-23.
- [134] Choi C-K, Chung GT. A gap element for three-dimensional elasto-plastic contact problems. *Computers & Structures*. 1996;61:1155-67.
- [135] Choi CK, Chung GT. Elasto-plastic nonconforming solid element with variable nodes. *Structural Engineering and Mechanics*. 1995;3:325-40.
- [136] Taylor RL. A mixed-enhanced formulation tetrahedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;47:205-27.
- [137] Cisloiu R, Lovell M, Wang J. A stabilized mixed formulation for finite strain deformation for low-order tetrahedral solid elements. *Finite elements in analysis and design*. 2008;44:472-82.
- [138] Arnold D, Brezzi F, Fortin M. A stable finite element for the stokes equations. *Calcolo*. 1984;21:337-44.
- [139] Lamichhane BP. From the Hu–Washizu formulation to the average nodal strain formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2009;198:3957-61.
- [140] Lamichhane BP. Inf–sup stable finite-element pairs based on dual meshes and bases for nearly incompressible elasticity. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2009;29:404-20.
- [141] Lamichhane BP. A mixed finite element method for non-linear and nearly incompressible elasticity based on biorthogonal systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009;79:870-86.

- [142] Mahnken R, Caylak I. Stabilization of bi-linear mixed finite elements for tetrahedra with enhanced interpolation using volume and area bubble functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2008;75:377-413.
- [143] Mahnken R, Caylak I, Laschet G. Two mixed finite element formulations with area bubble functions for tetrahedral elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008;197:1147-65.
- [144] Caylak I, Mahnken R. Stabilization of mixed tetrahedral elements at large deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2012;90:218-42.
- [145] Dohrmann CR, Key SW, Heinstein MW, Jung J. A least-squares approach for uniform strain triangular and tetrahedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998;42:1181-97.
- [146] Dohrmann CR, Heinstein MW, Jung J, Key SW, Witkowski WR. Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;47:1549-68.
- [147] Puso MA, Solberg J. A stabilized nodally integrated tetrahedral. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006;67:841-67.
- [148] Slavković R, Živković M, Kojić M. Enhanced 8-node three-dimensional solid and 4-node shell elements with incompatible generalized displacements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1994;10:699-709.
- [149] Klinkel S, Wagner W. A geometrical non-linear brick element based on the EAS-method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1997;40:4529-45.
- [150] Wriggers P, Reese S. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996;135:201-9.
- [151] Glaser S, Armero F. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*. 1997;14:759-91.
- [152] Pantuso D, Bathe K-J. On the stability of mixed finite elements in large strain analysis of incompressible solids. *Finite elements in analysis and design*. 1997;28:83-104.
- [153] Armero F. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers & Structures*. 2000;75:261-90.
- [154] Reese S, Wriggers P. A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;48:79-109.
- [155] Reese S. On a physically stabilized one point finite element formulation for three-dimensional finite elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005;194:4685-715.
- [156] Cao YP, Hu N, Fukunaga H, Lu J, Yao ZH. A highly accurate brick element based on a three-field variational principle for elasto-plastic analysis. *Finite elements in analysis and design*. 2003;39:1155-71.
- [157] Armero F. Assumed strain finite element methods for conserving temporal integrations in non-linear solid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2008;74:1795-847.
- [158] Zienkiewicz OC, Rojek J, Taylor RL, Pastor M. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998;43:565-83.

- [159] Bonet J, Burton AJ. A simple average nodal pressure tetrahedral element for incompressible and nearly incompressible dynamic explicit applications. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1998;14:437-49.
- [160] Bonet J, Marriott H, Hassan O. An averaged nodal deformation gradient linear tetrahedral element for large strain explicit dynamic applications. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2001;17:551-61.
- [161] Andrade Pires FM, de Souza Neto EA, de la Cuesta Padilla JL. An assessment of the average nodal volume formulation for the analysis of nearly incompressible solids under finite strains. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2004;20:569-83.
- [162] Li KP, Carden WP, Wagoner RH. Simulation of springback. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2002;44:103-22.
- [163] Areias PMA, César de Sá JMA, António CAC, Fernandes AA. Analysis of 3D problems using a new enhanced strain hexahedral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003;58:1637-82.
- [164] Wang J, Wagoner RH. A practical large-strain solid finite element for sheet forming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005;63:473-501.
- [165] Oliveira MC, Alves JL, Chaparro BM, Menezes LF. Study on the influence of work-hardening modeling in springback prediction. *International Journal of Plasticity*. 2007;23:516-43.
- [166] Menezes L, Teodosiu C, Makinouchi A. 3-D solid elasto-plastic elements for simulating sheet metal forming processes by the finite element method. FE-simulations of the 3D Sheet Forming Processes in Automotive Industry, *VDI Berichte*. 1991:381-403.
- [167] Alves J, Menezes L. Application of tri-linear and tri-quadratic 3-D solid FE in sheet metal forming process simulation. In: Mori, K-I (Ed), *Proceedings of the Numiform'01 on Simulation of materials processing: Theory, Methods and Applications* Balkema, Rotterdam ; 2001. p. 639-44.
- [168] Oliveira M, Alves J, Menezes L. Springback evaluation using 3-D finite elements. Huh H Yang D-Y, Oh SI, Kim YH, editors, *NUMISHEET*. 2002:189-94.
- [169] Korelc J, Šolinc U, Wriggers P. An improved EAS brick element for finite deformation. *Computational mechanics*. 2010;46:641-59.
- [170] Nadler B, Rubin MB. A new 3-D finite element for nonlinear elasticity using the theory of a Cosserat point. *International Journal of Solids and Structures*. 2003;40:4585-614.
- [171] Reese S, Wriggers P, Reddy BD. A new locking-free brick element technique for large deformation problems in elasticity. *Computers & Structures*. 2000;75:291-304.
- [172] Wall WA, Bischoff M, Ramm E. A deformation dependent stabilization technique, exemplified by EAS elements at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000;188:859-71.
- [173] Loehnert S, Boerner EFI, Rubin MB, Wriggers P. Response of a nonlinear elastic general Cosserat brick element in simulations typically exhibiting locking and hourglassing. *Computational mechanics*. 2005;36:255-65.
- [174] Jabareen M, Sharipova L, Rubin M. Cosserat point element (CPE) for finite deformation of orthotropic elastic materials. *Computational mechanics*. 2012;49:525-44.

- [175] Buczkowski R. 21-node hexahedral isoparametric element for analysis of contact problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1998;14:681-92.
- [176] Buczkowski R, Gabbert U. 28-noded hexahedral isoparametric element for analysis of contact problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2004;20:147-61.
- [177] Gmür T. *Dynamique des structures: analyse modale numérique*: PPUR; 1997.
- [178] Hughes TJR. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1980;15:1413-8.
- [179] Koh BC, Kikuchi N. New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987;65:1-46.
- [180] Flanagan DP, Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1981;17:679-706.
- [181] Belytschko T, Ong JS-J, Wing Kam L, Kennedy JM. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1984;43:251-76.
- [182] Li K. Contribution to the finite element simulation of three-dimensional sheet metal forming: Ph.D. Dissertation, MSM, Université de Liège, Belgique; 1995.
- [183] Li KP, Cescotto S. An 8-node brick element with mixed formulation for large deformation analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1997;141:157-204.
- [184] Liu WK, Hu YK, Belytschko T. Multiple quadrature underintegrated finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994;37:3263-89.
- [185] Liu WK, Guo Y, Tang S, Belytschko T. A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998;154:69-132.
- [186] Barbero EJ. A 3-D finite element for laminated composites with 2-D kinematic constraints. *Computers & Structures*. 1992;45:263-71.
- [187] Zinno R, Barbero EJ. A three-dimensional layer-wise constant shear element for general anisotropic shell-type structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994;37:2445-70.
- [188] Barbero EJ, Zinno R. Analysis of laminated composite plates with three-dimensional layer-wise constant shear elements. *International Journal for Engineering Analysis and Design*. 1994;1:189-214.
- [189] Zinno R, Barbero EJ. Total Lagrangian formulation for laminated composite plates analysed by three-dimensional finite elements with two-dimensional kinematic constraints. *Computers & Structures*. 1995;57:455-66.
- [190] Tsai MY, Morton J. Three-dimensional deformations in a single-lap joint. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1994;29:137-45.
- [191] Bogdanovich AE, Kizhakkethara I. Three-dimensional finite element analysis of double-lap composite adhesive bonded joint using submodeling approach. *Composites Part B: Engineering*. 1999;30:537-51.

- [192] Benchekchou B, White RG. Stresses around fasteners in composite structures in flexure and effects on fatigue damage initiation part 1: cheese-head bolts. *Composite structures*. 1995;33:95-108.
- [193] Oh JH, Kim YG, Lee DG. Optimum bolted joints for hybrid composite materials. *Composite structures*. 1997;38:329-41.
- [194] Ireman T. Three-dimensional stress analysis of bolted single-lap composite joints. *Composite structures*. 1998;43:195-216.
- [195] Camanho PP, Matthews FL. A Progressive Damage Model for Mechanically Fastened Joints in Composite Laminates. *Journal of Composite Materials*. 1999;33:2248-80.
- [196] Camanho PP, Matthews FL. Delamination Onset Prediction in Mechanically Fastened Joints in Composite Laminates. *Journal of Composite Materials*. 1999;33:906-27.
- [197] Chen W-H, Lee S-S, Yeh J-T. Three-dimensional contact stress analysis of a composite laminate with bolted joint. *Composite structures*. 1995;30:287-97.
- [198] McCarthy MA, McCarthy CT. Finite element analysis of effects of clearance on single shear composite bolted joints. *Plastics, Rubber and Composites*. 2003;32:65-70.
- [199] Persson E, Madenci E, Eriksson I. Delamination initiation of laminates with pin-loaded holes. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 1998;30:87-101.
- [200] Marimuthu R, Sundaresan M, Rao G. Estimation of interlaminar normal and shear stresses by three-dimensional hexahedron element using mixed finite element formulation. *Journal of the Institution of Engineers (India)*. 2001;82:50-5.
- [201] Marimuthu R, Sundaresan M, Rao G. Estimation of interlaminar stresses in laminated plates subjected to transverse loading using three-dimensional mixed finite element formulation. *Journal of the Institution of Engineers (India)*. 2003;84:1-8.
- [202] Hou JP, Petrinic N, Ruiz C, Hallett SR. Prediction of impact damage in composite plates. *Composites Science and Technology*. 2000;60:273-81.
- [203] Fleming DC. Delamination Modeling of Composites for Improved Crash Analysis. *Journal of Composite Materials*. 2001;35:1777-92.
- [204] Bonini J. Contribution à la prédiction numérique de l'endommagement de stratifiés composites sous impact basse vitesse: PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Bordeaux; 1995.
- [205] El-Sayed S, Sridharan S. Predicting and tracking interlaminar crack growth in composites using a cohesive layer model. *Composites Part B: Engineering*. 2001;32:545-53.
- [206] La Saponara V, Muliana H, Haj-Ali R, Kardomateas GA. Experimental and numerical analysis of delamination growth in double cantilever laminated beams. *Engineering Fracture Mechanics*. 2002;69:687-99.
- [207] Roudolff F, Ousset Y. Comparison between two approaches for the simulation of delamination growth in a D.C.B. specimen. *Aerospace Science and Technology*. 2002;6:123-30.
- [208] Corigliano A, Mariani S. Simulation of damage in composites by means of interface models: parameter identification. *Composites Science and Technology*. 2001;61:2299-315.

- [209] Van Hoa S, Feng W. Hybrid finite element method for stress analysis of laminated composites: Springer; 1998.
- [210] Abdullah E, Ferrero JF, Barrau JJ, Mouillet JB. Development of a new finite element for composite delamination analysis. *Composites Science and Technology*. 2007;67:2208-18.
- [211] Icardi U, Bertetto AM. An evaluation of the influence of geometry and of material properties at free edges and at corners of composite laminates. *Computers & Structures*. 1995;57:555-71.
- [212] Lessard LB, Schmidt AS, Shokrieh MM. Three-dimensional stress analysis of free-edge effects in a simple composite cross-ply laminate. *International Journal of Solids and Structures*. 1996;33:2243-59.
- [213] Chen DJ, Shah DK, Chan WS. Interfacial stress estimation using least-square extrapolation and local stress smoothing in laminated composites. *Computers & Structures*. 1996;58:765-74.
- [214] Carreira RP. Validations par éléments finis des Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches M4: PhD thesis, ENPC; 1998.
- [215] Hu FZ, Soutis C, Edge EC. Interlaminar stresses in composite laminates with a circular hole. *Composite structures*. 1997;37:223-32.
- [216] Cho YB, Averill RC. First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels. *Composite structures*. 2000;50:1-15.
- [217] Ramtekkar GS, Desai YM, Shah AH. Mixed Finite-Element Model for Thick Composite Laminated Plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2002;9:133-56.
- [218] Ramtekkar G, Desai Y, Shah A. Application of a three-dimensional mixed finite element model to the flexure of sandwich plate. *Computers & Structures*. 2003;81:2183-98.
- [219] Desai YM, Ramtekkar GS, Shah AH. Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model. *Composite structures*. 2003;59:237-49.
- [220] Desai YM, Ramtekkar GS, Shah AH. A novel 3D mixed finite-element model for statics of angle-ply laminates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003;57:1695-716.
- [221] Bambole AN, Desai YM. Hybrid-interface element for thick laminated composite plates. *Computers & Structures*. 2007;85:1484-99.
- [222] Bui VQ, Marechal E, Nguyen-Dang H. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites: bending, buckling and transient reponses. *Composites Science and Technology*. 1999;59:2269-77.
- [223] Bui VQ, Marechal E, Nguyen-Dang H. Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites: interlaminar stresses and strain-energy release rates. *Composites Science and Technology*. 2000;60:131-43.
- [224] Kuhlmann G, Rolfes R. A hierarchic 3D finite element for laminated composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004;61:96-116.

- [225] Carpenter N, Stolarski H, Belytschko T. A flat triangular shell element with improved membrane interpolation. *Communications in applied numerical methods*. 1985;1:161-8.
- [226] Cook RD. Modified formulations for nine-dof plane triangles that include vertex rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1991;31:825-35.
- [227] Allman D. The constant strain triangle with drilling rotations: a simple prospect for shell analysis. *Mathematics of Finite Elements and Applications VI MAFELAP*. 1987:233-40.
- [228] Gmür T. *Méthode des éléments finis en mécanique des structures*: PPUR; 2000.
- [229] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Too JM. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1971;3:275-90.
- [230] Hughes TJR, Cohen M, Haroun M. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. *Nuclear Engineering and Design*. 1978;46:203-22.
- [231] Dhondt GDC. *The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications*: John Wiley & Sons Inc; 2004.
- [232] Zienkiewicz OC. *The finite element method*: London, McGraw-Hill; 1977.
- [233] Cook RD, Malkus DS, Plesha ME. *Concepts and applications of finite element analysis*. Wiley (New York); 1989.
- [234] Lindberg G, Olson M, Cowper G. New developments in the finite element analysis of shells. *Quarterly Bulletin*. 1969;4:1-99.
- [235] MacNeal RH, Harder RL. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite elements in analysis and design*. 1985;1:3-20.
- [236] Taylor R, Simo J, Zienkiewicz O, Chan A. The patch test—a condition for assessing FEM convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986;22:39-62.
- [237] Wilson E, Taylor R, Doherty W, Ghaboussi J. Incompatible displacement models (isoparametric finite elements in solid and thick shell structural analysis). *Numerical and computer methods in structural mechanics (A 74-17756 06-32)* New York, Academic Press, Inc, 1973. 1973:43-57.
- [238] Taylor RL, Beresford PJ, Wilson EL. A non-conforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1976;10:1211-9.
- [239] Trinh VD, Abed-Meraim F, Combescure A. A new assumed strain solid-shell formulation “SHB6” for the six-node prismatic finite element. *Journal of mechanical science and technology*. 2011;25:2345-64.
- [240] ABAQUS. *Analysis: User's Manual*. V. 6.11; 2010.
- [241] Yuqiu L, Yin X. Generalized conforming triangular membrane element with vertex rigid rotational freedoms. *Finite elements in analysis and design*. 1994;17:259-71.
- [242] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S, Woinowsky S. *Theory of plates and shells*: McGraw-hill New York; 1970.
- [243] Morley LSD. *Skew plates and structures*: Pergamon Press, Macmillan, New York; 1963.

- [244] Babuška I, Scapolla T. Benchmark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989;28:155-79.
- [245] Belytschko T, Wong BL, Stolarski H. Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1989;28:385-414.
- [246] Batoz J, Triki S. Développement d'un élément fini de poutre vrillée. Rapport interne, UTC/LG2MS/MNM. 1991.
- [247] Flügge W. *Stresses in shells*: Springer; 1960.
- [248] Stolarski H, Belytschko T. Shear and membrane locking in curved C0 elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1983;41:279-96.
- [249] Holzapfel GA. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*: John Wiley & Sons Inc; 2000.
- [250] Simo J, Fox D, Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: the linear theory; computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1989;73:53-92.
- [251] Scordelis A, Lo K. Computer analysis of cylindrical shells. *ACI Journal Proceedings: ACI*; 1964. p. 539-61.
- [252] Duong VA. Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites: PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées; 2008.
- [253] Olson MD, Lindberg GM. Dynamic analysis of shallow shells with a doubly-curved triangular finite element. *Journal of Sound and Vibration*. 1971;19:299-310, IN5-IN10, 1-8.
- [254] Bouabdallah M. Modélisation de coques cylindriques raidies, isotropes et composites: Thèse de Doctorat, UTC, Compiègne, France; 1992.
- [255] Massin P, Laulusa A, Al Mikdad M, Bui D, Voltaire F. Éléments finis de coques volumiques. *Manuel de Référence de Code Aster*. 2000.
- [256] Chatiri M, Güll T, Matzenmiller A. An assessment of the new LS-DYNA layered solid element: basics, patch simulation and its potential for thick composite structure analysis. 7th European LS-DYNA Conference, Salzburg; 2009.
- [257] Quy ND, Matzenmiller A. A solid-shell element with enhanced assumed strains for higher order shear deformations in laminates. *Technische Mechanik*. 2008;28:334-55.
- [258] Robbins DH, Reddy JN. Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993;36:655-77.
- [259] Werner W. Simulation and FE-modeling of global and local effects in thin-walled shell structures of composite materials. *NAFEMS Seminar on Simulating Composite Materials and Structures*, Bad Kissingen; 2007.
- [260] Pagano N. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*. 1970;4:20-34.
- [261] Reddy J. *Mechanics of Laminated Composite Plates*. CRC Press, Inc, 2000 Corporate Blvd, NW, Boca Raton, FL 33431, USA, 1996 800. 1996.
- [262] Belinha J, Dinis L. Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method. *Computers & Structures*. 2006;84:1547-59.

- [263] Xiao JR, Gilhooley DF, Batra RC, Gillespie Jr JW, McCarthy MA. Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory (HOSNDPT) and a meshless method. *Composites Part B: Engineering*. 2008;39:414-27.
- [264] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1984;51:745-52.
- [265] Ferreira A, Roque C, Martins P. Radial basis functions and higher-order shear deformation theories in the analysis of laminated composite beams and plates. *Composite structures*. 2004;66:287-93.
- [266] Pagano N, Hatfield HJ. Elastic behavior of multilayered bidirectional composites. *AIAA journal*. 1972;10.
- [267] Vel SS, Batra R. Analytical solution for rectangular thick laminated plates subjected to arbitrary boundary conditions. *AIAA journal*. 1999;37:1464-73.
- [268] Vel SS, Batra RC. The generalized plane strain deformations of thick anisotropic composite laminated plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2000;37:715-33.
- [269] Vel SS, Batra RC. Closure to “The generalized plane strain deformations of thick anisotropic composite laminated plates”. *International Journal of Solids and Structures*. 2001;38:483-9.
- [270] Khdeir A, Reddy J. Analytical solutions of refined plate theories of cross-ply composite laminates. *Journal of pressure vessel technology*. 1991;113:570-8.
- [271] Whitney JM. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates. *Journal of Composite Materials*. 1969;3:534-47.
- [272] Sakami S. Modélisation numérique des structures composites multicouches à l'aide d'une approche discrète au sens de Mindlin. Le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin): Thèse de doctorat, Université de Reims, France; 2008.
- [273] Bogdanovich AE, Pastore CM, Deepak BP. A comparison of various 3-D approaches for the analysis of laminated composite structures. *Composites Engineering*. 1995;5:1105-26.
- [274] Chaudhuri RA. An equilibrium method for prediction of transverse shear stresses in a thick laminated plate. *Computers & Structures*. 1986;23:139-46.
- [275] Pandya BN, Kant T. Flexural analysis of laminated composites using refined higher-order C° plate bending elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1988;66:173-98.
- [276] Whitney J, Pagano N. Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1970;37:1031-6.
- [277] Actis RL, Szabo BA, Schwab C. Hierarchic models for laminated plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999;172:79-107.
- [278] Kraus H. *Thin elastic shells*: John Wiley & Sons; 1967.
- [279] Lardeur P. Développement et évaluation de deux nouveaux éléments de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal: Thèse de Doctorat, UTC, France; 1990.
- [280] Nastran M, Manual MU. MSC Software Corporation. Santa Ana, CA. 2000.

- [281] Reddy JN. An introduction to nonlinear finite element analysis: Oxford University Press, USA; 2004.
- [282] Aouameur A. Analyse non-linéaire matérielle et géométrique des structures coques en béton armé sous chargements statiques et dynamiques: Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France; 1998.
- [283] Chrisfield M. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials. New York: John Wiley & Sons; 1991.
- [284] Bathe KJ. Finite element procedures: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ; 1996.
- [285] Sze K, Liu X, Lo S. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite elements in analysis and design*. 2004;40:1551-69.
- [286] Sze KY, Chan WK, Pian THH. An eight-node hybrid-stress solid-shell element for geometric non-linear analysis of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;55:853-78.
- [287] Gruttmann F, Stein E, Wriggers P. Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations. *Ingenieur-Archiv*. 1989;59:54-67.
- [288] Wagner W. Stability analysis of shells with the finite element method. *Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements, CISM Courses and Lectures (4th Edn)*, Springer-Verlag, Vienna. 1992.
- [289] Abed-Meraim F, Trinh VD, Combescure A. Assumed-strain solid-shell formulation for the six-node finite element SHB6: evaluation on non-linear benchmark problems. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*. 2012;21:52-71.
- [290] Abed-Meraim F. Contributions à la prédiction d'instabilités de type structure et matériau: modélisation de critères et formulation d'éléments finis adaptés à la simulation des structures minces: Thèse d'Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Metz; 2009.
- [291] Kuo-Mo H. Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element. *Computers & Structures*. 1987;25:665-75.
- [292] Meek JL, Tan HS. Instability analysis of thin plates and arbitrary shells using a faceted shell element with loof nodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1986;57:143-70.
- [293] Zhang YX, Cheung YK. A refined non-linear non-conforming triangular plate/shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003;56:2387-408.
- [294] Dvorkin EN, Bathe KJ. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations*. 1984;1:77-88.
- [295] Leicester R. Finite deformations of shallow shells (Shallow shell deformations based on nonlinear equations solved by Newton-Raphson iteration). *American Society of Civil Engineers, Engineering Mechanics Division, Journal*. 1968;94:1409-23.
- [296] Bui HC. Analyse statique du comportement des structures à parois minces par la méthode des éléments finis et des bandes finies de type plaque et coque surbaissée déformables en cisaillement: Thèse de Doctorat, Université de Liège; 2009.

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DES SOLIDES PAR ÉLÉMENTS FINIS VOLUMIQUES BASÉS SUR LE CONCEPT SFR (SPACE FIBER ROTATION)

RÉSUMÉ : L'objectif général de ce travail de thèse est de développer un nouveau concept pour enrichir les éléments finis volumiques de premier ordre. L'application principale des différents modèles proposés concerne la modélisation numérique des problèmes de mécanique des solides et des structures tridimensionnelles. Dans ce contexte, dans une première partie, une famille d'éléments finis volumiques, appelée SFR, avec six degrés de liberté (trois déplacements et trois rotations) par nœud est formulée. Cette famille est basée sur une technique de type SFR (Space Fiber Rotation). En exploitant la rotation d'une fibre matérielle élémentaire dans l'espace, ce nouveau modèle crée de la valeur en enrichissant la définition du champ des déplacements qui devient quadratique, tout en maintenant le nombre de nœuds des éléments linéaires. Deux éléments volumiques, l'un de type prismatique à six-nœuds (SFR6) et l'autre de type hexaédrique à huit-nœuds (SFR8) sont développés. Pour éviter le verrouillage de Poisson ou d'épaisseur de l'élément SFR8, une version non-conforme baptisée SFR8I est également présentée. Cette version non-conforme est basée sur la méthode de modes incompatibles. Une intégration réduite à 8 points pour les éléments SFR8 et SFR8I et 2 points pour l'élément SFR6, suffit pour obtenir une intégration cohérente de la matrice de rigidité élémentaire et diminuer à la fois les phénomènes de verrouillage et les coûts de calcul. Des modes parasites apparaissent, ils disparaissent après introduction des matrices de pénalité. Dans une seconde partie, deux approches différentes sont utilisées pour l'analyse des structures composites stratifiées épaisses. Les deux approches sont basées sur le modèle SFR. Dans la première version, on a utilisé un élément volumique SFR par couche orthotrope suivant l'épaisseur. Nous avons également proposés, dans la deuxième approche, un modèle SFR multicouche 3D destiné à l'analyse globale des stratifiés. Ces éléments multicouches SFR6M et SFR8M sont formulés en suivant une démarche tridimensionnelle qui consiste à intégrer l'empilement des plusieurs couches directement dans un seul élément dans l'épaisseur de l'élément volumique. Deux étapes sont utilisées pour calculer le tenseur complet des contraintes. La première étape consiste à utiliser la loi constitutive pour calculer les contraintes planes et la deuxième étape consiste à exploiter les équations d'équilibre pour évaluer les contraintes transversales. La troisième partie concerne l'extension du modèle SFR en non linéaire géométrique des structures 3D en grands déplacements et petites déformations. Nous établissons les équations gouvernantes du problème en utilisant le modèle SFR avec la formulation Lagrangienne totale associée à la méthode de résolution de Newton-Raphson. Tous ces modèles sont implantés dans le code de calcul par éléments finis REFLEX. Pour illustrer les capacités de ce concept, ses performances sont évaluées sur un ensemble de cas tests en configurations linéaire et non linéaire, communément utilisés dans la littérature pour tester les éléments finis de type solides. Les éléments SFR passent les patch-tests des solides 3D. Le concept SFR pourrait offrir une alternative intéressante aux éléments volumiques standards. Ainsi que pour démontrer l'efficacité des éléments SFR pour la modélisation des structures multicouches, des exemples qui comprennent des structures composites stratifiées sont évalués. Les résultats sont comparés à des solutions analytiques et à d'autres modèles d'éléments finis. Les éléments solides SFR multicouches peuvent être utilisés efficacement pour modéliser les structures composites stratifiées avec un temps de calcul relativement acceptable.

Mots-clés : Éléments finis 3D ; Fibre spatiale ; Modes parasites ; Non linéaire géométrique ; Composites ; Éléments volumiques multicouches



NUMERICAL MODELING OF SOLIDS BY 3D FINITE ELEMENTS BASED UPON THE SFR (SPACE FIBER ROTATION) CONCEPT

ABSTRACT: The main objective of this thesis is to develop a new concept to enrich the 3D low-order finite elements. The major application of proposed models is the numerical modeling of solid mechanics and three-dimensional structures problems. In this context, in a first part, a new family of solid finite elements, with three translational and three rotational degrees of freedom per node has been presented. This family, named SFR, is based upon SFR (Space Fiber Rotation) concept. Using the rotation of a material fiber in 3D space, the SFR approach allows to get a more accurate displacement field, which becomes quadratic without changing the number of nodes of the linear elements. Based upon the SFR concept, eight-node brick element SFR8 and six-node wedge element SFR6 are proposed. In addition to that, a non-conforming version of SFR8, named SFR8I, is developed to overcome the Poisson's ratio locking. The SFR8I formulation includes three incompatible modes in the natural space of the element that are then eliminated by a static condensation technique. A reduced integration technique is used to integrate the SFR solid finite elements in order to avoid locking effects and to achieve an attractive, low-cost formulation. All remaining zero energy modes, resulting from the reduced integration and the equal rotation modes in both elements are efficiently controlled using special stabilization techniques. In a second part, two different modeling approaches are used for analysis of thick composite structures. A common feature in both approaches is to use the SFR concept. The first approach is to use one solid element per layer. For the second approach, the multilayered solid elements which can represent different material layers with varying fiber angles. By defining several layers with different materials and ply orientation inside one layered solid, number of elements through the thickness is remarkably reduced. These elements use two steps to calculate the full stress tensor. In the first step the in-plane stresses are computed from the material law using a displacement approximation, and then the transverse stresses are calculated from the 3D equilibrium equation. In a third part, the application of SFR elements is extended to include geometric nonlinear problems. The formulation of the SFR elements for nonlinear problems in elasticity is presented. A total Lagrangian approach is adopted for the element formulation. The set of nonlinear equilibrium equations, obtained by appropriate energy minimization, is solved using the Newton-Raphson method. All these models are implemented in the finite element code REFLEX. To illustrate the capacities of these elements, its performances are evaluated on varied patch-tests in linear or non-linear configurations, which are used in the literature to test the finite elements of solid type. The new elements pass the patch tests for solid element and have the proper rank. Numerical results show that the SFR elements are noticeable in low sensitivity to mesh distortion and in high-accuracy of stresses. The SFR models prove to be an interesting alternative with regards to classical solid finite elements models. In order to verify the accuracy of the SFR elements for composite multilayer structures, a several problems of laminate composite are solved. The present solutions are compared with those obtained using three-dimensional elasticity theory and those available in literature. The analysis gives accurate values for displacements and stresses compared to other formulations developed by other researchers. The use of layered solid elements offers a possibility to model thick composite layups in detail with acceptable times as well as an acceptable model size.

Keywords: 3D Solid finite element; Space Fiber Rotation; Zero-energy modes; Geometric nonlinear; Composites; Multilayer solid elements



النمذجة العددية للأجسام الصلبة باستعمال العناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد المبنية على أساس نموذج SFR (دوران الألياف في الفضاء)

ملخص : الهدف العام لهذا العمل هو تطوير نموذج جديد للعناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد من الدرجة الأولى. التطبيق الرئيسي للنماذج المقترحة يخص مشاكل الميكانيكا الصلبة و الهياكل الثلاثية الأبعاد. يتم في هذا السياق، في الجزء الأول، إنشاء مجموعة من العناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد تدعى SFR لها 6 درجات من الحرية، ثلاثة انتقالية و ثلاثة دورانية لكل عقدة، و تستند هذه المجموعة على النموذج SFR (دوران الألياف في الفضاء). من خلال هذا النموذج تم صياغة عنصرين منتهيين : موشر مثلي ذو ستة عقد SFR6 ومتوازي المستطيلات ذو ثماني عقد SFR8. و أيضا تم صياغة العنصر الغير متوافق SFR8I لتفادي مشكل التوقف العددي الملاحظ في العنصر المتوافق SFR8. و قد تم التحقق من مدى فعاليتها من خلال عدة أمثلة عددية للأجسام الصلبة ذات المرونة الخطية. و في الجزء الثاني من هذه الأطروحة تم استخدام نهجين مختلفين لتحليل الهياكل المركبة من عدة مواد حيث في النسخة الأولى تم استخدام عنصر واحد في كل طبقة و في النسخة الثانية تم إدخال عدة طبقات في عنصر واحد ثلاثي الأبعاد. و تم تحليل رقمي ثلاثي الأبعاد بواسطة هذه العناصر المنتهية تحت تأثير الاجهادات الميكانيكية الموجودة مابين الطبقات للمواد المركبة أحادية الاتجاه و متعددة الاتجاهات. أما فيما يخص الجزء الثالث من هذه الأطروحة فقد تم تعميم هذه العناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد لاستعمالها في دراسة مشاكل المرونة الغير خطية الناتجة عن الانتقال الكبير للأجسام الصلبة أو الهياكل ثلاثية الأبعاد. لإثبات مدى نجاعة هذه العناصر في النمذجة العددية للأجسام و الهياكل، عدة أمثلة من الميكانيكا الاستمرارية تم دراستها. هذه العناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد قد أثبتت مدى قدرتها في حل عدة مشاكل في الهندسة الميكانيكية للأجسام الصلبة القابلة للتشوه. حيث أن النموذج SFR اثبت انه بديل ناجع للعناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد العادية بالنظر إلى النتائج المتحصل عليها و أيضا سهولة إدماجه في كافة العناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد. بالإضافة إلى ذلك، استعمال التكامل العددي الغير كامل سمح لهذه العناصر بتفادي بعض المشاكل العددية و تقليص وقت الحساب بالنظر إلى تقليص عدد نقاط التكامل العددي.

الكلمات الدلالية : العناصر المنتهية ثلاثية الأبعاد، دوران الألياف في الفضاء، التوقف العددي، الهياكل المركبة من عدة طبقات، المرونة الغير الخطية.

