

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER-BISKRA
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques



Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES EN MATHÉMATIQUES

Option : Statistique

Présentée par

Abdelli Jihane

Titre :

**Sur la théorie des valeurs extrêmes,
mesures des risques et applications**

Sous la direction de Dr. **Yahia Djabrane**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BENATIA	Fatah	M.C.(A)	U de Biskra	Président
Dr. ZAGHDOUDI	Halim	M.C.(A)	U de Annaba	Examineur
Dr. BENCHAAABANE	Abbes	M.C.(A)	U de Guelma	Examineur

29 Avril 2018

Remerciements

C'est une grande chance d'avoir travaillé avec Le Docteur Yahia Djabrane. Pour ses encouragements et son aide; dont il m'accueillit dans son groupe de recherche, c'est un honneur pour moi, et une très grande joie d'exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur.

Je suis très reconnaissante aux membres du Jury, le docteur Fatah Benatia, le dr. Zaghdoudi Halim, Dr. Benchaabane Abbes sans la connaissance et l'assistance de cette étude n'aurait pas eu de succès.

Mes vifs remerciements vont également au Professeur Necir Abdelhakim et à mon époux le Professeur Brahim Brahimi, pour son encouragement.

Dédicaces

À mes parents et toute ma famille

À mon époux

À mes enfants Mouad et Line

Table des matières

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Liste de Figures	iv
Liste des Tableaux	v
Introduction	vi
1 Les valeurs extrêmes	1
1.1 Statistique d'ordre	2
1.1.1 Lois des statistiques d'ordre	3
1.1.2 Loi des valeurs extrêmes	5
1.1.3 Domaines d'attraction	6
1.1.4 Loi des excès, approche POT	13
1.2 Estimation de l'indice des queues	15
1.2.1 Estimateur du maximum de vraisemblance	15
1.2.2 Estimateur de Hill	16
1.2.3 Estimateur de Pickands	19

1.2.4	Estimateur des moments	20
1.3	Estimation de quantile extrême	20
1.3.1	L'approche par la loi des valeurs extrêmes	23
1.3.2	L'approche par la loi des excès	24
1.3.3	L'approche semi-paramétrique	26
1.4	Les lois alpha-stables	27
1.4.1	Définition des lois stables	27
1.4.2	Propriétés des lois stables	29
1.4.3	Quelques exemples des lois α -stables	30
2	Mesure de risque	32
2.1	Mesure de risque	33
2.1.1	Région de risque	33
2.1.2	Mesure de risque cohérente	33
2.1.3	Propriété d'invariance et de convexité	35
2.1.4	Mesure de risque comonotone additive	36
2.2	Quelques mesures de risque	36
2.2.1	La variance	36
2.2.2	Valeur en Risque	37
2.2.3	Tail Value-at-Risk	40
2.2.4	Conditional Tail Expectation	41
2.2.5	Expected shortfall	43
2.3	Mesure de distorsion	43
2.3.1	Mesures de risque de Wang	44
2.3.2	Mesures de risque de distorsion	47

3	Estimating the distortion parameter under Lévy-stable regime	49
3.1	Introduction and motivation	49
3.2	Estimating the PH premium	53
3.2.1	Some regularity assumptions	53
3.2.2	Estimating the proportional-hazards premium	56
3.3	Estimating the distortion index	58
3.4	Simulation and study application	63
3.4.1	Performance of the estimator	63
3.4.2	Financial application of risk aversion parameter	65
3.5	Concluding notes	68
	Annexe	72
	A Preuves et Code R	72
A.1	Preuves	72
A.2	Code R	78
	Bibliographies	83

Table des figures

1.1	Les trois types des distribution des valeurs extrêmes : Weibull, Gumbel et Fréchet.	7
1.2	Les lois alpha-stables	31
2.1	Calcul de la Var à partir des valeurs extrêmes.	37
2.2	Value-at-Risk de la somme de deux v.a. de Pareto	39
2.3	Perte moyenne au-delà d'un certain seuil dépendant de α	42
3.1	Confidence bounds for ρ based on 100 samples of size n ranging from 1000 to 100000 from the α -stable population with $\alpha = 1.7$. The horizontal line represents the true value $\rho = 1.87316$	69

Liste des tableaux

3.1	Point estimation of the distortion parameter ρ based on 1000 samples, each of size 5000, from the α -stable population.	65
3.2	Accuracy of 95% confidence intervals for ρ based on 1000 samples from the α -stable population with $\alpha = 1.7$ and $\rho = 1.87316$	65
3.3	Maximum likelihood fit of four-parameters stable distribution to 800 observations of four European stock indices returns data during the period 1991 to July 1994.	66
3.4	Hill's estimators of tails index and optimal sample fraction to 800 observations of four European stock indices returns data during the period 1991 to July 1994.	67
3.5	Risk aversion parameter to 800 observations of four European stock indices returns data during the period 1991 to July 1994.	67

Introduction

Dans de nombreux concepts théoriques, concernant les propriétés asymptotiques d'un échantillon, celle des valeurs extrêmes, que l'on appelle aussi les queues de distributions. La mesure des risques, la théorie du portefeuille classique et les modèles d'évaluation des options, Value-at- Risk (VaR) ... reposent sur l'hypothèse que les rendements des actifs suivent une distribution normale. Bien que, il ait été connu que les rendements des actifs ne sont pas normalement distribués et les observations empiriques telles que les changements de prix dans les différents marchés ont une distribution à queue lourde.

Une classe importante des distributions de probabilité dans la théorie et la pratique a été caractérisée par [Lévy \(1925\)](#) dans son étude des sommes de termes indépendants identiquement distribués dans l'année 1920, l'étude de plusieurs exemples montre que les distributions stables ont été utilisés avec succès pour les rendements des actions, les rendements des obligations excédentaires, les taux de change, le rendement des prix des matières premières et des rendements de l'immobilier ([McCulloch, 1996](#); [Rachev et Mitnik, 2000](#)). Ces études estiment directement la distribution de la queue à partir des observations empiriques de la queue et trouvent que l'indice de queue est nettement supérieur à 2. Voilà ce qui rend l'étude en dehors du contexte d'une distribution stable, cependant, [Borak et](#)

al. (2005) montre que les estimations de l'indice de distribution stable uniquement à partir des observations de la queue peuvent être trompeuses et ont discuté les techniques d'estimations et applications dans les données financières.

Après avoir résolu le problème de la lourdeur et la symétrie, il reste pour les institutions financières une autre tâche importante est d'évaluer l'exposition aux risques de marché, qui résultent de variations dans les prix des actions, matières premières, taux de change et des taux d'intérêt Plusieurs mesures de risque ont été proposées dans la science actuarielle, à savoir : le VaR c'est la méthode financière la plus utilisée pour établir à l'industrie une technique de mesure de risque normal qui donne un seuil de tolérance de la perte ou espérance conditionnelle la queue (CTE) et les mesures de risque de distorsion. Toutes ces mesures ont des propriétés spécifiques souhaitables proposées comme des axiomes dans le cadre de la tarification des risques par Wang *et al.* (1997) et plus généralement dans la mesure du risque proposé par Artzner *et al.* (1999).

Une valeur spécifique d'une prime donnée détermine une valeur du paramètre de distorsion, qui dépend de la distribution de perte sous-jacente. L'estimation du paramètre devient donc un problème d'inférence statistique, qui a été initié par Jones et Zitikis (2007) dans le cas de la prime de distorsion et abordé dans le cadre du théorème central limite. Les pertes à queue lourde ne tombent pas dans ce cadre car elles reposent sur la théorie de la valeur extrême.

Brahimi *et al.* (2011) concentrent sur une prime de distorsion spéciale mais importante, appelée la prime de risque proportionnel (PH), ils proposent un estimateur pour son paramètre de distorsion dans le cas de pertes à queue lourde. Ils dérivent une distribution asymptotique de l'estimateur, construisent un intervalle de confiance pratiquement réalisable pour le paramètre de distorsion et illustrent

la performance de l'intervalle dans une étude de simulation.

Dans cette thèse, nous étendons le travail de [Brahimi *et al.* \(2011\)](#) pour le cas des pertes réelles à queue lourdes. On dérive la normalité asymptotique de cet estimateur. On construit l'intervalle de confiance pratiquement mis en œuvre pour le paramètre de distorsion et d'illustrer les performances de l'intervalle dans une étude de simulation avec application à des données réelles.

Cette thèse est répartie en trois chapitres.

Au premier chapitre on présente une introduction sur les statistiques d'ordre, les valeurs extrêmes et les queues de distributions. Nous énonçons les principaux résultats concernant les distributions limites des plus grandes observations d'un échantillon ainsi que les domaines d'attractions.

Nous avons consacré le deuxième chapitre à l'exposé de la théorie de mesure de risque telles que, la variance, Value at Risk (VaR), Tail Value-at-Risk (TVaR) cette dernière est connue par Conditional Tail Expectation (CTE) lorsque les risques sont continus, l'expected shortfall (ES) et les mesures basées sur la distorsion. Le but de ce chapitre est de présenter au lecteur les différentes mesures de risque qui existe.

Aux derniers chapitres on propose un estimateur pour le paramètre de distorsion dans le cas de pertes réelles à queue lourde. Ce sujet a été traité dans l'article de [Brahimi *et al.* \(2011\)](#) dans le cas des pertes positives. Dans ce chapitre, nous étendons ce travail pour le cas des pertes réelles.

Chapitre 1

Les valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) concerne les questions probabilistes et statistiques à des valeurs très élevées ou très faibles dans des suites de variables aléatoires et dans les processus stochastiques. La TVE a permis de modéliser la queue de distribution des pertes d'un portefeuille d'investissement. Elle a été appliquée en finance pour le calcul de mesures de risque comme la Value at Risk, en hydrologie et dans le cadre de sinistres de type catastrophe naturelle.

Ce sujet a une riche théorie mathématique et aussi une longue tradition d'application dans une variété de domaines. Parmi les nombreux excellents ouvrages sur ce sujet, le livre de [Embrechts *et al.* \(1997\)](#) qui donne un aperçu complet de la théorie mathématique avec une orientation vers des applications en assurance et en finance, et le livre de [Coles \(2001\)](#) qui concentre sur l'analyse de données et l'inférence statistique pour les valeurs extrêmes.

L'objectif essentiel de ce chapitre est de présenter les définitions et les résultats principaux sur la théorie des valeurs extrêmes dans le cas unidimensionnel. On commence dans un premier temps par donner la notion et les propriétés des sta-

tistiques d'ordre dont lesquelles repose l'utilisation des lois des valeurs extrêmes.

1.1 Statistique d'ordre

Considérons n variables aléatoires réelles X_1, X_2, \dots, X_n , indépendantes et identiquement distribuées (iid) définies sur l'espace (Ω, \mathfrak{B}) , d'une densité commune f et d'une fonction de répartition F .

Définition 1.1.1 Rangeons les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n par ordre croissant de grandeur, on introduit la notation $X_{i,n}$ avec

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}. \quad (1.1)$$

$X_{i,n}$ est la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre (ou statistique d'ordre i).

Remarque 1.1.1 L'échantillon ordonné $(X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n})$ n'est pas iid. Pour $i \neq j$, $X_{i,n}$ et $X_{j,n}$ sont dépendants l'une de l'autre; en particulier si $i < j$ alors $X_{i,n} < X_{j,n}$.

Deux statistiques d'ordre sont intéressantes pour l'étude des événements extrêmes, ce sont :

$$X_{1,n} := \min(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

qui est la plus petite statistique d'ordre ou statistique du minimum, et

$$X_{n,n} := \max(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

qui est la plus grande statistique d'ordre ou statistique du maximum.

On s'intéresse au comportement de ces deux statistiques, donc on concentre aux distributions $F_{1,n}(x) = P(X_{1,n} < x)$ et $F_{n,n}(x) = P(X_{n,n} < x)$.

1.1.1 Lois des statistiques d'ordre

Lemme 1.1.1 *Arnold Barry et al. (1992)* La densité conjointe de statistique d'ordre $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ est donné par

$$f_{(X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i),$$

avec $x_1 \leq x_2, \dots, \leq x_n$.

Lemme 1.1.2 *Arnold Barry et al. (1992)* (Densité conjointe de deux statistiques d'ordre) La densité conjointe de $(X_{r,n} \leq X_{s,n})$ avec $r \leq s$ est donnée par

$$f_{(X_{r,n} \leq X_{s,n})}(x, y) = n! \frac{[F(x)]^{r-1} f(x) [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) [1 - F(y)]^{n-s}}{(r-1)! (s-r-1)! (n-s)},$$

avec $-\infty < x < y < +\infty$.

La fonction de répartition $F_{(X_{r,n} \leq X_{s,n})}$ est

$$F_{(X_{r,n} \leq X_{s,n})}(x, y) = F_{X_{s,n}}(y),$$

pour $x \geq y$, et

$$F_{(X_{r,n} \leq X_{s,n})}(x, y) = \sum_{j=s}^n \sum_{i=r}^j n! \frac{[F(x)]^{i-1} f(x) [F(y) - F(x)]^{j-i-1} f(y) [1 - F(y)]^{n-j}}{(i-1)! (j-i-1)! (n-j)},$$

pour $x < y$.

Notons par $F_{i,n}(x)$ la distribution de $X_{i,n}$. [David \(1970\)](#) et [Balakrishnan et Cohen \(1991\)](#) ont démontré que l'expression de $F_{i,n}(x)$ est

$$F_{i,n}(x) = P(X_{i,n} < x) = \sum_{r=i}^n C_n^r [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r}.$$

La fonction de densité est

$$f_{i,n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x).$$

En particulier, On peut conclure pour la statistique du maximum que la distribution et la densité sont :

$$F_{n,n}(x) = [F(x)]^n \tag{1.2}$$

et

$$f_{n,n}(x) = n [F(x)]^{n-1} f(x).$$

De même pour la statistique du minimum, on a

$$F_{1,n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \tag{1.3}$$

et

$$f_{1,n}(x) = n [1 - F(x)]^{n-1} f(x).$$

Dans la suite de ce travail, on ne présente que les résultats concernant le maximum, puisque les résultats relatifs au minimum se déduisent de l'égalité suivante

$$\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n).$$

1.1.2 Loi des valeurs extrêmes

La formule (1.2) montre que la loi de maximum est relié d'une manière principale avec $F(x)$, mais cette dernière n'est pas toujours connue, même si elle est connue, la loi du maximum n'est pas facile à calculer. Donc on s'intéresse à étudier les comportements asymptotiques du maximum en faisant tendre n vers l'infini. Un théorème a été proposé par Gnedenko (1943) connu sous le nom de théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko ou théorème de la valeur extrême qui donne la forme des lois limites pour le maximum normalisé. Les précédentes versions aient été énoncées par Fréchet (1927) et par Fisher et Tippett (1928). Jenkinson (1955) a donner l'expression générale. Pour plus de détails sur cet sujet, on peut se référer à Galambos (1978).

Définition 1.1.2 *On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y des lois respectives F et H sont de même type, s'il existe des constantes réelles $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} aX + b$ i.e. $F(ax + b) = H(x)$.*

Fisher et Tippett (1928) ont démontré l'existence des suites de normalisation $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une loi non-dégénérée H telle que :

$$\Pr \left\{ \frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \leq x \right\} = (F(a_n x + b_n))^n \rightarrow H(x).$$

Le théorème suivant donne une caractérisation de la distribution limite du maximum $X_{n,n}$.

Théorème 1.1.1 (Fisher-Tippett-Gnedenko) *S'il existe deux suites de constantes de normalisation $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une loi non-dégénérée de loi H telle que $\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} H$, alors H appartient à une des trois distributions standard des valeurs extrêmes suivantes :*

1. **Fréchet** : $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0,$
2. **Weibull** : $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha < 0,$
3. **Gumbel** : $\Lambda_0(x) = \{\exp(-\exp(-x))\}, x \in \mathbb{R}.$

Ce théorème montre que la loi limite des extrêmes a toujours la même forme. Les trois formules précédentes peuvent être combinées en une seule paramétrisation :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(- (1 + \xi x)^{-1/\xi}\right), & \xi \neq 0, \quad 1 + \xi x > 0, \\ \exp(-\exp(-x)), & \xi = 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \end{cases} \quad (1.4)$$

où H est une fonction de répartition non-dégénérée et ξ est un paramètre qui contrôle la lourdeur de la queue de loi appelé indice des valeurs extrêmes (ou indice de queue).

Cette loi est appelée loi de valeurs extrêmes généralisée (Generalized Extreme Value) que l'on note GEV. la forme la plus générale de la GEV est

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right), \quad \xi \neq 0, \quad 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0. \quad (1.5)$$

μ et σ sont respectivement les paramètres de localisation et de dispersion.

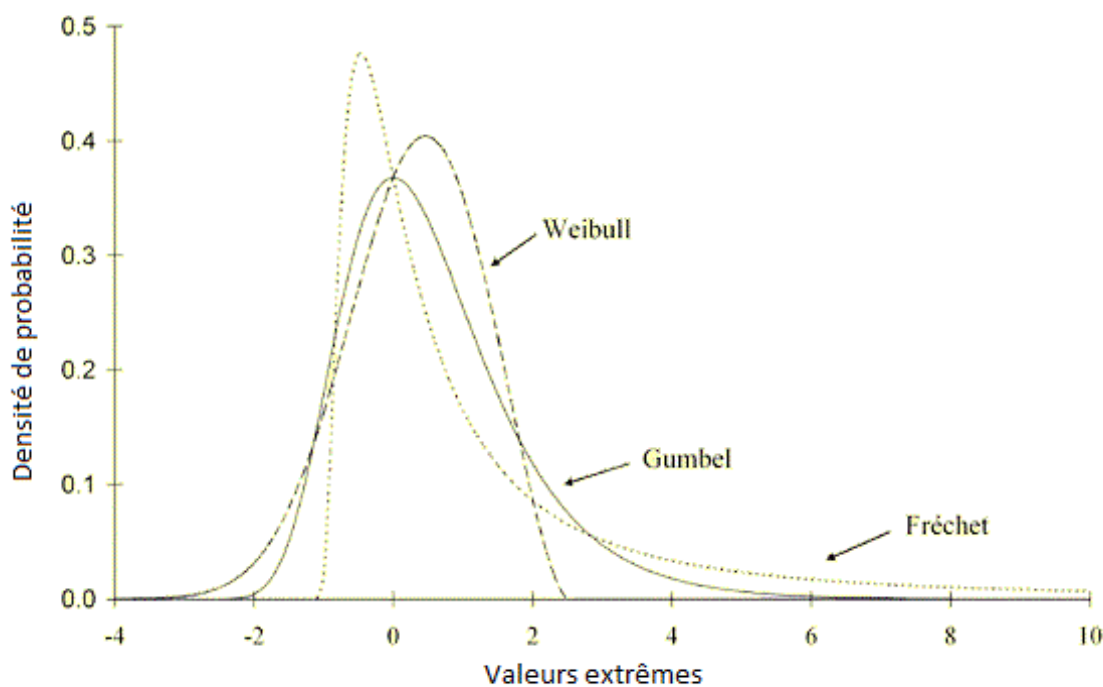


FIG. 1.1 – Les trois types des distribution des valeurs extrêmes : Weibull, Gumbel et Fréchet.

1.1.3 Domaines d'attraction

Selon le signe de ξ , on définit trois domaines d'attraction :

Lorsque $\xi = 0$, la loi des valeurs extrêmes présente une décroissance de type exponentiel dans la queue de la loi, on dit alors que la loi appartient au domaine d'attraction de Gumbel. C'est le cas des lois normale, exponentielle, etc ...

Le cas $\xi > 0$ correspond à la loi de Fréchet de paramètre $\alpha = 1/\xi$ dont la fonction de survie décroît comme une fonction puissance, et dans ce cas on dit que la loi appartient au domaine d'attraction de Fréchet. C'est le cas par exemple de la loi de Cauchy ou Pareto.

Le cas $\xi < 0$ correspondant à la loi de Weibull de paramètre $\alpha = -1/\xi$, et donc la loi appartient au domaine d'attraction de Weibull. C'est le cas par exemple de la loi uniforme ou béta.

On peut trouver un classement de différents lois par domaine d'attraction dans [Embrechts *et al.* \(1997\)](#).

Dans la suite, on va présenter quelques théorèmes de caractérisation des trois domaines d'attraction. Pour cela, on va faire un appel à quelques notions principaux.

Point terminal

Le point terminal d'une fonction F est

$$x_F = \sup \{x, F(x) \leq 1\}.$$

Inverse généralisé

L'inverse généralisée d'une fonction F est l'application définie par

$$F^{\leftarrow}(y) = \inf \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq y\}.$$

Fonction à variations régulières

Une fonction U positive est à variations régulières d'indice $\delta \in \mathbb{R}$ à l'infini, et on note $U(\cdot) \in \mathcal{RV}_\delta$, si pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(\lambda x)}{U(x)} = \lambda^\delta.$$

Dans le cas $\delta = 0$, on dit que la fonction $U(\cdot)$ est à variations lentes, et on note $U \in \mathcal{RV}_0$.

Toute fonction à variations régulières d'indice $\delta \in \mathbb{R}$, peut s'écrire,

$$U(x) = x^\delta L(x), \quad L(x) \in \mathcal{RV}_0.$$

Lemme 1.1.3 *Resnick (1987)* Soit U est une fonction à variations régulières d'indice δ , alors pour tout $0 < a < b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in [a, b]} \left| \frac{U(\lambda x)}{U(x)} - \lambda^\delta \right| = 0.$$

Lemme 1.1.4 *Resnick (1987)*

- Si U est à variations régulières d'indice $\delta > 0$, alors $U^\leftarrow(x)$ est à variations régulières d'indice $1/\delta$.
- Si U est à variations régulières d'indice $\delta < 0$, alors $U^\leftarrow(1/x)$ est à variations régulières d'indice $-1/\delta$.

Théorème 1.1.2 (Représentation de Karamata) Toutes fonction à variations lentes $L(\cdot)$ s'écrivent sous la forme :

$$L(x) = c(x) \exp \left\{ \int_1^x \frac{\Delta(u)}{u} du \right\},$$

où $c(x) \rightarrow c > 0$ et $\Delta(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Cette représentation des fonctions à variations lentes est connue sous le nom de représentation de Karamata *Bingham et al. (1987)*. Si la fonction $c(\cdot)$ est constante, la fonction $L(\cdot)$ est dite normalisée.

Caractérisation des domaines d'attraction

Domaine d'attraction de Fréchet [Gnedenko \(1943\)](#) a énoncé un résultat assure que toute fonction appartenant au domaine d'attraction de Fréchet est une fonction à variations régulières. La démonstration se trouve dans le livre de [Resnick \(1987\)](#).

Théorème 1.1.3 *Une fonction de répartition $F(\cdot)$ appartient au domaine d'attraction de Fréchet si et seulement si elle s'écrit sous la forme :*

$$F(x) = 1 - x^{-1/\xi} L(x), \quad (1.6)$$

telle que $L(\cdot)$ est une fonction à variations lentes.

Dans ce cas les suites de normalisation $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont données pour tout $n > 0$ par $a_n = \overline{F}^{\leftarrow}(1/n)$ et $b_n = 0$. On rappelle que \overline{F} est la fonction de survie définie par $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

[Bingham et al. \(1987\)](#) ont montré que l'équation (1.6) est équivalente à :

$$Q(\alpha) = \alpha^{-\xi} \ell(\alpha^{-1}),$$

où $\ell(\cdot) \in \mathcal{RV}_0$, $\alpha \in [0, 1]$ et $Q(\alpha)$ est la fonction quantile définie par

$$Q(\alpha) = \inf \{x, F(x) \geq \alpha\}.$$

Domaine d'attraction de Weibull

[Gnedenko \(1943\)](#) et [Resnick \(1987\)](#) ont démontré que par un simple changement de variable dans la fonction de répartition, qu'on peut passer du domaine d'attraction

de Fréchet à celui de Weibull.

Théorème 1.1.4 *Une fonction de répartition $F(\cdot)$ appartient au domaine d'attraction de Weibull si et seulement si son point terminal x_F est fini et si la fonction de répartition $F_*(\cdot)$ définie par*

$$F_*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x_F - 1/x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec un indice des valeurs extrêmes $-\xi > 0$.

Ainsi, une fonction de répartition $F(\cdot)$ du domaine d'attraction de Weibull s'écrit

$$F(x) = 1 - (x_F - x)^{-1/\xi} L((x_F - x)^{-1}), \quad L(\cdot) \in \mathcal{RV}_0 \text{ pour } x \leq x_F.$$

De manière équivalente, le quantile $Q(\alpha)$ associé s'écrit :

$$Q(\alpha) = x_F - \alpha^{-\xi} \ell(1/\alpha), \quad \ell(\cdot) \in \mathcal{RV}_0. \quad (1.7)$$

Les suites de normalisation (a_n) et (b_n) sont données par $a_n = b_n - \overline{F}^{\leftarrow}(1/n)$ et $b_n = x_F$.

Ce domaine d'attraction a été considéré par [Falk \(1995\)](#), [Gardes \(2010\)](#) pour donner un estimateur de point terminal d'une distribution.

Domaine d'attraction de Gumbel

Le domaine d'attraction de Gumbel contient les lois où la fonction de survie est à décroissance exponentielle, i.e. les lois à queues légères. Le théorème suivant qui

a été démontré dans [Resnick \(1987\)](#) donne une caractérisation de ce domaine.

Théorème 1.1.5 *Une fonction de répartition $F(\cdot)$ appartient au domaine d'attraction de Gumbel si et seulement si il existe $t < x_F \leq \infty$ tel que*

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_t^x \frac{1}{a(u)} du, \quad t < x \leq x_F \right\},$$

où $c(x) \rightarrow c > 0$ lorsque $x \rightarrow x_F$ et $a(\cdot)$ est une fonction positive et dérivable de dérivée $\acute{a}(\cdot)$ telle que $\acute{a}(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow x_F$.

Dans ce cas, un choix possible pour les suites (a_n) et (b_n) pour tout $n > 0$ est :

$$a_n = q(1/n) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\bar{F}(a_n)} \int_{a_n}^{x_F} \bar{F}(s) ds.$$

Dans la section si dessous, et sous certains hypothèses sur la loi $F(x)$, on va donner quelques exemples expliquant le comportement des lois limites de la GEV.

Exemple 1.1.1 *La fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ est $F(x) = 1 - \exp(-x)$ pour $x \geq 0$. On pose $a_n = 1$ et $b_n = \log(n)$, alors*

$$\begin{aligned} F^n(a_n x + b_n) &= (1 - \exp(-x - \log n))^n \\ &= \left(1 - \frac{\exp(-x)}{n} \right)^n \rightarrow \exp(-\exp(-x)) = \Lambda(x). \end{aligned}$$

D'où le maximum normalisé de la loi exponentielle converge vers la loi de Gumbel, et $F(x)$ appartient au domaine d'attraction de Gumbel.

Exemple 1.1.2 *La fonction de répartition de la loi de Pareto est $F(x) = 1 - cx^{-\alpha}$, avec $c > 0$ et $\alpha > 0$. En posant $a_n = (nc)^{1/\alpha}$ et $b_n = 0$, alors pour $x > 0$,*

on obtient :

$$\begin{aligned} F^n(a_n x + b_n) &= (1 - c(a_n x)^{-\alpha})^n = (1 - ca_n^{-\alpha} x^{-\alpha})^n \\ &= \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n}\right)^n \rightarrow \exp(-x^{-\alpha}) = \Phi_\alpha(x). \end{aligned}$$

Donc le maximum normalisé de la loi de Pareto converge vers la loi de Fréchet.

L'approche par la GEV consiste à utiliser un seul maximum, cela peut conduire à une perte d'information contenue dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. [Pickands \(1975\)](#) a été introduit la méthode POT (Peaks-over-Threshold) ou méthode des excès au-delà d'un seuil élevé qui consiste à observer toutes les valeurs des réalisations qui excèdent un certain seuil élevé.

1.1.4 Loi des excès, approche POT

L'idée de base de cette approche consiste à choisir un seuil suffisamment élevé et à étudier les excès au-delà de ce seuil. Cette méthode est initialement introduite par [Pickands \(1975\)](#) et étudiée par des auteurs tels que de [Smith \(1987\)](#) et [Reiss et Thomas \(2001\)](#).

Soit u un réel suffisamment élevé appelé seuil. On définit les excès au-delà du seuil u comme l'ensemble des variables aléatoires conditionnelles $\{Y_j\} = \{X_j - u | X_j > u\}$. La loi conditionnelle des excès F_u par rapport au seuil u est

$$F_u(y) = \Pr(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad y \geq 0, \quad (1.8)$$

ou de manière équivalente

$$\bar{F}_u(y) = \Pr(X - u > y | X > u) = 1 - F_u(y) = \frac{\bar{F}(u + y)}{\bar{F}(u)}, \quad y \geq 0. \quad (1.9)$$

Théorème de Pickands

Le théorème de Pickands-Balkema-de Haan ci-après, montre qu'on peut approchée la distribution des excès au delà d'un seuil u , sous certaines conditions de convergence, par une loi de Pareto généralisée que l'on note GPD, (Distribution de Pareto Generalisée).

Théorème 1.1.6 *Une fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction maximale de H_ξ , si et seulement si, il existe une fonction positive $\beta(u)$ telle que*

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq y \leq x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0,$$

où $F_u(y)$ est la fonction de répartition conditionnelle des excès au delà d'un seuil u , x_F est le point terminal de F et $G_{\xi, \beta(u)}(y)$ est la GPD donnée par

$$G_{\xi, \beta(u)}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta(u)}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta(u)}\right), & \xi = 0, \end{cases}$$

où $y \geq 0$ pour $\xi \geq 0$ et $y \leq 0 \leq -\frac{\beta(u)}{\xi}$ pour $\xi < 0$.

On conclut de ce théorème, que si F vérifie le théorème de Fisher et Tippet, alors il existe une fonction $\beta(\cdot)$ positive et un réel ξ tel que la loi des excès F_u peut être uniformément approchée par une distribution de Pareto généralisée (GPD) notée $G_{\xi, \beta(u)}$. Ainsi, l'indice des valeurs extrêmes donnée par le théorème de Fisher et

Tippet est le même que celui de la loi des excès.

Revenant aux mêmes exemples précédents, pour savoir comment se comportent les lois limites de la GPD en pratique.

Exemple 1.1.3 Pour la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$, la fonction de répartition est $F(x) = 1 - \exp(-x)$, $x \geq 0$. On prend $\beta_u = 1$, alors

$$\begin{aligned} F_u(y) &= \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad y \geq 0 \\ &= \frac{\exp(-u) - \exp(-u-y)}{\exp(-u)} \\ &= 1 - \exp(-y). \end{aligned}$$

Donc la loi limite est la loi GPD de paramètre $\xi = 0$.

Exemple 1.1.4 Pour le cas de la loi de Pareto, la fonction de répartition est $F(x) = 1 - cx^{-\alpha}$, avec $c > 0$ et $\alpha > 0$. On prend $\beta_u = ub$, avec $b > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} F_u(y) &= \frac{F(u+uby) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad y \geq 0 \\ &= \frac{cu^{-\alpha} - c(u+uby)^{-\alpha}}{cu^{-\alpha}} \\ &= 1 - (1+by)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

d'où, pour $\xi = 1/\alpha$ et $b = \xi$ la loi limites est la loi GPD de paramètre ξ .

1.2 Estimation de l'indice des queues

L'estimation de l'indice des queues, joue un rôle important pour déterminer une loi extrême. Pour cela on a deux approches : paramétrique et semi-paramétrique.

Dans le cas paramétrique, les méthodes d'estimation les plus utilisées sont la méthode du maximum de vraisemblance (MV) et la méthode des moments (MM). Pour l'approche semi-paramétrique on trouve plusieurs techniques, on cite les plus célèbre : l'estimateur de [Hill \(1975\)](#) et l'estimateur de [Pickands \(1975\)](#).

1.2.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance est construit à partir des observations des maxima, il s'agit d'estimer l'indice des valeurs extrêmes ainsi que les deux suites normalisantes a_n et b_n .

Soit un échantillon de k maxima Z_1, \dots, Z_k i.i.d. suivant une loi GEV. Pour $\xi \neq 0$, la fonction de log-vraisemblance est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Z, \xi, b_n, a_n) &= -k \log a_n - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^k \log \left(1 + \xi \frac{Z_i - b_n}{a_n}\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \left(1 + \xi \frac{Z_i - b_n}{a_n}\right)^{-1/\xi}. \end{aligned}$$

Pour le cas $\xi = 0$ on obtient :

$$\mathcal{L}(Z, 0, b_n, a_n) = -k \log a_n - \sum_{i=1}^k \exp\left(\frac{Z_i - b_n}{a_n}\right) - \sum_{i=1}^k \left(\frac{Z_i - b_n}{a_n}\right).$$

[Smith \(1985\)](#) a démontré les propriétés de consistance et la normalité asymptotique de cet estimateur lorsque $\xi > 1/2$ et $m \rightarrow \infty$:

$$\sqrt{m} \left((\hat{a}_n, \hat{\xi}, \hat{b}_n) - (a_n, \xi, b_n) \right) \rightarrow \mathcal{N}(0, I^{-1}),$$

où I est la matrice d'information de Fisher estimée par sa version empirique

$$I(\Theta) = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}(Z; \Theta)}{\partial \Theta^2} \right).$$

$\mathcal{L}(Z; \Theta)$ est la fonction de log-vraisemblance associée à la loi de la variable aléatoire Z , paramétrée par un ensemble de paramètres Θ .

1.2.2 Estimateur de Hill

Hill (1975) a proposé un estimateur pour l'index de queue en se basant sur les plus grandes statistiques d'ordre. Cet estimateur était construit en supposant que la distribution appartient au domaine d'attraction de G_ξ avec $\xi > 0$. D'où, l'estimateur de Hill est seulement applicable au cas où l'index de la valeur extrême est positif, i.e., les objets exposés de la fonction de distribution au-dessous a une queue lourde. Les propriétés asymptotiques faibles ont été établies par Mason (1982) et Haeusler et Teugels (1985).

Soient $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées à l'échantillon X_1, \dots, X_n . On note par $X_{n-k,n}$ avec $1 \leq k < n$, la k -ième plus grande valeur de l'échantillon.

Cet estimateur était construit en utilisant l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance appliquée à la queue de la distribution F . En supposant $\xi > 0$, la distribution F , doit vérifier la condition suivante :

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(u)} = \left(\frac{x}{u} \right)^{-1/\xi} \quad x \geq u, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Alors, il paraît raisonnable d'utiliser seulement les statistiques d'ordre qui dépassent le seuil u . On a affaire alors aux statistiques d'ordre $X_{n-k_n+1,n}, \dots, X_{n,n}$.

La fonction de log-vraisemblance sera alors

$$\begin{aligned} & L(\xi; X_{n-k_n+1,n}, \dots, X_{n,n}) \\ &= -k_n \log(\xi u) + \log(1 - F(u)) - \frac{\xi + 1}{\xi} \sum_{i=1}^{k_n} (\log X_{n-i+1,n} - \log u). \end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation et en remplaçant le seuil u par la statistique d'ordre $X_{n-k_n,n}$, on aboutit à l'estimateur de Hill.

Notons que cet estimateur peut être aussi réécrit en terme des espacements des logarithmes des observations comme suite :

$$\widehat{\xi}_{n,k_n}^H = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} i (\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-i,n}).$$

Dans l'article de [Hill \(1975\)](#), la normalité asymptotique n'a pas été établit pour son estimateur.

La convergence forte et la loi du logarithme itéré ont été abordées par [Deheuvels \(1988\)](#). L'inconvénient de l'estimateur de Hill, à part sa restriction au cas où l'indice est positif, c'est la difficulté sur le choix de nombre des plus grandes observations.

[Mason \(1982\)](#) a prouvé la consistance faible de l'estimateur de Hill pour toute suite vérifiant :

$$k_n \text{ telque } k_n \rightarrow \infty \text{ et } k_n/n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

La consistance forte a été prouvée dans [Deheuvels \(1988\)](#) sous les conditions que

$$k_n / \log \log n \rightarrow \infty \text{ et } k_n / n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

La normalité asymptotique peut être établie sous certaines conditions supplémentaires, voir [Haeusler et Teugels \(1985\)](#). Cependant, nous affirmerons le résultat de la normalité asymptotique qui est obtenu comme un cas spécial de la preuve, dans [Dekkers *et al.* \(1989\)](#), de la normalité asymptotique de leur estimateur du moment.

Théorème 1.2.1 *Soit F une fonction de distribution qui appartient au domaine d'attraction de la distribution des valeurs extrêmes G_ξ avec $\xi > 0$. Soit Q sa fonction du quantile. Supposons qu'il existe une fonction positive b , tel que la fonction $t \mapsto \pm t^{-\xi} Q(1 - 1/t)$ (avec l'un et l'autre de choix de signe) est π -variation à l'infini avec une fonction auxiliaire b . Alors, pour toute suite $k_n \rightarrow \infty$ satisfaisant $k_n = o(n/g^{-1}(n))$ où g^{-1} est l'inverse de $g(t) = t^{1-2\xi} (Q(1 - 1/t)/b(t))^2$,*

$$\sqrt{k_n} \left(\widehat{\xi}_{n,k_n}^H - \xi \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \xi^2)$$

quand $n \rightarrow \infty$, avec $\mathcal{N}(0, \xi^2)$ est la distribution normale avec moyenne 0 et de variance ξ^2 .

1.2.3 Estimateur de Pickands

Pickands a proposé d'estimer les paramètres ξ par une méthode du centile simple.

Soit k un nombre entier plus petit que n , et considérons les espacements $X_{(n-i+1)} - X_{(n-4k+1)}$, $i = 1, \dots, 4k - 1$, sur le seuil $X_{(n-4k+1)}$ qui est un échantillon d'une

distribution de Pareto généralisée. Alors, utilisant le quantile de l'échantillon de ces excès pour estimer ces paramètres, c'est-à-dire, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\hat{\xi}_{n,k}^{(P)} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{X_{n-k+1,n} - X_{n-2k+1,n}}{X_{n-2k+1,n} - X_{n-4k+1,n}}$$

Évidemment, les estimateurs dépendent du choix du nombre entier k . Pickands a fait une discussion sur le choix de la constante k . Selon lui k devez tendre à l'infini (en probabilité) quand $n \rightarrow \infty$, et $k/n \rightarrow 0$ quand $n \uparrow \infty$.

La convergence forte ainsi que la normalité asymptotique ont été établies par [Dekkers et de Haan \(1989\)](#) comme suit

$$\sqrt{k} \left(\hat{\xi}_{X,k,n}^{(P)} - \xi \right) \rightarrow \mathcal{N} \left(0, \frac{\xi^2 (2^{\xi+1} + 1)}{(2(2^\xi - 1) \log 2)^2} \right),$$

lorsque n et k tendent vers l'infini.

1.2.4 Estimateur des moments

Cet estimateur est introduit par [Dekkers et de Haan \(1989\)](#). c'est une généralisation de l'estimateur de Hill, valable pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\xi}_{X,k,n}^{(M)} = \hat{\xi}_{X,k,n}^{(H)} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{\xi}_{X,k,n}^{(H)}}{M_n^{(2)}} \right)^{-1}.$$

On a la normalité asymptotique suivante lorsque n et k tendent vers l'infini, pour $\xi \geq 0$:

$$\sqrt{k} \left(\hat{\xi}_{X,k,n}^{(M)} - \xi \right) \rightarrow \mathcal{N} (0, 1 + \xi^2).$$

Une comparaison des propriétés asymptotiques de ces estimateurs a été établie par [de Haan et Ferreira \(2006\)](#). L'estimateur de Pickands a une variance asymptotique plus grande que les autres. Les estimateurs du maximum de vraisemblance et des moments possèdent de bonnes propriétés lorsque la loi de l'échantillon observé est proche du domaine d'attraction de Gumbel. Lorsque $\xi < 0$, l'estimateur du maximum de vraisemblance a la plus petite variance. Par contre l'estimateur de Hill présente la variance asymptotique la plus faible pour $\xi > 0$.

1.3 Estimation de quantile extrême

Dans ce qui suit, on va supposer que F appartient à l'un des domaines d'attractions définis précédemment, afin d'étudier le problème d'estimation de quantile extrême. Pour cela, on a besoin de faire un rappel de quelques définitions.

Définition 1.3.1 *On appelle quantile d'ordre p , le nombre x_p définie par*

$$x_p = \inf \{x, F(x) \geq p\}, p \in [0, 1].$$

Définition 1.3.2 *La fonction quantile de queue est définie par*

$$U(t) = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{t}\right), t \in]1, \infty[.$$

F^{\leftarrow} est l'inverse généralisé de F .

Définition 1.3.3 *Le quantile extrême d'ordre α_n est défini par*

$$q_{\alpha_n} = \bar{F}^{\leftarrow}(\alpha_n) = \inf \{x : \bar{F}(x) \leq \alpha_n\} \text{ avec } \alpha_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Définition 1.3.4 (Q_n Peut être exprimée comme une fonction simple des statistiques d'ordre relatives à l'échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) et nous avons

$$Q_n(s) := \begin{cases} X_{i,n} & \text{si } \frac{(i-1)}{n} < s \leq \frac{i}{n} \\ X_{[np]+1,n} & \text{si } 0 < s \leq 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Notons que pour $0 < p < 1$, $X_{[np]+1,n}$ est le quantile d'échantillon de l'ordre p .

Lemme 1.3.1 *Embrechts et al. (1997)* Si $\alpha_n \rightarrow 0$ et $n\alpha_n \rightarrow c$ (non nécessairement fini) quand $n \rightarrow \infty$, alors,

$$\mathbb{P}(X_{n,n} \leq q_{\alpha_n}) \rightarrow e^{-c}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq q_{\alpha_n}) &= \mathbb{P}(\cap \{X_i \leq q_{\alpha_n}\}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq q_{\alpha_n}) \\ &= F^n(q_{\alpha_n}) \\ &= (1 - \alpha_n)^n \\ &= \exp(n \log(1 - \alpha_n)) \\ &= \exp(-n\alpha_n(1 + o(1))) \text{ avec } \alpha_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.3.1, la probabilité que le quantile extrême soit plus grand que le maximum de l'échantillon dépend du comportement asymptotique de c . Ainsi, lorsque l'on souhaite estimer des quantiles extrêmes d'ordre $\alpha_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, deux cas doivent être distingués en fonction de c .

Le premier cas, si $c = \infty$ donc $\mathbb{P}(X_{n,n} \leq q_{\alpha_n}) = 0$. Un estimateur naturel de q_{α_n} est le quantile empirique $[n\alpha_n]$ ième plus grande observation de l'échantillon $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$.

Le deuxième cas, si $c = 0$ alors, $\mathbb{P}(X_{n,n} \leq q_{\alpha_n}) = 1$. Donc on ne peut pas estimer le quantile q_{α_n} de manière empirique. Des différentes méthodes d'estimation du quantile extrême ont été proposées dans la littérature. On distingue trois catégories principales de méthodes d'estimation.

1. L'approche des maxima par bloc consiste à diviser l'échantillon en m_0 sous-blocs disjoints de taille $n_0 = n/m_0$ des quels on détermine les maxima. La loi de ces maxima est approchée par une loi des valeurs extrêmes. D'après la relation $\mathbb{P}(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq q_{\alpha_n}) = F^n(q_{\alpha_n})$, on peut estimer le quantile extrême par la loi des valeurs extrêmes.

2. L'approche par la loi des excès est basée sur le résultat de [Pickands \(1975\)](#) qui établit l'équivalence entre la convergence en loi du maximum vers une loi des valeurs extrêmes et la convergence en loi d'un excès vers une GPD.

3. Les méthodes semi-paramétriques où l'on suppose que pour tout $\xi > 0$ on a $\mathbb{P}(X > x) \sim x^{-1/\xi}$ lorsque x tend vers l'infini, cela implique que le quantile q_{α_n} décroît en $\alpha_n^{-1/\xi}$.

A partir de cette hypothèse, [Weissman \(1978\)](#) a proposé un estimateur semi-paramétrique du quantile extrême q_{α_n} dépendant de l'estimation du paramètre ξ .

1.3.1 L'approche par la loi des valeurs extrêmes

Cette approche a été établit par [Guida et Longo \(1988\)](#) dans le but d'estimer les quantiles extrêmes. D'après le théorème de Fisher-Tippett, on a

$$\Pr \left\{ \frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \leq x \right\} = (F(a_n x + b_n))^n \approx H_\xi(x). \quad (1.12)$$

Cela nous donne

$$\Pr \{X_{n,n} \leq z\} \approx H_\xi \left(\frac{z - b_n}{a_n} \right) = H_{\xi, a_n, b_n}. \quad (1.13)$$

Donc la loi de $X_{n,n}$ peut être approchée par H_{ξ, a_n, b_n} .

L'équation (1.12) est équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log F(a_n x + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log (1 - \bar{F}(a_n x + b_n)) = \log H_\xi(x).$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a $\bar{F}(a_n x + b_n) \rightarrow 0$, donc le développement limité de $\log(1 - \bar{F}(a_n x + b_n))$ au premier ordre est

$$\bar{F}(a_n x + b_n) \simeq -\frac{1}{n} \log H_\xi(x).$$

Cela implique que

$$\bar{F}(x) \simeq -\frac{1}{n} \log H_{\xi, a_n, b_n}(x).$$

D'après l'équation (1.5), une approximation de fonction de survie en queue est

$$\bar{F}(x) \simeq \frac{1}{n} \left(1 + \xi \left(\frac{x - b_n}{a_n} \right)^{-1/\xi} \right),$$

d'où on peut approcher le quantile $q(\alpha)$ par

$$q(\alpha) \simeq b_n + \frac{a_n}{\xi} \left(\left(\frac{1}{n\alpha} \right)^\xi - 1 \right).$$

Définition 1.3.5 *L'estimateur du quantile extrême de la loi GEV est défini par :*

$$\hat{q}_n(\alpha_n) \simeq \hat{b}_n + \frac{\hat{a}_n}{\hat{\xi}_n} \left(\left(\frac{1}{n\alpha_n} \right)^{\hat{\xi}_n} - 1 \right),$$

où $(\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{\xi}_n)$ sont respectivement des estimateurs des paramètres (a_n, b_n, ξ) .

1.3.2 L'approche par la loi des excès

D'après l'équation (1.9), on a

$$\bar{F}(u+y) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(y).$$

Avec un changement de variable $z = u + y$, on obtient

$$\bar{F}(z) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(z-u) \approx \bar{F}(u) \bar{G}_{\xi, \beta(u)}(z-u),$$

où $\bar{G}_{\xi, \beta(u)}$ est la fonction de survie de la loi de Pareto généralisée $G_{\xi, \beta(u)}$. La probabilité p pour que X dépasse le seuil u est

$$p = \mathbb{P}(X > u) = \bar{F}(u),$$

d'où

$$\bar{F}(z) \simeq p \bar{G}_{\xi, \beta(u)}(z - \bar{F}^{\leftarrow}(p)),$$

Une approximation de la fonction de survie en queue est :

$$\bar{F}(z) \simeq p \left(1 + \xi \left(\frac{z - \bar{F}^{\leftarrow}(p)}{\beta(u)} \right) \right)^{-1/\xi}. \quad (1.14)$$

Pour estimer les quantiles extrêmes, on a besoin d'inverser la fonction de survie de l'équation (1.14), on obtient

$$q(\alpha) = \bar{F}^{\leftarrow}(p) + \frac{\beta(u)}{\xi} \left(\left(\frac{\alpha}{p} \right)^{-\xi} - 1 \right).$$

Donc il faut estimer les paramètres ξ , u et $\beta(u)$ pour pouvoir estimer les quantiles extrêmes voir [Gardes and Girard \(2013\)](#).

1.3.3 L'approche semi-paramétrique

On s'intéresse au cas de domaine d'attraction de Fréchet. Rappelons que pour F appartient au domaine d'attraction de Fréchet, on a

$$\bar{F}(x) = x^{-1/\xi} \ell(x),$$

où ℓ est une fonction à variations lentes à l'infini et $\xi > 0$. D'après le Lemme [1.1.4](#)

on a

$$q_{\alpha_n} = \bar{F}^{\leftarrow}(\alpha_n) = \alpha_n^{-\xi} L(1/\alpha_n), \quad \alpha_n \leq 1/n,$$

$$q_{\beta_n} = \bar{F}^{\leftarrow}(\beta_n) = \beta_n^{-\xi} L(1/\beta_n), \quad \beta_n \geq 1/n,$$

telle que L est une fonction à variations lentes à l'infini. Par division et pour β_n suffisamment petit, on obtient

$$\bar{F}^{\leftarrow}(\alpha_n) \simeq \bar{F}^{\leftarrow}(\beta_n) \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right)^{\xi}.$$

Après avoir estimé $\bar{F}^{\leftarrow}(\beta_n)$ et ξ , on obtient l'estimateur de [Weissman \(1978\)](#)

$$\hat{q}_{\alpha_n}^W = X_{n-[n\beta_n]+1,n} \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right)^{\hat{\xi}},$$

où $X_{n-[n\beta_n]+1,n}$ est un estimateur de $\bar{F}^{\leftarrow}(\beta_n)$.

1.4 Les lois alpha-stables

La famille des lois α -stable dite encore loi de Lévy présente un grand intérêt dans la modélisation de nombreux problèmes dans des domaines comme la physique, l'économie, la biologie, ect... Cette théorie a été initiée pour la première fois par [Lévy \(1925\)](#) dans son livre Calcul des probabilités.

Les lois α -stables sont une classe de distributions permettant de modéliser les phénomènes d'asymétrie à queues lourdes. Ces lois sont caractrisées par un index de stabilité α qui prend sa valeur dans l'intervalle $(0, 2)$. Ce paramètre indique la vitesse de décroissance des queues de distributions.

1.4.1 Définition des lois stables

Il existe dans la littérature des définitions équivalentes des lois stables.

Définition 1.4.1 *Une variable aléatoire X est dite stable si pour tous réels posi-*

tifs a_1 et a_2 , il existe des réels $a > 0$ et b tels que

$$aX + b \stackrel{d}{=} a_1X_1 + a_2X_2,$$

où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes qui ont la même distribution que X . Dans le cas $b_n = 0$, X est dite strictement stable.

Une autre définition équivalente à la première est la suivante :

Définition 1.4.2 Une variable aléatoire X est dite stable si, pour tout entier non nul n , il existe des constantes $a_n > 0$ et b_n telles que

$$a_nX + b_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n X_i,$$

où X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes, ayant la même distribution que X .

Les constantes a_n sont de la forme $a_n = cst n^{1/\alpha}$, avec $\alpha \in (0, 2)$. Le paramètre α est l'index de stabilité, et la variable X est alors dite α -stable.

[Uchaikin et Zolotarev \(1999\)](#) ont proposé un théorème qui donne une formulation canonique des lois stables en utilisant les fonctions caractéristiques.

Théorème 1.4.1 Une variable aléatoire X a une distribution stable si et seulement s'il existe quatre paramètres uniques : $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et un réel μ tels que la fonction caractéristique de X s'écrit sous la forme :

$$\varphi_X(t) = E[\exp\{itX\}] = \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta \text{sign}(t) w(t, \alpha)] + i\mu t\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

où

$$w(t, \alpha) = \begin{cases} -\tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \ln(t) & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

et

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Une variable aléatoire X suivant une loi stable de paramètres α, β, γ et μ est notée $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Les quatre paramètres sont interprétés comme suit :

1. Le paramètre α est appelé l'index de stabilité. Plus que α tend vers 0, plus que la queue de distribution devient lourde.
2. Le paramètre β est appelé le paramètre d'asymétrie. Si $\beta > 0$, on dit que la distribution de X est asymétrique à droite et si $\beta < 0$, on dit que la distribution de X est asymétrique à gauche. Dans le cas $\beta = 0$, on dit que la distribution de X est symétrique par rapport à μ . Si de plus $\mu = 0$, la loi est dite alpha-stable symétrique, et on note $X \sim S_\alpha(\sigma)$.
3. Le paramètre μ est appelé le paramètre de position.
4. Le paramètre σ est le paramètre d'échelle.

1.4.2 Propriétés des lois stables

1. Si $X_1 \sim S_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1)$ et $X_2 \sim S_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ tels que :

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \text{et } \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

2. Soit $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, alors pour tout $m \in \mathbb{R}$ on a $X + m \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + m)$.
3. Si $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $\alpha \in (0, 2)$, alors

$$\begin{cases} \mathbb{E} |X|^p < +\infty & \text{si } p \in]0, \alpha[\\ \mathbb{E} |X|^p = +\infty & \text{si } p \geq \alpha. \end{cases}$$

4. Si $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $\alpha = 2$, alors $\forall p, \mathbb{E} |X|^p < +\infty$.
5. Soit $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, on a :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) = C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < t) = C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha, \end{cases}$$

$$\text{où } C_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1}.$$

Remarque 1.4.1 *Si le paramètre α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α -stable est infinie. Si encore α est strictement inférieur à 1, la moyenne d'une loi α -stable devient aussi infinie.*

1.4.3 Quelques exemples des lois α -stables

1. La loi normale : C'est une loi α -stable pour $\alpha = 2$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp -\frac{(x - \mu)^2}{4\sigma^2}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty.$$

2. La loi de Cauchy : C'est une loi α -stable pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{(x - \mu)^2 + \sigma^2}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty.$$

3. La loi de Lévy : C'est une loi α -stable pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 1$, de densité

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \mu)^{3/2}} \exp -\frac{\sigma}{2(x - \mu)}, \quad \mu \leq x \leq +\infty.$$

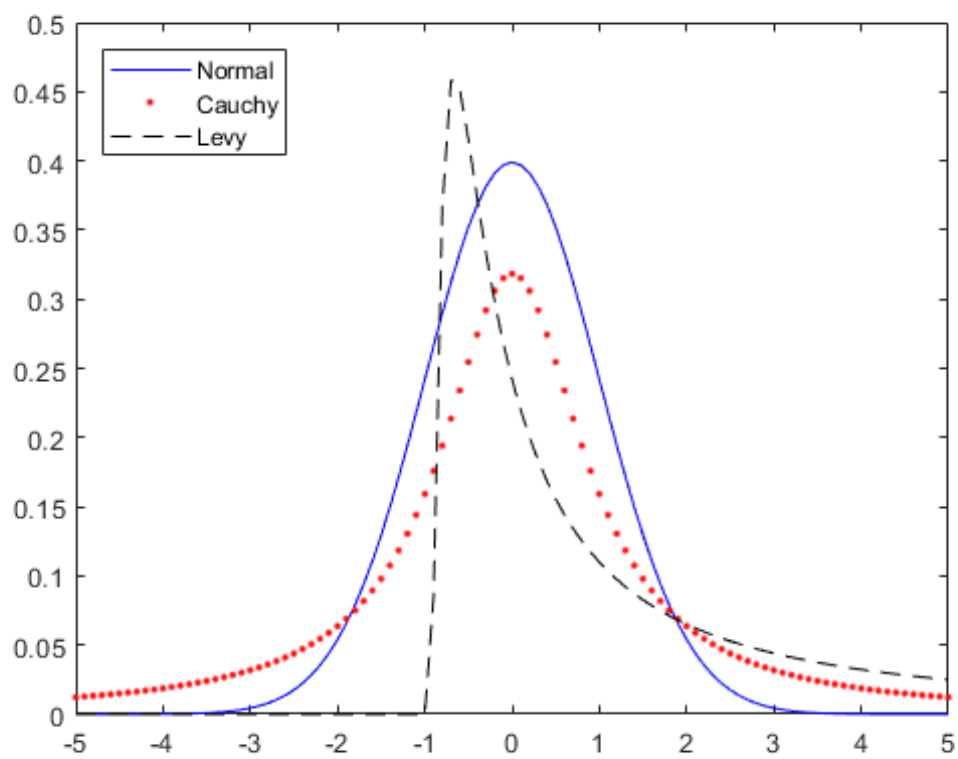


FIG. 1.2 – Les lois alpha-stables

Chapitre 2

Mesure de risque

Les sociétés financières, les banques et les compagnies d'assurances s'exposent à des risques importants de diverses natures. Par exemple, dans les marchés financiers, la valeur des actifs transigés varie dans le temps d'une manière imprévisible, c'est-ce qu'on appelle flux d'investissement d'un actif. L'incertitude reliée à cette variation dans la valeur des actifs au futur est modélisée par une variable aléatoire X .

Dans ce chapitre, notre objectif est de présenter quelques éléments essentiels sur la théorie de mesure de risque, on introduit la définition de mesure de risque en termes mathématiques ainsi que quelques propriétés. On cite quelques mesures de risques les plus utilisées en pratique telles que Valeur en risque, Valeur en Risk de la queue, etc.

2.1 Mesure de risque

Définition 2.1.1 *Une mesure de risque univarié est une fonction ρ associant à chaque variable aléatoire du montant de perte X une valeur réelle $\rho(X)$.*

D'après cette définition, on peut considérer l'espérance, la variance et l'écart-type comme des mesures de risque.

2.1.1 Région de risque

Une notion liée à celle de mesure de risque est la région des portefeuilles acceptables définie comme suit :

Définition 2.1.2 *On définit la région de risque acceptable pour la mesure ρ par*

$$G = \{X, \rho(X) \leq 0\}.$$

Chargement de sécurité

Définition 2.1.3 *Une mesure de risque ρ contient un chargement de sécurité si pour tout risque X , on a $\rho(X) \geq \mathbb{E}(X)$.*

A partir de la définition de la mesure de risque, on peut considérer toute fonction définie sur l'espace des variables aléatoires, qui prend ses valeurs dans \mathbb{R} comme mesure de risque. Afin de respecter certaines propriétés désirables, [Artzner et al. \(1999\)](#) ont été introduit la notion de cohérence.

2.1.2 Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque est cohérente, si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Invariance par translation

Soit X un risque, pour chaque constante a , on a :

$$\varrho(X + a) = \varrho(X) + a.$$

2. Homogénéité :

Pour chaque constante positive a , on a :

$$\varrho(aX) = a\varrho(X).$$

3. Monotonie :

Soient les risques X et Y tels que $Pr[X \leq Y] = 1$, alors :

$$\varrho(X) \leq \varrho(Y).$$

4. Sous-additivité :

Quels que soient les risques X et Y :

$$\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y).$$

Ces conditions sont interprétées comme suit :

1. Lorsqu'on ajoute des pertes connues a au perte de l'investisseur X , le risque change par une valeur égale à a .
2. Si l'investissement est multiplié par une valeur a , alors le risque sera multiplié par la même valeur.

3. Si la perte de l'investisseur X est plus petit que celle de l'investisseur Y , alors le risque de l'investisseur X est également plus petite.
4. S'il ya une diversification dans un portefeuille, alors la propriété de sous-additivité garantit la diminution du risque.

Proposition 2.1.1 *Une mesure de risque ρ est invariante par translation, si :*

$$\rho(X - \rho(X)) = 0.$$

2.1.3 Propriété d'invariance et de convexité

Définition 2.1.4 *Une mesure de risque ρ est invariante en loi, si pour tous risques X et Y :*

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y).$$

Définition 2.1.5 *Une mesure de risque ρ est dite convexe, si elle est monétaire et vérifie :*

$$\forall \alpha \in [0, 1], \rho[\alpha X + (1 - \beta) Y] \leq \alpha \rho(X) + (1 - \beta) \rho(Y).$$

Corollaire 2.1.1 *Si ρ est une mesure de risque monétaire et homogène, alors la convexité et la sous-additivité sont des notions équivalentes.*

Proposition 2.1.2 *Si ρ est une mesure de risque monétaire, ρ est convexe si et seulement si la région de risque G est convexe.*

2.1.4 Mesure de risque comonotone additive

Définition 2.1.6 Une mesure de risque ϱ est comonotone additive, si pour tout vecteur comonotone (X_1, X_2) on a

$$\varrho(X_1 + X_2) = \varrho(X_1) + \varrho(X_2).$$

Dans la littérature, il existe plusieurs mesures de risques. Dans la section suivante, on va présenter quelques mesures de risque les plus utilisées en pratiques tels que la variance, la Valeur en Risque et la Tail-Value-at-Risk.

2.2 Quelques mesures de risque

2.2.1 La variance

La variance est la première mesure de risque a été utilisées. Elle est considéré comme une mesure de risque d'une variable aléatoire autour de sa moyenne.

Soit X une variable aléatoire, sa variance est définie par

$$Var(X) = E(X - E(X))^2.$$

La variance admet une représentation de la forme

$$Var(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} E[(X - x)^2].$$

Cette formule nous aide à démontrer l'équivalence entre un problème d'optimisation stochastique sous une contrainte de risque et un problème économique.

La variance autant que mesure de risque, n'est pas beaucoup utilisée car elle possède la propriété du symétrique se qui fait pénalise les bonnes variations que les mauvaises.

2.2.2 Valeur en Risque

La Valeur en Risque notée par (VaR) a connu ses premières utilisations vers la fin des années 1980 sous le nom de dollar at risk, capital at risk, etc. Cette mesure prit le nom Valeur en risque dans les travaux de [Morgan \(1997\)](#).

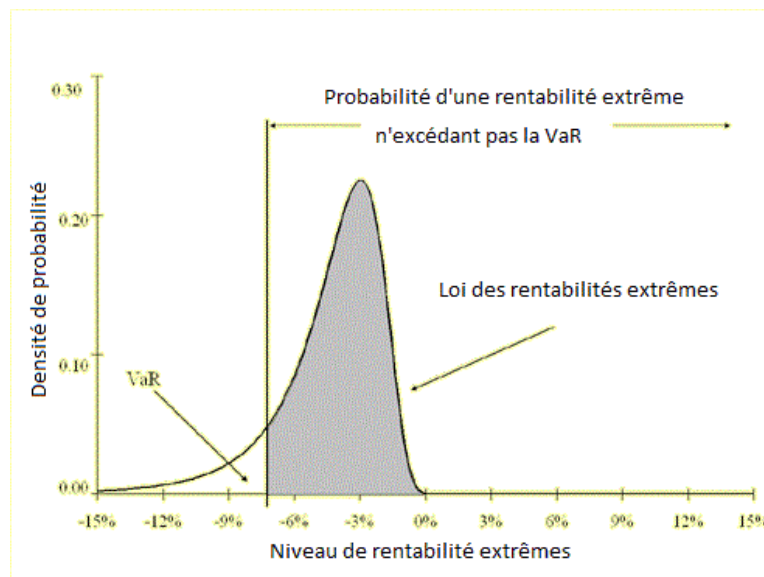


FIG. 2.1 – Calcule de la Var à partir des valeurs extrêmes.

La Valeur en Risque a été appliqué pour la première fois dans le domaine financier puis dans la résolution des problèmes d'assurance où [Fedor et Morel \(2006\)](#) ont exposé des situations en assurance où la VaR est une bonne mesure de risque pour les actifs.

En finance, la VaR d'un actif financier est défini comme la perte potentielle maxi-

male sur une période fixée au niveau de confiance donné. En statistique, la VaR est défini comme suit :

Définition 2.2.1 *La Valeur en Risque de niveau $\alpha \in [0, 1]$ associée au risque X est donnée par*

$$VaR(X, \alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} / \Pr [X \leq x] \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha),$$

autrement dit, la Valeur en ique n'est rien d'autre qu'un quantile d'ordre α associée à la distribution de X .

À titre d'illustration, dire que la $VaR(X, 0.99)$ d'un portefeuille vaut la valeur V , signifie que la perte maximale de valeur du portefeuille est inférieure à V avec une probabilité de 0.99.

Si on désigne par Y , la perte liée à un investissement tel que $Y = -X$, alors on obtient :

$$VaR(Y, \alpha) = -VaR(X, \alpha - 1).$$

Comme le montre la figure 2.1 ci-dessus, pour une probabilité donnée, la VaR est obtenue comme le quantile de la loi des rentabilités extrêmes. En pratique, cette loi estimée à partir de données historiques sur longue période est une loi de Fréchet.

Lemme 2.2.1 *Soit g une fonction strictement croissante et continue à gauche, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a*

$$VaR(g(X), \alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(\alpha)) = gVaR(X, \alpha).$$

Si g est strictement décroissante, continue à droite, et si F_X est bijective, alors

$$\text{VaR}(g(X), \alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(1 - \alpha)) = g\text{VaR}(X, 1 - \alpha).$$

Remarque 2.2.1 La VaR est largement utilisée en finance mais elle n'est pas cohérente car elle ne vérifie pas la propriété de sous-additivité. On peut démontrer ça par un contre exemple.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Pareto de paramètres $(2, 1)$ et $(2, 2)$, alors

$$\text{Pour } \alpha \in]0; 0,8[, \text{VaR}(X + Y, \alpha) > \text{VaR}(X, \alpha) + \text{VaR}(Y, \alpha).$$

Comme l'illustre la figure suivante

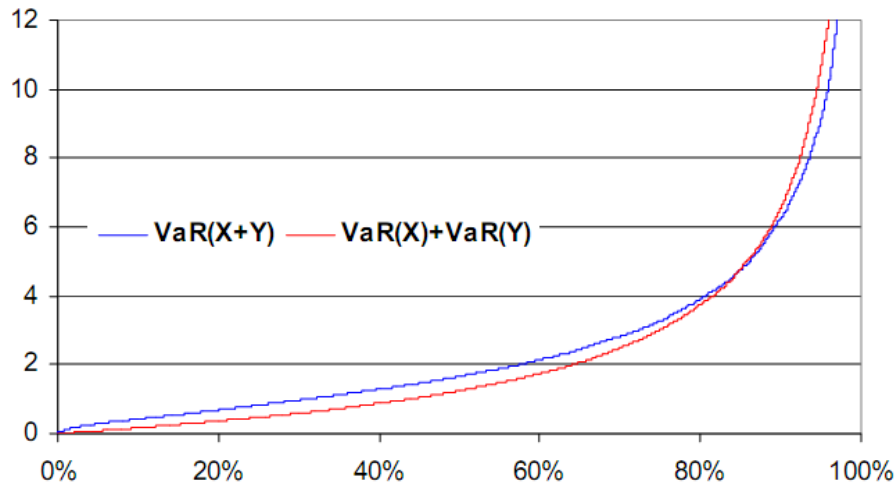


FIG. 2.2 – Value-at-Risk de la somme de deux v.a. de Pareto

Dans la suite on va présenter trois mesures de risques dont l'idée commune est de quantifier la perte l'orsque la VaR est dépassée.

2.2.3 Tail Value-at-Risk

La Tail Value-at-Risk (TVaR) est une mesure qui satisfait la propriété de sous-additivité et qu'elle fournit de l'information sur la queue de la distribution étudiée, on peut l'interpréter comme la moyenne des VaR de niveau supérieur à α

Définition 2.2.2 (Tail Value-at-Risk (TVaR)) *Tail Value-at-Risk de niveau α associée au risque X telle qu'introduite par Acerbi (2002), est donnée par*

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, s) ds.$$

Notons que $TVaR(X, 0) = \mathbb{E}[X]$. Et comme

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\mathbb{E}[X] - \int_0^{\alpha} VaR(X, s) ds \right),$$

on en déduit que la TVaR est une fonction croissante en α . De plus

$$TVaR(X, \alpha) \geq TVaR(X, 0) = \mathbb{E}[X].$$

Donc la Tail-VaR contient toujours un chargement de sécurité.

Lemme 2.2.2 *Soient le risque X et le niveau de perte x tels que $F_X(x) > 0$. Quel que soit l'événement aléatoire E tel que $\mathbb{P}[E] = F_X(x)$, on a $\mathbb{E}[X|E] \leq \mathbb{E}[X|X > x]$.*

Ce lemme garantit que la TVaR est sous-additive lorsque les risques sont continus.

En effet,

$$\begin{aligned}
 & TVaR(X + Y, \alpha) \\
 &= \mathbb{E}[X|X + Y > VaR(X + Y, \alpha)] + \mathbb{E}[Y|X + Y > VaR(X + Y, \alpha)] \\
 &\leq \mathbb{E}[X|X > VaR(X, \alpha)] + \mathbb{E}[Y|Y > VaR(Y, \alpha)] \\
 &\leq VaR(X, \alpha) + VaR(Y, \alpha).
 \end{aligned}$$

2.2.4 Conditional Tail Expectation

Conditional Tail Expectation (CTE) représente la perte attendue sachant que la VaR au niveau α est dépassée.

Définition 2.2.3 On définit la CTE associée à la variable aléatoire X au niveau α , notée $CTE(X, \alpha)$ comme l'espérance de X conditionnellement aux valeurs supérieures à $VaR(X, \alpha)$:

$$CTE(X, \alpha) = \mathbb{E}[X|X > VaR(X, \alpha)].$$

Proposition 2.2.1 La CTE et la TVaR coïncident pour des risques dont la fonction de répartition est continue, i.e.

$$CTE(X, \alpha) = TVaR(X, \alpha), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Il est naturel de définir un estimateur empirique de la forme

$$\widetilde{CTE}_n(\alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 Q_n(s) ds,$$

où Q_n est l'estimateur empirique de la fonction quantile, qui est défini par

$$Q_n(s) = X_{i:n} \quad \text{pour } (i-1)/n \leq s \leq i/n.$$

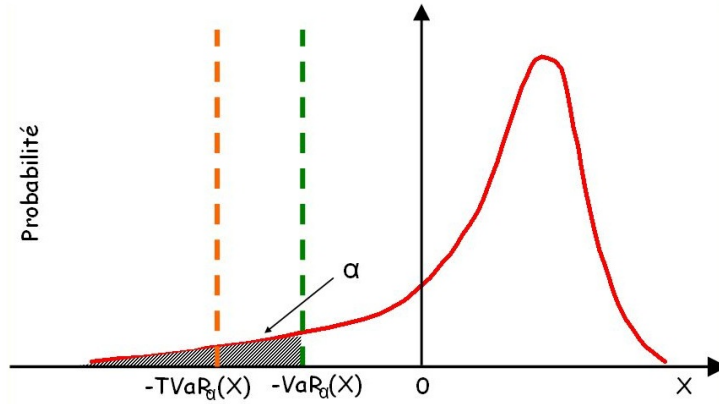


FIG. 2.3 – Perte moyenne au-delà d'un certain seuil dépendant de α .

L'estimateur $\widetilde{CTE}_n(\alpha)$ a été étudié par Brazauskas *et al.* (2008) dans le cas où $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Cette estimateur n'a pas de normalité asymptotique dans le cas où $\mathbb{E}[X^2] = \infty$ (X suit la loi de Pareto). Pour cette raison Necir *et al.* (2010) ont proposé un estimateur défini par

$$\widehat{CTE}_n(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^{1-k/n} Q_n(s) ds + \frac{kX_{n-k:n}}{n(1-\alpha)(1-1/\widehat{\gamma})},$$

tel que

$$\widehat{\gamma} := \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(X_{n-i+1:n}) - \log^+(X_{n-k:n}) \right)^{-1},$$

et l'estimateur de [Hill \(1975\)](#) de $\gamma \in (1/2, 1)$.

2.2.5 Expected shortfall

L'expected shortfall (ES) de niveau de probabilité α est la perte moyenne au delà de la VaR au niveau α . Autrement dit :

Définition 2.2.4 *L'Expected shortfall au niveau α , notée $ES[X, \alpha]$, est*

$$ES[X, \alpha] = \mathbb{E} [(X - VaR(X, \alpha))_+].$$

Il existe une relation entre les trois mesures de risque définies ci-dessus, qui sont données dans la Proposition suivante.

Proposition 2.2.2 *Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, Les identités suivantes sont valides :*

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{ES}(X, \alpha), \quad (2.1)$$

$$CTE(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{\bar{F}_X(VaR(X, \alpha))} \mathbb{ES}(X, \alpha), \quad (2.2)$$

$$CVaR(X, \alpha) = \frac{\mathbb{ES}(X, \alpha)}{\bar{F}_X(VaR(X, \alpha))}. \quad (2.3)$$

Proof. Voir [Denuit et al. \(2005\)](#). ■

2.3 Mesure de distorsion

Définition 2.3.1 *Une fonction de distorsion g est une fonction croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.*

2.3.1 Mesures de risque de Wang

Définition 2.3.2 *La mesure de risque de Wang associée à la fonction de distorsion g , notée \mathcal{R}_g est*

$$\mathcal{R}_g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(1 - F_X(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{F}_X(x)) dx.$$

Si on remplace $g(\bar{F}_X(x))$ par $\int_0^{\bar{F}_X(x)} dg(\alpha)$, on obtient

Proposition 2.3.1 *La mesure de risque de Wang associée à la fonction de distorsion g peut s'écrire*

$$\mathcal{R}_g(X) = \int_0^1 \text{VaR}(X, 1 - \alpha) dg(\alpha).$$

Remarque 2.3.1 1. *Pour la fonction de distorsion $g(p) = p$, la mesure de risque associée est l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$.*

2. *Si $g(p) \geq p \forall p \in [0, 1]$ alors $\mathcal{R}_g(X) \geq \mathbb{E}(X)$, c'est-à-dire la mesure de risque de Wang comporte un chargement de sécurité.*

3. *Si $g_1(p) \leq g_2(p) \forall p \in [0, 1]$, alors $\mathcal{R}_{g_1}(X) \leq \mathcal{R}_{g_2}(X)$.*

Dans le paragraphe suivant, on va donner quelques exemples de mesures de Wang.

Exemples

1) **Valeur en Risque.** La VaR au niveau α est une mesure de Wang correspondant à la fonction de distorsion :

$$g_\alpha(x) = \mathbb{I}[x \geq 1 - \alpha].$$

g_α est la fonction de répartition associée à une masse de Dirac en $1 - \alpha$. On obtient :

$$\mathcal{R}_{g_\alpha}(X) = VaR(X, \alpha).$$

2) **Tail Value-at-Risk.** La TVaR peut s'écrire sous la forme d'une mesure de risque de Wang. Soit la fonction de distorsion

$$g_\alpha(x) = \min\left(\frac{x}{1 - \alpha}, 1\right), \quad \alpha \in [0, 1],$$

on obtient

$$\mathcal{R}_{g_\alpha}(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\int_0^{1-\alpha} VaR(X, 1 - s) ds \right) = TVaR(X, \alpha).$$

Ici, g_α est une fonction de répartition, correspondant à une loi uniforme sur $[0, 1 - \alpha]$.

3) **Mesure de risque Dual-power.** En considérant la fonction de distorsion :

$$g_\alpha(x) = 1 - (1 - x)^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1],$$

nous obtenons la mesure de risque Dual-power :

$$\mathcal{R}_{g_\alpha}(X) = \int (1 - (F_X(x))^\alpha) dx.$$

4) **Mesure de risque PH.** Soit la fonction de distorsion

$$g_\rho(x) = x^{1/\rho}, \quad \rho \geq 1,$$

On obtient la mesure de risque

$$\mathcal{R}_{g_\rho}(X) = \int_{x \geq 0} (\bar{F}_X(x))^{1/\rho} dx.$$

Cette mesure a été introduite dans Wang (1995) et Wang (1996) sous le nom de mesure de risque Hazard Proportionnel et on note $\mathcal{R}_{g_\rho}(X) = PH_\rho(x)$. Si ρ prend la valeur 1 alors $PH_1(x) = \mathbb{E}(X)$.

Dans le tableau ci-dessous, on va présenter les principales mesures de risques de distorsion.

Fonction de distorsion g	Mesure de risque \mathcal{R}
$g(x) = \mathbb{I}[x \geq \rho]$	VaR
$g(x) = \min(x/\rho, 1)$	$TVaR$
$g(x) = x^\rho$	PH
$g(x) = (1 + \rho)x - \rho x^2$	Gini
$g(x) = (1 - \rho^x) / (1 - \rho)$	Transformation exponentielle
$g(x) = 1 - (1 - x)^{1/\rho}$	Dual Power

Où ρ est une constante comprise entre 0 et 1.

Les propositions suivantes présentent des propriétés générales de mesures de Wang.

Proposition 2.3.2 *Les mesures de risque de Wang sont homogènes, invariantes par translation, monotones et additives pour les sommes de risques comonotones.*

Proposition 2.3.3 *Lorsque la fonction de distorsion est concave, la mesure de risque correspondante est sous-additive.*

D'où on déduit que les mesures de risque de Wang correspondant à des fonctions de distorsion concaves sont cohérentes.

Transformée de Wang

Définition 2.3.3 On appelle transformée de Wang au niveau ρ ($\rho \in]0, 1[$) la fonction de distorsion définie par

$$g_\rho(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(\rho)), \quad \forall x \in [0, 1],$$

où Φ est une fonction de répartition de la loi normal centré réduite.

Mesure de risque de transformée de Wang En considérant la fonction de distorsion précédente, la mesure de risque de transformée de Wang notée WT_ρ est définie par

$$WT_\rho(X) = \mathcal{R}_{g_\rho}(X).$$

Si X une variable aléatoire gaussienne, alors

$$WT_\rho(X) = VaR(X, \rho).$$

Les mesures se risques de Wang sont un cas particulier de mesures de risque de distorsion.

2.3.2 Mesures de risque de distorsion

Définition 2.3.4 La mesure de risque de distorsion notée $\mathcal{R}(X)$ est définie par

$$\mathcal{R}(X) = \int_0^1 F^{-1}(1-u) dg(u)$$

où g est une fonction de répartition sur $[0, 1]$, appelée fonction de distorsion.

Une autre représentation de la mesure de risque de distorsion $\mathcal{R}(X)$ est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.3.4 *La mesure de risque de distorsion $\mathcal{R}(X)$ peut s'écrire comme suit*

$$\mathcal{R}(X) = \int_0^{+\infty} g(1 - F(x)) d(x) - \int_{-\infty}^0 (1 - g(1 - F(x))) d(x).$$

Remarque 2.3.2 *Si la fonction de distorsion g est l'identité sur $[0, 1]$, on obtient*

$$\mathcal{R}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) d(x) - \int_{-\infty}^0 F(x) d(x) = \mathbb{E}(X).$$

Chapitre 3

Estimating the distortion parameter under Lévy-stable regime

Estimating the distorted parameter in the case of non negative heavy-tailed losses have been treated in [Brahimi *et al.* \(2011\)](#). In this paper, we extend this work to the case of the real heavy-tailed losses. We derive an asymptotic distribution of the estimator. We construct a practically implemented confidence interval for the distortion parameter and illustrate the performance of the interval in a simulation study with application to real data.

3.1 Introduction and motivation

Let X be a loss random variable (rv) with cumulative distribution function (cdf) F . A large class of risk measures, which have been well-explored in the literature

and shown to satisfy desirable actuarial and financial properties is given by the distortion measure (Wang, 1996), defined by

$$\Psi[g; F] = \int_0^\infty g(1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^0 [1 - g(1 - F(x))] dx, \quad (3.1)$$

where $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be an increasing function, called *distorsion function*, such that $g(0) = 0$ and $g(1) = 1$, (see Denneberg, 1994 and Wang, 1996). This distortion risk measures $\Psi[g; F]$ is coherent (Artzner *et al.*, 1999) if the distortion functions g is concave, as proved by Wirch et Hardy (1999). A special class of distortion risk measures which can be done by using, for example, the power function $g_\rho(t) = t^{1/\rho}$ for every $\rho \geq 1$, is called the PH *proportional-hazards transform*,

$$\Psi[\rho; F] = \int_0^\infty (1 - F(x))^{1/\rho} dx - \int_{-\infty}^0 [1 - (1 - F(x))^{1/\rho}] dx. \quad (3.2)$$

The parameter $\rho \geq 1$ is called the distortion parameter, is the main object of our study in this paper. We are mainly concerned with heavy-tailed losses, for which the second moment $\mathbf{E}[X^2]$ is infinite, throughout the paper we work under the assumption

$$\rho \in [1, 2). \quad (3.3)$$

PH measure seems to be a suitable risk measure when dealing with financial data (such as asset log returns) which are modeled by rv's that can take any real values.

If we let X to be a real-valued rv with continuous df F , then $\Psi[g; F]$ is the Wang's two-sided deviation (TSD), is an average of the right-tail deviation and the left-tail

deviation, respectively defined by

$$\psi_g^R [X] := \int_{-\infty}^{\infty} (g(1 - F(x)) - (1 - F(x))) dx,$$

and

$$\psi_g^L [X] := \psi_g^R [-X] = \int_{-\infty}^{\infty} (g(F(x)) - F(x)) dx.$$

That is

$$\Psi[g; F] := \frac{1}{2} (\psi_g^L [X] + \psi_g^R [X]).$$

Changing variables and integrating by parts yields the following expression for $\Psi[g; F]$:

$$\Psi[\rho; F] = \int_0^1 J_g(s) Q(s) ds, \tag{3.4}$$

where

$$J_g(s) := \frac{1}{2} (g'(1 - s) - g'(s)), \quad 0 < s < 1, \tag{3.5}$$

is a specific weight function and $Q(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}$, $0 < s \leq 1$, is the quantile function pertaining to F . Note in passing that, for $t \downarrow 0$, the quantile $Q(1 - t)$ is called high or extreme quantile.

Assume that the financier wants to use the distortion measure with $g = g_\rho$ in all calculations, instead of other (loaded) exogenous measure $c[F]$. Note that a specific value of exogenous measure determines a value of the distortion parameter ρ , which depends on the underlying loss distribution. Estimating the parameter, therefore, becomes a statistical inference problem, which has been initiated by [Brahimi *et al.* \(2011\)](#) for a nonnegative heavy-tailed losses. For this reason, the

financier wants to know ρ such that

$$\Psi[g_\rho; F] = c[F]. \tag{3.6}$$

To illustrate our general results, we use

$$c[F] = \text{CTE}_F(t) = (1 - t)^{-1} \int_t^1 Q(s) ds.$$

The empirical estimator $\widehat{\rho}_n$ of the distortion parameter is a (unique) solution in ρ to the equation

$$\Psi[g_\rho; F_n] = c[F_n],$$

with $F_n(x) := n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, and $\mathbb{I}(\cdot)$ denoting the indicator function. In general, there is not an explicit formula for $\widehat{\rho}_n$. In order to establish desired asymptotic properties of $\widehat{\rho}_n$ certain assumptions on the functional $c[\cdot]$ are needed.

In summary, this paper is the continuation of the work of [Brahimi *et al.* \(2011\)](#) to the setting of the real heavy-tailed losses, which are highly appropriate models for financial losses. The rest of the paper is organized as follows. In [Section 3.2](#) we present notation, definitions, assumptions, and also construct an estimator of the proportional-hazards premium in the case of the real heavy-tailed losses. In [Section 3.3](#) we define an estimator of the distortion parameter, establish its consistency and asymptotic distribution. In [Section 3.4](#) we carry out a simulation study to illustrate the empirical performance of the estimator and an application with real data explains how using the distortion parameter to cover the risk and make a good decision. Proofs are relegated to [Section A.1](#). Concluding notes are given in [Section 3.5](#)

Throughout the paper we use the standard notation $\xrightarrow{\mathbf{P}}$ and $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ for the convergence in-probability and in-distribution, respectively, and use $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ to denote a normal rv with mean μ and variance σ^2 .

3.2 Estimating the PH premium

We say that a rv X is distributed by the stable law and denote $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, where S_α is the probability density function, if a rv has the characteristic function for $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) := \begin{cases} \exp \left\{ -\sigma |t|^\alpha \left(1 - i\beta \mathbf{sgn}(t) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) + i\mu t \right\} & \text{if } \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ -\sigma |t| \left(1 + \frac{2i\beta}{\pi} \mathbf{sgn}(t) \log |t| \right) + i\mu t \right\} & \text{if } \alpha = 1, \end{cases}$$

with $i^2 = -1$.

Each stable distribution is described by four parameters : the first one and most important is the stability index $\alpha \in (0; 2]$, which is essential when characterizing financial data, it governs the tails of the distribution (the smaller α , the heavier the tails). The case $\alpha = 2$ corresponds to the well-known Gaussian law. The others, respectively, are : skewness $\beta \in [-1, 1]$, when $\beta = 0$, the distribution is said to be symmetric about μ . A position $\mu \in \mathbb{R}$, the parameter of scale $\sigma > 0$. For full details on the stable law, we refer to [Samorodnitsky et Taqqu \(1994\)](#) and [Zolotarev \(1986\)](#).

3.2.1 Some regularity assumptions

When $\alpha < 2$, the lower and upper tails of the cumulative distribution function (cdf) F of X is asymptotically equivalent to those of a Pareto distribution, i.e. they exhibit a power-law behavior. Indeed, from Property 1.2.15 of page 16 in [Samorodnitsky et Taqqu \(1994\)](#), there exist two non-negative constants p and q such that, for $0 < \alpha < 2$,

$$1 - F(x) \sim px^{-\alpha}L(x) \text{ and } F(-x) \sim qx^{-\alpha}L(x), \text{ as } x \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

with

$$p + q = 1, \quad (3.8)$$

this means that both distribution tails are regularly varying at infinity with index $(-\alpha) < 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(-tx)}{F(-t)} = x^{-\alpha}, \quad (3.9)$$

where L is slowly varying function at infinity, i.e. $L(xt)/L(t) \rightarrow 1$ as $x \rightarrow \infty$, for every $t > 0$. Furthermore, condition (3.8) is also referred to as a tail balance condition.

From Theorem 1.2.1 and Corollary 1.2.10 of [de Haan et Ferreira \(2006\)](#), we know that the condition (3.9) is equivalent to

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{Q(1 - ts)}{Q(1 - t)} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{Q(ts)}{Q(t)} = s^{-1/\alpha} \quad (3.10)$$

for every $0 < s < 1$.

For establishing asymptotic distributions we need to introduce the second-order

regular-variation condition with second-order parameter $\omega \leq 0$.

There exists a function $a(t)$ converges to 0 when $t \rightarrow \infty$, does not change its sign for all sufficiently large t , and such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a(t)} \left(\frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} - x^{-\alpha} \right) = x^{-\alpha} \frac{x^{\omega\alpha} - 1}{\omega\alpha} \quad (3.11)$$

for every $x > 0$. When $\omega = 0$, then the ratio $(x^{\omega\alpha} - 1)/(\omega\alpha)$ should be interpreted as $\log x$. In terms of the quantile function Q , condition (3.11) is equivalent to the following one (de Haan et Stadtmüller, 1996 and Theorem 2.3.9 in de Haan et Ferreira, 2006) :

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{A(t)} \left(\frac{Q(1 - tx)}{Q(1 - t)} - x^{-1/\alpha} \right) = x^{-1/\alpha} \frac{x^{-\omega} - 1}{\omega} \quad (3.12)$$

for every $x > 0$, where $A(t) = a(Q(1 - t))/\alpha^2$.

Example 3.2.1 *The Student distribution with parameter $\nu > 0$ is given by the formula*

$$F(x) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^x (1 + z^2/\nu)^{-(\nu+1)/2} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

$\nu > 0$ degrees of freedom and $c_\nu = (\nu\beta(\nu/2, 1/2))^{1/\nu}$ ($c_1 = \pi$, leading to the usually called Cauchy df), where β is the complete Beta function. The second-order regular-variation condition holds with $\omega = -2/\nu$ and $A(t) = (\nu+1)c_\nu^2/\nu(\nu+2)t^{-2/\nu}$.

For application needs, the following regularity assumptions on function J_g are required :

- (H.1) J_g is differentiable on $(0, 1)$.
- (H.2) $\lambda =: \lim_{s \downarrow 0} J_g(1 - s)/J_g(s) < \infty$.

(H.3) Both $J_g(s)$ and $J_g(1-s)$ are regularly varying at zero with common index $\eta \in \mathbb{R}$.

(H.4) There exists a function $b(\cdot)$ not changing sign near zero such that

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{J_g(xt)/J_g(t) - x^\eta}{b(t)} = x^\eta \frac{x^\tau - 1}{\tau},$$

for any $x > 0$, where $\tau \leq 0$ is the second-order parameter.

Since we assume that $E[X] < \infty$ and $E[X^2] = \infty$, the condition $\alpha \in (1, 2)$ that we assume throughout the paper becomes natural, in view of (3.9) or, equivalently, (3.10). Furthermore, since the integral on the right-hand side of (3.1) must be finite, the condition $\rho/\alpha \in (1/2, 2)$ also becomes natural. The distortion parameter ρ is never smaller than 1, then the two conditions can be combined into one :

$$1 \leq \alpha < \rho. \tag{3.14}$$

3.2.2 Estimating the proportional-hazards premium

Let (X_1, \dots, X_n) be a sample, of size $n \geq 1$, drawn from a rv $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ and let $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ denote the corresponding order statistics. The empirical counterpart of $\Psi[g; F]$, and thus of the proportional-hazards premium $\Psi[\rho; F]$, is a linear combination of order statistics (Jones et Zitikis, 2003), known as L -statistic. This opens up a topic of interest recherche for developing statistical inferential results. Using the extreme value theory and Necir et Meraghni (2010) propose an estimator of the measure $\Psi[g; F]$. The proposed semi-parametric estimator $\Psi[g; \hat{F}_n]$ is constructed by plugging $\hat{Q}_n(s)$ instead of $Q(s)$ on the right-hand side

of equation (3.2), which is given by the formula

$$\widehat{Q}_n(s) = \begin{cases} \widehat{Q}_L(s) & \text{for } 0 \leq s \leq \ell/n, \\ Q_n(s) & \text{for } \ell/n < s < 1 - k/n, \\ \widehat{Q}_R(s) & \text{for } 1 - k/n \leq s \leq 1, \end{cases}$$

where

$$\widehat{Q}_L(t) := -(nt/\ell)^{-1/\widehat{\alpha}_L} X_{\ell:n} \text{ and } \widehat{Q}_R(1-t) := (nt/k)^{-1/\widehat{\alpha}_R} X_{n-k:n}, \text{ as } t \downarrow 0, \quad (3.15)$$

are Weissman's estimators of the left and right high quantiles respectively, and $Q_n(s) = X_{i:n}$ for $(i-1)/n < s < i/n$, the empirical estimator of Q . The integers $\ell = \ell_n$ and $k = k_n$ (called trimming sequences) satisfying

$$1 < \ell < n, 1 < k < n, \ell \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty, \ell/n \rightarrow 0 \text{ and } k/n \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

We obtain the estimator as follows :

$$\Psi^*[\rho; \widehat{F}_n] = \int_0^{\ell/n} J_g(s) \widehat{Q}_L(s) ds + \int_{\ell/n}^{1-k/n} J_g(s) Q_n(s) ds + \int_{1-k/n}^1 J_g(s) \widehat{Q}_R(s) ds,$$

with $J_g(s)$ is given in (3.5). Here

$$\widehat{\alpha}_L = \widehat{\alpha}_L(\ell) := \left(\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \log^+(-X_{i-1:n}) - \log^+(-X_{\ell:n}) \right)^{-1} \quad (3.17)$$

and

$$\widehat{\alpha}_R = \widehat{\alpha}_R(k) := \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(X_{n-i+1:n}) - \log^+(X_{n-k:n}) \right)^{-1}, \quad (3.18)$$

with $\log^+(u) := \max(0, \log u)$, are two forms of Hill's estimator for the stability index α (Hill, 1975), respectively based on the left tail and right tail of the distribution. The choice of k and ℓ is a complex issue, for which several adaptive procedures have been proposed in the literature (see, e.g., Reiss et Thomas, 2007; Cheng and Peng, 2001 and references therein).

Note that both of functions $s \mapsto J_g(s) \widehat{Q}_L(s)$ and $s \mapsto J_g(s) \widehat{Q}_R(s)$ are regularly varying with tail indices $1 + \eta - 1/\widehat{\alpha}_L$ and $1 + \eta - 1/\widehat{\alpha}_R$ respectively, then for all large n , we have

$$\int_0^{\ell/n} J_g(s) \widehat{Q}_L(s) ds = -(1 + o(1)) \frac{(\ell/n) J_g(\ell/n)}{1 + \eta - 1/\widehat{\alpha}_L} X_{\ell:n}$$

and

$$\int_{1-k/n}^1 J_g(s) \widehat{Q}_R(s) ds = (1 + o(1)) \frac{(k/n) J_g(1 - k/n)}{1 + \eta - 1/\widehat{\alpha}_R} X_{n-k:n},$$

provided that

$$0 < 1/\widehat{\alpha}_L - \eta < 1 \text{ and } 0 < 1/\widehat{\alpha}_R - \eta < 1.$$

On the other hand, for all large n , we have

$$J_g(\ell/n) = -(1 + o(1)) \frac{(\ell/n)^{1/\rho-1}}{2\rho} \text{ and } J_g(1 - k/n) = (1 + o(1)) \frac{(k/n)^{1/\rho-1}}{2\rho}.$$

Then, instead of $\Psi^*[\rho; \widehat{F}_n]$, we may use

$$\Psi[\rho; \widehat{F}_n] := -\frac{(\ell/n)^{1/\rho}}{2(1 - \rho/\widehat{\alpha}_L)} X_{\ell:n} + \sum_{j=\ell+1}^{n-k} a_{j,n}^{(\rho)} X_{j:n} + \frac{(k/n)^{1/\rho}}{2(1 - \rho/\widehat{\alpha}_R)} X_{n-k:n}, \quad (3.19)$$

where, for $i = 1, \dots, n$,

$$a_{i,n}^{(\rho)} := \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^{1/\rho} - \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{1/\rho} - \left(\frac{i-1}{n}\right)^{1/\rho} + \left(\frac{i}{n}\right)^{1/\rho} \right]. \quad (3.20)$$

For more details, one refers to [Necir et Meraghni \(2010\)](#).

3.3 Estimating the distortion index

The function $\rho \mapsto \Psi[\rho; F]$ takes on the smallest value $\mu_F = \mathbf{E}[X]$ when $\rho = 1$ and increases when $\rho \rightarrow \infty$. With $x \mapsto \Psi^{-1}[x; F]$ denoting the inverse of the function $\rho \mapsto \Psi[\rho; F]$, the parameter ρ satisfying equation (3.6) can be written as

$$\rho = \Psi^{-1}[c[F]; F], \quad (3.21)$$

provided that

$$c[F] \geq \mu_F. \quad (3.22)$$

Property (3.22) is known in the literature as non-negative loading. It is a property needed for the insurer to avoid insolvency.

The topic of estimating the distortion parameter ρ was initiated by [Jones et Zitikis \(2007\)](#). The estimator $\hat{\rho}$ of the ρ is defined as the solution to the equation $\Psi[\hat{\rho}; \hat{F}_n] = c[\hat{F}_n]$ and can be written as

$$\hat{\rho} = \Psi^{-1}[c[\hat{F}_n]; \hat{F}_n], \quad (3.23)$$

where $x \mapsto \Psi^{-1}[x; \hat{F}_n]$ is the inverse of the function $\rho \mapsto \Psi[\rho; \hat{F}_n]$. The estimator

$\widehat{\rho}$ is well-defined provided that

$$c[\widehat{F}_n] \geq \widehat{\mu}_n. \tag{3.24}$$

We denote by $G(x) := \mathbb{P}(|X| \leq x) = F(x) - F(-x)$, $x > 0$, the df of $Z = |X|$, then the tail $1 - G$ is regularly varying at infinity with index $(-\alpha)$. That is

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - G(tx)}{1 - G(t)} = x^{-\alpha}.$$

We note in passing that the CTE estimator $\widehat{\text{CTE}}_n(t)$ as a heavy-tailed alternative to the classical empirical one was suggested by Necir *et al.* (2010), who also established its asymptotic distribution. So the estimator $c[\widehat{F}_n]$ is given by

$$\begin{aligned} c[\widehat{F}_n] &= \widehat{\text{CTE}}_n(t) = \frac{1}{1-t} \int_t^1 \widehat{Q}_n(s) ds \\ &= \frac{1}{1-t} \int_t^{1-m/n} Q_n(s) ds + \frac{mZ_{n-m:n}}{n(1-t)(1-1/\widehat{\alpha}_m)}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

for the stability index α_m which could also be estimated, using the order statistics $Z_{1:n} \leq \dots \leq Z_{n:n}$ associated to a sample X_1, \dots, X_n from $|X|$, as follows :

$$\widehat{\alpha}_m := \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log^+(Z_{n-i+1:n}) - \log^+(Z_{n-m:n}) \right)^{-1}, \tag{3.26}$$

and $m = m_n$ being an intermediate sequence fulfilling the same conditions

$$m \rightarrow \infty, 1 \leq m \leq n \text{ and } m/n \rightarrow 0 \text{ when } n \rightarrow \infty, \tag{3.27}$$

as k and ℓ .

The nonnegative loading properties (3.22) and (3.24) assure that the distorsion parameter ρ and its estimator $\hat{\rho}$ are well defined, but they do not imply consistency of the estimator, let alone its asymptotic distribution. For this reason, Jones et Zitikis (2007) impose the assumptions

$$c[\hat{F}_n] \xrightarrow{\mathbf{P}} c[F] \tag{3.28}$$

and

$$\frac{n^{1/2} \left(c[\hat{F}_n] - c[F] \right)}{(m/n)^{1/\rho-1/2} Q(1-m/n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \tag{3.29}$$

in the heavy-tailed setting (see, Brahim *et al.*, 2011). The two assumptions are natural in their respective contexts and hold for a large variety of exogenous premiums, including in Tables 1.1 and 3.2 in Brahim *et al.* (2011).

Based on the estimator $\hat{\rho}$, the following two theorems, which are accompanied by several corollaries, lay the theoretical foundations for our statistical inferential theory concerning the distorsion parameter ρ . Proofs are complex and relegated to Section A.1.

Theorem. 3.3.1 (Consistency) *Assume that F satisfies first-order regularly-variation condition (3.9) with $\alpha \in (1, 2)$, and let the quantile function Q be continuous on the interval $(0, 1)$. Furthermore, let $\ell = \ell_n$, $k = k_n$ and $m = m_n$ be integers satisfying conditions ((3.16), (3.27)). When $1 < \alpha < \rho$ and the functional $c[\cdot]$ satisfies the consistency assumption (3.28), then $\hat{\rho} \xrightarrow{\mathbf{P}} \rho$ when $n \rightarrow \infty$.*

The following corollary to Theorem 3.3.1 concerns with the CTE exogenous measure.

Corollary 3.3.1 *Assume that F satisfies first-order regularly-variation condition (3.9) with $\alpha \in (1, 2)$, and let the quantile function Q be continuous on the interval $(0, 1)$. Furthermore, let $\ell = \ell_n$, $k = k_n$, be integers satisfying conditions (3.16). Assuming $1 < \alpha < \rho$, we have $\widehat{\rho} \xrightarrow{\mathbf{P}} \rho$ when $n \rightarrow \infty$.*

Our second main theorem concerns with the asymptotic normality of the estimator $\widehat{\rho}$.

Theorem. 3.3.2 (Asymptotic normality) *Assume that the second-order regularly-variation condition (3.11) holds with some $\alpha \in (1, 2)$ and let the quantile function Q be continuous on the interval $(0, 1)$. Furthermore, let $\ell = \ell_n$, $k = k_n$ and $m = m_n$ be integers satisfying conditions (3.16, 3.27) with $k/\ell \rightarrow \theta$ and such that $\sqrt{\ell}a(\ell/n)A(\ell/n) \rightarrow 0$, and $k^{1/2}A(k/n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. When $1 < \alpha < \rho$ and the functional $c[\cdot]$ satisfies assumption (3.29), then we have*

$$\frac{n^{1/2}\mathcal{D}(\rho; Q)}{(k/n)^{1/\rho-1/2}Q(1-k/n)\sigma(\rho; \alpha)}(\widehat{\rho} - \rho) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.30)$$

where

$$\mathcal{D}(\rho; Q) = \int_0^1 (\rho^{-2} + \rho^{-3} \log s) s^{1/\rho-1} Q(1-s) ds$$

and

$$\sigma^2(\rho; \alpha) = \frac{1 + (p/q)^{-2/\alpha} \theta^{2/\alpha-2/\rho+1}}{4\rho} \left(\frac{\alpha^2 \rho^3 + \rho(\alpha - \rho)^2}{2(\alpha - \rho)^4} + \frac{1}{\alpha - \rho} \right) + 1. \quad (3.31)$$

Corollary 3.3.2 *Under the assumptions of Theorem 3.3.2, we have*

$$\frac{n^{1/2}\mathcal{D}(\rho; Q)}{(k/n)^{1/\rho-1/2}Q(1-k/n)\sigma(\rho; \alpha)}(\widehat{\rho} - \rho) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.32)$$

The following corollary to Theorem 3.3.2 leads us directly to constructing a practical confidence interval for the parameter ρ .

Corollary 3.3.3 *Under the assumptions of Theorem 3.3.2, we have*

$$\frac{n^{1/2} \Delta(\widehat{\rho}; \widehat{\alpha}_L; \widehat{\alpha}_R)}{(k/n)^{1/\widehat{\rho}-1/2} X_{n-k:n} \sigma(\widehat{\rho}; \widehat{\alpha}_m)} (\widehat{\rho} - \rho) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.33)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta(\widehat{\rho}; \widehat{\alpha}_L; \widehat{\alpha}_R) = & -\frac{1}{2} \frac{(\ell/n)^{1/\widehat{\rho}}}{\widehat{\alpha}_L (1 - \widehat{\rho}/\widehat{\alpha}_L)^2} X_{\ell:n} \left(1 + \frac{\widehat{\rho} - \widehat{\alpha}_L}{\widehat{\rho}^2} \ln(\ell/n) \right) \\ & + \frac{1}{2\widehat{\rho}^2} \sum_{i=\ell+1}^{n-k} \left[\binom{n-i}{n}^{1/\widehat{\rho}} \log \binom{n-i}{n} - \left(1 + \frac{1-i}{n} \right)^{1/\widehat{\rho}} \log \left(1 + \frac{1-i}{n} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{i}{n} \right)^{1/\widehat{\rho}} \log \left(\frac{i}{n} \right) + \left(\frac{i-1}{n} \right)^{1/\widehat{\rho}} \log \left(\frac{i-1}{n} \right) \right] X_{i:n} \\ & + \frac{1}{2} \frac{(k/n)^{1/\widehat{\rho}}}{\widehat{\alpha}_R (1 - \widehat{\rho}/\widehat{\alpha}_R)^2} \left(1 + \frac{\widehat{\rho} - \widehat{\alpha}_R}{\widehat{\rho}^2} \ln(k/n) \right) X_{n-k:n}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Since a consistent estimator of $\mathcal{D}(\rho; Q)$ is needed to arrive at a practical useful reformulation of statement (3.30), we have replaced $\mathcal{D}(\rho; Q)$ by $\mathcal{D}(\widehat{\rho}; \widehat{Q}_n)$, which is equal to $\Delta(\widehat{\rho}; \widehat{\alpha})$, and arrived at Corollary 3.3.3. In principle, we could have replaced $\mathcal{D}(\rho; Q)$ by $\mathcal{D}(\widehat{\rho}; Q_n)$ and thus obtained

$$\frac{n^{1/2} \mathcal{D}(\widehat{\rho}; Q_n)}{(k/n)^{1/\widehat{\rho}-1/2} X_{n-k:n} \sigma(\widehat{\rho}; \widehat{\alpha}_m)} (\widehat{\rho} - \rho) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.35)$$

where $\mathcal{D}(\widehat{\rho}; Q_n)$ can be expressed by the following computational convenient for-

mula :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widehat{\rho}; Q_n) = \frac{1}{2\widehat{\rho}^2} \sum_{i=\ell+1}^{n-k} \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{n-i}{n}\right)^{1/\widehat{\rho}} \log \left(\frac{n-i}{n}\right) - \left(1 + \frac{1-i}{n}\right)^{1/\widehat{\rho}} \log \left(1 + \frac{1-i}{n}\right) \right. \\ \left. - \left(\frac{i}{n}\right)^{1/\widehat{\rho}} \log \left(\frac{i}{n}\right) + \left(\frac{i-1}{n}\right)^{1/\widehat{\rho}} \log \left(\frac{i-1}{n}\right) \right] X_{i:n}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Having this expression, we can now easily compare the estimators $\mathcal{D}(\widehat{\rho}; Q_n)$ and $\mathcal{D}(\widehat{\rho}; \widehat{Q})$ by comparing the right-hand sides of equations (3.36) and (3.34).

3.4 Simulation and study application

3.4.1 Performance of the estimator

Let z_ξ denote the $(1 - \xi/2)$ -quantile of the standard normal rv $\mathcal{N}(0, 1)$. Given a realization x_1, \dots, x_n of the iid. rv's X_1, \dots, X_n from a α -stable population satisfying the required assumptions and let $Z_i = |Z_i|, i = 1, \dots, n$, we construct a $(1 - \xi)100\%$ confidence interval for ρ via the following five steps :

Step 1 : Using one of the algorithms available in the literature (e.g., see references below condition (3.16) in Section 3.2), to select the optimal numbers k^*, ℓ^* and m^* of lower and upper-order statistics used in (3.17), (3.18) and (3.26).

Step 2 : Compute $\alpha_L^* := \alpha_L(\ell^*), \alpha_m^* := \alpha_m(m^*), \alpha_R^* := \alpha_R(k^*), X_{\ell^*:n}, X_{n-k^*:n}, Z_{n-m^*:n}, \theta^* = k^*/\ell^*$ and $c[\widehat{F}_n^*]$ by using (3.25).

Step 3 : Solve (numerically) the equation

$$-\frac{(\ell^*/n)^{1/\rho} X_{\ell^*:n}}{2(1 - \rho/\alpha_L^*)} + \sum_{j=\ell^*+1}^{n-k^*} a_{j,n}^{(\rho)} X_{j:n} + \frac{(k^*/n)^{1/\rho} X_{n-k^*:n}}{2(1 - \rho/\alpha_R^*)} = c[\widehat{F}_n^*],$$

with respect to ρ and denote the solution by ρ^* .

Step 4 : Compute $\sigma(\rho^*; \alpha_m^*)$ using formula (3.31), and also $\Delta(\rho^*; \alpha_L^*; \alpha_R^*)$ using formula (3.34).

Step 5 : With the above quantities, Corollary 3.3.3 yields the $(1 - \xi)100\%$ -confidence interval

$$\rho^* \pm z_{\xi/2} \frac{(k^*/n)^{1/\rho^*-1/2} X_{n-k^*:n} \sigma(\rho^*; \alpha_m^*)}{n^{1/2} \Delta(\rho^*; \alpha_L^*; \alpha_R^*)},$$

for the distortion index ρ .

We next provide details pertaining to our simulation study and the implementation of the above five steps. First, we choose the tail indices $\alpha = 1.5$ and $\alpha = 1.7$, we choose the levels $t = 0.75$ and $t = 0.80$ in (3.25). For each of the four couples (α, t) , we calculate the corresponding values for the distortion index ρ . The resulting of ρ values is recorded in Table 3.1. Note that the values of ρ satisfy the assumption (3.14) respectively of the value of α .

Tail index α	1.5	1.5	1.7	1.7
Levels t	0.75	0.80	0.75	0.80
CTE(t)	2.81008	3.23823	2.24489	2.53500
True distortion parameter ρ	1.71517	1.79113	1.87316	1.95507
Estimated distortion parameter $\hat{\rho}$	1.50282	1.52873	1.79283	1.84072
Absolute error	0.21234	0.26240	0.08032	0.11434
Standard deviation	0.12420	0.12927	0.08960	0.08393
Root mean square deviation	0.24597	0.29249	0.12030	0.14182

TAB. 3.1 – Point estimation of the distortion parameter ρ based on 1000 samples, each of size 5000, from the α -stable population.

We illustrate the performance of the estimator $\hat{\rho}$ in a little simulation study, with results summarized in Table 3.1, where we also present absolute error, standard

deviation, and root mean square deviation.

Next we investigate the accuracy of the confidence interval by computing its length and the empirical coverage probability (denoted by ‘covpr’). For this, we generate 1000 samples of various size n from the α -stable population. The results are summarized in Table 3.2 when $\alpha = 1.7$ and $\rho = 1.87316$, where ‘lcb’ and ‘ucb’ stand for the lower and upper confidence bounds, respectively.

n	lcb	$\hat{\rho}$	ucb	covpr	length
1000	1.114853	1.732056	2.349259	0.721	1.23440
3000	1.617531	1.944924	2.230525	0.842	0.61299
5000	1.703297	1.803631	2.077513	0.887	0.37422
10000	1.742159	1.856700	1.976977	0.913	0.23482
50000	1.766030	1.871484	1.930660	0.942	0.16463

TAB. 3.2 – Accuracy of 95% confidence intervals for ρ based on 1000 samples from the α -stable population with $\alpha = 1.7$ and $\rho = 1.87316$.

The confidence bounds are graphically illustrated in Figure 3.1.

3.4.2 Financial application of risk aversion parameter

In this section we want to apply the risk aversion parameter to financial data. We analyzed 800 observations from four European stock indices return series calculated by $\log(X_{t+1}/X_t)$ during the period 1991 to July 1994 available in "QRM and data sets packages" of the R software, it contains the daily closing prices of major European stock indices : Germany DAX (Ibis), Switzerland SMI, France CAC and UK FTSE. The data are sampled in business time, i.e., weekends and holidays are omitted. By using the "fBasics" package in R software, based on the maximum likelihood estimators to fit the parameters of a df's of the four Market

Index returns with α -stable distribution which is a reasonable improvement to the alternative distributions, the results are summarized in Table 3.3.

	DAX	SMI	CAC	FTSE
α	1.61400	1.67500	1.700000	1.93800
β	0.78000	-0.26300	-0.117000	0.60100
σ	0.00516	0.00511	0.006538	0.00515
μ	-0.00063	0.00113	0.000132	-0.00012

TAB. 3.3 – Maximum likelihood fit of four-parameters stable distribution to 800 observations of four European stock indices returns data during the period 1991 to July 1994.

Each stable distribution $S_\alpha(\sigma; \beta; \mu)$ has the stability index α that can be treated as the main parameter, when we make an investment decision, skewness parameter β , in the range $[-1, 1]$, scale parameter σ and shift parameter μ . In models that use financial data, it is generally assumed that $\alpha \in (1, 2]$.

By applying Reiss and Thomas algorithm (Reiss et Thomas, 2007, page 173) we select the optimal sample fraction k^* the optimal number of upper extremes used in the computation of the tail index estimate. Here $\hat{\alpha}$ is defined by the equations (3.17, 3.18 and 3.26). By this methodology, one defines the optimal sample fraction k^* , ℓ^* and m^* by

$$k^* = \arg \min_k \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i^\theta |\hat{\alpha}(i) - \text{median} \{\hat{\alpha}(1), \dots, \hat{\alpha}(k)\}|,$$

with suitable constant $0 \leq \theta \leq 1/2$. The quantity $\hat{\alpha}_i$ corresponds for Hill estimator based on the i upper extremes of the shape parameter α . The value for $\theta = 0.3$ have observed by Neves et Fraga Alves (2004). We apply this step for the four Market Index returns given in (3.25), the results are summarized in Table 3.4.

	DAX	SMI	CAC	FTSE
k^*	118	84	122	131
$\widehat{\alpha}_R$	2.583251	2.898177	2.768243	2.642842
ℓ^*	152	175	178	179
$\widehat{\alpha}_L$	1.672612	1.623253	1.661461	1.804873
m^*	91	81	91	104
$\widehat{\alpha}_M$	2.984393	3.146175	3.256041	3.405648

TAB. 3.4 – Hill’s estimators of tails index and optimal sample fraction to 800 observations of four European stock indices returns data during the period 1991 to July 1994.

Solve (numerically) the equation

$$-\frac{(\ell/n)^{1/\rho} x_{\ell:n}}{2(1-\rho/\alpha_L)} + \sum_{j=\ell+1}^{n-k} a_{j,n}^{(\rho)} x_{j:n} + \frac{(k/n)^{1/\rho} x_{n-k:n}}{2(1-\rho/\alpha_R)} = c[\widehat{F}_n],$$

with respect to ρ and denote the solution by $\widehat{\rho}$, by using (3.25) with $t = 0.75$, we get the Table 3.5.

	DAX	SMI	CAC	FTSE
$\widehat{\rho}$	1.329002	1.281719	1.317185	1.379832

TAB. 3.5 – Risk aversion parameter to 800 observations of four European stock indices returns data during the period 1991 to July 1994.

From Table 3.5, the order of risk from the largest to smallest of the four European stock indices returns data are respectively, SMI, CAC, DAX and FTSE.

3.5 Concluding notes

We have proposed an asymptotically normal estimator for the distortion parameter of the proportional-hazard risk measure designed to work in the case of non

negative heavy-tailed losses. The aim of this paper has been to provide a practically applicable parameter that can be used, for example, for monitoring the degree of risk of financial institutions like stock index return series.

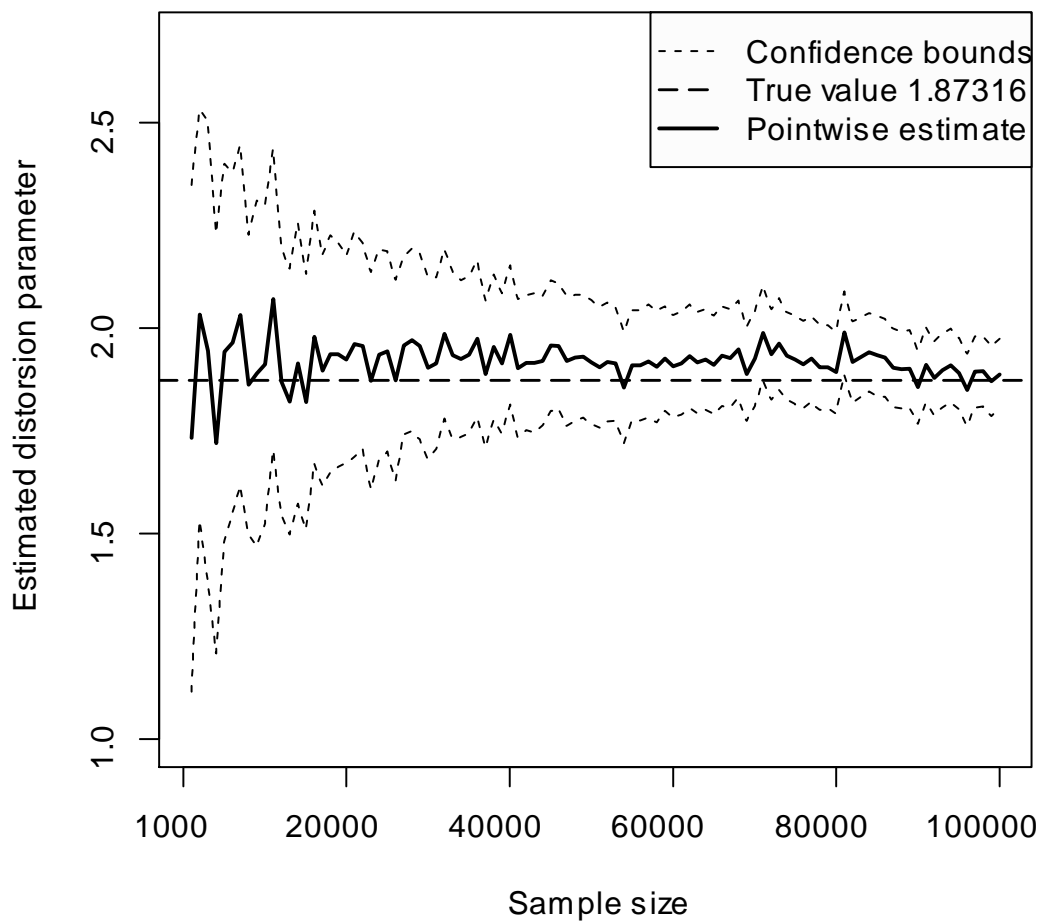


FIG. 3.1 – Confidence bounds for ρ based on 100 samples of size n ranging from 1000 to 100000 from the α -stable population with $\alpha = 1.7$. The horizontal line represents the true value $\rho = 1.87316$.

Annexe A

Preuves et Code R

A.1 Preuves

The following lemma plays a fundamental role when establishing Theorem 3.3.1.

Lemma A.1.1 *Let the assumptions of Theorem 3.3.1 hold. For any ρ such that $1 < \alpha < \rho$, we have $\Psi[\rho; \widehat{F}_n] \xrightarrow{\mathbf{P}} \Psi[\rho; F]$ when $n \rightarrow \infty$. Setting $\rho = 1$, we get $\widehat{\mu}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu_F$.*

Proof. An application of the standard calculus on the right-hand side of equation (3.2) gives the representation

$$\begin{aligned} \Psi[\rho; F] &= \frac{1}{\rho} \int_0^1 s^{1/\rho-1} Q(1-s) ds. \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\int_0^{\ell/n} + \int_{\ell/n}^{1-k/n} + \int_{1-k/n}^1 \right) s^{1/\rho-1} Q(1-s) ds. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Using equations (3.19) and (A.1), we obtain

$$\begin{aligned}
\Psi \left[\rho; \widehat{F}_n \right] - \Psi \left[\rho; F \right] &= -\frac{(\ell/n)^{1/\rho}}{2(1-\rho/\widehat{\alpha}_L)} X_{\ell:n} \\
&+ \sum_{j=\ell+1}^{n-k} a_{j,n}^{(\rho)} X_{j:n} - \frac{1}{\rho} \int_{\ell/n}^{1-k/n} s^{1/\rho-1} Q(1-s) ds \\
&+ \frac{(k/n)^{1/\rho}}{2(1-\rho/\widehat{\alpha}_R)} X_{n-k:n} \\
&- \frac{1}{\rho} \int_{1-k/n}^1 s^{1/\rho-1} Q(1-s) ds - \frac{1}{\rho} \int_0^{\ell/n} s^{1/\rho-1} Q(1-s) ds \\
&= A_{n1} + A_{n2} + A_{n3} - A_{n4}, \tag{A.2}
\end{aligned}$$

where the right-most equation defines the four A_{ni} 's. They converge to 0 in probability as we shall prove next.

Since $k/n \rightarrow 0$ and $\ell/n \rightarrow 0$ when $n \rightarrow 0$, the finiteness of the integral on the right-hand side of equation (A.1) implies $A_{n4} \rightarrow 0$. To prove that $A_{n1} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ and $A_{n3} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, we first note that $\widehat{\alpha} \xrightarrow{\mathbf{P}} \alpha$ (Mason, 1982) and since $1 - \alpha/\rho > 0$ by assumption, the statements $A_{n1} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ and $A_{n3} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ follows from, respectively, $(\ell/n)^{1/\rho} X_{\ell:n} \rightarrow 0$ and $(k/n)^{1/\rho} X_{n-k:n} \rightarrow 0$, which we need to prove. For this, we use the fact that $X_{\ell:n}$ is equal to $Q_n(\ell/n)$ and $X_{n-k:n}$ is equal to $Q_n(1-k/n)$ and write the equations

$$\begin{aligned}
(\ell/n)^{1/\rho} X_{\ell:n} &= (\ell/n)^{1/\rho} Q(\ell/n) \frac{Q_n(\ell/n)}{Q(\ell/n)}, \\
(k/n)^{1/\rho} X_{n-k:n} &= (k/n)^{1/\rho} Q(1-k/n) \frac{Q_n(1-k/n)}{Q(1-k/n)}. \tag{A.3}
\end{aligned}$$

We know that $Q_n(1-k/n)/Q(1-k/n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ (see, e.g., statement (4.20) in Necir *et al.*, 2010), with the same reasoning, we have $Q_n(\ell/n)/Q(\ell/n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$. Furthermore,

since $s \rightarrow Q(1 - s)$ is regularly varying at zero with the index $(-1/\alpha)$, we have $(\ell/n)^{1/\rho}Q(\ell/n) \rightarrow 0$ and $(k/n)^{1/\rho}Q(1 - k/n) \rightarrow 0$ because $1/\rho > 0$, $\ell/n \rightarrow 0$ and $k/n \rightarrow 0$. This establishes the statements $A_{n1} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ and $A_{n3} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. We are left to verify $A_{n2} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. We start with the equations

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=\ell+1}^{n-k} a_{j,n}^{(\rho)} X_{j:n} &= \int_{X_{\ell:n}}^0 (F_n(-x))^{1/\rho} dx + \int_0^{X_{n-k:n}} (1 - F_n(x))^{1/\rho} dx \\
 &= \frac{1}{\rho} \int_0^1 s^{1/\rho-1} \min\{Q_n(s), X_{\ell:n}\} ds \\
 &\quad + \frac{1}{\rho} \int_0^1 s^{1/\rho-1} \min\{Q_n(1 - s), X_{n-k:n}\} ds \\
 &= \frac{1}{\rho} \int_0^1 s^{1/\rho-1} Q_n(\max\{s, \ell/n\}) ds \\
 &\quad + \frac{1}{\rho} \int_0^1 s^{1/\rho-1} Q_n(1 - \max\{s, k/n\}) ds \\
 &= \left(\frac{\ell}{n}\right)^{1/\rho} Q_n(\ell/n) + \frac{1}{\rho} \int_0^{\ell/n} s^{1/\rho-1} Q_n(s) ds \\
 &\quad + \left(\frac{k}{n}\right)^{1/\rho} Q_n(1 - k/n) + \frac{1}{\rho} \int_{1-k/n}^1 s^{1/\rho-1} Q_n(1 - s) ds,
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

where the third equation follows from $X_{\ell:n} = Q_n(\ell/n)$ and $X_{n-k:n} = Q_n(1 - k/n)$. We know from notes following equation (A.3) that $(\ell/n)^{1/\rho}Q_n(\ell/n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ and $(k/n)^{1/\rho}Q_n(1 - k/n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Consequently, we complete the proof of $A_{n1} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ by showing that

$$\int_0^{\ell/n} s^{1/\rho-1} (Q_n(s) - Q(s)) ds \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \tag{A.5}$$

and

$$\int_{1-k/n}^1 s^{1/\rho-1} (Q_n(1 - s) - Q(1 - s)) ds \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \tag{A.6}$$

The statement (A.6) was proved in [Brahimi et al. \(2011\)](#). To this end, we rewrite statements (A.5) using independent and uniformly on $(0, 1)$ distributed

rv's U_1, U_2, \dots, U_n . Let q_n denote the corresponding quantile function. Hence, the quantile process $\{Q_n(s), 0 \leq s \leq 1\}$ is equal in distribution to $\{Q(q_n(s)), 0 \leq s \leq 1\}$. Furthermore, since $\{U_{i:n}\}_{i=1}^n \stackrel{D}{=} \{1 - U_{n-i+1:n}\}_{i=1}^n$, the process $\{q_n(s), 0 \leq s \leq 1\}$ is equal in distribution to $\{1 - q_n(1 - s), 0 \leq s \leq 1\}$. Consequently, the statement (A.5) is equivalent to

$$\int_0^{\ell/n} s^{1/\rho-1} (Q(q_n(s)) - Q(s)) ds \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (\text{A.7})$$

Choose any small $\epsilon > 0$. Since $\sup_{0 < s < 1} |q_n(s) - s| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ and the quantile function Q is continuous, we have $\int_\epsilon^1 s^{1/\rho-1} |Q(q_n(s)) - Q(s)| ds \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ when $n \rightarrow \infty$. This reduces the proof of the statement (A.7) to showing that by choosing a sufficiently small $\epsilon > 0$ we can make the integral

$$\int_\epsilon^{\ell/n} s^{1/\rho-1} (Q(q_n(s)) - Q(s)) ds$$

as small as desired for all sufficiently large n . The integral $\int_\epsilon^0 s^{1/\rho-1} Q(s) ds$ can obviously be made as small as desired by choosing a sufficiently small $\epsilon > 0$. Hence, we are left to show that the integral $\int_\epsilon^{\ell/n} s^{1/\rho-1} Q(q_n(s)) ds$ can be made as small as desired for all sufficiently large n by choosing a sufficiently small $\epsilon > 0$. For this, we use a result of [Wellner \(1978\)](#) saying that the quantity $r_n = \sup_{1/n < s < 1} |q_n(s)/s - 1|$ converges to 0 in probability. Next, we write the bound

$$\int_\epsilon^{\ell/n} s^{1/\rho-1} Q(q_n(s)) ds \leq \int_\epsilon^{\ell/n} s^{1/\rho-1} Q(s(1 - r_n)) ds. \quad (\text{A.8})$$

Changing the variable of integration s into $s/(1 - r_n)$, we achieve the desired smallness of the right-hand side of bound (A.8) because the integral $\int_{\epsilon(1-r_n)}^0 s^{1/\rho-1} Q(s) ds$

can be made as small as desired for all sufficiently large n by choosing a sufficiently small $\epsilon > 0$. This completes the proof of the statement (A.7), and of $A_{n2} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ as well.

In summary, we have shown that the three A_{ni} 's on the right-hand side of equation (A.2) converge to 0. This completes the proof of Lemma A.1.1. ■

Proof of Theorem 3.3.1.. The proof of Theorem 3.3.1 is straightforward by using similar arguments as the proof of Theorem 3.1 in [Brahimi et al. \(2011\)](#), therefore the details are omitted. ■

Proof of Corollary 3.3.1.. We only need to verify that $c[\widehat{F}_n] \xrightarrow{\mathbf{P}} c[F]$ when $n \rightarrow \infty$, so for $j = 3$ in the proof of Corollary 3.1 of [Brahimi et al. \(2011\)](#), this concludes the proof of Corollary 3.3.1. ■

From now on, we are concerned with proven Theorem 3.3.2 and Corollaries 3.3.2 and 3.3.3. The following two Theorems of ([Necir et Meraghni, 2010](#), Theorem 4.2) play an important role.

Theorem. A.1.1 *Under the assumptions of Theorem 3.3.2, we have*

$$\frac{n^{1/2} \left(\Psi \left[\rho; \widehat{F}_n \right] - \Psi \left[\rho; F \right] \right)}{(k/n)^{1/\rho-1/2} X_{n-k:n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \sigma^2(\rho; \alpha) \right), \quad (\text{A.9})$$

where $\sigma^2(\rho; \alpha)$ is defined in Theorem 3.3.2.

In fact, the result of Theorem A.1.1 is proved by [Necir et Meraghni \(2010\)](#) assuming that the quantile function Q is continuously differentiable on the interval $(0, 1)$, whereas we find only the continuity of Q among the assumptions of Theorem 3.3.2. The current formulation of the result of [Necir et Meraghni \(2010\)](#) is due to

the fact that we can dispense with the differentiability condition by slightly modifying the proof [Necir et Meraghni \(2010\)](#) by relying mainly on empirical processes and not so much on quantile processes.

The statement [\(A.9\)](#) is needed to constructing a practical confidence interval for the proportional-hazards premium $\Psi[\rho; F]$, given a value of ρ .

Lemma A.1.2 *Under the assumptions of Theorem [3.3.2](#), when $1 < \alpha < \rho$, then*

$$\frac{\Psi[\widehat{\rho}; \widehat{F}_n] - \Psi[\rho; \widehat{F}_n]}{\widehat{\rho} - \rho} \xrightarrow{\mathbf{P}} -\mathcal{D}(\rho; Q). \quad (\text{A.10})$$

Proof. The proof of Lemma [A.1.2](#) is straightforward by using similar arguments as the proof of Lemma 5.2 in [Brahimi et al. \(2011\)](#), therefore the details are omitted. ■

Proof of Theorem [3.3.2](#). Recall that $\Psi[\rho; F] = c[F]$ and $\Psi[\widehat{\rho}; \widehat{F}_n] = c[\widehat{F}_n]$. Hence,

$$\Psi[\rho; \widehat{F}_n] - \Psi[\widehat{\rho}; \widehat{F}_n] = \left(\Psi[\rho; \widehat{F}_n] - \Psi[\rho; F] \right) - \left(c[\widehat{F}_n] - c[F] \right).$$

Then we have that

$$\begin{aligned} \frac{n^{1/2} \left(\Psi[\rho; \widehat{F}_n] - \Psi[\widehat{\rho}; \widehat{F}_n] \right)}{(k/n)^{1/\rho-1/2} Q(1-k/n)} &= \frac{n^{1/2} \left(\Psi[\rho; \widehat{F}_n] - \Psi[\rho; F] \right)}{(k/n)^{1/\rho-1/2} Q(1-k/n)} - \frac{n^{1/2} \left(c[\widehat{F}_n] - c[F] \right)}{(k/n)^{1/\rho-1/2} Q(1-k/n)} \\ &= \frac{n^{1/2} \left(\Psi[\rho; \widehat{F}_n] - \Psi[\rho; F] \right)}{(k/n)^{1/\rho-1/2} Q(1-k/n)} \\ &\quad - \frac{n^{1/2} \left(c[\widehat{F}_n] - c[F] \right)}{(m/n)^{1/\rho-1/2} Q(1-m/n)} \frac{(m/n)^{1/\rho-1/2} Q(1-m/n)}{(k/n)^{1/\rho-1/2} Q(1-k/n)}. \end{aligned}$$

Applying statement (A.9) and assumption (3.29) on the right-hand side, and

$$\frac{(m/n)^{1/\rho-1/2}Q(1-m/n)}{(k/n)^{1/\rho-1/2}Q(1-k/n)} \rightarrow 1,$$

we obtain

$$\frac{n^{1/2} \left(\Psi \left[\rho; \widehat{F}_n \right] - \Psi \left[\widehat{\rho}; \widehat{F}_n \right] \right)}{(k/n)^{1/\rho-1/2}Q(1-k/n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\rho; \alpha)). \quad (\text{A.11})$$

Statement (A.11) together with Lemma A.1.2 imply the statement (3.30), thus completing the proof of Theorem 3.3.2. ■

Proof of Corollary 3.3.2..

We only need to verify the assumption

$$\frac{n^{1/2} \left(c[\widehat{F}_n] - c[F] \right)}{(m/n)^{1/\rho-1/2}Q(1-m/n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (\text{A.12})$$

Indeed, for $j = 3$ in the proof of Corollary 3.2 of [Brahimi et al. \(2011\)](#), we have for any fixed $t \in (0, 1)$ and for every fixed $\rho > 1$ such as $(m/n)^{1-1/\rho} \rightarrow 0$

$$\frac{n^{1/2} \left(\widehat{\text{CTE}}_n(t) - \text{CTE}_F(t) \right) (1-t)}{(m/n)^{1/2}Q(1-m/n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\alpha^2), \quad (\text{A.13})$$

where the asymptotic variance σ_α^2 is defined by

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^4(2-\alpha)}.$$

The proof of Corollary 3.3.1 is finished. ■

Proof of Corollary 3.3.3. The proof of Corollary 3.3.3 is straightforward by using similar arguments as the proof of Corollary 3.3 in [Brahimi et al. \(2011\)](#),

therefore the details are omitted. ■

A.2 Code R

```
data(EuStockMarkets)
rEuS=diff(log(EuStockMarkets[1 :801, 1 :4]))
N=length(rEuS)/4
dax=rEuS[, "DAX"]
smi=rEuS[, "SMI"]
cac=rEuS[, "CAC"]
fts=rEuS[, "FTSE"]
X=smi
Y<-sort(X)
Z<-sort(abs(X))
W<-N/sqrt(log(N))
V<-W/2
w<-floor(W)
v<-floor(V)
lev<-0.05
nq<-qnorm(1-lev/2)
#####Hill droite cheng peng#####
M11<-(1/w)*sum(log(Y[(N-w+1) :N]))-log(Y[N-w])
M12<-(1/v)*sum(log(Y[(N-v+1) :N]))-log(Y[(N-v)])
M21<-(1/w)*sum((log(Y[N : (N-w+1)]))^2)-(2/w)*(log(Y[N-w]))
*sum(log(Y[N : (N-w+1)]))+log(Y[N-w]))^2
```

```

M22<-(1/v)*sum((log(Y[N : (N-v+1)]))^2)-(2/v)*(log(Y[N-v]))
*sum(log(Y[N : (N-v+1)]))+(log(Y[N-v]))^2
ro<-abs((1/log(2))*log(abs((M22-2*(M12^2))/(M21-2*(M11^2))))))
d<-(M21-2*(M11^2))*(1+ro)*((sqrt(log(N)))^ro)/(2*(M11^2)*ro)
K<-function(t){if (t>0)
(((1+2*(nq^2))/(3*t*(1+2*ro))))^(1/(1+ro))*(N^(ro/(1+ro)))
else
(((1+2*(nq^2))/(-3*t))^(1/(1+ro)))*(N^(ro/(1+ro))))}
k1<-floor(K(d))
k1
hillR<-1/((1/k1)*sum(log(Y[(N-k1+1) :N]))-log(Y[(N-k1)]))
hillR
##### Hill gauche cheng peng#####
N11<-(1/w)*sum(log(-Y[1 : (w-1)]))-log(-Y[w])
N12<-(1/v)*sum(log(-Y[1 : (v-1)]))-log(-Y[v])
N21<-(1/w)*sum((log(-Y[1 : (w-1)]))^2)-(2/w)*(log(-Y[w]))
*sum(log(-Y[1 : (w-1)]))+(log(-Y[w]))^2
N22<-(1/v)*sum((log(-Y[1 : (v-1)]))^2)-(2/v)*(log(-Y[v]))
*sum(log(-Y[1 : (v-1)]))+(log(-Y[v]))^2
so<-abs((1/log(2))*log(abs((N22-2*(N12^2))/(N21-2*(N11^2))))))
e<-(N21-2*(N11^2))*(1+so)*((sqrt(log(N)))^so)/(2*(N11^2)*so)
le<-function(t){if (t>0)
(((1+2*(nq^2))/(3*t*(1+2*so))))^(1/(1+so))*(N^(so/(1+so)))
else
(((1+2*(nq^2))/(-3*t))^(1/(1+so)))*(N^(so/(1+so))))}

```

```

l1<-floor(1e(e))

l1

hillL<-1/((1/l1)*sum(log(-Y[1 :(l1)]),na.rm = FALSE)-log(-Y[(l1)]))

hillL

#####Hill (valeur absolu)#####

L11<-(1/w)*sum(log(Z[(N-w+1) :N]))-log(Z[N-w])

L12<-(1/v)*sum(log(Z[(N-v+1) :N]))-log(Z[(N-v)])

L21<-(1/w)*sum((log(Z[N :(N-w+1)]))^2)-(2/w)*(log(Z[N-w]))
*sum(log(Z[N :(N-w+1)]))+log(Z[N-w])^2

L22<-(1/v)*sum((log(Z[N :(N-v+1)]))^2)-(2/v)*(log(Z[N-v]))
*sum(log(Z[N :(N-v+1)]))+log(Z[N-v])^2

to<-abs((1/log(2))*log(abs((L22-2*(L12^2))/(L21-2*(L11^2))))))

f<-(L21-2*(L11^2))*(1+to)*((sqrt(log(N)))^to)/(2*(L11^2)*to)

la<-function(t){if (t>0)

(((1+2*(nq^2))/(3*t*(1+2*to)))^(1/(1+to))*(N^(to/(1+to))))

else

(((1+2*(nq^2))/(-3*t))^(1/(1+to)))*(N^(to/(1+to))))}

m1<-floor(la(f))

m1

hillM<-1/((1/m1)*sum(log(Z[(N-m1+1) :N]))-log(Z[(N-m1)]))

hillM

t=0.05

i=1 :(N-m1)

CTE=(1/(1-t))*sum((abs(i/N-t)-abs((i-1)/N-t))*Z[i])

+((m1*Z[N-m1])/(N*(1-t)*(1-1/hillM)))

```

CTE

```
ai=function(r,i)(1/2)*((1-((i-1)/N))^(1/r)-(1-(i/N))^(1/r))
      -(((i-1)/N))^(1/r)+((i/N))^(1/r))
```

```
AA=function(r){
```

```
  i=(l1+1) : (N-k1)
```

```
  -(((l1/N)^(1/r)*Y[l1])/(2*(1-r/hillL)))+sum(ai(r,i)*Y[i])
    +(((k1/N)^(1/r)*Y[N-k1])/(2*(1-r/hillR)))-CTE
```

```
}
```

```
Kinv <- function(x) optimize(function(y) (x - AA(y))^2,
```

```
  c(0, 3))$minimum
```

```
Kinv(0)
```

CTE

```
stableFit(X, alpha = 1.75, beta = 0, gamma = 1, delta = 0,
```

```
  type = c("q", "mle"), doplot = TRUE, control = list(),
```

```
  trace = FALSE, title = NULL, description = NULL)
```

Bibliographie

- Acerbi, E., 2002. A model for mixtures of micromagnetic materials allowing existence and regularity. Variational methods for discontinuous structures, 1–8, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 51, Birkhäuser, Basel, 2002.
- Aftalion, A., 2003. *La Nouvelle Finance et la Gestion des Portefeuilles*, Ed. Economica, Paris.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D., 1999. Coherent measures of risk. *Math. Finance*. **9**(3), 203-228.
- Arnold, Barry C., Balakrishnan, N. et Nagaraja, H.N., 1992. A first course in order statistics. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
- Balakrishnan, N. et Cohen, A.C., 1991. *Order statistics and inference. Estimation methods. Statistical Modeling and Decision Science*. Academic Press, Inc., Boston, MA.
- Bechir R., 2009. Fondements de la théorie des valeurs extrêmes, ses principales applications et son apport à la gestion des risques du marché pétrolier *Math. Sci. hum* **186**(2), 29-63.

- Bingham, N., Goldie, C., and Teugels, J. 1987. Regular Variation. Cambridge University Press.
- Borak, S., Härdle, W. and Weron, R., 2005. Stable distributions. Statistical tools for finance and insurance, Springer, Berlin, 21-44.
- Brahimi, B., and Abdelli, J., 2016. Estimating the distorsion parameter of the proportional hazards premium for heavy-tailed losses under Lévy-stable regime. *Insurance Math. Econom.* **70**, 135-143.
- Brahimi, B., Meraghni, D., Necir, A. and Zitikis, R., 2011. Estimating the distorsion parameter of the proportional-hazard premium for heavy-tailed losses. *Insurance Math. Econom.* **49**, 325-334.
- Brazauskas, V., Jones, B.L., Puri, M.L. and Zitikis, R., 2008. Estimating conditional tail expectation with actuarial applications in view. *J. Statist. Plann. Inference* **138**, no. 11, 3590-3604
- Cheng, S. and Peng, L., 2001. Confidence intervals for the tail index. *Bernoulli* **7**, 751-760.
- Coles, S., 2001. An introduction to statistical modeling of extreme values. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag London, Ltd., London.
- David, H.A. 1970. *Order statistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney.
- Dekkers, A.L.M. Einmahl, J.H.J. and de Haan, L., 1989. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *The Annals of Statistics*, 17(4) :1833-1855.

- Deheuvels, P., Haeusler, E. and Mason, D.M. 1988. Almost sure convergence of the Hill estimator. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 104, pages 371–381. Cambridge Univ Press.
- Dekkers, A.L.M., Einmahl J.H.J. and de Haan, L., 1989. A moment estimator for the index of an extrem-value distribution, *Ann. Statist.*, **17**, 4, 1833-1855.
- de Haan, L., Ferreira, A., 2006. *Extreme Values Theory : An introduction*. Springer.
- de Haan, L. and Stadtmüller, U., 1996. Generalized regular variation of second order. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **61**(3), 381-395.
- Denneberg, D. 1994. *Non-additive measure and integral. Theory and Decision Library*. Series B : Mathematical and Statistical Methods, 27. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M.J. and Kaas, R., 2005.. *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders, and Models*. New York : Wiley.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T., 1997. *Modelling extremal events. For insurance and finance. Applications of Mathematics (New York)*, 33. Springer-Verlag, Berlin.
- Falk, M., 1995. Some best parameter estimates for distributions with finite endpoint. *Statistics* **27**, no. 1-2, 115–125.
- Fedor, M. and J. Morel, 2006. Value-at-risk en assurance : Recherche d'une méthodologie à long terme. *Actes du 28e Congrès International Des Actuaire*s. pp : 28.

- Feller, W., 1971. *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. II. Second edition John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney.
- Fisher, R., Tippett, L., 1928. Limiting forms of the frequency loi of the largest or smallest member of a sample, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24, 1928, p. 180-190.
- Fréchet, M., 1927. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum, *Ann. Soc. Polon. Math.*, vol. **6**(3). 92-116.
- Galambos, J., 1978. *The asymptotic theory of extreme order statistics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane.
- Gardes, L. and Girard, S., 2013. Estimation de quantiles extrêmes pour les lois à queue de type Weibull : une synthèse bibliographique. *Journal de la Société Française de Statistique*. **154**(2). 98-118.
- Gardes, L. ; Girard, S. and Lekina, A., 2010. Functional nonparametric estimation of conditional extreme quantiles. *J. Multivariate Anal.* **101**, no. 2, 419-433.
- Gnedenko, B., 1943. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *The Annals of Mathematics*, **44**, 423-453.
- Guida, M. and Longo, M., 1988. Estimation of probability tails based on generalized extreme value distributions. *Reliability Engineering & System Safety*, **20**(3) :219-242.
- Haeusler, E., and Teugels, J.L., 1985. On asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent of regular variation. *Annals of Statistics*, **13**, 743-756.

- Hill, B.M., 1975. A simple approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.* **3**, 1136-1174.
- Jenkinson, A.F., 1955. The frequency distribution of the maximum or minimum of meteorological elements Q.J.R. Meteorol. Soc., **81**. 158-171.
- Jérémie B., 2012. Définition et analyse statistique d'une mesure d'intégrité pour données GPS/EGNOS. Thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse.
- Jones, B.L., Zitikis, R., 2003. Empirical estimation of risk measures and related quantities. *North American Actuarial Journal.* **7**, 44-54.
- Jones, B.L., Zitikis, R., 2007. Risk measures, distortion parameters, and their empirical estimation. *Insurance : Mathematics and Economics.* **41**, 279-297.
- Pierre-Emmanuel T., 2007. Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière. Thèse de Doctorat de l'Université Claude Bernard-Lyon 1.
- Pikands, J., 1975. Statistical inference using extreme order statistics, *Annals of Statistics.* **3**, 119-131.
- Lévy, P., 1925. *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars.
- Mandelbrot, B., 1963. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business.* **36**, 394-419.
- Mason, D.M., 1982. Laws of large numbers for sums of extreme values. *Ann. Probab.* **10**, 756-764.
- McCulloch, J.H. 1996. Financial applications of stable distributions, in G.S. Madala, C.R. Rao (eds.), *Handbook of Statistics*, Vol. 14, Elsevier, 393-425.

- Morgan, J., 1997. Creditmetric. Rapport technique, JP Morgan, New York. 101, 107.
- Necir, A. and Meraghni, D., 2010. Estimating L-functionals for Heavy-tailed Distributions and Applications. *Journal of Probability and Statistics*. Volume 2010, ID 707146.
- Necir, A., Rassoul, A. and Zitikis, R., 2010. Estimating the conditional tail expectation in the case of heavy-tailed losses. *Journal of Probability and Statistics* 2010, ID 596839.
- Neves, C. and Fraga Alves, M.I., 2004. Reiss and Thomas' automatic selection of the number of extremes. *Comput. Statist. Data Anal.* **47**, no. 4, 689-704.
- Rachev, S. and Mittnik, S., 2000. *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley.
- Resnick, S., 1987. *Extreme values, regular variation and point processes*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering.
- Reiss, R.-D. and Thomas, M., 2001. *Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Assurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Basel, Birkhauser, Verlag.
- Reiss, R.-D. and Thomas, M., 2007. *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. 3rd ed. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
- Savage, L.J., 1954. *The foundations of statistics*. John Wiley & Sons, New York.
- Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S., 1994. *Stable non-Gaussian random processes : Stochastic models with infinite variance*. Chapman & Hall, New York.

- R.L. Smith. Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. *Biometrika*. **72**(1) : 67, 1985.
- Smith, R.L., 1987. Estimating tails of probability lois. *The Annals of Statistics*. **3**, 1174-1207.
- Uchaikin, V.V. and Zolotarev, V.M., 1999. *Chance and stability. Stable distributions and their applications*. With a foreword by V. Yu. Korolev and Zolotarev. Modern Probability and Statistics. VSP, Utrecht.
- Wang, S.S., 1995. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance Math. Econom.* **17**(1), 43-54.
- Wang, S.S., 1996. Premium calculation by transforming the layer premium density. *Astin Bulletin*. **26**, 71-92.
- Wang S., Young, V. and Panjer, H., 1997. Axiomatic characterization of insurance prices, *Insurance : Mathematics and Economics*. **21**, 173-183.
- Weissman, I., 1978. Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations. *Journal of American Statistical Association*. **73**, 812-815.
- Wellner, J. A., 1978. Limit theorems for the ratio of the empirical distribution function to the true distribution function. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 45, 73-88.
- Wirch, J. L., and Hardy, M. R., 1999. A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance : Mathematics and Economics*. **25**(3), 337-347.
- Zolotarev, V.M., 1986. *One-dimensional stable distributions*. Translated from the Russian by H. H. McFaden. Translation edited by Ben Silver. Translations of

Mathematical Monographs, 65. American Mathematical Society, Providence,
RI.

الخلاصة

قد تم تقييم تقدير معامل التشويه في حالة الخسائر الثقيلة غير السالبة في مقال براهيمي وآخرون (2011) في هذه الأطروحة، قمنا بتوسيع هذا العمل إلى حالة خسائر الذيل الثقيلة الحقيقية حيث نستمد التوزيع المتناظر للمقدر ونبني فاصل الثقة وكيفية تنفيذها عمليا وتوضيح الأداء الفاصل في دراسة محاكاة مع التطبيق على البيانات الحقيقية.

Abstract

Estimating the distorted parameter in the case of non negative heavy-tailed losses have been treated in Brahimy et al (2011) [Estimating the distortion parameter of the proportional-hazard premium for heavy-tailed losses. Insurance Math. Econom. 49, 325-334]. In this thesis, we extend this work to the case of the real heavy-tailed losses. We derive an asymptotic distribution of the estimator. We construct a practically implemented confidence interval for the distortion parameter and illustrate the performance of the interval in a simulation study with application to real data.

Résumé

L'estimation du paramètre de distorsion dans le cas des pertes non-négatives à queue lourde a été évaluée dans l'article de Brahimy et al (2011) [Estimating the distortion parameter of the proportional-hazard premium for heavy-tailed losses. Insurance Math. Econom. 49, 325-334]. Dans cette thèse, nous étendons ce travail au cas des pertes réelles à queue lourde. Nous dérivons la distribution asymptotique de l'estimateur. Nous construisons un intervalle de confiance pratiquement implémenté pour le paramètre de distorsion et illustrons la performance de l'intervalle dans une étude de simulation avec application aux données réelles.