

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département : Génie Mécanique  
Ref : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
المرجع: .....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du diplôme de  
**Magister en : Génie Mécanique**

**Option : Construction Mécanique**

**Analyse des structures par la M.E.F basée sur  
l'approche en déformation**

Présenté par :

**Lakhdar BESSAIS**

Soutenu publiquement le 18-12-2012

**Devant le jury composé de :**

Dr. S . BENMEBAREK	Professeur	Président	Université de Biskra
Dr. M . BOUREZANE	Maitre de Conférences 'A'	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. M . HECINI	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Dr. L . BELOUNAR	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Biskra

## RÉSUMÉ

Dans la modélisation par éléments finis des structures complexes, divers éléments doivent être utilisés : poutres, membranes, éléments de solide, plaques et coques. Ces éléments, construits selon la formulation classique, ne partagent pas en général les mêmes degrés de liberté nodaux, ce qui complique l'élaboration d'un modèle compatible.

Pour résoudre ce problème, nous proposons des éléments finis basés sur l'approche en déformation dans laquelle un degré de liberté de rotation est ajouté. Combinée avec une méthode modifiée des modes incompatibles, cette approche fournit une base unifiée pour la construction d'éléments finis variés qui possèdent les mêmes degrés de liberté nodaux et qui peuvent être assemblés aisément les uns avec les autres.

**Mots clés :** Éléments finis, approche en déformation, approche en déplacement, membranes et solides, plaques, coques, degré de liberté de rotation, assemblages.

## ABSTRACT

In finite element models of complex structural systems, different need to be used such as: beams, membranes, solids, plates and shells. Elements of different kind, based on classical formulations, generally do not share the same nodal degrees of freedom, which complicates construction of a compatible model. To resolve this modelling problem, we propose a family of finite elements based on the approach in deformation, in which a degree of freedom of rotation is added. Along with a modified method of incompatible modes, this provides a unified basis for construction of various finite elements with the same nodal degrees of freedom, witch can be freely combined.

**Key words:** Finite elements, approach in deformation, approach in displacement, membranes and solids, plates, shells, rotational degree of freedom, junctions.

## ملخص

في نماذج العناصر المحدودة للنظم هيكلية معقدة ، مختلف العناصر يجب استخدامها مثل : الأعمدة ، والأغشية والعناصر الصلبة، الصفائح و القشور . هذه العناصر ، التي أنشئت وفقا للصيغة الكلاسيكية ، وبشكل عام لا تشترك في نفس درجات الحرية للعقد، ومن الصعب إعداد نموذج متوافق. لحل هذه المشكلة، نقترح عناصر محدودة تعتمد أساسا على مبدأ التقريب في التشوه، والذي يتم إضافة درجة من الحرية مع تعديل طريقة من طرق الغير المتوافقة، وهذا التقريب يوفر أساسا موحدًا لإنشاء عناصر محدودة المختلفة التي لها نفس درجات الحرية في العقد ويمكن تجميعها بسهولة مع بعضها البعض

**الكلمات المفتاحية.** العناصر المحدودة، التقريب في التشوه، التقريب في الانتقال، الأغشية والعناصر الصلبة، الصفائح و القشور، درجة الحرية، التجميع.

## **REMERCIEMENTS**

*Tout d'abord, je remercie Allah, le tout grand puissant de m'avoir donné la force, le courage, la patience et la volonté de mener à bien ce modeste travail.*

*Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mes précieux parents les plus chers au monde de leur aide et leur soutien pour leur encouragement durant la réalisation de ce mémoire.*

*Je tiens à remercier vivement et sincèrement mon encadreur **Dr. M. BOUREZANE** qui a contribué et a assuré la direction de ce travail, pour tout le soutien, les orientations et la patience qu'il a manifesté durant son encadrement tout le long de la réalisation de ce mémoire.*

*Je tiens à remercier Monsieur **Dr. S. BENMEBAREK**, président de jury, qui m'a fait le grand honneur de présider ce jury.*

*Je tiens à remercier aussi Messieurs **Dr. L. BELOUNAR** et **Dr.M. HECINI** qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail.*

*Je saisis aussi l'occasion pour rendre hommage à tous mes enseignants auprès desquels j'ai reçu ma formation.*

*Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.*

---

---

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
------------------------------------	---

## Chapitre 1

### Généralité sur la M.E.F

1-1 Introduction.....	3
1-2 Historique.....	3
1-3 Modélisation et discrétisation.....	4
1-4 Concept de la méthode des éléments finis.....	4
1-5 Etapes de la méthode des éléments finis.....	5
1-6 Les Avantages de la M.E.F.....	5
1-7 Classement d'élément fini .....	5
1- 7.1 les propriétés d'un élément fini .....	6
1-8 Condition d'équilibre.....	7
1-9 Condition de compatibilité.....	7
1-10 Loi de Hooke.....	8
1-11 Conditions aux limites.....	8
1-12 Choix des fonctions de déplacements et conditions de convergence.....	9
1-13 Modèles d'éléments finis.....	10
1-13.1 modèle déplacement.....	10
1-13.2 modèle en déformation.....	10
1-14 Etude bibliographique sur la M.E.F. en déformation.....	10
1-15 Avantages du modèle en déformation.....	11
1-16 Conclusion .....	11

## Chapitre 2

### Rappelle sur la théorie d'élasticité

2-1 Introduction.....	12
2-2 Contrainte normale et contrainte tangentielle.....	12
2-3 Les équations d'équilibre pour un corps à l'état statique.....	13
2-3.1 Equation d'équilibre des forces.....	13
2-4 Relation entre déformations et déplacements.....	14
2-4.1 Type de déformation.....	14
2-5 Relation entre contraintes et déformations .....	17
2-6 Etude de la théorie d'élasticité plane.....	18
2-6.1 Etat plan de déformation.....	18
2-6.2 Etat plan de contrainte.....	20
2-7 Conclusion.....	20

## Chapitre 3

### Formulation des éléments finis

3-1 Introduction.....	21
3-2 Eléments membranaires .....	21
3-2.1 Introduction.....	21
3-2.2 Elément rectangulaire basé sur l'approche en déplacement (BR).....	22
3-2.3 Elément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation (SBRIE).....	28
3-2.4 Elément rectangulaire basé sur l'approche en déformation (SBRIEIR).....	31
3-2.5 Elément triangle basé sur l'approche en déformation 'SBTIEIR'.....	32
3-3 Eléments plaques .....	34
3-3.1 Introduction.....	34
3-3.2 Expression des déplacements et déformations de la plaque.....	34
3-3.3 Expression des contraintes et des efforts.....	36
3-3.4 Détermination de la matrice de rigidité.....	38
3-3.5 Les modèles classiques Kirchhoff .....	38
3-3.6 Les modèles Reissner-Mindlin.....	40
3-4 Eléments coques.....	41
3-4.1 Introduction.....	41
3-4.2 Discrétisation d'une surface courbée par des éléments plans.....	41
3-4.3 Construction d'un élément de coque plane.....	42
3-4.4 Elaboration de la matrice de rigidité élémentaire.....	43

3-4.5 Problème pratique de la modélisation (rigidité fictif).....	44
3-5 Eléments solides.....	46
3-5.1 Elément brique basé sur l'approche en déplacement.....	46
3-6 Plaque et coque raidie.....	48
3-7 Programme de résolution statique par la MEF.....	49
3-8 Conclusion.....	51

## Chapitre 4

### Validation numérique

4-1 Introduction.....	52
4-2 Validation numérique des éléments finis membranaire.....	53
4-2.1 Flexion plane d'une poutre console courte encastree.....	53
4-2.2 Poutre épaisse en appui simple chargé uniformément.....	57
4-2.3 Poutre console élancée de MacNeal.....	59
4-3 Validation numérique des éléments plaques et solides.....	61
4-3.1 Introduction.....	61
4-3.2 Plaque soumise à une charge concentrée.....	61
4-3.3 Plaque carrée à deux bords encastree et deux bords libres.....	64
4-4 Validation numérique des éléments coques.....	67
4-4.1 Cylindre pincé avec diaphragme.....	67
4-4.2 Cylindre pincé à bords libres.....	69
4-4.3 Panneau cylindrique soumis à son poids propre.....	72
4-4.4 Hémisphère sous charges diamétralement opposées.....	74
4-4.5 Coque sphérique sous charge concentrée.....	76
4-4.6 Coque hélicoïdales sous charges concentrées.....	78
4-5 Conclusion.....	80

---

---

## Chapitre 5

### Applications

5 Introduction.....	82
5-1 Paroi sur colonne.....	83
5-2 Refend plein.....	84
5-3 Refend avec une file d'ouvertures.....	86
5-3.1 Refend, Approche Membrane – Membrane.....	87
5-3.2 Refend, Approche Poutre – Membrane.....	88
5-4 Plaques raidies.....	89
5-4.1 Plaque à une seule raideur.....	89
5-5 Coque raidie.....	92
5-5.1 Paraboloïde hyperbolique avec raidisseur .....	92
5-6 Conclusion.....	95
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>96</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>98</b>

### Annexe

Annexe A.....	102
Annexe B.....	107
Annexe C.....	109
Annexe D.....	110
Annexe E.....	112
Annexe F.....	113

# Liste des Figures

## Chapitre 1 :

<b>Figure (1.1) :</b> <i>Étape de l'analyse d'un problème aux limites.</i> .....	4
<b>Figure (1.2) :</b> <i>Maillage du domaine en triangles à trois nœuds.</i> .....	4

## Chapitre 2 :

<b>Figure (2.1) :</b> <i>Vecteurs contraintes <math>\vec{T}</math> sur trois facettes orthogonales.</i> .....	12
<b>Figure (2.2) :</b> <i>Tenseur de contrainte.</i> .....	12
<b>Figure (2-3) :</b> <i>Déformation d'un élément dans le plan <math>x y</math>.</i> .....	15
<b>Figure (2.4) :</b> <i>Cas de l'état plan de déformation.</i> .....	18
<b>Figure (2.5) :</b> <i>Cas de l'état plan de contrainte.</i> .....	20

## Chapitre 3 :

<b>Figure (3.1) :</b> <i>Élément rectangulaire BR.</i> .....	22
<b>Figure (3.2) :</b> <i>Comportement d'un élément à quatre nœuds lors de la flexion dans le plan</i> .....	30
<i>a- État déformé pour le modèle basé sur le déplacement.</i> .....	30
<i>b- Etat déformé pour le modèle basé sur la déformation.</i> .....	30
<b>Figure (3.3) :</b> <i>Système de coordonnées de l'élément SBTIEIR pour l'élasticité plane.</i> .....	33
<b>Figure (3.4) :</b> <i>Référence locale d'une plaque.</i> .....	34
<b>Figure (3.5) :</b> <i>Efforts élémentaires par unité de longueur.</i> .....	37
<b>Figure (3.6) :</b> <i>Cinématique de Kirchooff.</i> .....	38
<b>Figure (3.7) :</b> <i>Cinématique de Reissner-Mindlin.</i> .....	40
<b>Figure (3.8) :</b> <i>Discrétisation des coques par des éléments finis plans triangulaires et rectangulaires.</i> .....	41
<b>Figure(3.9) :</b> <i>Discrétisation d'une surface courbée par des éléments plans.</i> .....	42
<b>Figure(3.10) :</b> <i>Structure en plaque pliée.</i> .....	44
<b>Figure (3.11) :</b> <i>Elément de solide (Brique à 8 nœuds).</i> .....	46
<b>Figure (3.12) :</b> <i>Plaque raidie et coque avec un excentré entre l'axe d'une poutre et surface moyenne d'une plaque.</i> .....	48
<b>Figure (3.13) :</b> <i>Organigramme global du programme.</i> .....	50



## Chapitre 4 :

<b>Figure (4.1) :</b> <i>Poutre console sous charge verticale</i> .....	53
<b>Figure (4.2):</b> <i>Densité de maillage (M1 ,M2et M3)</i> .....	54
<b>Figure (4.3) :</b> <i>Flèche verticale au point C</i> .....	55
<b>Figure (4.4) :</b> <i>Poutre console :a) maillage régulier b) maillage distordu</i> .....	56
<b>Figure (4.5) :</b> <i>Problème de contraintes planes</i> .....	57
<b>Figure (4.6):</b> <i>Flèche verticale au point A</i> .....	58
<b>Figure (4.7) :</b> <i>Distribution des contraintes longitudinale au milieu de la poutre (maillage 64 éléments)</i> .....	58
<b>Figure (4.8) :</b> <i>Poutre console élancée de MacNeal. Données et Maillages</i> .....	59
a) <i>Forme rectangulaire des éléments</i> .....	59
b) <i>Forme trapézoïdale des éléments</i> .....	59
c) <i>Forme d'un parallélogramme des éléments</i> .....	59
<b>Figure (4.9) :</b> <i>Plaque soumise à une charge concentrée au point C</i> .....	61
<b>Figure (4.10) :</b> <i>Flèche verticale <math>w</math> au point C des éléments ABAQUS</i> .....	62
<b>Figures (4.11) :</b> <i>Plaque carrée à deux bords encastrés et deux bords libres</i> .....	64
<b>Figure (4.12) :</b> <i>Convergence de la flèche maximale (<math>w_1</math>), charge uniforme</i> .....	65
<b>Figure (4.13) :</b> <i>Convergence de la flèche maximale (<math>w_2</math>), charge uniforme</i> .....	65
<b>Figure (4.14) :</b> <i>Convergence de la flèche maximale (<math>w_1</math>), charge concentrée</i> .....	66
<b>Figure (4.15) :</b> <i>Convergence de la flèche maximale (<math>w_2</math>), charge concentrée</i> .....	66
<b>Figure (4.16) :</b> <i>Cylindre pincé avec diaphragmes, donné</i> .....	67
<b>Figure (4.17) :</b> <i>Cylindre pincé avec diaphragmes, Maillage</i> .....	67
<b>Figure (4.18) :</b> <i>Cylindre pincé à bords libres :, donné et maillage</i> .....	69
<b>Figure (4.19) :</b> <i>Cylindre pincé à bords libres (1<sup>ère</sup> cas), convergence du déplacement <math>w_c</math></i> .....	71
<b>Figure (4.20) :</b> <i>Cylindre pincé à bords libres (2<sup>ème</sup> cas), convergence du déplacement <math>w_c</math></i> .....	71
<b>Figure (4.21):</b> <i>Toit cylindrique soumis à son poids propre</i> .....	72
<b>Figure (4.22):</b> <i>Toit cylindrique à 1/4 (élément S4 ABAQUS)</i> .....	73
<b>Figure (4.23) :</b> <i>Coque hémisphère pincé</i> .....	74
<b>Figure (4.24) :</b> <i>Coque hémisphère pincé. Convergence de <math>U_A</math></i> .....	75
<b>Figure (4.25) :</b> <i>Coque hémisphère pincé. Convergence de <math>U_A</math> des éléments ABAQUS</i> .....	75
<b>Figure (4.26) :</b> <i>Coque sphérique :géométrie, maillage</i> .....	76
<b>Figure (4.27) :</b> <i>Convergence de déplacement normal au centre</i> .....	76
<b>Figure (4.28) :</b> <i>Coque sphérique : Convergence de <math>W</math> des éléments ABAQUS</i> .....	77
<b>Figure (4.29) :</b> <i>Variation <math>W</math> le long de ligne centrale</i> .....	77
<b>Figure (4.30) :</b> <i>Coque hélicoïdale</i> .....	78

<b>Figure (4.31) :</b> <i>Coque hélicoïdale (<math>h=0.32</math>), flèche W des éléments ABAQUS</i> .....	78
---	----

## Chapitre 5 :

<b>Figure (5.1):</b> <i>Paroi sur deux colonnes</i> .....	83
<b>Figure (5-2):</b> <i>Refend plein</i> .....	84
<b>Figure (5.3):</b> <i>Convergence de la contrainte tangentielle au point B.</i> .....	85
<b>Figure (5.4):</b> <i>Convergence de la contrainte normale au point A</i> .....	85
<b>Figure (5.5):</b> <i>Déplacement horizontal au point C</i> .....	85
<b>Figure (5.6):</b> <i>Refend à une file d'ouverture (6 ouvertures).</i> .....	86
<b>Figure (5.7):</b> <i>Refend, approche Membrane – Membrane (84 éléments)</i> .....	87
<b>Figure (5.9):</b> <i>Variation du déplacement Approche Membrane - Membrane</i> .....	87
<b>Figure (5.8):</b> <i>Refend, approche poutre - Membrane (18 éléments).</i> .....	88
<b>Figure (5.10):</b> <i>Variation des déplacements approche Poutre - Membrane</i> .....	88
<b>Figure (5.11):</b> <i>Plaque raidie chargée uniformément</i> ... ..	89
<b>Figure (5.12):</b> <i>Modèle volumique (solide)</i> .....	89
<b>Figure (5.13):</b> <i>Modèle plaque-plaque</i> .....	90
<b>Figure (5.14):</b> <i>Modèle poutre-plaque</i> .....	90
<b>Figure (5.15):</b> <i>Modèle poutre</i> .....	91
<b>Figure (5.16):</b> <i>Paraboloïde hyperbolique (<math>ph</math>)</i> .....	92
<b>Figure (5.17):</b> <i>Paraboloïde hyperbolique, flèche normale</i> .....	92
<b>Figure (5.18):</b> <i>Variation de la flèche normale le long d'une poutre A B</i> .....	93
<b>Figure (5.19):</b> <i>L'effet du raidisseur sur la flèche</i> .....	94

## Annexe :

<b>Figure (A-1) :</b> <i>Les modules de logiciel ABAQUS</i> .....	103
<b>Figure (C-1) :</b> <i>Interprétation physique du degré de liberté de rotation (drilling degré of freedom)</i> .....	109
<b>Figure (E.1) :</b> <i>matrice de rigidité (membrane + flexion en axes locaux)</i> .....	112
<b>Figure (F.1) :</b> <i>Coordonnées locales et globales</i> .....	113
<b>Figure (F.2) :</b> <i>Une coque cylindrique comme ensemble des éléments rectangulaires : coordonnées locales et globales</i> .....	114

# Liste des Tableaux

## Chapitre 4 :

<b>Tableau (4.1) :</b> <i>Flèche verticale au point C</i> .....	54
<b>Tableau (4.2) :</b> <i>Contraintes longitudinales au point B</i> .....	55
<b>Tableau (4.3) :</b> <i>Déplacement vertical normalisé au point C d'une poutre courte d'Alman</i> ... ..	56
<b>Tableau (4.4) :</b> <i>Flèche verticale au point A</i> .....	57
<b>Tableau (4.5) :</b> <i>Contraintes longitudinales au point C</i> .....	58
<b>Tableau (4.6) :</b> <i>La flèche d'une Poutre console élancée de Mac Neal</i> .....	60
<b>Tableau (4.7) :</b> <i>flèche verticale <math>w</math> au point C des déformés éléments</i> .....	63
<b>Tableau (4.8) :</b> <i>Les données pour le test d'un Cylindre pincé avec diaphragmes</i> .....	67
<b>Tableau (4.9) :</b> <i>Cylindre pincé avec diaphragmes, convergence de <math>W_C</math> et <math>V_D</math></i> .....	68
<b>Tableau (4.10) :</b> <i>Cylindre pincé à bords libres, convergence du déplacement <math>w_c</math></i> .....	70
<b>Tableau (4.11) :</b> <i>Les données pour le toit cylindrique</i> .....	72
<b>Tableau (4.12) :</b> <i>Convergence de <math>W_C</math> et <math>W_B</math> d'un Toit cylindrique</i> .....	73
<b>Tableau (4.13) :</b> <i>Les données pour le Hémisphère</i> .....	74
<b>Tableau (4.14) :</b> <i>Coque hélicoïdale (<math>h=0,32</math>), résultats pour différents éléments</i> .....	79

## Chapitre 5 :

<b>Tableau (5.1):</b> <i>Paroi sur deux colonnes</i> .....	83
--	----

# Notations

M.E.F	Méthode des éléments finis.
MCR	Mouvements du corps rigide
$\int$	Intégrale.
$\frac{\delta}{\delta x}$	Dérivée partielle par rapport à x.
[ ]	Matrice.
{ }	Vecteur colonne.
[ ] <sup>T</sup>	Matrice transposée.
[ ] <sup>-1</sup>	Matrice inverse.
DDL	Degré de liberté.
x,y,z	Coordonnées cartésiennes.
u,v	Déplacements suivant les directions x et y et z respectivement.
$\theta_z$	Rotation dans le plan.
$\beta_x$	Rotation du plan yz autour de y.
$\beta_y$	Rotation du plan xz autour de x.
K	Courbures de flexion
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion et de torsion
$T_x, T_y$	Forces de cisaillement.
t	Épaisseur pour les membranes.
h	Épaisseur pour la plaque en flexion et le coque
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations directes suivant x et y et z respectivement.
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations tangentielles.
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Contrainte tangentielle.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contrainte normale suivant les directions x, y et z.
$\lambda$ et $\mu$	Les constantes de Lamé.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
E.	Module de Young.
I	L'inertie.
$a_1, a_2$	Paramètre des mouvements de corps rigide.
$a_3$	Paramètres de la rotation dans le plan.

$a_1$	Paramètres généraux de l'approximation.
$[X]$	Matrice des fonctions de base de l'interpolation.
$[N]$	Matrice des fonctions de formes.
$\{q\}$	Vecteur de déplacement.
$[A]$	Matrice des coordonnées.
$[B]$	Matrice de déformation.
$\{F\}$	Vecteur des forces.
$[K]$	Matrice de rigidité.
$[H]$	Matrice de rigidité $[H]$ qui relie entre les contraintes et les déplacements.

# **Introduction générale**

## **Introduction générale**

### **Introduction :**

L'analyse des structures complexes pose pour l'ingénieur à faire des hypothèses simplificatrices, en tentant parfois d'analyser d'un coup la structure entière, aussi complexe qu'elle soit, grâce à la méthode des éléments finis (**MEF**); cette dernière découpe la structure en composants élémentaires dont l'ensemble est calculé en une fois.

Les avantages sont nombreux : moins d'hypothèses simplificatrices, prise en compte des interactions entre les composants, meilleure vue du comportement d'ensemble de la structure, détection de ces éventuelles faiblesses, conception plus économique, etc.

La compatibilité des éléments les uns avec les autres est souvent un problème délicat de la discrétisation d'une structure compliquée. Cette compatibilité est nécessaire pour garantir la convergence, par exemple :

La discrétisation de refend peut comporter des éléments de membranes dans les deux translations  $u$  et  $v$  incompatibles avec les inconnues nodales des poutres qui, en outre  $u$  et  $v$  comportent en plus des degrés de rotation.

Les problèmes peuvent être causés par la modélisation de l'interaction plaque – poutre dans le cas des plaques raidies.

### **Objectif de travail :**

L'objectif important visé par cette étude est :

- La simplification des problèmes de discrétisation des structures complexe, en particulier au niveau de l'incompatibilité entre éléments finis.

## **Plan de travail :**

Pour aboutir à ces objectifs, on structure notre travail en cinq chapitres :

1. Le premier chapitre présente une généralité sur la M.E.F, qui tient compte de l'aspect historique de la méthode des éléments finis, les différents types des modèles d'éléments finis et étude bibliographique sur les éléments basée sur l'approche en déformation.

2. Le deuxième chapitre concerne un rappelle sur la théorie d'élasticité et une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans le cas bidimensionnel.

3. Le troisième chapitre est consiste aux formulations des différents types des éléments : membranaires, ainsi que des éléments plaques basée sur les deux théories (Kirchhoff ou Mindlin) et formulation des éléments coques.

4. Le quatrième chapitre est consacré aux tests de validation numérique des éléments finis de types (membranaire, plaque et coque). En outre, les résultats obtenus à partir d'utilisation d'un logiciel de calcul numérique par la méthode des éléments finis. Le Logiciel ABAQUS est très puissant pour résoudre des problèmes statiques à n'importe quelle forme de la structure.

5. Dans le cinquième chapitre, nous terminons notre travail par l'application des éléments finis dans les structures complexes à savoir :

- Jonction poutre – membrane.
- Jonction poutre – plaque.
- Jonction poutre – coque.

Ce travail est appuyé sur des références bibliographiques dans le domaine.

Finalement, le travail est achevé par une conclusion générale.



# Chapitre 1

Généralité Sur la  
M.E.F

## 1-1 Introduction :

Les techniques de calcul des structures ont connu ces vingt dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Ainsi, la M.E.F est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie.

## 1-2 Historique :

Les bases théoriques de la méthode des éléments finis (M.E.F) repose d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximations.

La M.E.F (Méthode des éléments finis) est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'ailes d'avion) ; on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956) [TUR 56].

Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey) [ARG 60]. certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangles, mais elles restèrent sans suite.

L'expression élément finie a été inventée par Clough en 1960. Années 60, la M.E.F s'attaque à tous les domaines du calcul de structures. Des programmes on trouve, la M.E.F, principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures. Ont été conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs tels que : ABAQUS, SAP, CATIA.

La crédibilité des résultats obtenus va permettre l'utilisation de la méthode des éléments finis par des entreprises et des bureaux d'études de taille réduite.

C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement gigantesque et les possibilités d'application augmentent sans cesse.

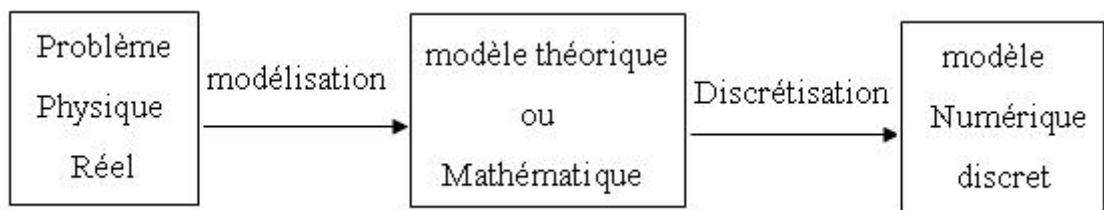
### 1-3 Modélisation et discrétisation

La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Donc pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, il faut effectuer deux opérations essentielles la modélisation et la discrétisation, ces opérations se font en deux temps.

La modélisation.

La discrétisation ensuite et portent sur les deux aspects principaux du problème pratique.

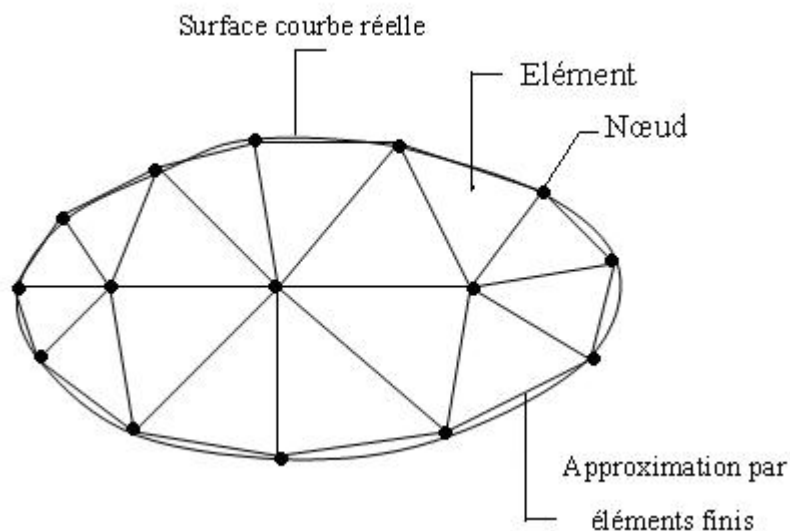
- Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites.
- Choix des éléments finis et du maillage.



**Figure (1-1) :** *Étape de l'analyse d'un problème aux limites*

### 1-4 Concept de la méthode des éléments finis

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (Éléments finis), le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments. [ZIE 91]



**Figure (1-2) :** *Maillage du domaine en triangles à trois nœuds*

## 1-5 Étapes de la méthode des éléments finis

Dans diverses applications précitées, les éléments finis perdent leur signification physique d'éléments structuraux : la méthode des éléments finis est considérée comme un outil de mathématiques appliquées destiné à résoudre les équations différentielles.

Néanmoins, les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes, on peut les résumer en sept étapes :

1. Découpage du domaine en un maillage d'éléments finis figure (1-2) ;
2. Interpolation en respectant les critères de convergence ;
3. Calcul des caractéristiques de chaque élément ;
4. Assemblage ;
5. introduction des conditions aux limites essentielles et résolution ;
6. Évaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, déplacements...) ;
7. Jugement de manière critique les résultats obtenus.

## 1-6 Les Avantages de la M.E.F

La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa souplesse. Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécaniques ou bien physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de natures quelconques.

Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).

La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.

## 1-7 Classement d'éléments fini

Les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments finis peuvent être distinguées :

- Les éléments 1D : barres, poutres rectilignes ou courbes.
- Les éléments 2D : élasticité plane (déformation ou contrainte plane), plaque en flexion, coques courbes.
- Les éléments 3D : éléments de volume ou coques épaisses.

## 1- 7.1 Les propriétés d'un élément fini

Le découpage en éléments finis permet d'isoler un élément fini pour l'étudier tout en établissant les caractéristiques.

### 1-7.1.1 Signalement d'un élément fini

Le signalement d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie :**

Un élément fini peut être 1 d, 2d ou 3 d sa forme sont simples.

- segment d'une droite ou de courbe (plan ou courbe)
- triangle ou quadrilatère
- tétraèdre, prisme ou hexaèdre

- **Les frontières :**

Sont respectivement :

- les points (extrémités du segment)
- des segments de droite ou de courbe.
- des faces planent ou courbe

- **Matériau :**

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope) ce dernier a les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions (métaux)

Il est caractérisé par 02 constantes élastiques :  $E$  et  $\nu$

### 1-7.1.2 les nœuds

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres, ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces.

### 1-7.1.3 Les forces nodales

À travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, les unes sont les réactions internes, les autres les forces  $F$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...)

### 1-7.1.4 Degrés de liberté

Pour tout élément fini, on doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en général le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds valeurs qui deviennent les inconnues nodales ; par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer, la solution complète (ASSEMBLAGE), tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

### 1-7.1.5 Caractéristiques d'un élément fini

Le signalement précédent permet de construire les deux caractéristiques d'un élément fini qui sont :

- sa matrice de rigidité  $K$
- son vecteur force  $F$

Elles interviennent dans l'équation d'équilibre de l'élément fini, en relation forces - déplacement.

$$F = K U \quad (1-1)$$

## 1-8 Condition d'équilibre

Les forces agissant sur toute la structure ou sur chacun des éléments considérés comme un corps libre doivent être en équilibre.

## 1-9 Condition de compatibilité

Les déplacements de l'ensemble de la structure ou de chacun de ses éléments doivent être compatibles, en d'autres termes les déplacements des extrémités des éléments qui sont connectés à un même doivent être identiques.

On peut encore dire que si on effectue une section sur un élément, les déplacements d'élément à gauche et à droite de cette section doivent être égaux.

Pour que cette cohésion soit respectée (c.-à-d. pour que les volumes élémentaires ; auxquels ont été appliquées les déformations  $\varepsilon_{ij}$ , continuent de rester accolés), il faut que le champ de déformation  $\varepsilon_{ij}(M)$  dérive d'un champ de déplacement  $u_i(M)$ ,

continûment dérivable, tel que  $\varepsilon_{ij}$  peut s'écrire :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \quad (1-2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) \quad (1-3)$$

Donc, connaissant le champ de déplacement  $u_i (M)$ , on en déduit par équation (1-3) le champ de déformation  $\varepsilon_{ij} (M)$ .

Réciproquement, si on connaît le champ des déformations  $\varepsilon_{ij} (M)$ , peut-on calculer le champ de déplacements  $u_i (M)$ . Le premier problème est celui de la compatibilité des déformations, le seconde celui de l'intégration d'un champ de déplacement.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varepsilon_{ii} = \frac{\partial^3}{\partial x_j^2 \partial x_i} u_i \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varepsilon_{jj} = \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_j \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varepsilon_{ii} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varepsilon_{jj} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varepsilon_{ij} \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (1-7)$$

Cette équation (1-7) générale permet d'exprimer les équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

## 1-10 Lois de Hooke

Le comportement de la structure doit satisfaire à la loi de HOOKE qui décrit le rapport entre la charge et la déformation des matériaux.

Dans toute l'étude qui suit, on considérera que la déformation est proportionnelle à la charge, ce qui se traduit par l'équation (1-1).

## 1-11 Conditions aux limites

Les conditions aux limites exigent que les conditions d'équilibre et de compatibilité en chacune des limites de la structure soient satisfaites.

Exemple : les déplacements d'une extrémité encastree doivent être nuls.

## 1-12 Choix des fonctions de déplacements et conditions de convergence :

Les différents champs de déplacement nécessitent un nombre total de constantes égales au nombre total des degrés de liberté de l'élément. Cependant, il convient de choisir les constantes proportionnellement aux différents champs de déplacement suivant la destination de l'élément et de la nature du problème à analyser.

Le choix des fonctions de forme limite, le nombre de degrés de liberté de système qui est en réalité infini, donc le minimum réel de l'énergie ne pourra jamais être atteint quelle que soit la finesse du maillage. Pour assurer la convergence de la solution vers la solution exacte, certaines conditions doivent être vérifiées. Ces conditions sont les suivantes :

- Critère 1 : représente les mouvements des modes rigides où la fonction de déplacement doit être telle qu'il soit impossible qu'un élément se déforme quand les déplacements de ses nœuds sont causés par un mouvement de corps rigide.
- Critère 2 : représente l'état de déformation constante dont la fonction représentative des déplacements doit être telle que, si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, on obtient effectivement ces déformations constantes.
- Critère 3 : condition de compatibilité où les fonctions de déplacements doivent être choisies de telle sorte que les déformations aux interfaces des éléments soient infinies.

Les critères 1 et 2 se traduisent par le terme élément complet. Le critère 3 traduit par élément compatible, si les éléments finis satisfont les conditions de complétude et de compatibilité ; de tels éléments sont dits (éléments conformes), pour ce type d'élément la solution converge de façon monotone vers la solution exacte.

Certains éléments ne satisfaisant pas toutes les conditions, de tels éléments sont dits (éléments non conformes), parmi ses éléments certains d'entre eux ne convergent pas, mais les autres convergent. Comme il y a des éléments non conformes qui présentent un taux de convergence supérieur à d'autres éléments conformes et qui sont très utilisés en pratique.



## 1-13 Modèles d'éléments finis

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, et il est rarement celui des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément ou une partie de celui-ci, à l'intérieur ou à la frontière. On peut créer divers types, dits « modèles » d'éléments finis selon la combinaison choisie comme :

### 1-13.1 modèle déplacement

Ce modèle est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans cette catégorie, les éléments finis sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendu à tout l'élément. Alors, les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, donc les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières.

### 1-13.2 modèle en déformation

Ce modèle présente une approximation qui se fait sur le champ de déformation, puis on intègre pour retrouver le champ de déplacement de telle sorte que les équations d'équilibres et de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

## 1-14 Étude bibliographique sur la M.E.F. en déformation

- L'approche en déformation a été appliquée par Sabir et Ashwell [SAB 72], à développer, une nouvelle classe des éléments pour les problèmes, d'élasticité plane dans des coordonnées cartésiennes.
- Un élément fini de coque cylindrique a été ensuite développé par Ashwell (1972). L'efficacité de cet élément a été testée en l'utilisant pour l'analyse d'un cylindre pincé court à bords libres. Les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes. [ASH 72]
- Sabir (1983) a appliquée L'approche en déformation pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes.
- [SAB 83] La grande innovation a l'époque, c'était l'introduction de la rotation (drehung) dans le plan par Sabir et Chow [SAB 83 b] pour l'analyse du flambement des panneaux plans avec ouverture circulaire et carrés.
- [SAB 84] Utilisation des mêmes éléments pour l'analyse des voiles avec des ouvertures. L'attention s'est focalisée ensuite sur le développement et l'amélioration [SAB 85] des

éléments rectangulaires et triangulaires (SBRIEIR, SBTIEIR), ayant des rotations dans le plan au niveau des nœuds avec des résultats très satisfaisants avec un nombre réduit d'éléments.

- Belarbi et le Charif [BEL 99], ont développé un élément fini hexaèdre SBH8 l'élément basé sur l'approche en déformation. Cet élément constitué à huit nœuds avec trois degrés de liberté par nœud (u, v et w) a été utilisé pour l'étude des plaques minces et épaisses.
- Pour analyse des problèmes anti plans, Belounar et Guenfoud [BELO 05] ont développé de nouveaux éléments modélisant la flexion des plaques et tout récemment [BEL 05] un intérêt pour le développement d'éléments secteurs par Bourezane [BOU 06].
- A.I. Mousa et M.H. El Nagggar [MOU 07] ont développés un nouveau élément fini rectangulaire sphérique basé sur la formulation des coques surbaissées.

### 1-15 Avantages du modèle en déformation

Cette approche permet la représentation du champ de déplacement par un ordre élevé des termes des polynômes sans avoir besoin d'introduire des degrés de liberté supplémentaire ni de nœuds intermédiaires. Les éléments produits conduisent à des résultats très encourageants. En plus, la convergence obtenue est rapide, lorsque les résultats sont comparés avec ceux donnés par des éléments basés sur le modèle en déplacement ayant le même nombre de DDL.

### 1-16 Conclusion

La M.E.F c'est une méthode approchée de calcul numérique permettant de déterminer l'état d'équilibre d'un milieu continu élastique à deux ou trois dimensions.

Elle consiste à déterminer de manière approximative les déplacements d'un certain nombre de points du milieu appelés « nœuds ».

Le Modèle de déformation présente une interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration), contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour déplacements.

# **Chapitre 2**

Rappelle Sur la théorie  
d'élasticité

### 2-1 Introduction :

La théorie d'élasticité permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action des forces qui leur sont appliqués. Pour établissement des lois mathématiques, on doit supposer que les solides sont idéal, c'est-à-dire homogènes, isotropes.

Tous les matériaux solides possèdent à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est à dire que si les forces extérieures, provoquant la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite (hypothèses des petites perturbations) et présentent le caractère de réversibilité.

La théorie d'élasticité peut se résumer en trois ensembles d'équations :

- Les équations d'équilibre.
- Relation entre déformations et déplacements.
- Relation entre contraintes et déformations.

### 2-2 Contrainte normale et contrainte tangentielle

Les composantes de sa matrice représentative dans le repère  $(o, x, y, z)$  sont :  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  Ces composantes sont indiquées schématiquement sur la figure (2-1).sur chaque face, le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. Le champ de contraintes au un point  $M$  d'un solide est un tenseur d'ordre 2, symétrique, représenté par la matrice :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

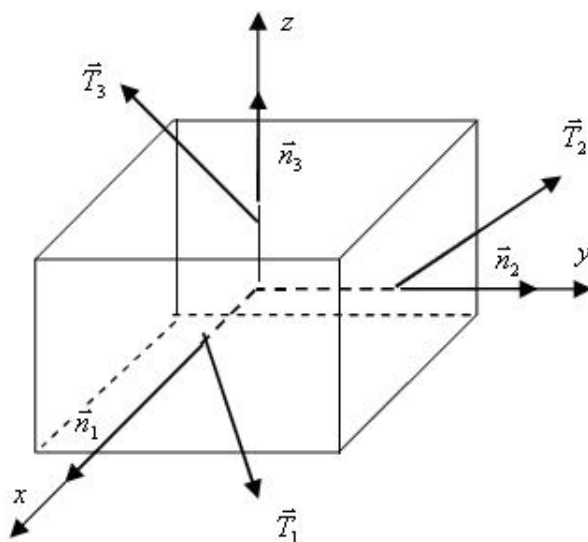


Figure (2-1) : Vecteurs contraintes  $\vec{T}$  sur trois facettes orthogonales

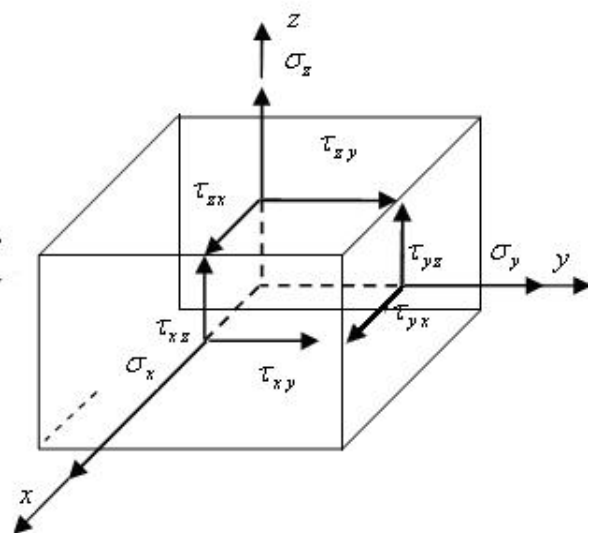


Figure (2-2) : Tenseur de contrainte

## 2-3 Les équations d'équilibre pour un corps à l'état statique

### 2-3.1 Équation d'équilibre des forces

On dit qu'un corps de volume  $V$  et de masse  $m$  entouré par une surface  $S$ , soumise à des forces de surface de contrainte ( $\vec{T}$ ), et des forces de volume ( $\vec{F}$ ), sont en équilibre lorsque la somme des forces exerçantes sur ce corps est nulle.

Dans l'équilibre à l'État statique, on a :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Et en intégrant sur tout le volume et sur toute la surface.

$$\int_V \vec{F} dv + \int_S \vec{T} ds = \vec{0} \quad (2-2)$$

En notation indicielle :

$$\int_V F_i dv + \int_S T_i ds = 0$$

Ou bien : 
$$\int_V F_i dv + \int_S \sigma_{ij} n_j ds = 0$$

En utilisant le théorème de l'intégral 
$$\int_V F_i dv + \int_V \partial_j \sigma_{ij} dv = 0$$

$$\int_V (F_i + \partial_j \sigma_{ij}) dv = 0$$

C'est-à-dire :

$$F_i + \partial_j \sigma_{ij} = 0 \quad (2-3)$$

Donc, l'équation fondamentale qui relie les variations spatiales des contraintes dans un corps en état d'équilibre statique est comme suite :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad i, j = x, y, z \quad (2-4)$$

Donc :

Pour  $i = x$  
$$F_x + \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x_j} = F_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

Pour  $i = y$  
$$F_y + \frac{\partial \sigma_{yj}}{\partial x_j} = F_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

Pour  $i = z$  
$$F_z + \frac{\partial \sigma_{zj}}{\partial x_j} = F_z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

## 2-4 Relation entre déformations et déplacements [RAH 94] :

Lorsqu'un corps est soumis à un système de forces, en général tous les points appartenant au corps changent de position. Le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position initiale de sa position finale. Les composantes de ce déplacement sont  $u$  et  $v$  et  $w$ , elles sont en général fonction de  $x$ ,  $y$ , et  $z$ . ainsi un point situé initialement en  $(x, y, z)$  sera déplacé en  $(x + u, y + v, z + w)$ .

### 2-4.1 Type de déformation :

Dans le cas général, deux types de déformations se produisent :

- a) Déformation directe : la déformation directe dans une direction donnée est définie comme étant le rapport de la variation de longueur par la longueur, d'une fibre originalement orientée dans cette direction. Trois composantes indépendantes de déformation directe (normale)  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$  sont définies en chaque point.
- b) Déformation de cisaillements : la déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes. Elle est associée à deux directions orthogonales. Trois composantes de déformation de cisaillement  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{zy}$ ,  $\gamma_{xz}$  sont définies en chaque point.

Avant de passer au cas général (tridimensionnel) considérons le problème de déformation plane qui est définie par :

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y) \tag{2-5}$$

$$w = 0$$

Il est à noter que pour ce cas de déformation tous les points situés initialement dans le plan  $x y$  restent dans ce plan après déformation.

Soit un élément infinitésimal a b c d Figure (2-3).

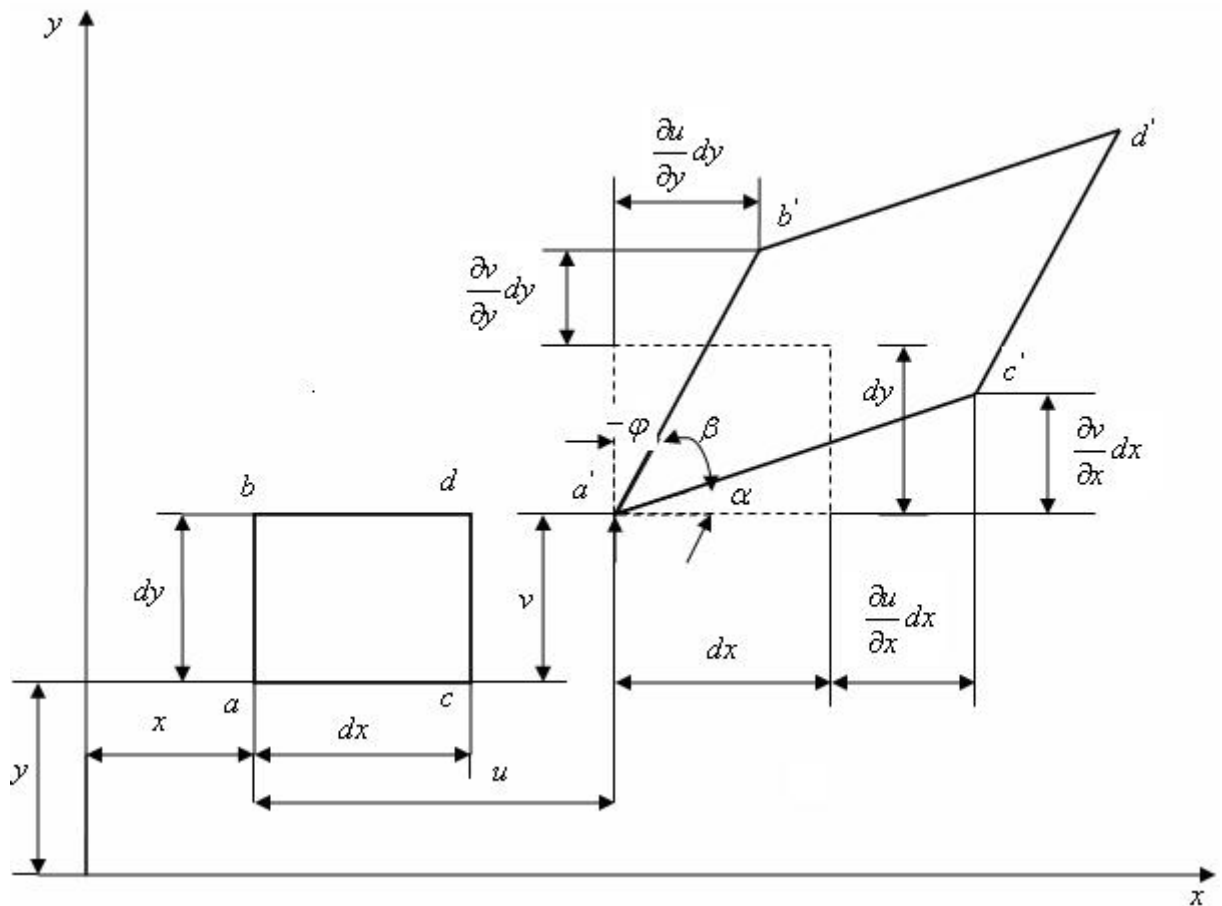


Figure (2-3) : Déformation d'un élément dans le plan x y

Après déformation l'élément a b c d, aura la configuration a' b' c' d'. Ainsi les déformations directes suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{a'c' - ac}{ac}$$

$$ac = dx \quad ; \quad a'c' = ac\varepsilon_x + ac$$

$$a'c' = ac(\varepsilon_x + 1) = dx(\varepsilon_x + 1)$$

$$(a'c')^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2$$

$$\left[dx(\varepsilon_x + 1)\right]^2 = dx^2(\varepsilon_x^2 + 2\varepsilon_x + 1) = dx^2(2\varepsilon_x + 1)$$

$$(a'c')^2 = (dx)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}(dx)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2$$

$$\left[dx^2(2\varepsilon_x + 1)\right] = dx^2\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)$$

Élimination des termes d'ordre supérieur (hypothèse des petits déplacements).

$$2\varepsilon_x + 1 = 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}$$

D'où :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2-6)$$

De même pour

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-7)$$

L'angle  $\alpha$  étant très petit on peut écrire :

$$\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \partial x}{\partial x + \frac{\partial u}{\partial x} \partial x}$$

En négligeant le terme  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (car il très petit devant 1)

On obtiendra :

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-8)$$

De même pour l'angle  $\varphi$  on aura :

$$\varphi = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2-9)$$

Ainsi, la déformation de cisaillement sera :

$$\gamma_{xy} = \alpha - \varphi \quad (2-10)$$

Le signe négatif est du fait que l'angle  $\varphi$  est mesuré suivant le sens des aiguilles d'une montre qui représente par définition le sens négatif.

D'où en remplaçant  $\alpha$  et  $\varphi$  par leurs valeurs on obtiendra :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2-11)$$

Après avoir traité les cas unidimensionnel et bidimensionnel, on peut passer au cas tridimensionnel où l'élément considéré est, à l'origine, un prisme rectangulaire.

Les déformations seront :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2-12)$$



Déformation de cisaillements (déformation angulaire) :

$$\begin{aligned} \gamma_{yx} = \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \tag{2-13}$$

### 2-5 Relation entre contraintes et déformations [RAH 94] :

Sous l'action d'une contrainte normale uni axiale, la plupart des matériaux ont un comportement bien défini dans le domaine élastique. Ce comportement se traduit par la relation :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \tag{2-14}$$

Cette relation est connue sous le nom de la loi Hook. Le constant  $E$  est appelé d'élasticité ou module de Young

La composante de déformation  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

En plus de cette déformation, l'élément aura des contraintes suivant les directions  $y$  et  $z$ .

Ces contractions il en résulte des déformations  $\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  qui sont :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x = -\nu \frac{(\sigma_x)}{E} \tag{2-15}$$

Ou  $\nu$  est appelée coefficient de Poisson.

La relation dans le domaine élastique entre les contraintes et les déformations pour un corps soumis à un état de contrainte de cisaillement pur bidimensionnelle a été trouvée expérimentalement et elle a la forme suivante :

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \tag{2-16}$$

De même pour le cas tridimensionnel, les deux autres composantes de déformation de cisaillement seront

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \tag{2-17}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

## 2-6 Etude de la théorie d'élasticité plane

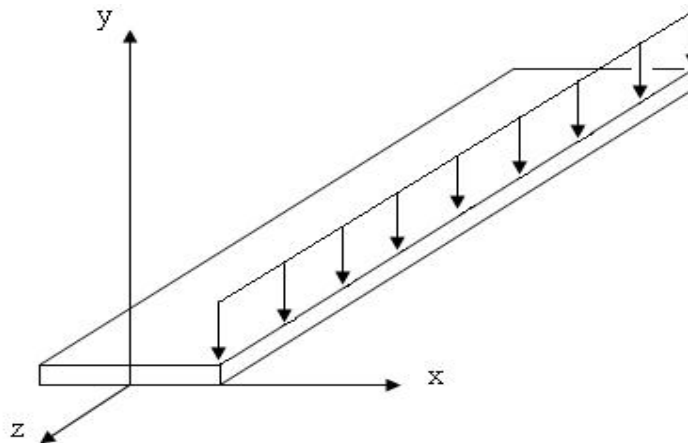
### 2-6.1 Etat plan de déformation

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres, chargé par une force qui est uniformément distribuée et perpendiculaire à la direction de longueur Figure (2-4) [RAH 94].

Le déplacement dans la direction  $z$  peut être considéré comme nul.

Les dérivées des déplacements dans cette même direction sont nulles, c'est - à - dire

que :  $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} = 0$



**Figure (2-4) :** Cas de l'état plan de déformation

Dans le cas de matériaux à comportement élastique linéaire, on a de façon générale :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2-18)$$

Avec  $D_{ijkl}$  composantes du tenseur d'élasticité.

Dans le cas particulier des matériaux isotrope, les coefficients d'élasticité se réduisent à deux constantes indépendantes ( $\lambda$  et  $\mu$   $E$  et  $\nu$ ), les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes connues sous le nom de la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2-19)$$

Avec  $\varepsilon_{kk} = tr(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$  (premier invariant du tenseur des déformations).

$\lambda$  et  $\mu$  coefficients de lamé :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2-20)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\delta_{ij} \quad (2-21)$$

Avec  $\sigma_{kk} = tr(\sigma_{ij}) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$  (premier invariant du tenseur des contraintes).

Les relations entre les déformations et les déplacements sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

Équation d'équilibre :

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-23)$$

La relation (2-20) permet écrire :

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{1+\nu}{2} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\text{Où : } \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

La première forme de la loi Hooke (2-18) permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-24)$$

D'où :

$$D = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

### 2-6.2 Etats plan de contrainte

Une structure plane et mince est en état plan de contraintes, quand les charges sont appliquées dans son plan. L'épaisseur de la structure est toujours très petite par rapport aux autres dimensions et est symétrique de part et d'autre du plan (x, y), figure (2-5).

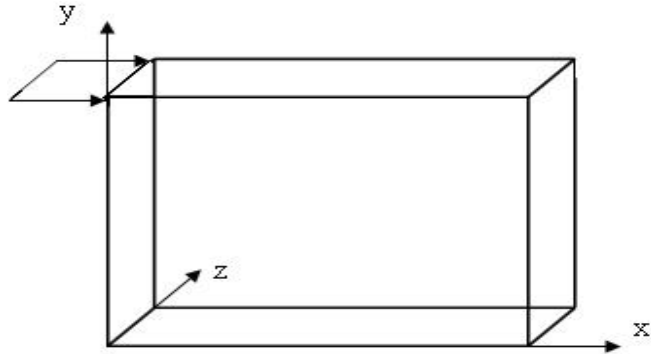


Figure (2-5) : Cas de l'état plan de contrainte

Ainsi les contraintes  $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy} = 0$  d'où  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$

La composante de déformation  $\varepsilon_{zz}$  n'est pas nulle, mais dépend des autres composantes.

D'une part :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{2-26}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2-27}$$

D'où en inversant la relation (2-27) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2-28}$$

D'où la matrice constitutive ou (matrice d'élasticité en contrainte plane) :

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2-29}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{2-30}$$

### 2-7 Conclusion

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statiques nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire, où ces équations facilitent la formulation des éléments et la conception du programme.

# Chapitre 3

## Formulation des éléments Finis

### 3-1 Introduction

Ce chapitre présente les formulations des éléments finis basés sur l'approche en déplacement (BR et ACM) et d'autres basés sur l'approche en déformation (SBTIEIR, SBRIE, SBRIEIR). La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul des matrices de rigidité de tous les éléments de la structure modélisée puis l'assemblage de la matrice de rigidité de toute la structure.

La méthode des éléments finis est extrêmement puissante puisqu'elle permet d'étudier correctement des structures contenues ayant diverses propriétés géométriques et différentes conditions aux limites, elle nécessite alors un grand nombre de calculs qui, à cause de leur nature répétitive. Pour cette raison, utilisé le programme Fortran et logiciel Abaqus.

### 3-2 Éléments Membranaires

#### 3-2.1 Introduction

Les éléments membranes sont parmi les éléments les plus simples à se développer. Ces éléments sont employés pour analyser des structures soumises aux forces dans le plan. Dans cette section, nous considérons la formulation des éléments finis membranaires rectangulaires et un élément triangulaire pour l'étude d'élasticité plane. Ces éléments basés sur la formulation à champ de déplacement et à champ de déformation ont des différentes DDL par nœud.

### 3-2.2 Élément rectangulaire basé sur l'approche en déplacement (BR).

L'élément fini de l'état plan le plus simple est l'élément rectangulaire schématisé sur la figure (3.1). L'élément a une longueur  $a$  ; largeur  $b$  ; et épaisseur constante  $t$  ; chacun des quatre coins possède deux degrés de liberté : Les déplacements  $u$  et  $v$  respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ . Les quatre coins s'appellent habituellement les points nodaux. Ainsi, cet élément possède huit forces nodales (quatre paires de  $F_x$  et  $F_y$ ) et huit déplacements nodaux ou degrés de liberté nodaux (quatre paires de  $u$  et  $v$ ). Dans la formulation de la matrice de déplacement convenable, habituellement sous la forme polynomiale.

Élément rectangulaire de 4 nœuds à 2 deux degrés de liberté chacun. Les déplacements et les forces nodales de l'élément sont présentés sur les figures 3-b et 3-c respectivement.

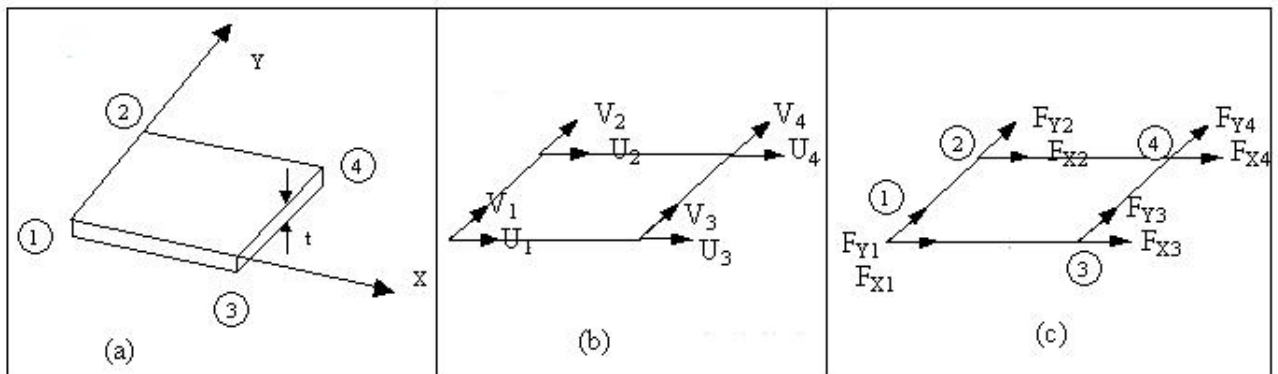


Figure (3-1) : Élément rectangulaire BR

#### 3-2.2.1 Fonction d'interpolation

Pour représenter la déformation de l'élément rectangulaire à n'importe quel point défini par  $(x, y)$  sur la plaque, on choisit une simple fonction polynomiale pour définir les fonctions de déplacement comme suite.

$$u = a_1 + a_2x + a_3 y + a_4xy \tag{3-1}$$

$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8xy$$

Le choix de cette fonction assure la continuité des déplacements

L'équation (3-1) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \tag{3-2}$$

$$D'où : \{u^e\} = [X^e] \{a^e\} \quad (3-3)$$

$[X^e]$ : Matrice des fonctions de base de l'interpolation.

$\{a^e\}$ : Vecteur des coefficients inconnus des polynômes.

— Exprimer l'état des déplacements  $\{u^e\}$  en chaque point de l'élément en fonction des déplacements nodaux  $\{q^e\}$ . Cette étape consiste à remplacer les valeurs des coordonnées nodales dans l'équation (3-3), puis à résoudre en  $\{a^e\}$ , en introduisant les coordonnées des nœuds dans  $[X^e]$ , au nœud 1,  $x_1=0, y_1=0$ , et nœud 2,  $x_2=0, y_2=b$ , et nœud 3,  $x_3=a, y_3=0$  et nœud 4,  $x_4=a, y_4=b$

$$\begin{cases} u_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1 \\ u_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4x_2y_2 \\ u_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4x_3y_3 \\ u_4 = a_1 + a_2x_4 + a_3y_4 + a_4x_4y_4 \end{cases} \quad (3-4)$$

$$\begin{cases} v_1 = a_5 + a_6x_1 + a_7y_1 + a_8x_1y_1 \\ v_2 = a_5 + a_6x_2 + a_7y_2 + a_8x_2y_2 \\ v_3 = a_5 + a_6x_3 + a_7y_3 + a_8x_3y_3 \\ v_4 = a_5 + a_6x_4 + a_7y_4 + a_8x_4y_4 \end{cases} \quad (3-5)$$

Alors, la substitution des huit constantes précédentes dans les fonctions de déplacement (3-1) et réarrangement des termes donne :

$$u(x, y) = N_1(x, y)u_1 + N_2(x, y)u_2 + N_3(x, y)u_3 + N_4(x, y)u_4 \quad (3-6)$$

$$v(x, y) = N_1(x, y)v_1 + N_2(x, y)v_2 + N_3(x, y)v_3 + N_4(x, y)v_4$$

$$\{u^e\} = [N^e] \{q^e\} \quad (3-7)$$

$$\{u^e\} = [X^e] [A^e]^{-1} \{q^e\}$$

$$\{q^e\} = [A^e] \{a^e\}$$

$[N^e]$ : L'ensemble des fonctions d'interpolation dites fonction de formes.

$\{q^e\}$ : Est le vecteur de déplacement nodal élémentaire.

$[A^e]^{-1}$ : matrice des coordonnées.

On remarque que tous les termes de la matrice  $[A^e]$  sont connus puis que ce sont simplement les coordonnées des nœuds, la matrice résultante  $[A^e]$  n'est pas singulière, et inverse  $[A^e]^{-1}$  peut-être calculé.

les quatre fonctions  $N(x, y)$  peuvent s'appeler les fonctions de forme et sont obtenues comme :



$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\
 N_4(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} \\
 N_2(x, y) &= \frac{x}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\
 N_3(x, y) &= \frac{xy}{ab}
 \end{aligned}
 \tag{3-8}$$

— Les équations (3-9) et (3-10) donnent les vecteurs des déplacements et des forces complets pour l'élément :

$$\left\{u^e\right\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{3-9}, \quad \left\{F^e\right\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \tag{3-10}$$

Chacun d'eux contient huit termes de telle sorte que la matrice de rigidité de l'élément  $[K^e]$  est carrée d'ordre huit :  $\left\{F^e\right\} = [K^e] \left\{q^e\right\}$

### 3-2.2.2 Les déformations

— Relier les déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  en chaque point aux déplacements  $\{u(x, y)\}$  et aux déplacements nodaux  $\{q^e\}$ . Il est évident que la relation entre les déformations et les déplacements en tout point pour un problème d'élasticité plane est indépendante de la forme de l'élément choisi, on a ainsi

$$\left\{\varepsilon\right\} = [B] \left\{q^e\right\} \tag{3-11}$$

Où :

$[B]$  : Est la matrice reliant les déformations aux variables nodales

$$[B] = [C] [A^e]^{-1} \tag{3-12}$$

$$\left\{\varepsilon(x, y)\right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3-13}$$

Où :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

En remplacement u et v par leur valeur à partir de l'équation (3-2), on obtient l'expression suivante pour les déformations en tout point de l'élément :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy)}{\partial x} = a_2 + a_4y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial(a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy)}{\partial y} = a_7 + a_8x \quad (3-14)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy)}{\partial y} + \frac{\partial(a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy)}{\partial x} = a_3 + a_4x + a_6 + a_8y$$

En utilisant ces expressions des déformations dans l'équation (3-2), on obtient

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (3-15)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

$$\text{donc } \{\varepsilon\} = [C] \{a^e\} \quad (3-17)$$

### 3-2.2.3 Les contraintes

- Relier les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  aux déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  et aux déplacements nodaux  $\{q^e\}$ .

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\} \quad (3-18)$$

### 3-2.2.4 Matrice de la rigidité

#### 3-2.2.4.1 Principe de travaux virtuels

On suppose qu'un corps indéformable est en équilibre.

Le principe exprime que pour tout déplacement compatible avec les liaisons, la somme des travaux de toutes les forces agissant sur le système est nulle.

Pour un système élastique, le travail total comprend celui des forces extérieures et celui des forces intérieures au cours de la déformation élastique. Cette dernière est donc égale à la variation de potentiel interne.

$$\delta w + \delta v = 0 \quad (3-19)$$

$$\text{Avec } \delta w = \int_v \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (3-20)$$

$$\delta v = [\delta q^e]^T \{F\} \quad (3-21)$$

Le travail des efforts internes s'écrit :

$$\delta w = \int_v \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dv = \int_v \{\varepsilon\} [D] \{\delta \varepsilon\}^T dv$$

$$\text{Donc } \delta w = \{\delta q^e\}^T [K^e] \{q^e\}$$

Avec

$$[K^e] = \left[ \int_v [B]^T [D] [B] dv \right] \quad (3-22)$$

$$\text{Alors, } [K_0] = \int_v [C]^T [D] [C] dv$$

La variation de l'énergie potentielle des forces extérieures.

$$\delta v = \{\delta q^e\} [F^e] \quad (3-23)$$

$\{\delta q^e\}$  : Déplacement virtuel.

Exprimons le principe des travaux virtuels.

$$\delta w + \delta v = 0$$

$$\{\delta q^e\} [F^e] - \{\delta q^e\} [K^e] \{q^e\} = 0$$

$$\{F^e\} = [K^e] \{q^e\} \quad (3-24)$$

Après avoir trouvé la matrice de rigidité  $[K^e]$  pour un élément, on cherchera celle globale.

$$\{F\} = [K^g] \{q\} \quad (3-25)$$

la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  est donnée par l'équation :

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3-26)$$

Nous sommes maintenant prêts à construire la matrice de rigidité en remplaçant la matrices  $[D]$  donnée par l'équation (3-32), alors

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b [[C][A^{-1}]]^T [D][C][A^{-1}] dx dy \quad (3-27)$$

Qui pour un élément d'épaisseur constante devient :

$$[K^e] = t [A^{-1}]^T \left\{ \int \int [C]^T [D][C] dx dy \right\} [A^{-1}] \quad (3-28)$$

$$D'où : [K_0] = \left\{ \int \int [C]^T [D][C] dx dy \right\} \quad (3-29)$$

$$[K^e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (3-30)$$

Établir la matrice de rigidité  $[H]$  qui relie entre les contraintes et les déplacements.

D'après l'équation  $\{\sigma(x, y)\} = [D][B][q^e]$  on peut déduire la matrice  $[H]$ .

$$[H] = [D][B] \quad (3-31)$$

Qui donne la relation entre les contraintes en tout point et les déplacements nodaux :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

Pour des contraintes plane :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)}, d_{21} = d_{12} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}, d_{33} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \quad (3-33)$$

Pour déformations plane :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, d_{21} = d_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, d_{33} = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (3-34)$$

Pour obtenir les contraintes en un point donné, on remplace les ce ordonnées de ce point dans la matrice  $[H]$ . de cette façon, on peut déterminer les contraintes en chacun des quatre nœuds de l'élément. Elles peuvent être représentées par  $[\sigma^e]$  où :

$$[\sigma^e] = \begin{bmatrix} [\sigma(x_1, y_1)] \\ [\sigma(x_2, y_2)] \\ [\sigma(x_3, y_3)] \\ [\sigma(x_4, y_4)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H(x_1, y_1)] \\ [H(x_2, y_2)] \\ [H(x_3, y_3)] \\ [H(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{q^e\} \quad (3-35)$$

$$D'où : [\sigma^e] = [H^e] [q^e] \quad (3-36)$$

### 3-2.3 Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation (SBRIE)

Pour illustrer la procédure par laquelle les champs de déplacement ont développé quand le modèle en déformation est utilisé, l'exemple simple d'un élément rectangulaire d'élasticité plane est examiné.

En général, pour les problèmes d'élasticité plane, les relations entre les déformations planes  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  et les déplacements  $u$  et  $v$ , comme il est montré dans la figure (3-2) sont donnée par équation (3-37) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-37)$$

On annule les trois déformations ci-dessus et on intègre les équations différentielles résultantes, On obtient les expressions suivantes pour les déplacements  $u$  et  $v$  :

$$u_R = a_1 - a_3 y \quad (3-38)$$

$$v_R = a_2 + a_3 x$$

Les équations (3-38) représentent les champs de déplacement qui correspond aux mouvements du corps rigide (MCR) relatifs à l'élément. On remarque que les équations (3-38) contiennent trois constantes  $a_1$  et  $a_2$  représentent les mouvements de translation respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ , et la constante  $a_3$  représente la rotation dans le plan.

Pour l'élément rectangulaire à quatre nœuds aux sommets et deux degrés de liberté par chaque nœud, le champ de déplacement devra contenir huit constantes. On utilisé trois constantes pour la représentation des mouvements du corps rigide, et il reste cinq constantes qui peuvent être réparties entre les déformations de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_5 y \\ \varepsilon_x &= a_6 + a_7 x \\ \gamma_{xy} &= a_8 \end{aligned} \quad (3-39)$$

Après l'intégration le champ de déplacement comme suit :

$$u_S = a_4 x + a_5 x y + 0.5 a_8 y - 0.5 a_7 y^2 \quad (3-40)$$

$$v_S = a_6 y + a_7 x y + 0.5 a_8 x - 0.5 a_5 x^2$$

Les fonctions déplacements finales peuvent être obtenues en additionnant les équations (3-38) et (3-40), d'où :

$$\begin{aligned}
 u_R + u_S &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 x y + 0.5 a_8 y - 0.5 a_7 y^2 \\
 v_R + v_S &= a_2 + a_3 x + a_6 y + a_7 x y + 0.5 a_8 x - 0.5 a_5 x^2
 \end{aligned}
 \tag{3-41}$$

On note que les déformations sont indépendantes l'une de l'autre, afin qu'aucun couplage inutile entre l'effet de flexion et celui de cisaillement existe [DJO 90] de là un état de flexion pure peut être obtenu. En plus, les fonctions de déplacement contiennent des termes du second degré pour tenir compte des changements de courbure, l'élément se déforme comme montré dans la figure (3-2.b).

Il est très utile de comparer quelques caractéristiques de cet élément avec l'élément équivalent basé sur le modèle déplacement, soit l'élément rectangulaire bilinéaire *BR* le plus utilisé dont le nom dérive de sa capacité de représenter des déplacements linéaires sur les deux cotés du rectangle, ses fonctions de déplacement sont données par :

$$\begin{aligned}
 u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\
 v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy
 \end{aligned}
 \tag{3-42}$$

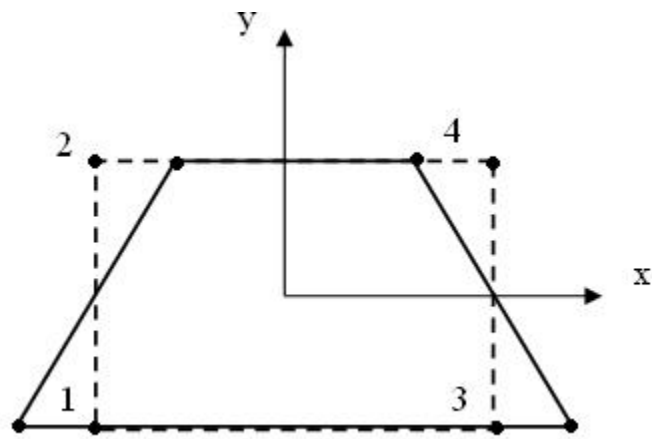
Puisqu'il n'existe que deux nœuds sur chaque coté de l'élément, seuls les déplacements linéaires peuvent être interpolés si la continuité inter éléments reste conservés. Donc sous charge, l'élément demeure continu, sans se chevaucher, voir la figure (3-2.a).

Les déformations sont données en différenciant les fonctions des déplacements. D'où :

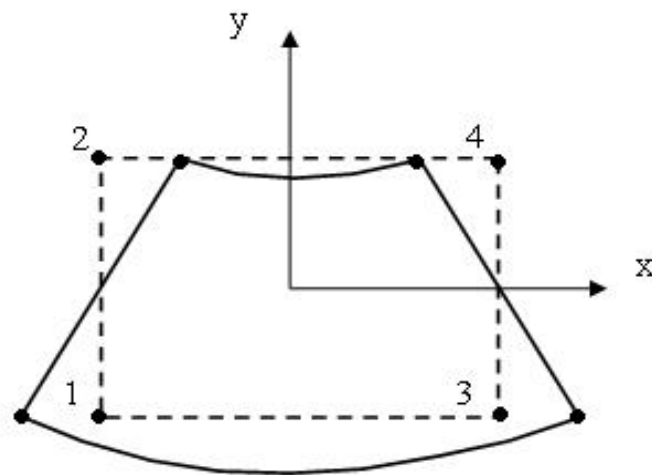
$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= a_2 + a_4 y \\
 \varepsilon_y &= a_7 + a_8 x \\
 \gamma_{xy} &= a_3 + a_4 x + a_6 + a_8 y
 \end{aligned}
 \tag{3-43}$$

Ces déformations ne sont pas indépendantes, depuis qu'elles sont couplées par les constantes  $a_4$  et  $a_8$ . Par conséquent, il est clair que l'élément bilinéaire ne peut pas représenter un état de cisaillement indépendant à moins que  $a_4 = a_8 = 0$ , ce cas représente les champs  $\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  comme des constantes, d'ici un état de flexion pure associé avec des déformations directes  $\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  linéaires et une déformation tangentielle  $\gamma_{xy}$ , nulle ne peut pas être obtenue avec l'élément bilinéaire.

Dans cet élément les déformations proposées satisfont automatiquement les équations de compatibilités de l'élasticité.



*a*— État déformé pour le modèle basé sur le déplacement



*b*— État déformé pour le modèle basé sur la déformation

**Figure (3-2) :** Comportement d'un élément à quatre nœuds lors de la flexion dans le plan

### 3-2.3.1 Détermination de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire  $[k^e]$  pour un élément rectangulaire (SBRIE) est donnée par :

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy$$

$$[K^e] = t [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (3-44)$$

$$\text{Alors, } [K_0] = \iint [C]^T [D] [C] dx dy \quad (3-45)$$

Pour  $[A]$ ;  $[C]$  et  $\{K_0\}$  voir annexe D

### 3-2.4 Élément rectangulaire basé sur l'approche en déformation (SBRIEIR)

Les équations des déplacements du corps rigide :

$$\begin{aligned} u_R &= a_1 - a_3 y \\ v_R &= a_2 + a_3 x \\ \theta_z &= a_3 \end{aligned} \quad (3-46)$$

Pour l'élément rectangulaire à quatre nœuds aux sommets et trois degrés de liberté dans chaque nœud, deux translations et un degré de rotation dans le plan (drilling rotation : voir l'annexe C), le champ de déplacement devra contenir neuf constantes. On utilise trois constantes pour la représentation des mouvements du corps rigide, et il reste neuf constantes qui peuvent être réparties entre les déformations de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_5 y + a_{11} y^2 + 2a_{12} xy^3 \\ \varepsilon_x &= a_6 + a_7 x - a_{11} x^2 - 2a_{12} x^3 y \\ \gamma_{xy} &= a_8 + a_9 x + a_{10} y + a_5 x + a_7 y \end{aligned} \quad (3-47)$$

Le champ de déplacements final pour SBRIEIR sera obtenu par combinaison de l'équation (3-46) et l'intégrale de l'équation (3-47) :

$$\begin{aligned} u &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 x y + 0.5 a_8 y + 0.5 a_{10} y^2 + a_{11} x y^2 + a_{12} x^2 y^3 \\ v &= a_2 + a_3 x + a_6 y + a_7 x y + 0.5 a_8 x + 0.5 a_9 x^2 - a_{11} x^2 y - a_{12} x^3 y^2 \\ \theta &= a_3 - 0.5 a_5 x + 0.5 a_7 y + 0.5 a_9 x - 0.5 a_{10} y - 2 a_{11} x y - 3 a_{12} x^2 y^2 \end{aligned} \quad (3-48)$$

#### 3-2.4.1 Détermination de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  pour un élément rectangulaire (SBRIEIR) est donnée par :

$$\begin{aligned} [K^e] &= t \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy \\ [K^e] &= t [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \end{aligned} \quad (3-49)$$

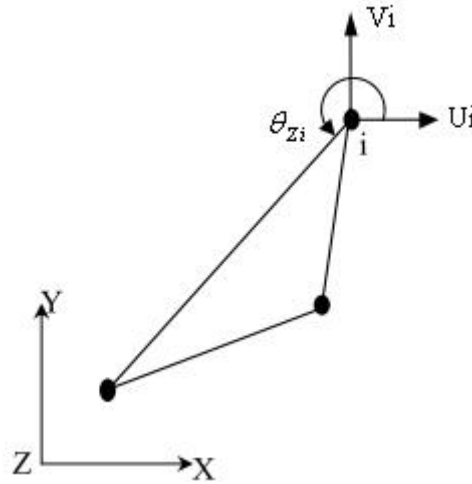
$$\text{Alors, } [K_0] = \int_0^a \int_0^b [C]^T [D] [C] dx dy \quad (3-50)$$

Pour  $[A]$ ;  $[C]$  et  $\{K_0\}$  voir annexe D



### 3-2.5 Élément triangle basé sur l'approche en déformation SBTIEIR [BEL 05]

La Figure (3 -3) montre la géométrie de l'élément SBTIEIR basé sur l'approche en déformation. Les déplacements nodaux correspondants. Chaque nœud (i) avec  $U_i$ ,  $V_i$ , et  $Z_i$  de la rotation dans le plan.



**Figure (3 -3) :** *Système de coordonnées de l'élément SBTIEIR pour l'élasticité plan.*

Considérer l'élément triangulaire représenté sur la figure (3 -3) . trois composants Cartesiens du champ de déformation.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-51)$$

Nous intégrons d'abord l'équation (3-51) avec toutes les déformations égales à zéro, de ce fait obtenant :

$$\begin{aligned} u_R &= a_1 - a_3 y \\ v_R &= a_2 + a_3 x \\ \theta_z &= a_3 \end{aligned} \quad (3-52)$$

Les déformations assumées sont [SAB 85] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_5 y + a_7 x \\ \varepsilon_y &= a_6 + a_7 x + a_5 y \\ \gamma_{xy} &= a_8 + a_9 (x + y) \end{aligned} \quad (3-53)$$

Après des intégrations des équations (3-53) nous obtenons ;

$$u = a_4 x + a_5 x y + a_7 \frac{(x^2 - y^2)}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2}$$

$$v = a_5 \frac{(y^2 - x^2)}{2} + a_6 y + a_7 x y + a_8 \frac{x}{2} + a_9 \frac{x^2}{2} \quad (3-54)$$

$$\theta = -a_5 x + a_7 y + a_9 \frac{(x - y)}{2}$$

Le champ de déplacements final pour SBTIEIR sera obtenu par combinaison de l'équation (3-52) et l'intégrale de l'équation (3-53) :

$$u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 x y + a_7 \frac{(x^2 - y^2)}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2}$$

$$v = a_2 + a_3 x + a_5 \frac{(y^2 - x^2)}{2} + a_6 y + a_7 x y + a_8 \frac{x}{2} + a_9 \frac{x^2}{2} \quad (3-55)$$

$$\theta_z = a_3 - a_5 x + a_7 y + a_9 \frac{(x - y)}{2}$$

### 3-2.5.1 Détermination de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  pour un élément rectangulaire (SBTIEIR) est donnée par :

$$[K^e] = \iint_S [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3-56)$$

$$[K^e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (3-57)$$

### 3-3 Éléments plaques

#### 3-3.1 Introduction

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles de Kirchhoff et de Reissner-Mindlin. Les éléments de plaque en flexion jouent un rôle très important dans l'analyse linéaire des structures.

Les plaques sont des structures tridimensionnelles constituées d'une dimension et d'épaisseur, noter  $2h$  est très inférieur aux deux autres. L'invariance de l'épaisseur est traduite par  $\varepsilon_{zz} = 0$  dans un repère local où la dimension de l'épaisseur est la direction de référence  $z$  et où les deux autres directions sont définies orthogonales et dans le plan moyen  $z = 0$  voir la figure (3-4).

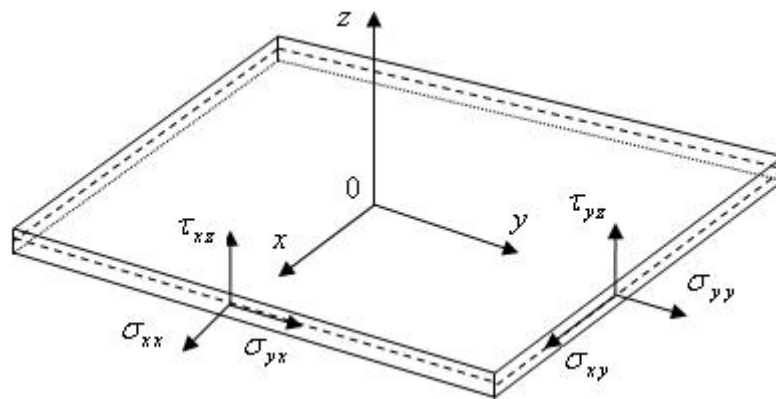


Figure (3.4) : référence locale d'une plaque

#### 3-3.2 Expression des déplacements et déformations de la plaque

##### 3-3.2.1 Expression des déplacements

À une distance  $z$  du plan moyen, on pose :

$$u(x, y, z) = u(x, y, 0) + z\beta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v(x, y, 0) + z\beta_y(x, y) \quad (3-58)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0) + w\beta_z(x, y)$$

On notera  $u(x, y, 0) = u_0(x, y, 0)$  à la même manière pour les deux déplacements suivants.

Donc l'expression (3-58) se transforme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\beta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \quad (3-59)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

$u_0$  et  $v_0$  : Les déplacements de membrane dans les directions  $x$  et  $y$ .

$w$  : Le déplacement selon  $oz$  ou déplacement de flexion.

$\beta_x$  : rotation du plan yz autour de y.

$\beta_y$  : rotation du plan xz autour de x.

$$\begin{aligned}\beta_x &= \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y &= -\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{3-60}$$

### 3-3.2.2 Expression des déformations [IMB 84]

L'état de déformation d'une plaque peut être considéré comme la superposition de déformations de membrane et de déformations de flexion :

Après l'équation (3-59), expression de déformation c'est écrit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y}\end{aligned}\tag{3-61}$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_M\} + \{\varepsilon_F\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_F\tag{3-62}$$

— les déformations de membrane :

$$\varepsilon_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(m)} \\ \varepsilon_y^{(m)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}\tag{3-63}$$

— les déformations de flexion :

$$\varepsilon_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(f)} \\ \varepsilon_y^{(f)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(f)} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3-64)$$

$$\varepsilon_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(f)} \\ \varepsilon_y^{(f)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(f)} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_f = z \{K\} \quad (3-65)$$

$K$  : la courbure de flexion

Il existe aussi des dérivées du  $u$  et  $v$  par rapport à  $z$  ce qui signifie l'existence de déformation de cisaillement transverse  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ .

$$\varepsilon_c = \{\gamma\}$$

$$\varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_c = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz}^{(m)} \\ 2\varepsilon_{yz}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-66)$$

### 3-3.3 Expression des contraintes et des efforts

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (3-67)$$

Où :  $M_x, M_y, M_{xy}, T_x, et T_y$  représentent les moments de flexion et de torsion et les forces de cisaillement par unité de longueur.

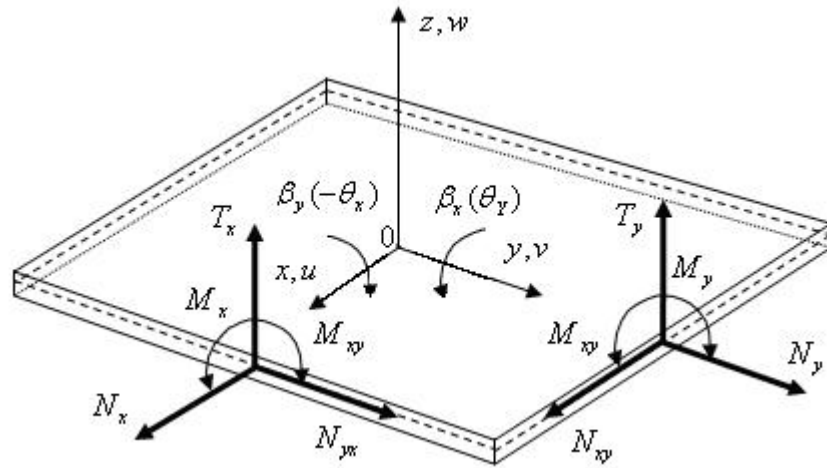


Figure (3.5) : Efforts élémentaires par unité de longueur

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \{\sigma_f\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_f] & 0 \\ 0 & [D_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{K\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \quad (3-68)$$

Où :

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_f] & 0 \\ 0 & [D_c] \end{bmatrix} \quad (3-69)$$

$[D]$  : La matrice d'élasticité contient des termes  $d_{ij}$ .

Pour des plaques homogènes est isotropes la matrice d'élasticité contient deux sous matrice (flexion et de cisaillement respectivement).

$$[D_f] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

$$d = d_{11} = d_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$[D_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-71)$$

$$[D_c] = \begin{bmatrix} d_{44} & 0 \\ 0 & d_{55} \end{bmatrix} \quad (3-72)$$

$$[D_c] = k \frac{Eh}{12(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k$  : Facteur de correctif de cisaillement transverse qui est égal à 5/6.

### 3-3.4 Détermination de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  pour une plaque est donnée par :

$$[K^e] = h \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy$$

$$\text{Alors, } [K_0] = \int_0^a \int_0^b [C]^T [D] [C] dx dy \quad (3-73)$$

### 3-3.5 Les modèles classiques Kirchhoff [NGU 04]

La normale reste droite et est perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformé Figure (3-6).

L'hypothèse adoptée est celle de Kirchhoff de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées,  $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$  ou  $T_x = T_y = 0$ .

Le champ de déplacements de Kirchhoff s'écrit alors,

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\beta_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \quad (3-74)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

$\beta_x$  et  $\beta_y$  : Les rotations due à la flexion (sans cisaillement).

$$\beta_x = \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3-75)$$

$$\beta_y = -\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

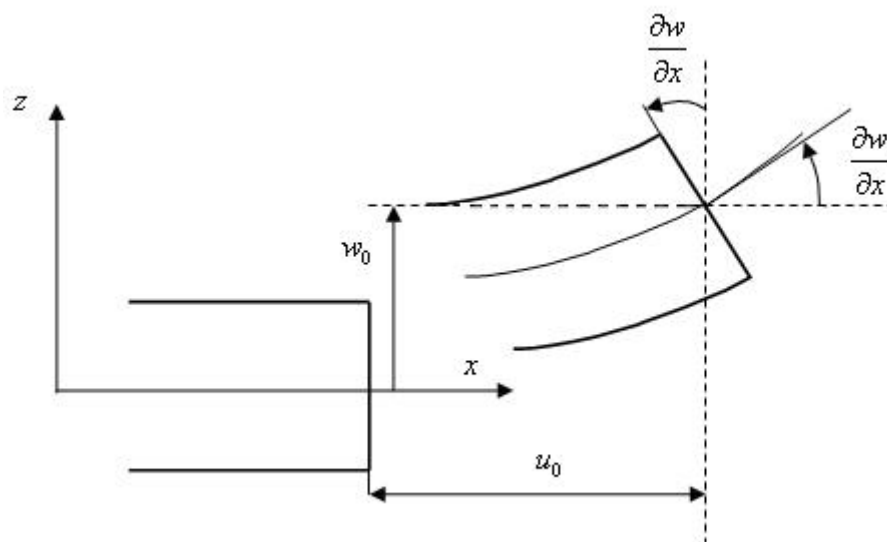


Figure (3.6) : Cinématique de Kirchooff.

### 3-3.5.1 Élément plaque basé sur l'approche en déplacement (ACM)

Élément rectangulaire en flexion sans cisaillement transversal, dans le cas de la flexion des plaques où les flèches sont petites, l'état des déplacements en chaque point de l'élément peut-être représentés par trois composantes :

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial w / \partial y \\ -\partial w / \partial x \\ w \end{Bmatrix} \quad (3-76)$$

Nous avons 12 degrés de liberté pour l'élément rectangulaire de plaque, il est nécessaire de choisir seulement les 12 termes les plus appropriés pour  $w(x, y)$  en conséquence, nous choisirons l'ensemble complet de termes cubiques (10 termes) et des deux termes quartiques  $x^3y$  et  $xy^3$ . alors on obtient :

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (3-77)$$

La fonction de déplacement donne les expressions suivantes pour les rotations :

$$\theta_x = (a_3 + a_5x + 2a_6y + a_8x^2 + 2a_9xy + 3a_{10}y^2 + a_{11}x^3 + 3a_{12}xy^2) \quad (3-78)$$

$$\theta_y = -(a_2 + 2a_4x + a_5y + 3a_7x^2 + 2a_8xy + a_9y^2 + 3a_{11}x^2y + a_{12}y^3)$$

Pour la représentation graphique des d.d.l de l'élément flexionnel ainsi que les matrices

$[A]$  ;  $[K_0]$  voir Annexe B.

Noter que la matrice de rigidité d'élément  $[K^e]$  est (12×12) matrice (rappeler que  $[C]$  est (3×12) et  $[D]$  est (3×3)).

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (3-79)$$



### 3-3.6 Les modèles Reissner - Mindlin [NGU 04]

Pour introduire l'effet du cisaillement transverse, l'hypothèse cinématique est adoptée : La normale reste droite, mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée Figure (3-7).

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{3-80}$$

D'après les hypothèses de Mindlin,  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont données par :

$$\begin{aligned} \beta_x &= \left(-\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_{xz}\right) \\ \beta_y &= \left(-\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_{yz}\right) \end{aligned} \tag{3-81}$$

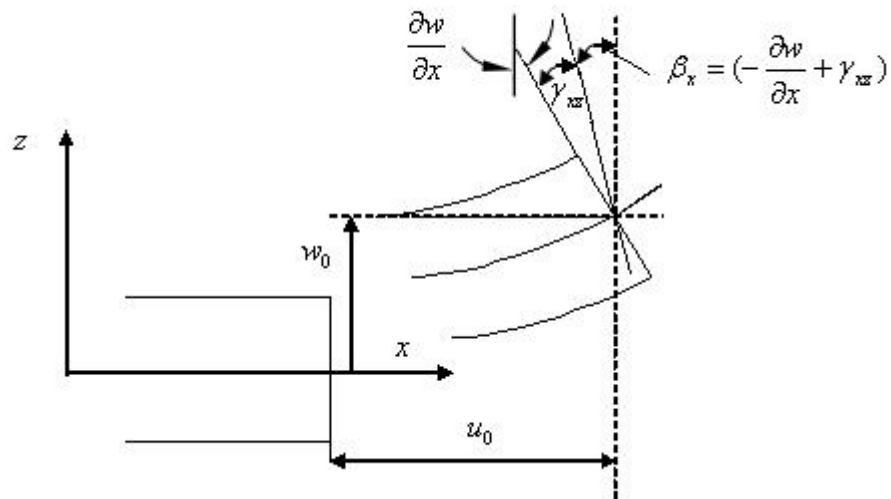


Figure (3.7) : Cinématique de Reissner-Mindlin.

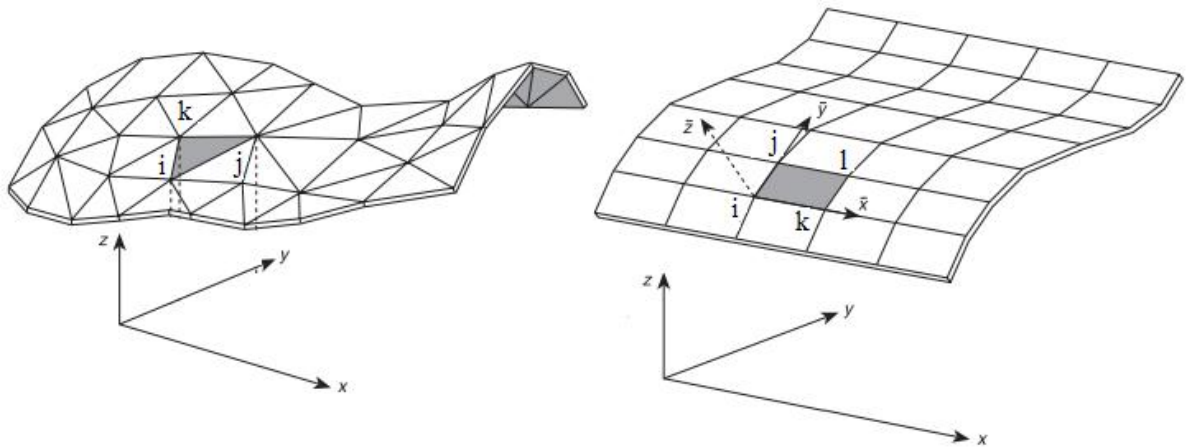
Les déformations de cisaillement peuvent être écrites comme suit :

$$\varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ -\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{Bmatrix} \tag{3-82}$$

### 3-4 Éléments coques

#### 3-4.1 Introduction

Les éléments de coque sont largement utilisés pour modéliser les structures à géométrie courbée [COOK 89], ils sont basés sur la théorie classique des coques et sont très efficaces, mais en revanche difficiles à développer. Il a quatre types d'éléments de coque : éléments plans, éléments courbes, éléments axisymétriques et éléments solides dégénérés de type Mindlin [YANG 90].



**Figure (3.8) :** *Discretisation des coques par des éléments finis plans triangulaires et rectangulaires.*

Une approche alternative pour modéliser ces structures consiste à utiliser une série d'éléments plans, qui sont plus simples et plus faciles pour l'implantation dans un code zienkiewicz [ZIE 71] recommande pour modéliser les surfaces courbées, une série d'éléments plans de coque, plutôt que d'utiliser des éléments courbes. Il suggère de combiner des éléments membranaires et des éléments flexionnels pour développer ces éléments. Cependant, l'efficacité de l'élément et la précision des résultats dépendent en grande partie du type d'élément choisi. L'élément de membrane possède les deux degrés de liberté (de translation) dans le plan et l'élément de flexion possède deux degrés de liberté de rotation et un degré de liberté de translation. Les forces de membranes et de flexion sont totalement indépendantes les unes des autres pour les éléments plans de coque.

#### 3-4.2 Discretisation d'une surface courbée par des éléments plans

Discretisation d'une de la MEF, la discretisation du milieu continu est en mesure de surmonter certaines difficultés liées à la différence classique dans la géométrie en présentant le concept d'une interpolation. Cependant, dans la solution pratique d'un problème de coque, des approximations doivent être invoquées pour surmonter les difficultés théoriques rencontrées dans

les formulations de coque classiques, en plus de l'importance pratique de l'approximation de surface de coque courbée au moyen de petits éléments plans figure (3.9).

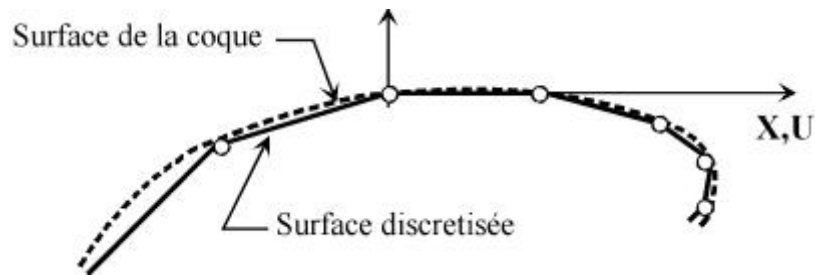


Figure (3.9) : Discrétisation d'une surface courbée par des éléments plans.

### 3-4.3 Construction d'un élément de coque plane [IMB 84]

Le principe d'obtention d'un élément de coque plane par superpositions d'un élément de membrane (de préférence riche en membranes) et d'un élément de flexion (de préférence riche en flexion). Dans le cas des deux éléments, ceci suppose évidemment que les phénomènes de membrane et de flexion sont découplés. Dans le cas contraire, il faut développer directement l'élément complet.

Les éléments de coques possèdent en général six D.D.L dans chaque nœud, les déplacements nodaux sont :

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (3-83)$$

Pour  $i=1, n$   $n$  : nombre de noeuds

$u_i, v_i, w_i$  sont les d.d.l de translation

$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  sont les d.d.l de rotation

### 3-4.4 Élaboration de la matrice de rigidité élémentaire

D'apport, on considère l'effet membranaire (en contrainte plane). Nous avons que l'état de déformation est défini par le champ de déplacement uniforme dont les composantes sont les deux translations (u,v).

On considérant la matrice de rigidité reliant les déplacements plans aux nœuds, on a :

$$\{F^e\}^M = [K^e]^M \{U^e\}^M \quad (3-84)$$

$$\text{Où : } \{U_i\}^M = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (3-85)$$

$$\{F_i\}^M = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \end{Bmatrix} \quad (3-86)$$

On peut écrire alors pour un nœud (i).

$$\{F_i\}^M = [K_{ii}]^M \{U_i\}^M$$

Où :  $[K_{ii}]^M$ , est la sous matrice qui relie les forces du nœud (i) aux déplacements de ce même nœud, pour tout l'élément, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} [K_{11}^M] & [K_{12}^M] & [K_{13}^M] & [K_{14}^M] \\ [K_{21}^M] & [K_{22}^M] & [K_{23}^M] & [K_{24}^M] \\ [K_{31}^M] & [K_{32}^M] & [K_{33}^M] & [K_{34}^M] \\ [K_{41}^M] & [K_{42}^M] & [K_{43}^M] & [K_{44}^M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \\ u4 \\ v4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3-87)$$

$$\text{Où : } [K_{11}^M] [K_{12}^M] \dots [K_{44}^M]$$

De la même manière, quand on considère le comportement flexionnel, on aboutit à la relation suivante :

$$\{F^e\}^F = [K^e]^F \{U^e\}^F \quad (3-88)$$

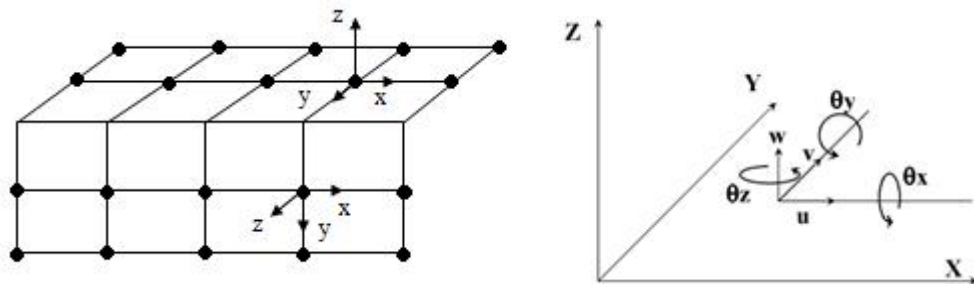
Par contre, les sous matrices  $[K_{11}^F] [K_{12}^F] \dots [K_{44}^F]$

La matrice de l'élément de membrane pour chaque nœud est d'ordre  $2 \times 2$ , et peut être représentée par,  $[K^M]_{2 \times 2}$ . La matrice de rigidité de flexion pour chaque nœud est d'ordre  $3 \times 3$  et est symbolisée par,  $[K^F]_{3 \times 3}$ . la matrice de rigidité pour chaque nœud de l'élément de coque est d'ordre  $6 \times 6$ , et est symbolisée par,  $[K^C]_{6 \times 6}$ .

### 3-4.5 Problème pratique de la modélisation (rigidité fictif)[BEL00]

Jusqu'ici, on a supposé que tous les éléments, pris à travers une section, d'une structure en plaques pliées, étaient inclinés entre eux, cela est valable que se on se contente d'étudier une coque courbe comme une plaque pliée équivalente. Cependant, la formulation que nous venons de décrire conduit à des difficultés dans la modélisation si tous les éléments qui concourent en un même nœud sont coplanaires, ceci est en effet causé par l'absence de la rigidité correspondante à la rotation  $\theta_z$ , qui nous donnera une singularité du type  $0=0$  (1).

Cette équation ne présente pas de difficulté particulière avant l'assemblage (bien que pour certains ordinateurs elle entraîne un message d'erreur). Néanmoins dans le cas où les directions des axes globaux différents de celles des axes locaux, on aboutit après le changement de repère à six équations qui sont linéairement dépendantes et donc à un système où la matrice est singulière.



Figure(3.10) : Structure en plaque pliée.

Ce type de singularité disparaît quand les éléments adjacents ne sont pas coplanaires ou quand les éléments plaque sont bordés par des poutres raidisseurs. Les solutions envisageables surmonter cette difficulté sont les suivantes :

- Supprimer les degrés de liberté  $\theta_z$  correspondant à cette singularité et seul. Ceci n'est pas facile à mettre en œuvre.
- Introduire des rigidités fictives faibles correspondant à ces degrés de liberté.

Remplacer la relation (1) par la relation :

$$K_{\theta_z} \theta_{z_i} = 0 \quad (3-89)$$

Après transformation, cela mène à un système d'équation sans problèmes dont on tire tous les déplacements, y compris un  $\theta_{z_i}$  de la manière habituelle. Comme ce  $\theta_{z_i}$  n'a pas d'influence sur les contraintes et en effet n'est pas couplé aux équations de l'équilibre, la valeur de  $K_{\theta_z}$  correspond à une rigidité extérieure et n'a donc pas d'importance.

Des travaux ont été consacrés à la détermination du coefficient de rigidité réel pour les rotations du type envisagé, on les considérons comme un degré de liberté supplémentaire en analyse plane.

Dans tous les tests numériques  $\alpha$  sont pris par défaut  $\alpha = 10^{-6}$  [COO91] [MAC88] trouvent que cette valeur est convenable pour la plupart des problèmes à l'exception des problèmes non linéaires de coque ou des valeurs plus grandes sont requises.

Dans notre cas on a simplement introduit des coefficients de rigidité en rotation fictifs pour les éléments qu'ils soient coplanaires ou non. Pour un élément quadrilatère, ils ont été définis par une matrice tel que l'équilibre soit préservé en coordonnées locales. Pour un quadrilatère on a :

$$\begin{Bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zk} \\ M_{zl} \end{Bmatrix} = \alpha.E.h.A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \\ \theta_{zl} \end{Bmatrix} = [K^c_{ij}] \begin{Bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \\ \theta_{zl} \end{Bmatrix} \quad (3-90)$$

Où :  $\alpha$  est un coefficient qui reste à fixer. sa valeur dépend de la précision de l'ordinateur : elle doit être suffisamment petite pour limiter l'influence des rigidités fictives sur la suffisamment grande pour éviter les singularités possibles.

La matrice de rigidité de l'élément de coques est d'abord assemblée par superposition de la rigidité en membrane et la rigidité en flexion, voir annexe E

ACM : Élément rectangulaire en flexion (modèle en déplacement).

SBQ4 : Élément quadrilatère membranaire (modèle en déformation).

Ces types d'éléments présentent des inclinaisons les uns par rapport aux autres. Avant d'effectuer l'assemblage pour constituer la matrice globale, il est nécessaire d'exprimer les matrices et vecteurs élémentaires dans le système de coordonnées globales (voir Annexe F).

### 3-5 Éléments solides

#### 3-5.1 Élément brique basé sur l'approche en déplacement :

##### 3-5.1.1 Introduction :

La méthode des éléments finis permet actuellement la résolution des problèmes d'élasticité à 3 dimensions qui n'était pas envisageable auparavant. Cependant, la résolution des problèmes tridimensionnels plus que les autres types de problèmes est complexe et coûteuse.

La géométrie de ces éléments est explicitement décrite dans l'espace. Cependant, cet élément a des applications limitées puisqu'il ne convient pas pour les frontières irrégulières et il est difficile d'en faire un maillage graduel.

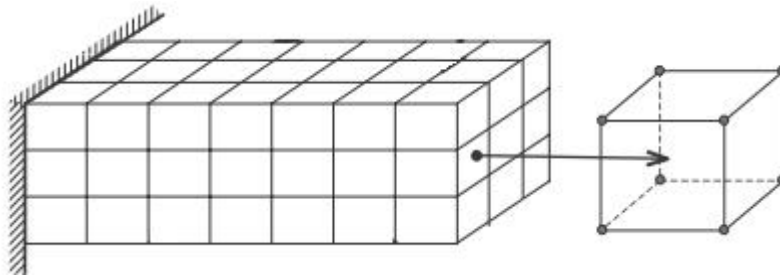


Figure (3.11) : Élément de solide (brique à 8 nœuds).

##### 3-5.1.2 Champs de déplacements

L'élément brique à 8 nœuds avec trois degrés de liberté par nœud contient donc 24 d.d.l.

Élément brique construit trois composantes de déplacement ( $u, v, w$ ), translation suivant les axes  $x, y, z$  respectivement.

Le champ de déplacement donné comme suit :

$$\begin{aligned}
 u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \\
 v &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}xy + a_{14}yz + a_{15}zx + a_{16}xyz \\
 w &= a_{17} + a_{18}x + a_{19}y + a_{20}z + a_{21}xy + a_{22}yz + a_{23}zx + a_{24}xyz
 \end{aligned} \tag{3-91}$$

Le champ de déplacement sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & xy & yz & zx & xyz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & xy & yz & zx & xyz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & xy & yz & zx & xyz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ' \\ ' \\ a_{24} \end{Bmatrix} \tag{3-92}$$

Où :

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = [X^e] \{a^e\} \tag{3-93}$$

**3-5.1.3 les déformations**

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}, \quad (3-94)$$

$$\text{D'où : } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ z \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ z \end{Bmatrix} \quad (3-95)$$

**3-5.1.4 matrice de la rigidité**

$$[K^e] = \iiint [B]^T [D][B] dv \quad (3-96)$$

$$[K^e] = [A]^{-T} [K_0][A]^{-1} \quad (3-96)$$

$$\text{Alors, } [K_0] = \iiint [C]^T [D][C] dv \quad (3-97)$$

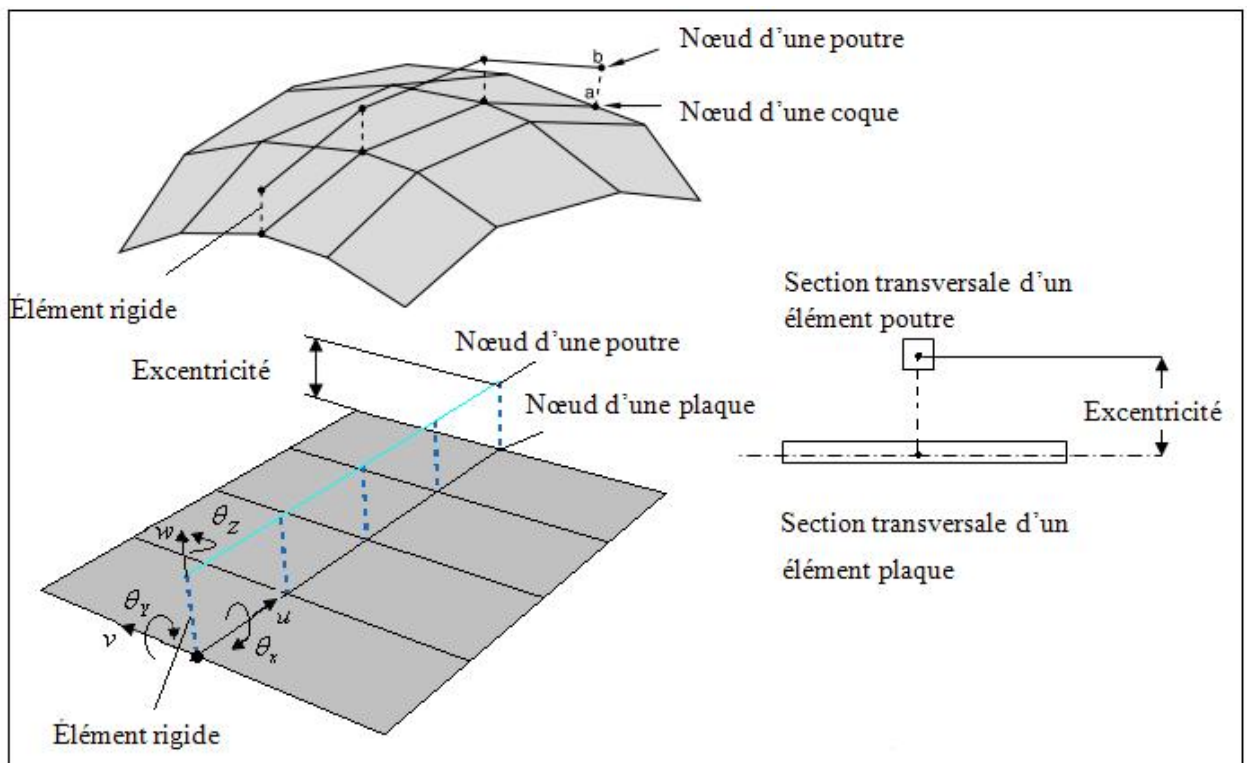


### 3-6 Plaque et coque raidie

La modélisation d'une plaque raidie peut s'envisager de trois différentes façons : Soit, des éléments finis volumiques sont utilisés à la fois pour la plaque et le raidisseur, soit ce sont seulement des éléments de plaque, soit ce sont des éléments de plaque pour la plaque et de poutre pour le raidisseur.

On remarque dans le cas des plaques ou coques raidies voir figure (3-12), que la compatibilité des déplacements n'est pas toujours à assurer, par exemple entre la flèche ( $v$ ) de la poutre et le déplacement de la membrane correspondant de la plaque, en plus dans le cas de suppression des rotations  $\theta_{zi}$  de la plaque, il n'y a aucune transmission du moment  $T_z$  de la poutre à la plaque.

Enfin, il est également nécessaire de prendre en compte l'excentrement de la fibre neutre de la poutre par rapport à la surface moyenne de la plaque.



**Figure (3-12) :** *Plaque et coque raidie avec un excentré entre l'axe d'une poutre et surface moyenne d'une plaque.*

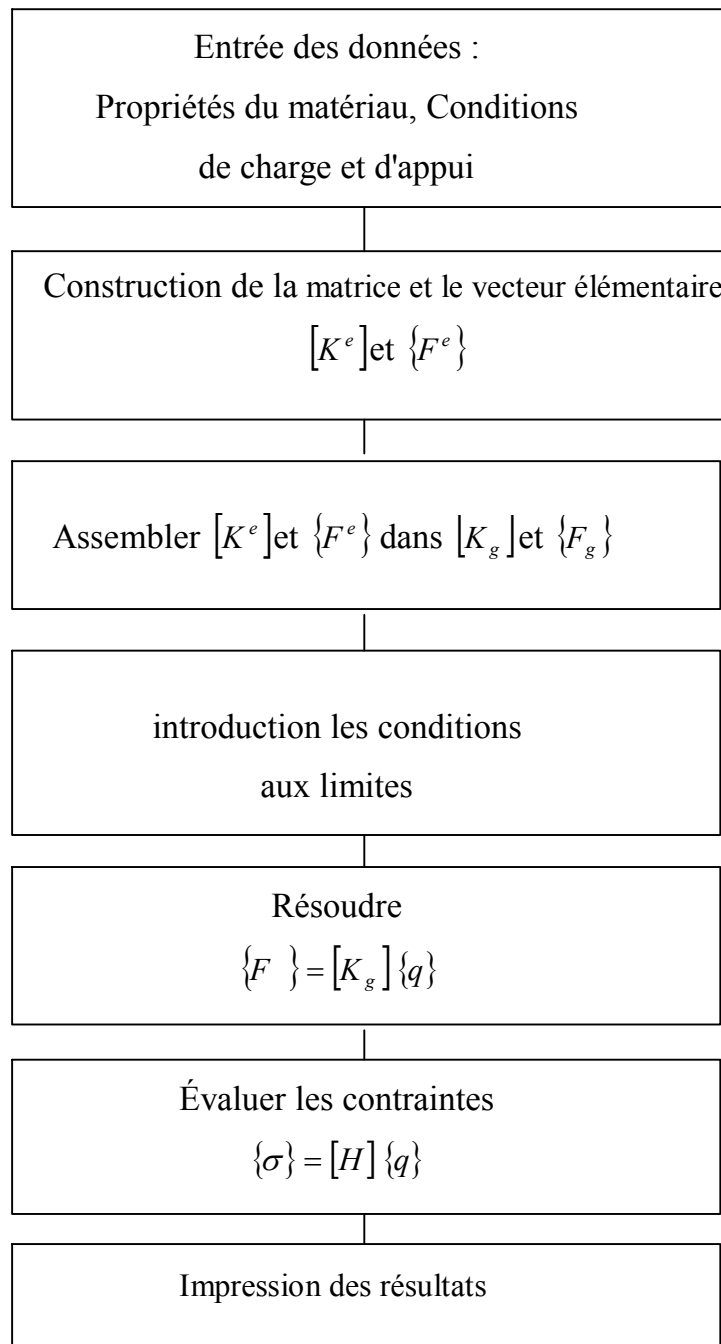
### 3-7 Programme de résolution statique par la MEF

On a présenté dans ce chapitre les étapes nécessaires à l'obtention de la matrice de rigidité élémentaire. La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul de la matrice de rigidité de toute la structure.

Dans cette méthode, les quantités inconnues sont les déplacements et l'objet de la résolution est la détermination des déplacements nodaux. Une fois que ceux-ci sont calculés, on peut obtenir les contraintes de l'élément en utilisant la matrice  $[H]$ .

La figure (3-13) résume les parties de base du programme pour la résolution complète d'un problème par la méthode des éléments finis :

- Entrée des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les propriétés mécaniques (module d'élasticité... etc.), conditions aux limites.
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global.
- Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (déplacement, contraintes).



**Figure (3-13) :** Organigramme global du programme.

### 3-8 Conclusion

- ✓ Les éléments basés sur le champ de déformation vérifient les équations de compatibilité et la représentation exacte du mouvement du corps rigide.
  
- ✓ L'utilisation des éléments intégrés dans le code ABAQUS ( les éléments avec intégration réduite, les éléments avec et sans les modes incompatibles), permet de faire la comparaison avec les éléments à champ de déformation ou bien avec la solution analytique.

# Chapitre 4

## Validation Numérique

#### 4 -1 Introduction :

Dans ce chapitre est consacré à la résolution d'un problème d'élasticité. Pour les tests de validation, nous allons utiliser deux types de logiciels de calcul par la méthode des éléments finis. Le premier logiciel c'est le programme de fortran qui est utilisé pour résoudre des problèmes soumis à des charges statiques réparties ou concentrées. Le deuxième logiciel numérique l'ABAQUS qui est considéré comme du logiciel de calcul par éléments finis très puissants pour résoudre les problèmes statiques des différentes structures. De plus, nous supposerons les structures homogène et isotrope.

Les tests de validation d'un modèle : la vérification de la convergence, et d'autre part l'influence de la distorsion géométrique sur la précision.

Le présent chapitre est organisé en trois validations :

- 1-Validation numérique des éléments finis membranaire (2D).
- 2-Validation numérique des éléments plaques et coques.
- 3-Validation numérique des éléments solides (3D).

## 4-2 Validation numérique des éléments finis membranaires

### 4-2.1 Flexion plane d'une poutre console courte encastrée [SAB 85]

La poutre console considérée ont une épaisseur de  $t=1$ in et une longueur  $L=48$ in et largeur  $h=12$  in, les propriétés du matériau sont les suivantes :  $E=30000$  ksi et  $\nu=0,25$ .

Le teste se fait pour les éléments membranaires à des degrés de liberté différents, et de plusieurs types, triangulaire et rectangulaire. On détermine la flèche à l'extrémité de la poutre au point  $C$  et la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  au point  $B$ . On considère le comportement d'une poutre console soumise à une force de cisaillement distribuée ( $P=40$  k) comme la montre la figure (4.1).

La solution analytique : [TIM 51] :

$$V_C = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{(4+5\nu)}{2Eh} PL = 0,3553 \quad (4,1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(B)xx} &= -\frac{3}{2} \frac{P}{(h/2)^3} xy \\ &= -\frac{p}{I} xy = 80 \end{aligned} \quad (4,2)$$

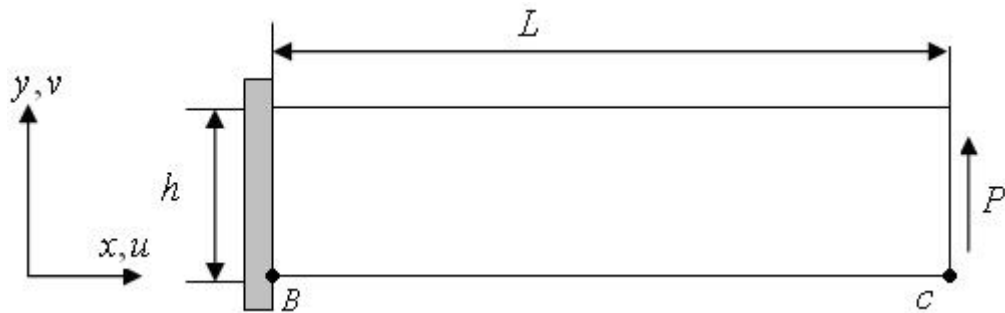


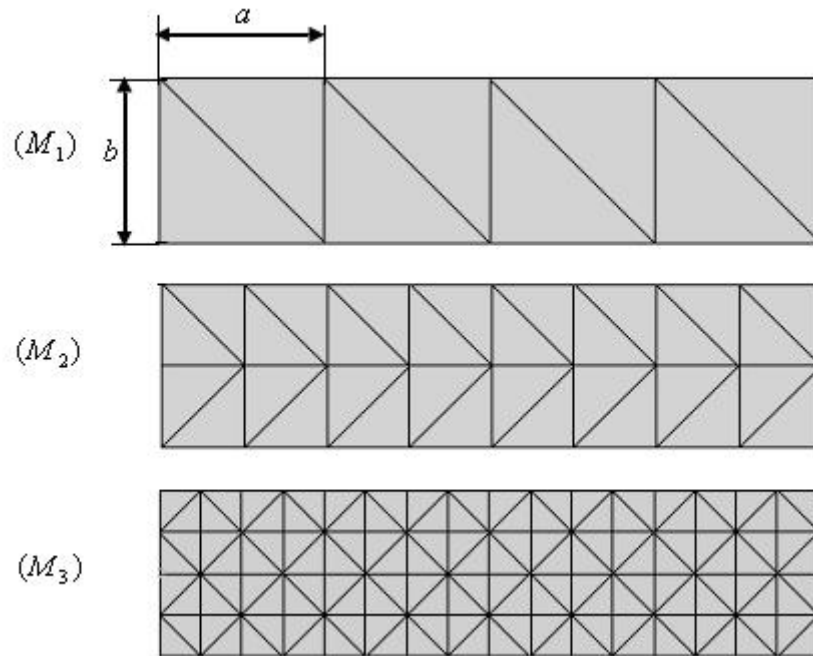
Figure (4.1) : Poutre console sous charge verticale.

#### Note :

Les éléments d'ABAQUS de type triangle et rectangle 2DDL par nœud du problème d'élasticité plane sont :

- **CPS3** : élément à 3 nœuds linéaires.
- **CPS4-c** : élément compatible à 4 nœuds bilinéaires quadrilatère.
- **CPS4-inc** : élément avec un mode incompatible à 4nœuds bilinéaire quadrilatère.

Les résultats des déplacements verticaux à l'extrémité des différentes densités de maillage (M1, M2et M3) figure (4.2) sont représentés dans les tableaux (4-1).



**Figure (4.2):** Densité de maillage ( $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ ).

Les résultats de simulation pour le déplacement du nœud C suivant la direction  $Oy$  sont :

Maillage	Présente étude						Solution analytique
	BR	Abaqus			SBRIE	SBRIEIR	
		CPS3	CPS4-inc	CPS4-c			
$(M_1)$	0,24242	0,09034	0,34899	0,24242	0,32830	0,32812	0,3553
$(M_2)$	0,31623	0,19863	0,35168	0,31622	0,34609	0,34573	
$(M_3)$	0,34490	0,30572	0,35478	0,34490	0,35333	0,35307	

**Tableau (4.1) :** Flèche verticale au point C

La figure (4-3) représente les déplacements verticaux du point C sous forme graphique. Nous constatons que les deux éléments BR, CPS4-c se comportent de manière similaire. Ils convergent bien vers la solution analytique. Pour les autres éléments (CPS4-inc, SBRIE et SBRIEIR), on observe que la convergence est assez rapide. Ce test montre aussi que la convergence lente observée est probablement due à la très pauvre base d'élément fini triangulaire linéaire CPS3.



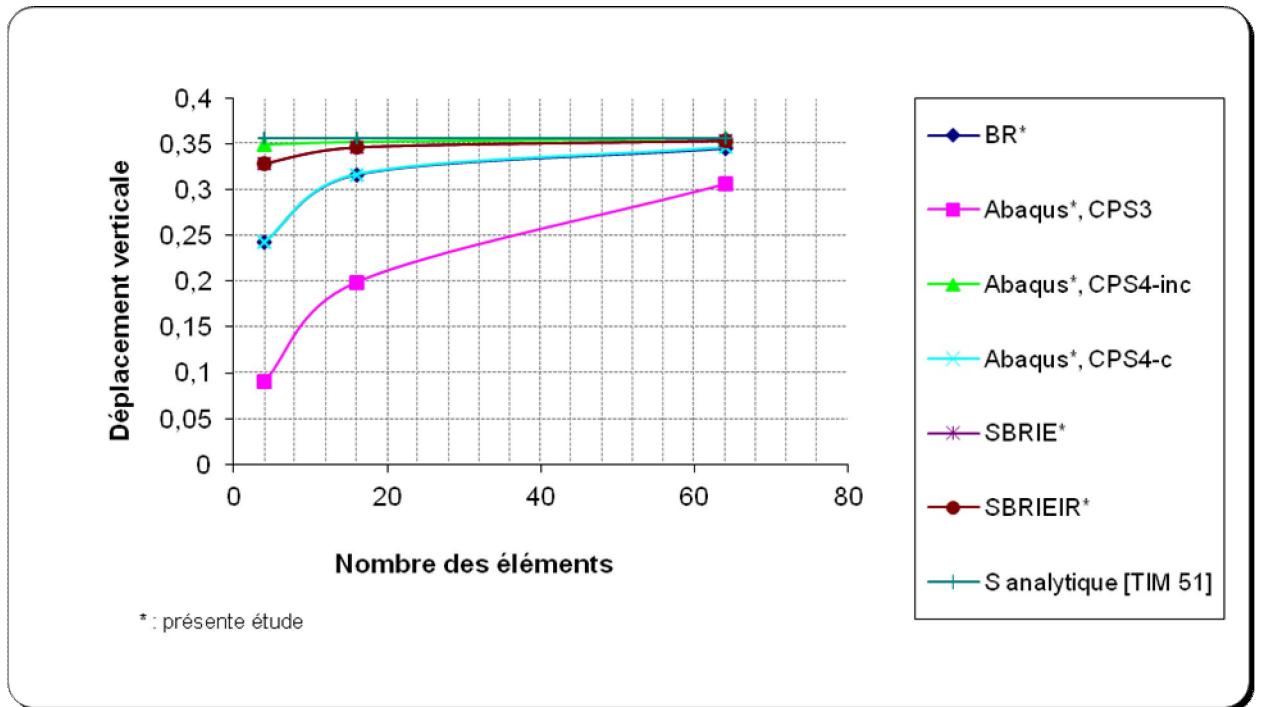


Figure (4.3) : Flèche verticale au point C.

Les résultats des contraintes longitudinales  $\sigma_{xx}$  du point B suivant Ox sont donnés dans le Tableau (4-2).

Maillage	Présente étude						Résultat analytique $\sigma_{xx}$
	BR	Abaqus			SBRIE	SBRIEIR	
		CPS3	CPS4-inc	CPS4-c			
(M <sub>1</sub> )	50	17,12	69,94	50	70	72	80
(M <sub>2</sub> )	70	21,38	74,53	70	77	79	
(M <sub>3</sub> )	81	66,84	80,57	81	83	87	

Tableau (4.2) : Contraintes longitudinales  $\sigma_{xx}$  au point B.

Les résultats obtenus pour les deux cas de maillage (régulier et distordu) sont illustrés sur le tableau (4-3).

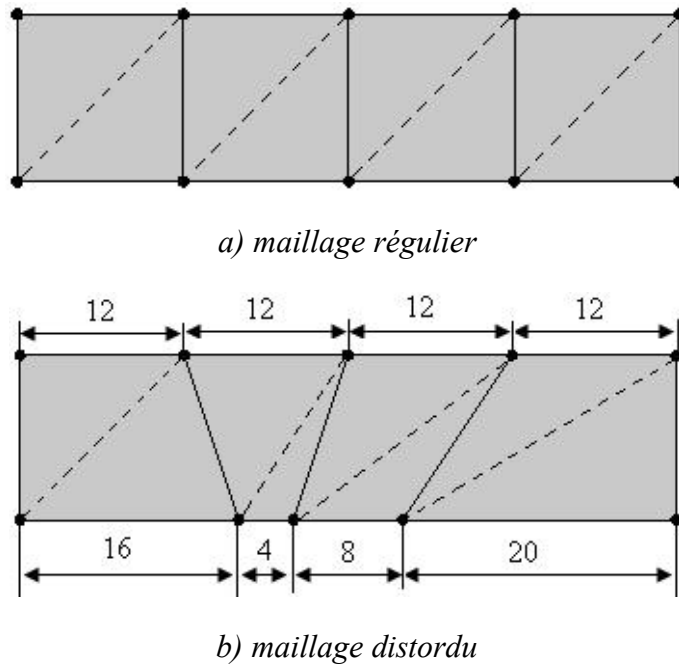


Figure (4.4) : Poutre console :a) maillage régulier b) maillage distordu.

Formulation / Élément		maillage	Déplacement vertical normalisé au point C
Q4 [HAM 06]		Reg.	0,679
Q4 [HAM 06]		Dist.	0,596
Présente étude	SBRIEIR	Reg	0,923
	Abaqus, CPS3	Reg	0,255
	Abaqus, CPS3	Dist.	0,271
	Abaqus, CPS4-c	Reg	0,681
	Abaqus, CPS4-c	Dist.	0,598
	Abaqus, CPS4-inc	Reg	0,982
	Abaqus, CPS4-inc	Dist.	0,924
solution exacte [TIM 51]:			<b>1,000 (0,3553)</b>

Tableau (4.3) : Déplacement vertical normalisé au point C d'une poutre courte d'Alman.

Élément rectangulaire bilinéaire basé à champ déformation SBRIEIR converge dans le cas le maillage régulier.

Dans le cas du maillage régulier et distordu (figure 4.9), les résultats obtenus par ABAQUS (CPS4-c, CPS4-inc) sont performants et comparables à la solution analytique donnée par la théorie des poutres.

L'élément triangle CPS3 donne un mauvais résultat par rapport aux autres éléments.

### 4-2.2 Poutre épaisse en appui simple chargé uniformément [ROC 79]

La figure (4-5) montre un exemple du type de problème que l'on peut résoudre en utilisant des éléments rectangulaires et triangulaires, c'est une poutre épaisse en appui simple chargée uniformément. On utilise trois densités de maillage comprenant chacun 16, 32 et 64 éléments. Les résultats obtenus sont comparés à la solution exacte obtenue par la théorie classique de l'élasticité plane voir les tableaux (4-4) et (4-5).

Les données de géométrie, chargement et de matériau pour ce cas test sont :

Module d'élasticité  $E = 13400 \text{ N/mm}^2$ , Coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$

Pression uniforme  $P = 1 \text{ N}$  épaisseur  $t = 1 \text{ mm}$ .

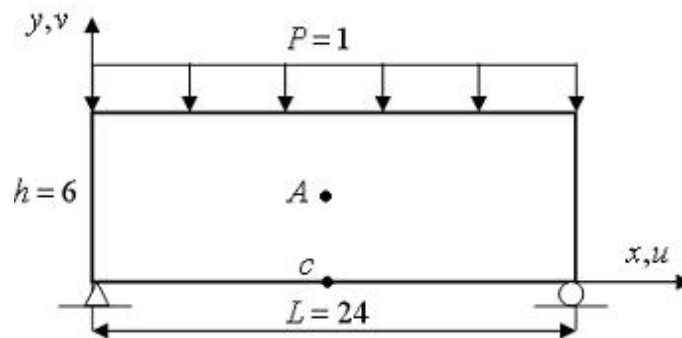


Figure (4.5) : Problème de contraintes planes

Il est clair au vu de ce tableau (4-4) que la précision de la solution par élément fini s'améliore avec l'accroissement du nombre d'éléments.

Maillages	Présente étude						Résultat analytique
	BR	Abaqus			SBRIE	SBRIEIR	
		CPS3	CPS4-inc	CPS4-c			
2×8 ;16	0,01945	0,01282	0,02160	0,01945	0,02112	0,01844	0,021
2×16 ;32	0,02135	0,01457	0,02282	0,02135	0,02232	0,02232	
4×16 ;64	0,02248	0,01901	0,02336	0,02248	0,02316	0,02407	

Tableau (4.4) : Flèche verticale au point A.

On observe une convergence monotone avec tous les éléments sauf pour l'élément CPS3 qui donne de très mauvais résultats.

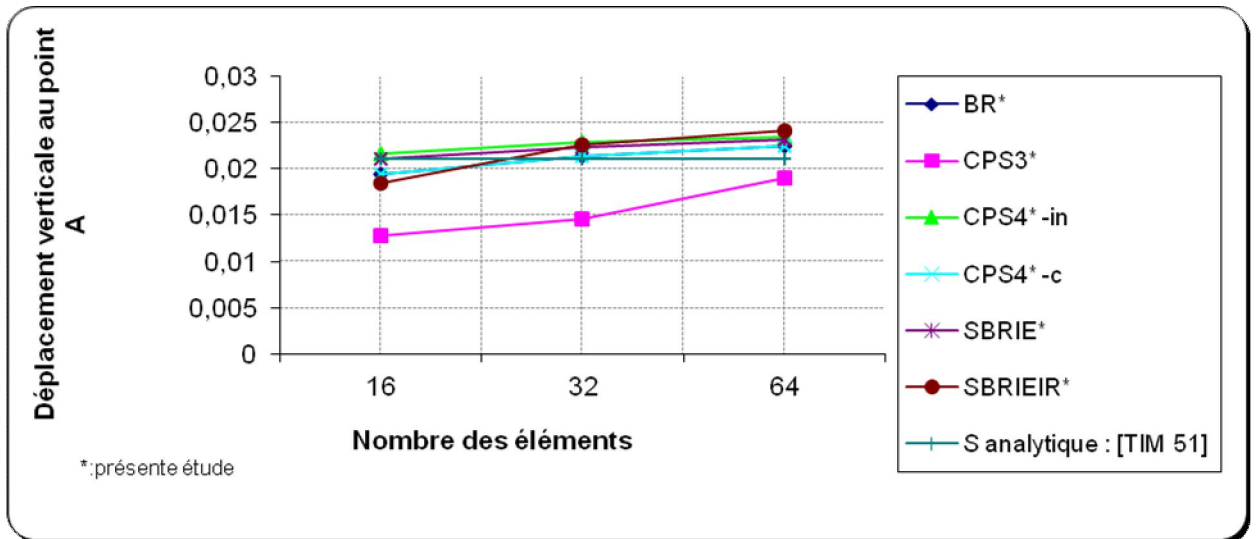


Figure (4.6): Flèche verticale au point A.

Maillage	Présente étude						Résultat analytique
	BR	Abaqus			SBRIE	SBRIEIR	
		CPS3	CPS4-inc	CPS4-c			
2×8 ; 16	10,8134	4,33871	11,5745	10,8184	11,81	10,89	12,2
2×16 ; 32	11,8677	4,99233	11,8651	11,8677	12,14	12,14	
4×16 ; 64	11,9579	8,2979	12,0258	11,9579	12,24	12,27	

Tableau (4.5) : contraintes longitudinales au point C.

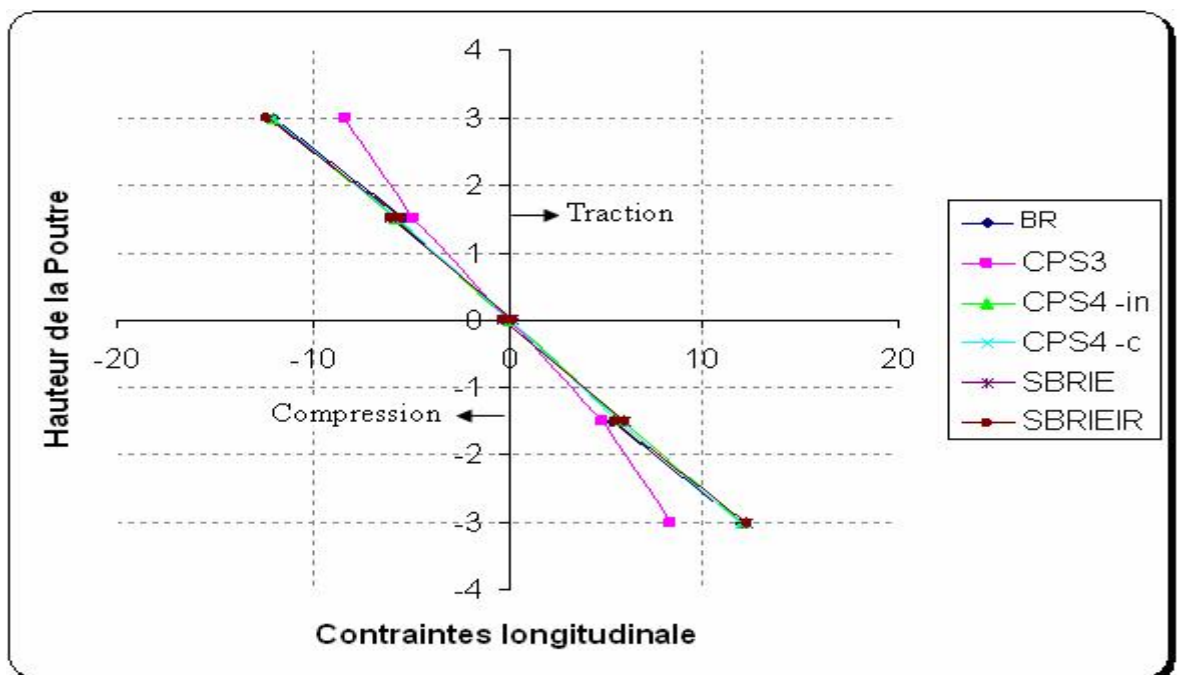


Figure (4.7) : Distribution des contraintes longitudinales au milieu de la poutre (maillage 64 éléments).

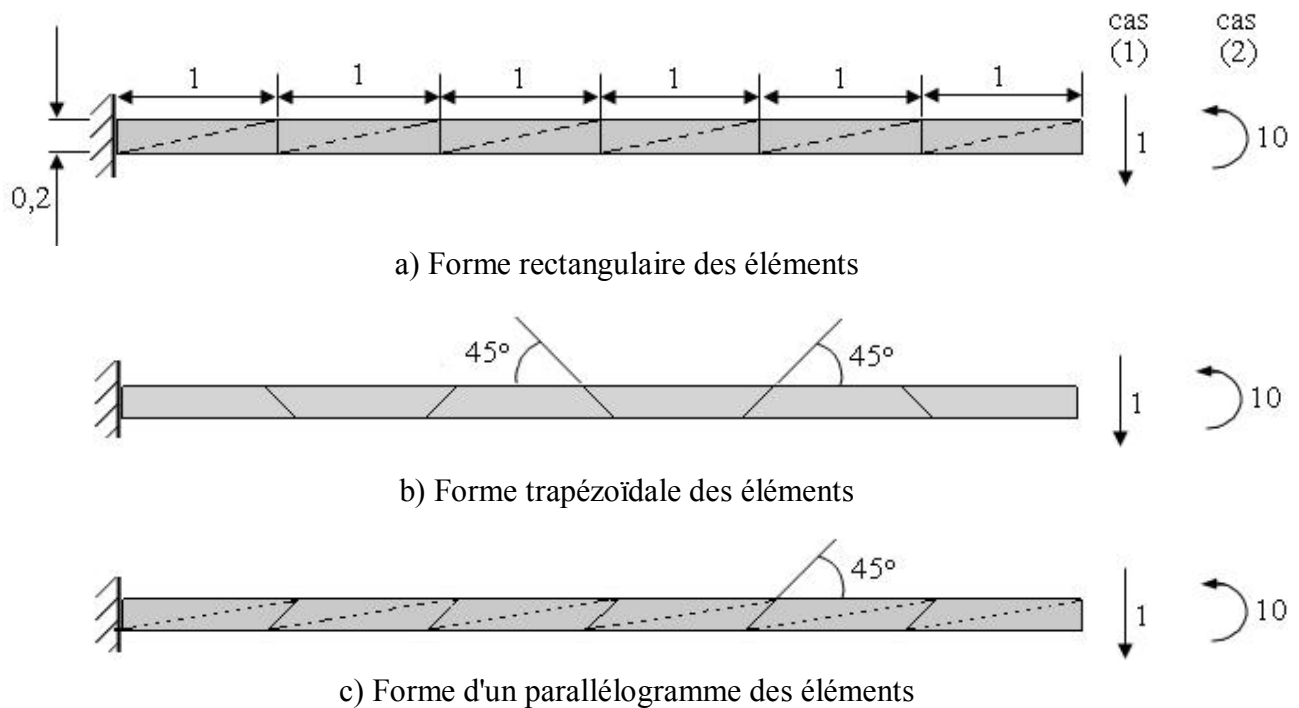
### 4-2.3 Poutre console élancée de MacNeal [BEL 05]

Soit, une poutre console élancée de MacNeal [MAC 85] avec une section rectangulaire (6 x 2 x 1) à déformer en flexion par le moment de l'extrémité ( $M=10$ ) et par une charge appliquée au bord libre ( $P=1$ ).

La poutre est modélisée par six éléments de membrane rectangulaires (figure 4-8a), trapézoïdaux (figure 4-8b) et de parallélogrammes (figure 4-8c).

MacNeal [MAC 87] affirme que la forme trapézoïdale des éléments finis de membrane à quatre nœuds sans degré de liberté de rotation (avec le champ linéaire) gère un verrouillage même si ces éléments vérifient le patch-test.

Donnée :  $E = 10^7$  ,  $\nu = 0.3$  ,  $t = 0.1$  ,  $L = 6$  ,  $h = 0.2$



**Figure (4.8) :** Poutre console élancée de MacNeal. Données et Maillages.

D'après les résultats illustrés sur le tableau (4-6) on a constaté que l'élément basé sur le champ de déformation triangulaire à 3 nœuds et 3 DDL par nœuds (SBT3) est très puissant pour ce type de problème dominé par la flexion. Il reste stable avec les distorsions géométriques. Le déplacement très proche a solution exacte que L'élément Abaqus CPS4-inc pour le maillage régulier à deux cas de chargement par contre des autres types (CPS4-, CPS3).

Élément		Flexion pure			Force de cisaillement à l'extrémité libre		
		Régulier	Trapézoïdale	Parallèle	Régulier	Trapézoïdale	parallèle
Q4 [BEL 05]		0,093	0,022	0,031	0,093	0,027	0,034
SBT3 [BEL 05]		0,989	0,988	0,988	0,964	0,950	0,950
SBTIEIR [SAB 85]		0,118	0,004	0,101	0,047	0,0005	0,036
Présente étude	<b>Abaqus, CPS3</b>	0,031	0,016	0,009	0,031	0,019	0,011
	<b>Abaqus,CPS4-c</b>	0,093	0,022	0,031	0,093	0,027	0,034
	<b>Abaqus,CPS4-inc</b>	0,993	0,115	0,724	0,992	0,051	0,633
Théorie des poutres		1,000 (0,270)			1,000 (0,1081)		

**Tableau (4.6) :** La flèche d'une poutre console élancée de Mac Neal; déplacement normalisé à l'extrémité libre.

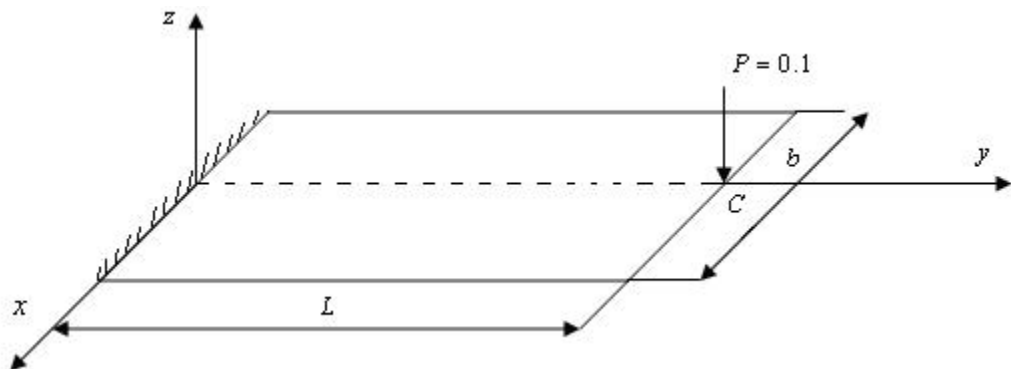
### 4-3 Validation numérique des éléments plaques et solides

#### 4-3.1 Introduction

L'élément fini de plaque et solide est de géométrie simple avec les trois degrés de liberté couramment utilisés par l'ingénieur ( $w, \varphi_x, \varphi_y$ ) et ( $u, v, w$ ) pour l'élément brique à 8 nœuds. Il devra pour cela être validé sur le plan pratique et industriel. Il a été formulé et validé pour les structures homogènes isotropes.

#### 4-3.2 Plaque soumise à une charge concentrée [BELO 05]

Le problème à considérer est celui de la plaque soumise à une charge concentrée au point C à l'extrémité libre comme montré dans figure (4-9). Plusieurs rapports de longueur (L) à l'épaisseur (h) sont pris ( $L/h=1-100$ ). À une largeur  $b=1$  et de la longueur  $L=10$ . Les propriétés du matériau sont données par :  $E = 1,2 \times 10^6$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . L'extrémité libre de la plaque est soumise à une charge  $P = 0,1$  au point C. Le déplacement vertical à l'extrémité libre de la plaque est évalué afin de montrer l'influence du cisaillement transversal sur le comportement de la plaque.



**Figure (4.9) :** Plaque soumise à une charge concentrée au point C.

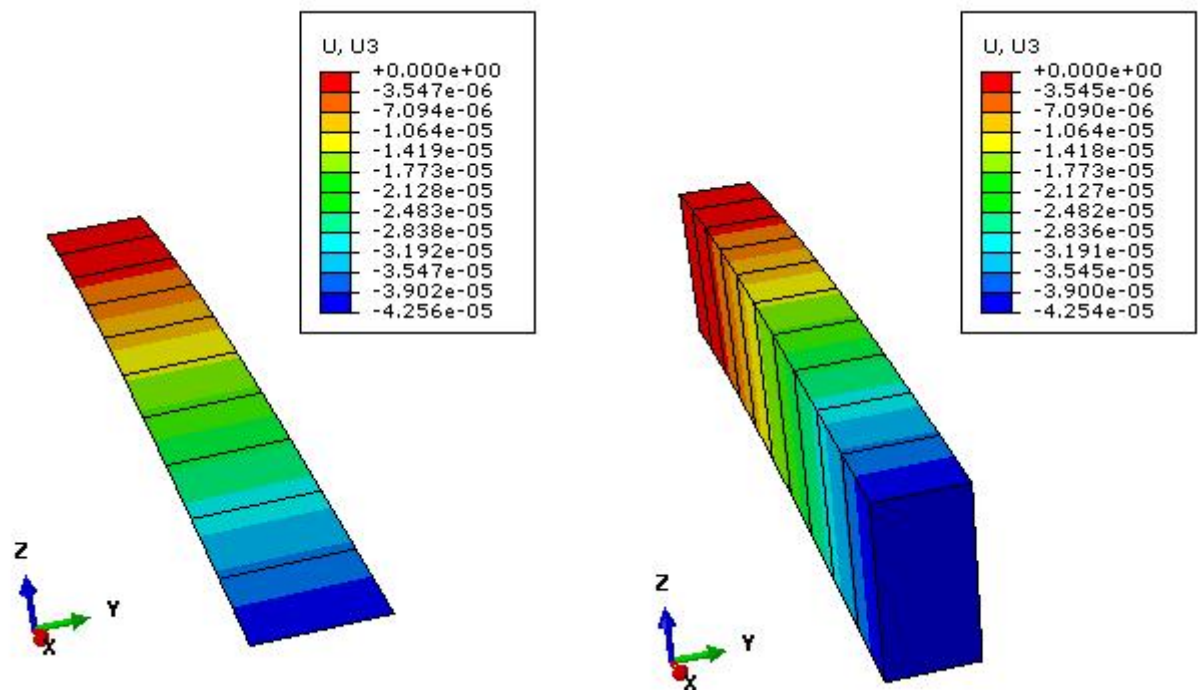
La solution analytique de la flèche verticale  $w$ :[BELO 05]

$$w = \frac{4PL^3}{Ebh^3} \left[ 1 + \frac{1}{2k} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \right]$$

Les résultats pour le déplacement vertical sont illustrés sur le tableau (4-7) cela :

- La convergence aux solutions analytiques est obtenue pour 10 éléments.
- Les éléments SBRP avec 12 degrés de liberté et SBH8 avec 24 degrés de liberté ont des résultats similaires.
- L'élément C3D8I donne aussi de bons résultats.

- Les éléments d'abaqus (S3, S4 et S4R) et l'élément SBRP, donnent de bons résultats aux plaques épaisses et minces contrairement pour l'élément R4, qui se comporte très mal dans le cas des plaques mince (phénomène de cisaillement transverse).



Élément plaque, S4 (maillage  $1 \times 10$ )

Élément solide, C3D8I (maillage  $1 \times 1 \times 10$ )

**Figure (4.10) :** Flèche verticale  $w$  au point C des éléments ABAQUS.

**Note :**

**R4:** Élément à 4 nœuds rectangulaires basés à champ déplacement (théorie de Mindlin).

**C3D8I :** Élément brique à 8 nœuds avec modes incompatibles.

**STRI3 :** Élément triangulaire à 3 nœuds pour la plaque mince (théorie de Kirchhoff).

**S3, S4 et S4R :** Éléments d'usage universel, aussi bien que des éléments spécifiquement à l'analyse des plaques " épaisses " ou " minces ".



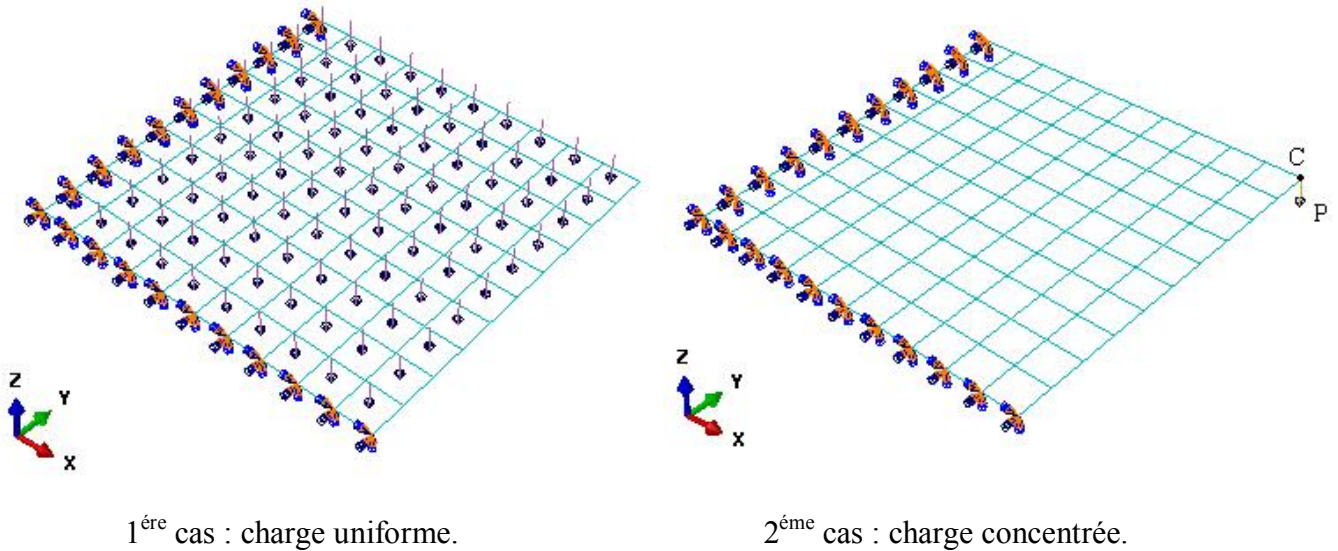
L/h	Eléments à champ déplacement		Eléments à champ déformation		Présente étude					Solution analytique
	ACM*	R4 [BELO 05]	SBRP [BELO 05]	SBH8 [BELO 05]	S3	STRI3	S4	S4R	C3D8I	
1	$3,33 \times 10^{-7}$	$5,3 \times 10^{-7}$	$5,3 \times 10^{-7}$	$5,3 \times 10^{-7}$	$5,32 \times 10^{-7}$	$3,33 \times 10^{-7}$	$5,32 \times 10^{-7}$	$5,32 \times 10^{-7}$	$1,22 \times 10^{-6}$	$5,33 \times 10^{-7}$
2	$2,66 \times 10^{-6}$	$3,0 \times 10^{-6}$	$3,1 \times 10^{-6}$	$3,1 \times 10^{-6}$	$3,06 \times 10^{-6}$	$2,66 \times 10^{-6}$	$3,06 \times 10^{-6}$	$3,06 \times 10^{-6}$	$3,35 \times 10^{-6}$	$3,06 \times 10^{-6}$
3	$9,0 \times 10^{-6}$	$9,2 \times 10^{-6}$	$9,6 \times 10^{-6}$	$9,6 \times 10^{-6}$	$9,58 \times 10^{-6}$	$9,0 \times 10^{-6}$	$9,57 \times 10^{-6}$	$9,57 \times 10^{-6}$	$9,7 \times 10^{-6}$	$9,6 \times 10^{-6}$
4	$2,13 \times 10^{-5}$	$2,1 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-5}$	$2,13 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-5}$	$2,21 \times 10^{-5}$	$2,21 \times 10^{-5}$
5	$4,16 \times 10^{-5}$	$3,9 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{-5}$	$4,25 \times 10^{-5}$	$4,16 \times 10^{-5}$	$4,25 \times 10^{-5}$	$4,25 \times 10^{-5}$	$4,25 \times 10^{-5}$	$4,26 \times 10^{-5}$
10	$3,33 \times 10^{-4}$	$2,4 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-4}$	$3,34 \times 10^{-4}$	$3,33 \times 10^{-4}$	$3,34 \times 10^{-4}$	$3,34 \times 10^{-4}$	$3,34 \times 10^{-4}$	$3,35 \times 10^{-4}$
100	0,33333	0,00783	0,33254	0,33254	0,33221	0,33303	0,33213	0,33213	0,33210	0,333350

\* : présente étude

Tableau (4.7) : Flèche verticale  $w$  au point C des différents éléments.

### 4-3.3 Plaque carrée à deux bords encastrés et deux bords libre [BELO 05]

Soit une plaque carrée avec deux bords encastrés et deux bords libres d'après la figure (4-11) soumise à deux cas de chargements, charge concentrée et charge uniforme.



**Figures (4.11) :** *Plaque carrée à deux bords encastrés et deux bords libres.*

Pour le premier cas de charge, les résultats pour le déplacement au coin libre sont donnés dans les figures (4-12) et (4-13). La même plaque, soumise au deuxième cas de charge, est étudiée et les résultats pour le déplacement au coin libre sont rapportés dans les figures (4-14) et (4-15) et on a comparé les résultats obtenus à partir de la solution de référence [ROS 90].

4-3.3 .1 Plaque uniformément chargée :

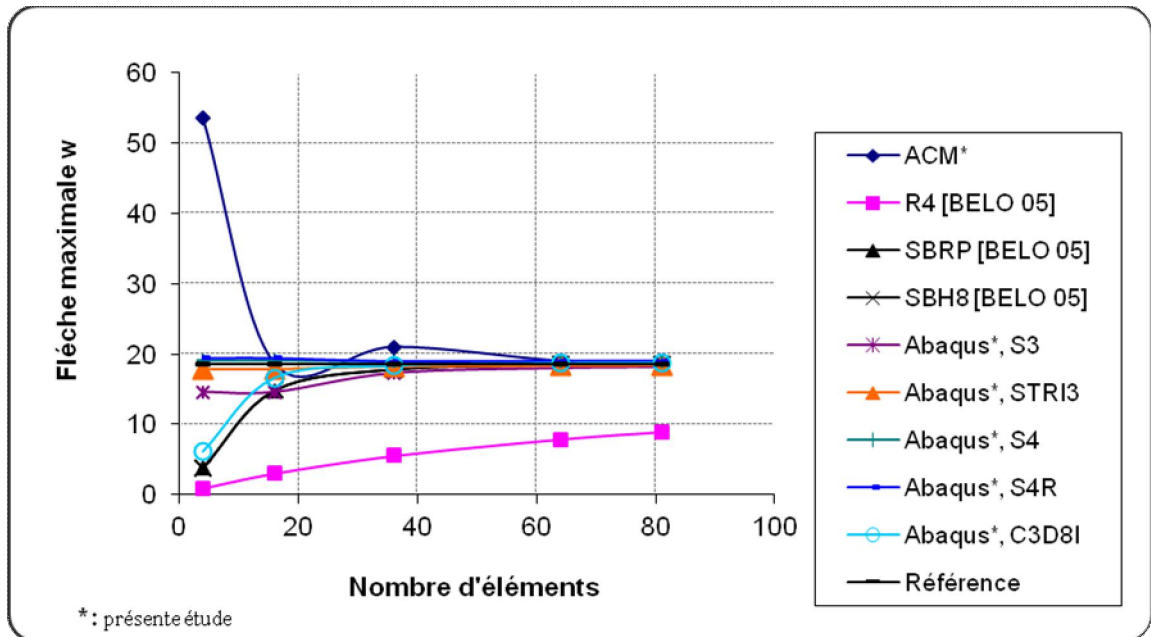


Figure (4.12) : Convergence de la flèche maximale ( $w_1$ ), charge uniforme

( $L=10, h=0,4, E=3600, \nu=0,3, q=0,9$ ).

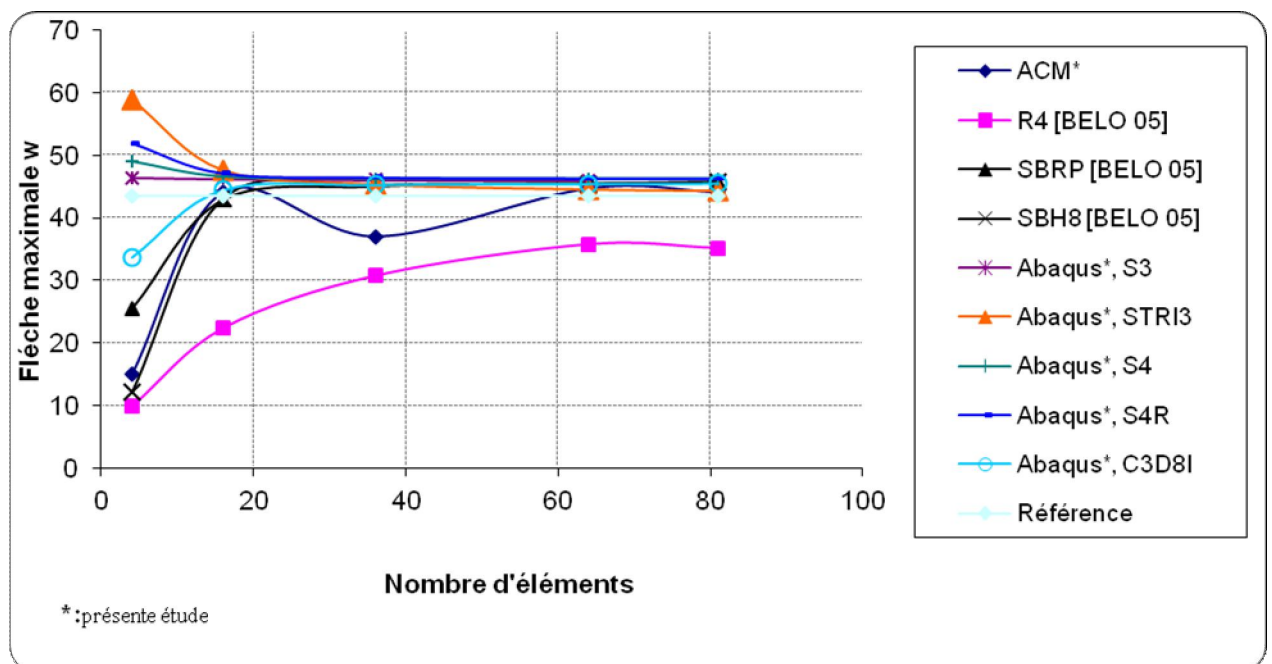


Figure (4.13) : Convergence de la flèche maximale ( $w_2$ ), charge uniforme

( $L=1, h=0,1, E=1000, \nu=0, q=1$ ).

4-3.3 .2 Plaque avec une charge concentrée :

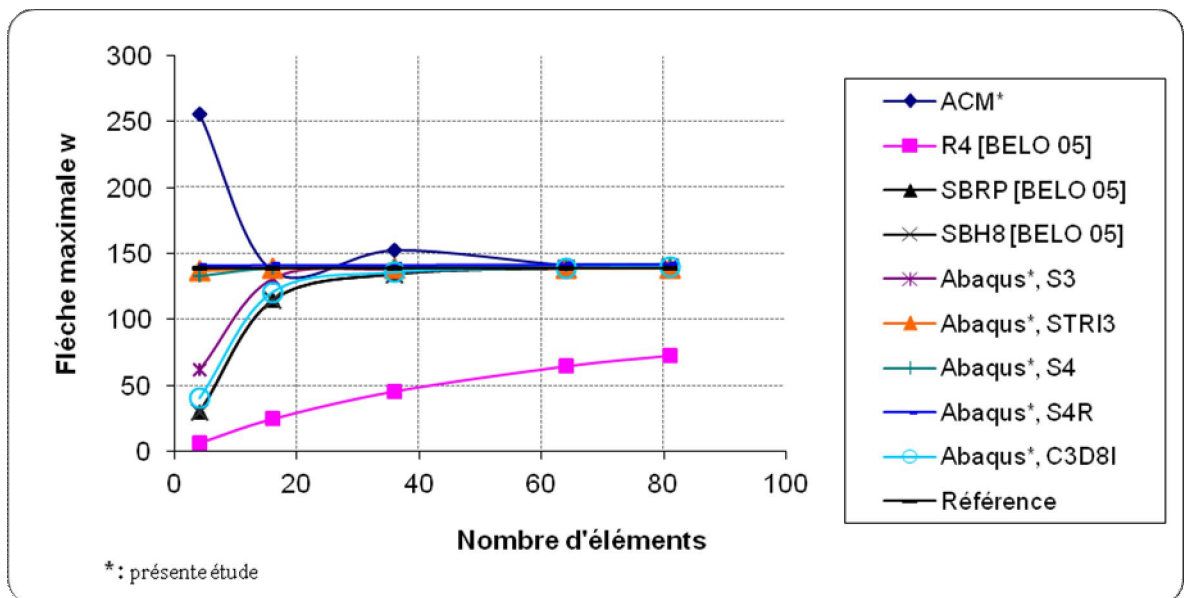


Figure (4.14) : Convergence de la flèche maximale ( $w_1$ ), charge concentrée  
 ( $L=10, h=0,4, E=3600, \nu=0,3, P=100$ ).

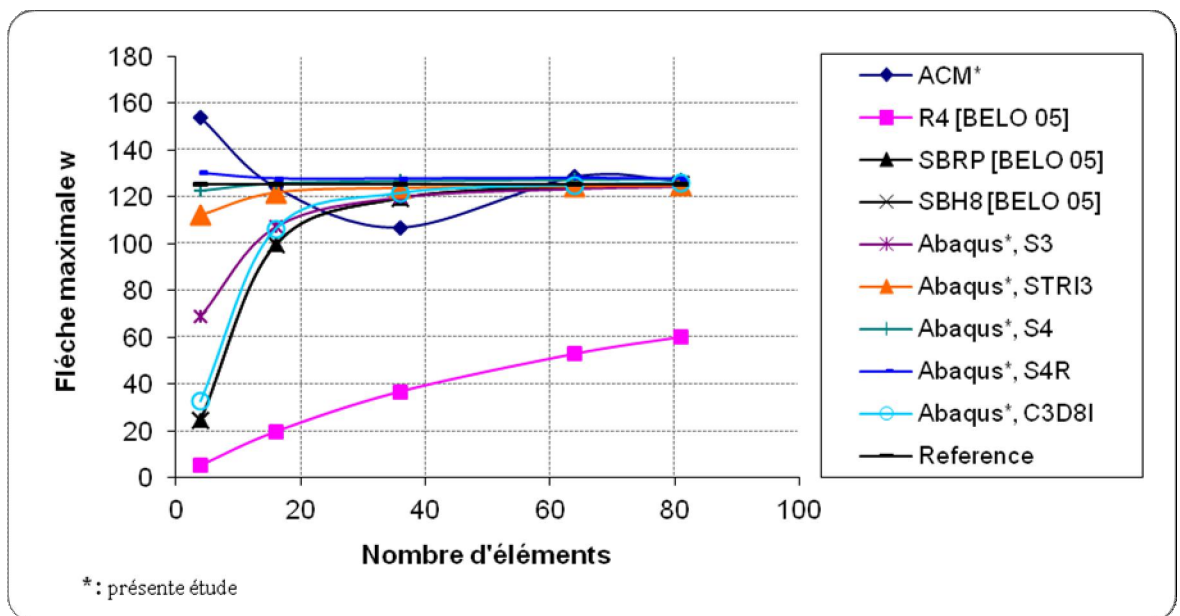


Figure (4.15) : Convergence de la flèche maximale ( $w_2$ ), charge concentrée  
 ( $L=10, h=0,4, E=3600, \nu=0, P=100$ ).

- Convergence à la solution de référence est tout à fait rapide avec l'élément de SPRP que ses exécutions sont confirmées, par contre l'élément R4 souffre des phénomènes de cisaillement transverse.

## 4-4 Validation numérique des éléments coques

### 4-4.1 Cylindre pincé avec diaphragme [BEL 00]

Le cylindre pincé avec des diaphragmes rigides aux extrémités et soumis à deux charges unitaires verticales diamétralement opposées figure (4.16), est un fréquemment utilisé dans les éléments de coques. Les données pour le test de cylindre pincé sont données sur le Tableau (4.8).

Propriétés	Conditions de symétries	Conditions aux limites
$E = 3 \times 10^{10} Pa, \nu = 0,3$ $l = 6m, r = 3m, h = 0.03m$ $P = 1N$	$w = \theta_x = \theta_y = 0$ sur $AB$ $v = \theta_x = \theta_z = 0$ sur $BC$ $u = \theta_y = \theta_z = 0$ sur $CD$	$u = w = \theta_y = 0$ sur $AD$

Tableau (4.8) : Les données pour le test d'un cylindre pincé avec diaphragmes.

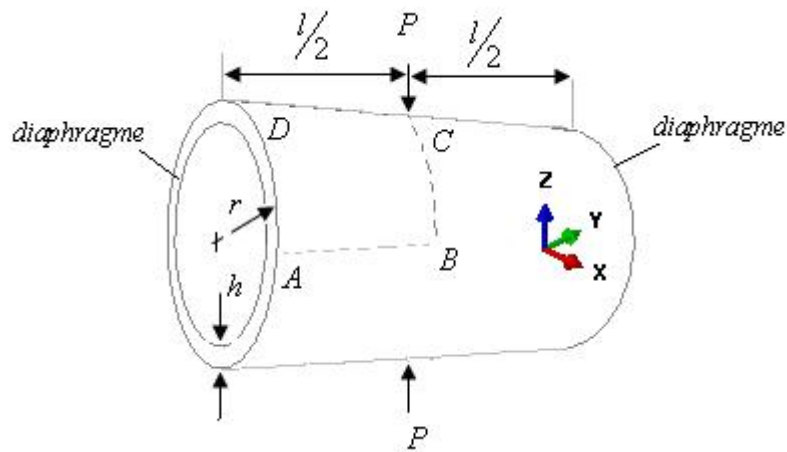


Figure (4.16) : Cylindre pincé avec diaphragmes, donnés.

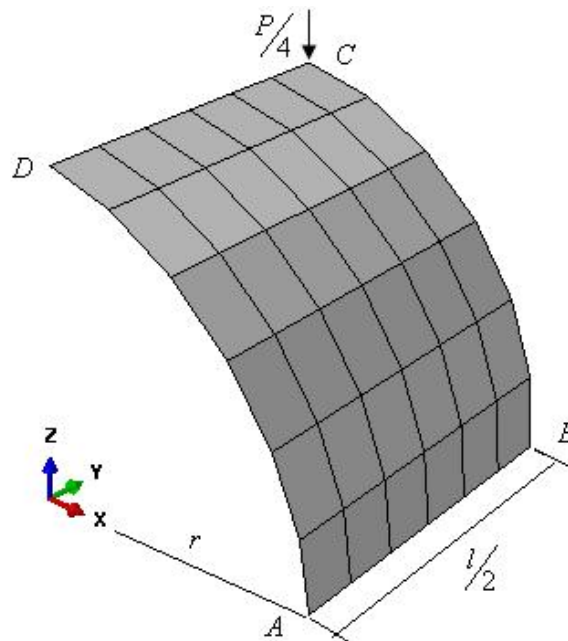


Figure (4.17) : Cylindre pincé avec diaphragmes, Maillage.

Le tableau (4.9) montre la convergence des déplacements  $W_C$  suivant la direction  $z$  et  $V_D$  suivant la direction  $x$  en fonction du nombre des éléments utilisé, les résultats montrent la bonne convergence vers la solution exacte [BAT 92].

$$W_{ref} = -W_C \frac{Eh}{P} = 164,24; \quad V_{ref} = -V_D \frac{Eh}{P} = 4,11$$

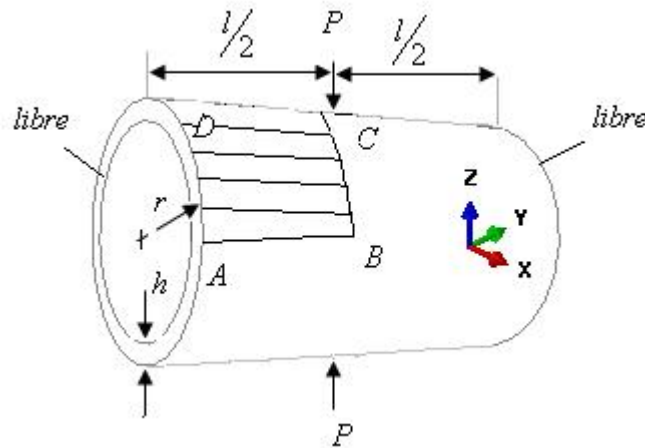
Maillage	SBQ4-ACM [BEL 00]		Présente étude											
	W <sub>C</sub>	V <sub>D</sub>	S4R5		S4R		S3		S4		STRI3		C3D8I	
			W <sub>C</sub>	V <sub>D</sub>	W <sub>C</sub>	V <sub>D</sub>	W <sub>C</sub>	V <sub>D</sub>	W <sub>C</sub>	V <sub>D</sub>	W <sub>C</sub>	V <sub>D</sub>	W <sub>C</sub>	V <sub>D</sub>
4×4	0.618	1.47	0.473	1.15	0.474	0.984	0.241	0.573	0.388	0.992	0.492	0.999	0.091	0.201
6×6	0.822	1.16	0.689	1.09	0.687	1.05	0.447	0.820	0.621	1.03	0.743	1.013	0.231	0.476
8×8	0.9025	1.03	0.806	1.06	0.804	1.05	0.605	0.921	0.754	1.02	0.862	0.997	0.407	0.676
Exacte [BAT 92].	W <sub>C</sub> =1,000(164,24) V <sub>D</sub> =1,000(4,114)													

**Tableau (4.9) :** Cylindre pincé avec diaphragmes, convergence de  $W_C$  et  $V_D$

- Une convergence rapide pour l'élément basé sur le champ de déformation, coque SBQ4-ACM.
- L'élément STRI3 converge mieux que les éléments S4, S4R et S3.

#### 4-4 .2 Cylindre pincé à bords libres [BEL 00]

L'exemple est constitué par une coque cylindrique à bord libre, pincé par deux forces diamétralement opposées. la géométrie, le maillage et les conditions aux limites pour le huitième du cylindre sont présentés sur la figure (4-18). Ce test a été effectué en premier lieu avec une épaisseur  $h_1=0.094\text{in}$  et une charge  $P_1=100\text{ Ib}$  puis avec  $h_2=0.01548\text{in}$  et  $P_2=0.1\text{ Ib}$ .



**Figure (4.18) :** Cylindre pincé à bords libres : donnés et maillage.

##### 1<sup>ère</sup> cas:

$h_1=0.094\text{ in}$  ;  $P_1=100\text{ Ib}$  ;  $l=10,35\text{in}$ ,  $r=4,953\text{ in}$ ;  $E=10,5\times 10^6\text{ Ib/in}^2$ ;  $\nu=0,3125$

##### 2<sup>ème</sup> cas:

$h_2=0.01548\text{ in}$  ;  $P_2=0,1\text{ Ib}$  ;  $l=10,35\text{ in}$  ;  $r=4,953\text{ in}$ ;  $E=10,5\times 10^6\text{ Ib/in}^2$ ;  $\nu=0,3125$

maillage	SBQ4-ACM [BEL 00]		Présente étude							
			S4R5		S3		S4		STR13	
	1 <sup>ère</sup> cas	2 <sup>ème</sup> cas	1 <sup>ère</sup> cas	2 <sup>ème</sup> cas	1 <sup>ère</sup> cas	2 <sup>ème</sup> cas	1 <sup>ère</sup> cas	2 <sup>ème</sup> cas	1 <sup>ère</sup> cas	2 <sup>ème</sup> cas
	$W_C$	$W_C$	$W_C$	$W_C$	$W_C$	$W_C$	$W_C$	$W_C$	$W_C$	$W_C$
1×1	0,0886	0,01922	0,01098	$7,84 \times 10^{-5}$	0,00010	$1,381 \times 10^{-6}$	0,00016	$2,22 \times 10^{-6}$	0,08039	0,01794
1×3	0,1041	0,02302	0,12182	0,02053	0,09052	0,02017	0,09168	0,02018	0,11231	0,02467
1×5	0,1090	0,02387	0,14502	0,02388	0,1053	0,02276	0,1046	0,02281	0,11333	0,02485
1×7	0,1102	0,02418	0,14970	0,02506	0,1059	0,02358	0,1084	0,02359	0,11284	0,02483
Exacte [BAT 92].	1 <sup>ère</sup> cas $W_C=0,1139$ 2 <sup>ème</sup> cas $W_C=0,02439$									

**Tableau (4.10) :** *Cylindre pincé à bords libres, convergence du déplacement  $w_c$ .*



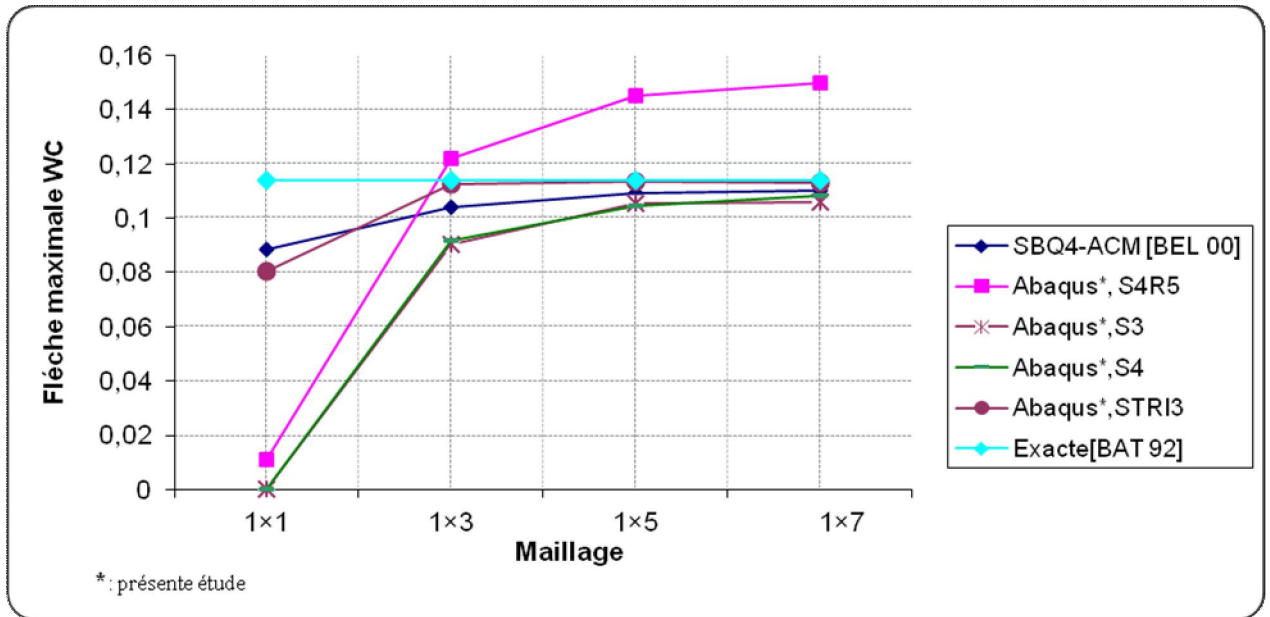


Figure (4.19) : Cylindre pincé à bords libres (1<sup>ère</sup> cas), convergence du déplacement  $w_c$

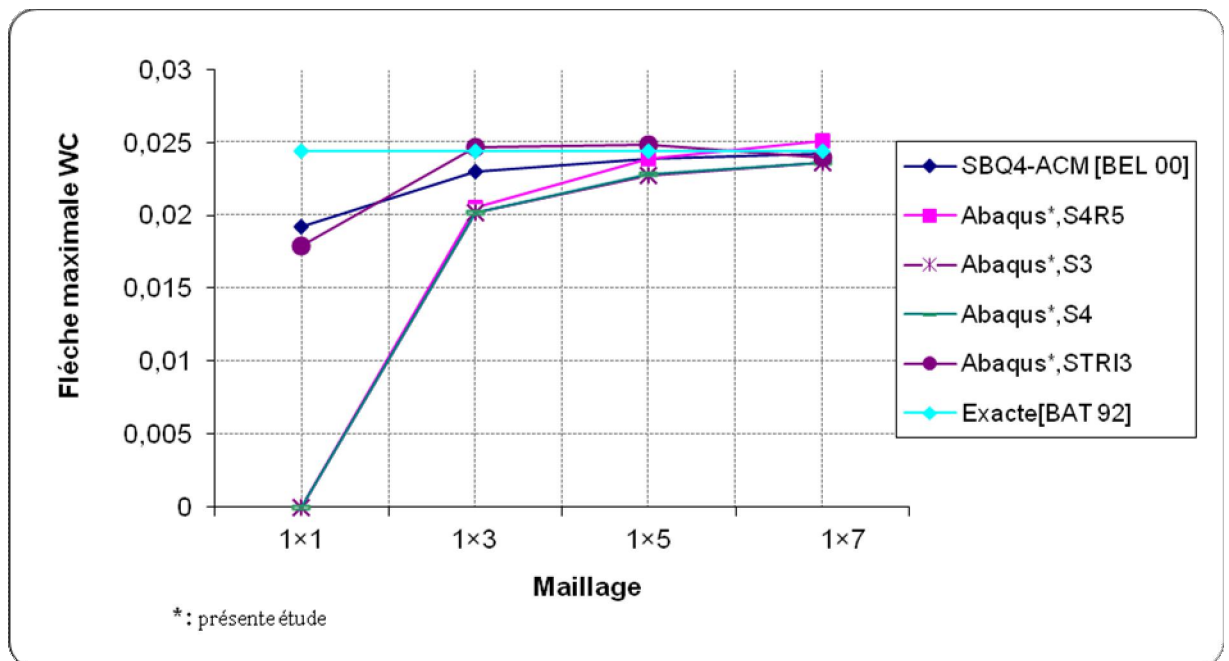
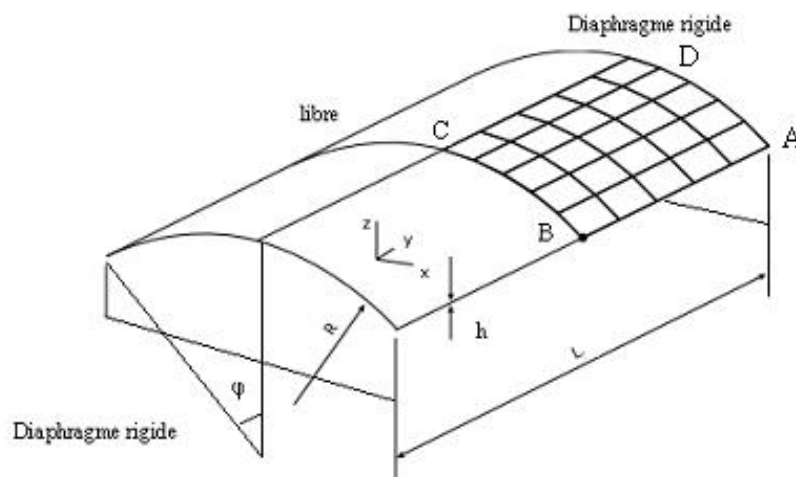


Figure (4.20) : Cylindre pincé à bords libres (2<sup>ème</sup> cas), convergence du déplacement  $w_c$

### 4-4.3 Panneau cylindrique soumis à son poids propre [BEL 00]

Un des problèmes fréquemment traités pour évaluer les performances d'un élément coque est celui du toit cylindrique soumis à son poids propre. Les bords droits sont libres et les bords courbes reposent sur des diaphragmes rigides dans leurs plans. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont indiquées sur la figure ( $R/h=100$ ,  $L/h=200$ ).

Le quart du toit est discrétisé en considérant des maillages réguliers avec  $N=4,6$  éléments sur les bords  $AB$  et  $AD$ . Les résultats de convergence du déplacement vertical en  $C$  et  $B$  sont reportés sur le tableau (4-12).



**Figure (4.21):** Toit cylindrique soumis à son poids propre.

Propriétés	Conditions de symétries	Conditions aux limites
$E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}, \nu = 0$ $L = 6 \text{ m}, R = 3 \text{ m}, h = 0,03 \text{ m}, \varphi = 40^\circ$ $f_z = 0,625 \times 10^4 \text{ Pa}$	$v = \theta_x = \theta_z = 0 \text{ sur } BC$ $u = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ sur } CD$	$u = w = \theta_y = 0 \text{ sur } AD$

**Tableau (4.11) :** Les données pour le toit cylindrique

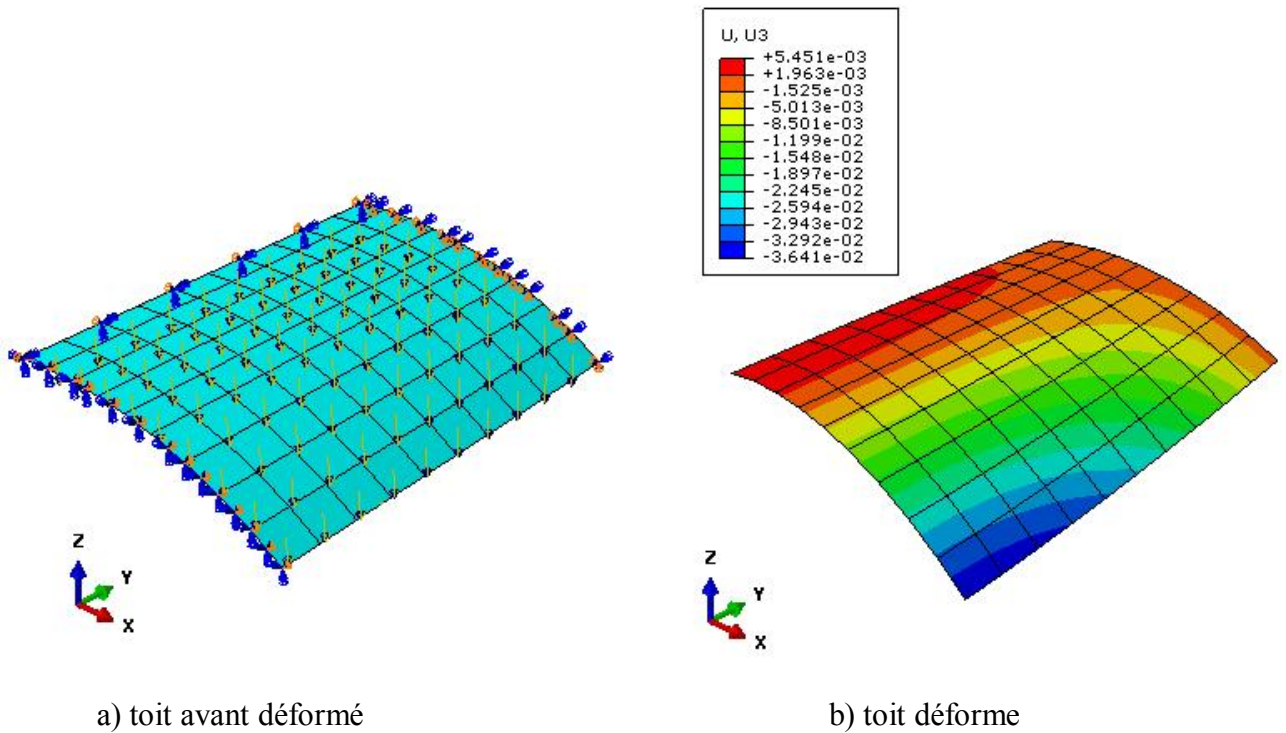


Figure (4.22): Toit cylindrique à 1/4 (élément S4 ABAQUS).

maillage	$W_C$		$W_B$	
	SBQ4-ACM [BEL 00]	Présente étude	SBQ4-ACM [BEL 00]	Présente étude
		ABAQUS(S4)		ABAQUS(S4)
4×4	0,5589	0,5635	3,690	3,75
6×6	0,5536	0,5493	3,675	3,66
8×8	0,5478	0,5454	3,647	3,63
9×10	0,5477	0,5439	3,640	3,63
Référence (théorie des coques "profondes "[BAT 92].	0,541cm		3,610cm	

Tableau (4.12) : Convergence de  $W_C$  et  $W_B$  d'un Toit cylindrique

- Parmi les éléments d'Abaqus, Dans cet exemple S4 est le plus performant que S4R, S3, STRI3.

#### 4-4.4 Hémisphère sous charges diamétralement opposées [BEL 00]

Il s'agit d'un hémisphère soumis à sa base libre à quatre charges radiales concentrées. Rayon de l'hémisphère est de 10 m est son épaisseur 0.04 m ( $R/h = 250$ ). Les caractéristiques mécaniques et les conditions aux limites utilisées sont présentées sur le tableau (4-13).

Dans cet exemple, l'hémisphère subit d'importantes rotations de corps rigide autour de normale à la surface moyenne. Il subit également des déformations de flexion inextensibles en membrane. Ce problème sert par conséquent d'excellent test pour examiner l'aptitude d'un élément de coque à représenter des modes rigides et des modes inextensibles.

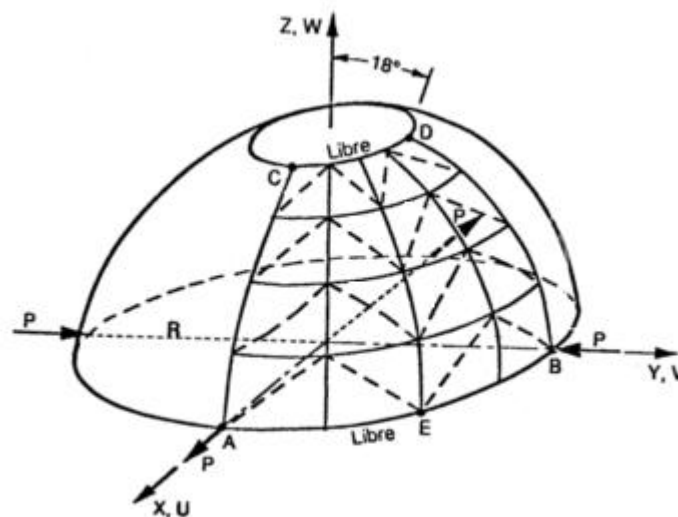
La valeur de référence classiquement utilisée, pour le déplacement suivant la direction de la charge, proposer par MacNeal et Harder [MAC 85], est :  $U_A = -V_B = 0,094m$ .

En tenant compte de la symétrie, seul le quart de l'hémisphère est discrétisé. Les maillages sont réguliers avec un nombre d'éléments de 4, 6, 8, 10, 12 et 16 suivant AB et AC

La figure (4.24) présente la convergence du déplacement  $U_A = -V_A$

Propriétés	Conditions de symétries	Conditions aux limites
$E = 6,825 \times 10^7 Pa, \nu = 0,3$ $L = 6m, R = 10m, h = 0,04m \quad R/h = 250$ $P = 2N$	$v = \theta_x = \theta_z = 0 \text{ sur } AC$ $u = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ sur } BD$	$w = 0 \text{ en } E$

**Tableau (4.13) :** Les données pour l'hémisphère.



**Figure (4.23) :** Coque hémisphère pincée.

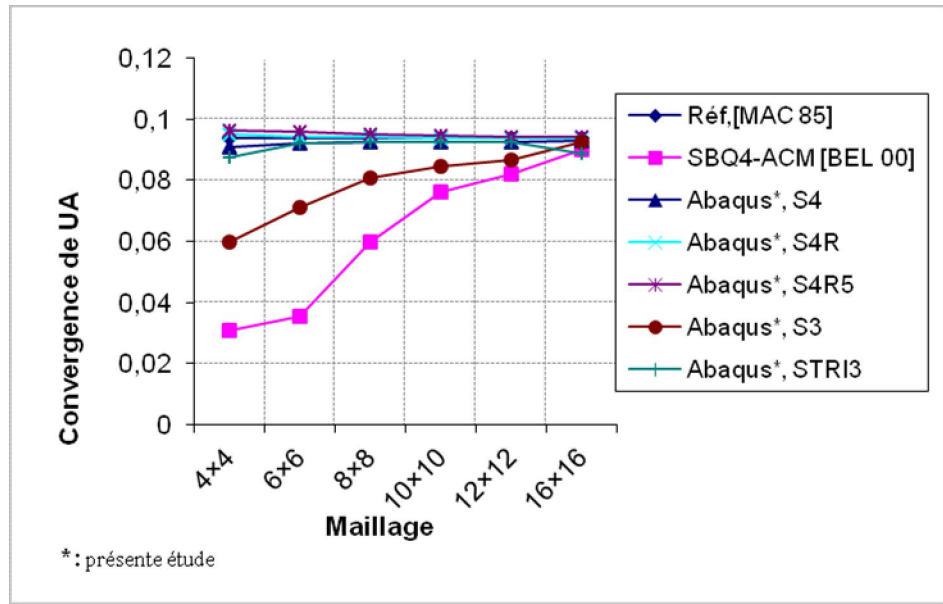
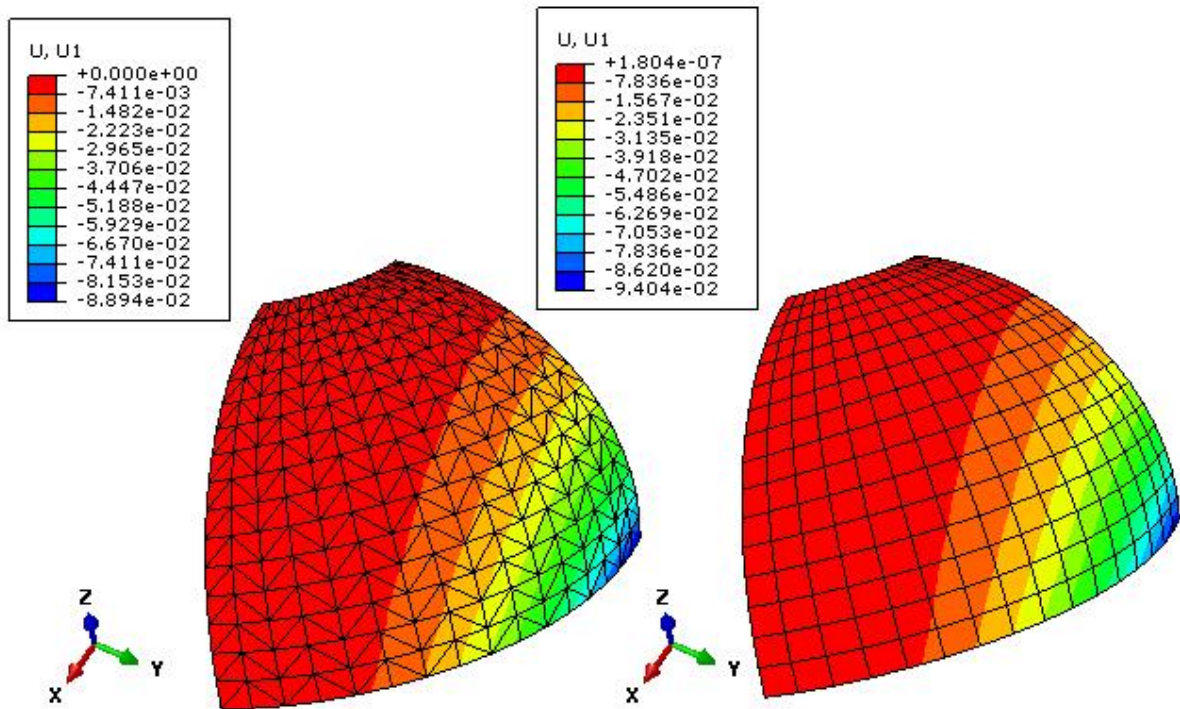


Figure (4.24) : Coque hémisphère pincé, Convergence  $U_A$ .



Élément Coque, STRI3 (maillage 16x16)

Élément Coque, S4R5 (maillage 16x16)

Figure (4.25) : Coque hémisphère pincé. Convergence  $U_A$  des éléments ABAQUS.

- ✓ Les résultats prouvent que les éléments S4R, S4, S4R5 et STRI3 donnent de très bons résultats mêmes pour faible nombre d'éléments.
- ✓ L'élément S3 donne de bons résultats par rapport à celle de SBQ4-ACM, mais ici encore, inférieur à celui des éléments précédents.
- ✓ Pour les problèmes où les déformations de flexion sont importantes par rapport à celles de membrane. S4 donne des résultats meilleurs que ceux de S4R, S4R5 et STRI3.

### 4-4.5 Coque sphérique sous charge concentrée [HAZ 89]

Le problème à considérer d'une coque sphérique comme représentée sur la figure (4. 26). Coque sphérique est simplement appuyée sur les extrémités tel que le déplacement normal est zéro le long des bords.

Les données de géométrie, chargement et la propriété du matériau pour ce cas test sont :

$a = b = 16 \text{ in.}$ ,  $r_x = r_y = 96 \text{ in.}$ ,  $h = 0,1 \text{ in.}$ , Charge concentrée  $P = 100 \text{ lbs.}$

$E = 10^7 \text{ lb/sqin.}$ ,  $\nu = 0,3.$

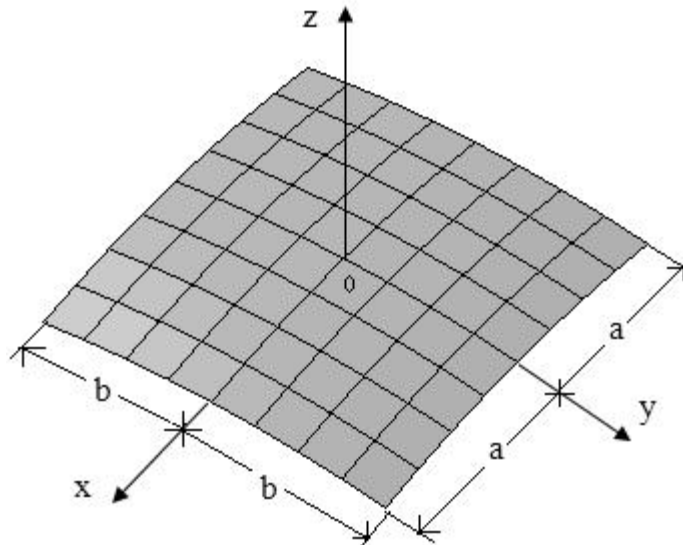


Figure (4.26) : Coque sphérique : géométrie, maillage.

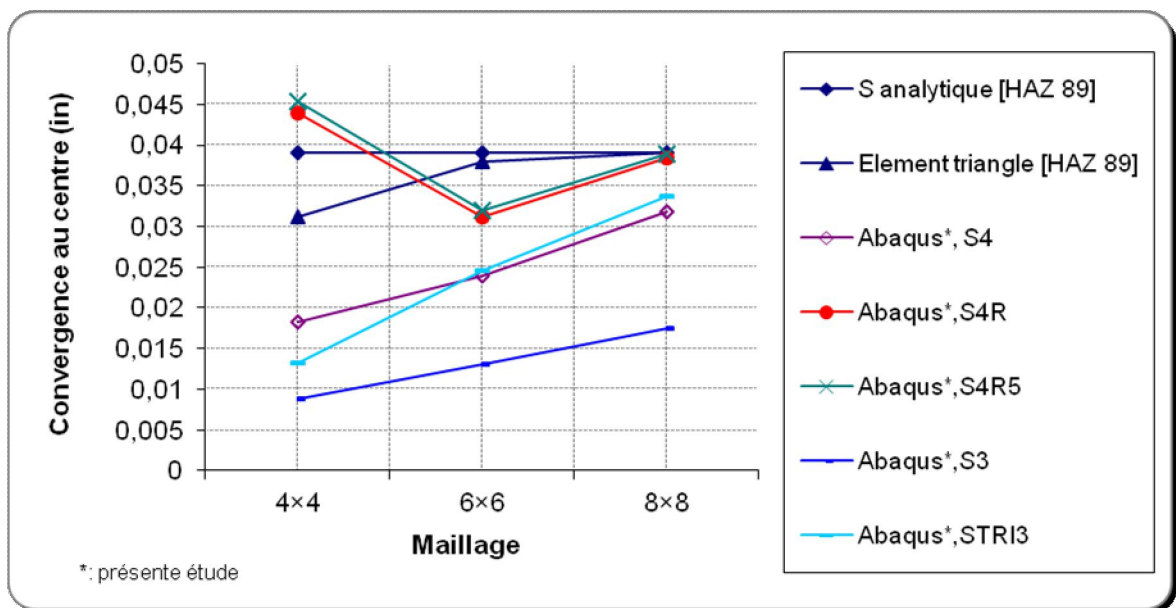


Figure (4.27) : Convergence de déplacement normal au centre.

Pour ce test, on observe que l'élément triangle (6 DDL par nœud) basé sur le champ de déformation [HAZ 89] donne excellents résultats, convergence rapide vers (séries solution), mais les éléments Abaqus S3, STRI3 et S4 le plus lents.

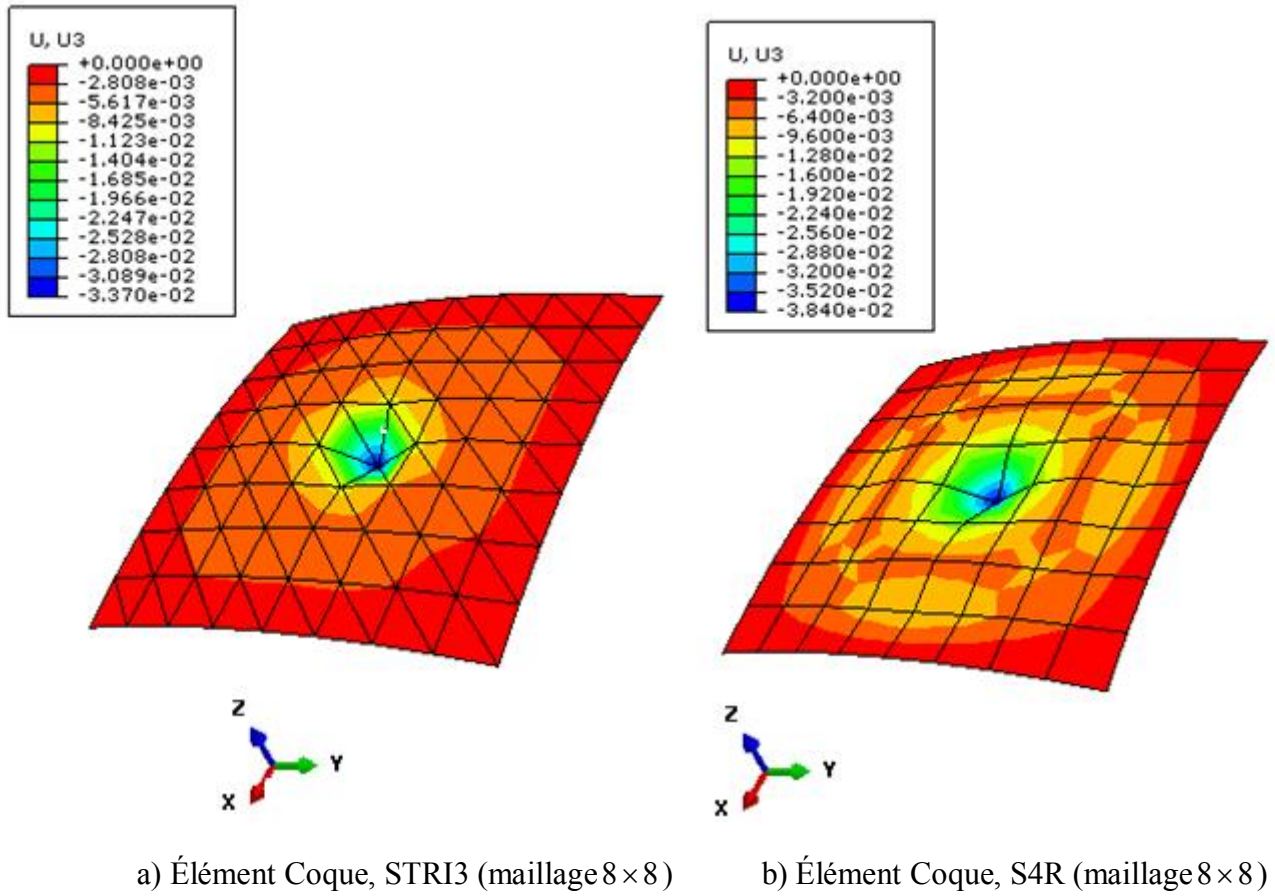


Figure (4.28) : Coque sphérique : Convergence W des éléments ABAQUS.

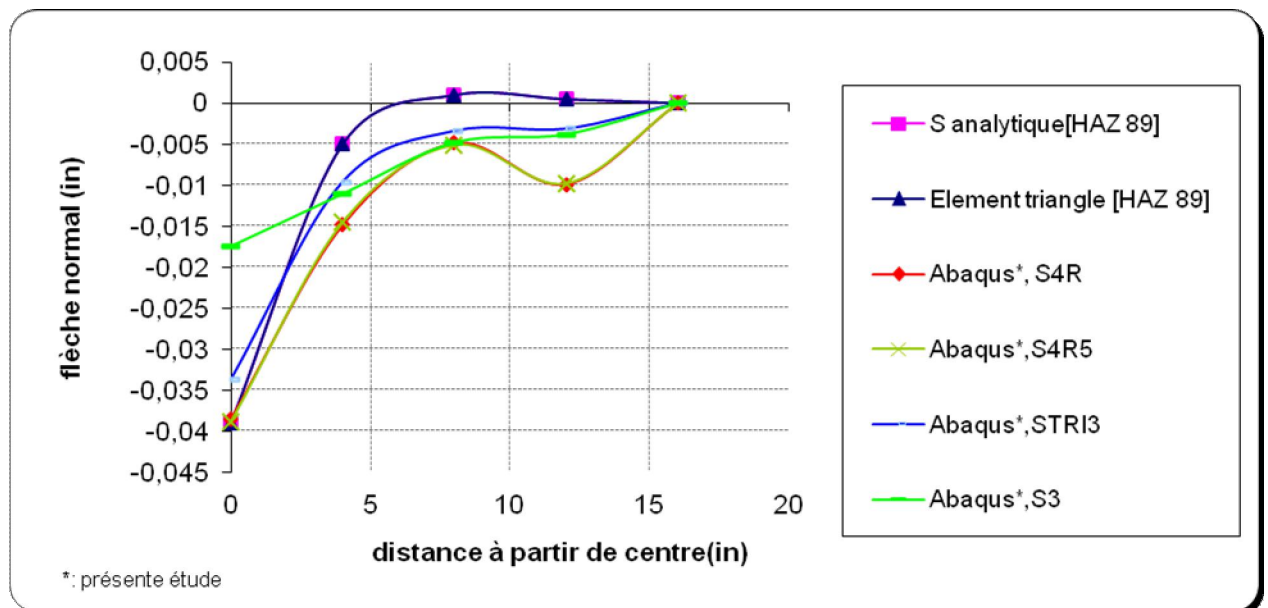


Figure (4.29) : Variation W le long de ligne centrale.

### 4-4.6 Coque hélicoïdale sous charges concentrées [BEL 00]

Ce problème a été défini et proposé par MacNeal et Harder [MAC 85]. Il s'agit d'une poutre vrillée ou d'une coque hélicoïdale encastrée à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentrés à l'autre extrémité : une charge  $P_Z$  dans le plan (suivant l'axe  $Z$ ) et une autre hors plan  $P_Y$  (suivant l'axe  $Y$ ). Ce cas test permet de mettre en évidence le gauchissement de la coque tenant compte du gauchissement de la surface moyenne.

Les déplacements obtenus au point A sont reportés sur le tableau (4.14) .

Les propriétés et la géométrie suivante :  $E = 29 \times 10^6 Pa, \nu = 0,22 \quad L = 12, b = 1,1$

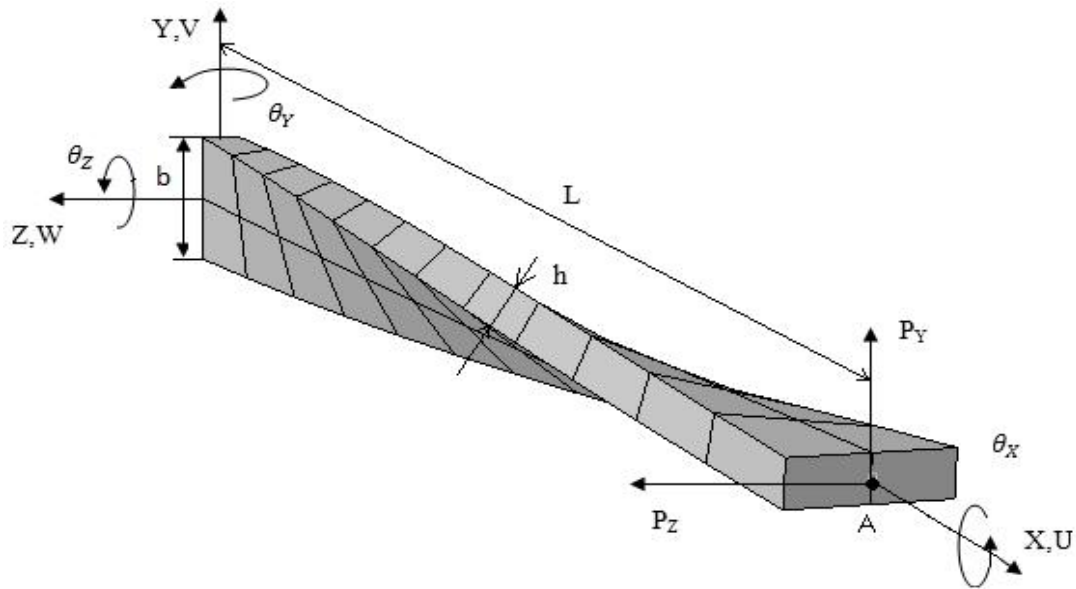


Figure (4.30) : Coque hélicoïdale.

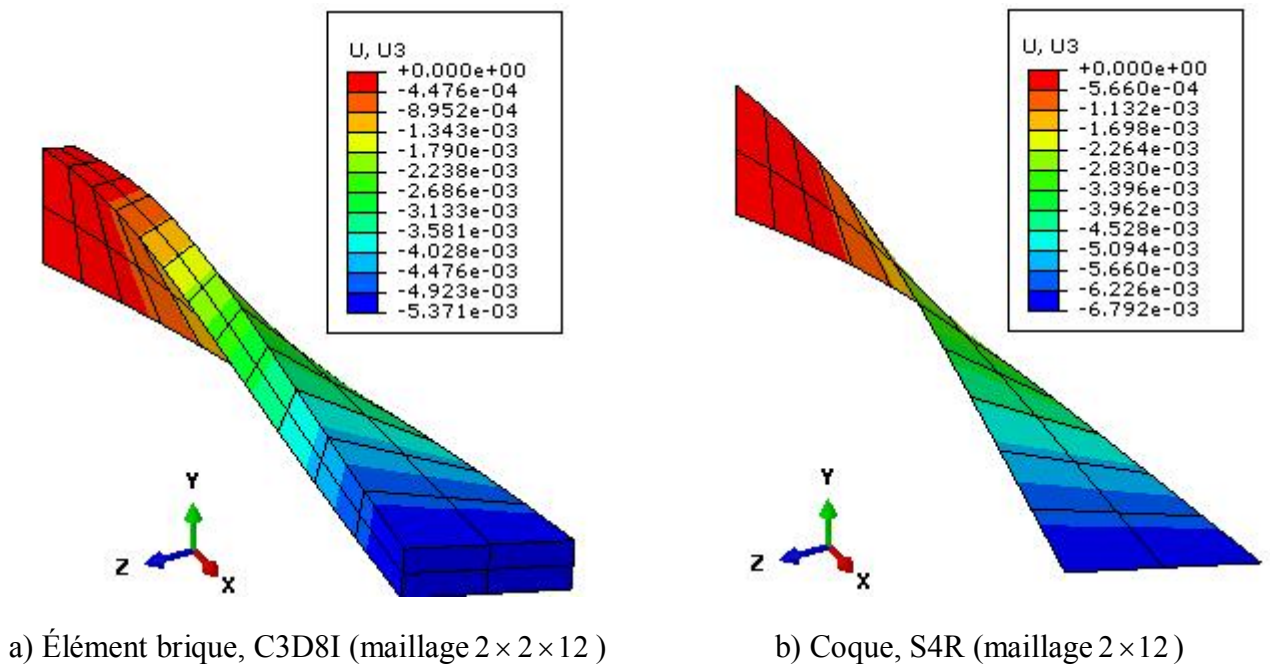


Figure (4.31) : Coque hélicoïdale ( $h=0.32$ ), flèche W des éléments ABAQUS.



Chargement dans le plan $P_Z = 1$ ; $P_Y = 0$									
Épaisseur	Théorie des Poutres [BAT 92].			Présente étude					
				ABAQUS, Élément volumique C3D8I			ABAQUS, Élément coque S4R		
				(maillage $2 \times 2 \times 12$ )			(maillage $2 \times 12$ )		
	$U_A$	$V_A$	$W_A$	$U_A$	$V_A$	$W_A$	$U_A$	$V_A$	$W_A$
$h = 0,32$	0	0,00172	0,00542	0	0,001718	0,00537	0	0,00177	0,00679

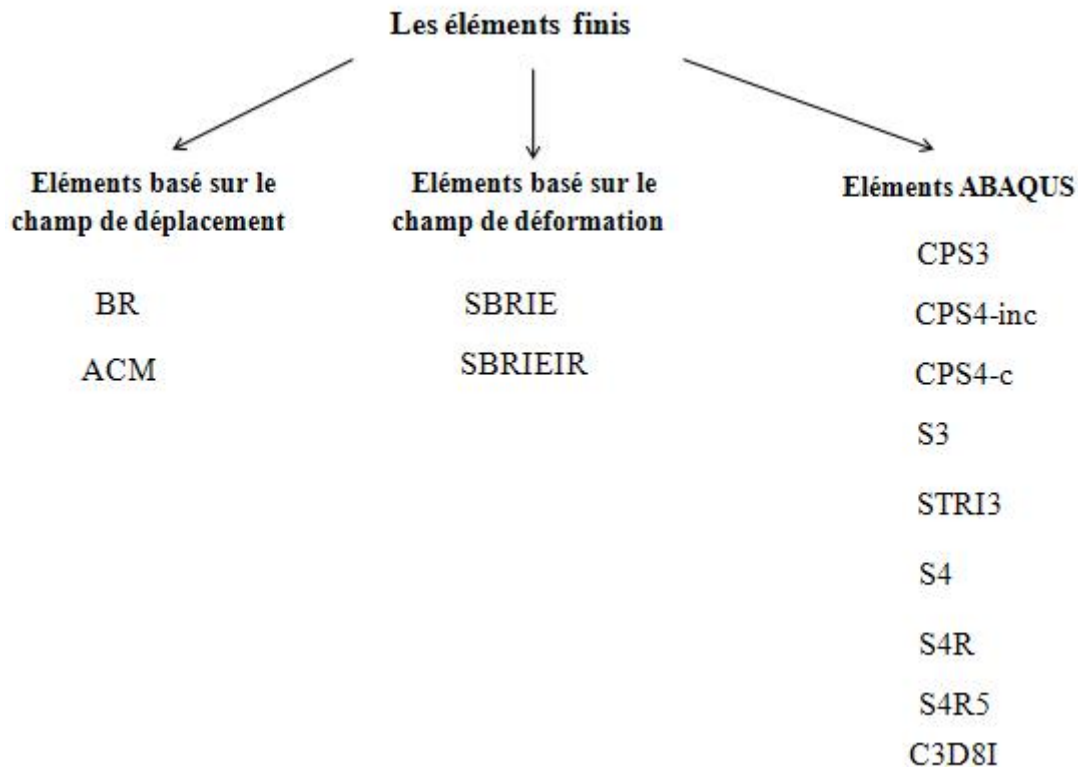
**Tableau (4.14) :** *Coque hélicoïdale ( $h=0,32$ ), résultats pour différents éléments.*

Les résultats obtenus pour  $h=0,32$  sont rapportés dans le tableau en considérant les maillages :  $2 \times 2 \times 12$  et  $2 \times 12$  .

Les résultats résumés dans le tableau montrent la bonne performance des éléments utilisés.

## 4-5 Conclusion

Les éléments finis utilisés dans la présente étude :



### 1-Validation des éléments finis membranaire (2D).

- ✓ Pour le problème (Flexion plane d'une poutre console courte encastée), les éléments basés sur le champ de déformation (SBRIE, SBRIEIR) convergent rapidement vers la solution exacte avec un nombre réduit des éléments finis, par contre les éléments basés sur le champ de déplacement exigent un nombre important d'éléments finis.
- ✓ Dans le cas du maillage régulier et distordu (figure 4.4), les résultats obtenus par ABAQUS (CPS4-inc) sont performants et comparables à la solution analytique donnée par la théorie des poutres. La même remarque avec l'élément SBRIEIR converge dans le cas le maillage régulier.
- ✓ Pour le problème (poutre console élancée de Mac Neal), on a constaté que l'élément basé sur le champ de déformation triangulaire (SBT3) est très puissant pour ce type de problème dominé par la flexion. Cet élément reste stable avec les distorsions géométriques.

## 2-Validation numérique des éléments plaques et solides.

- ✓ Les éléments Abaqus (S3, S4 et S4R) donnent de bons résultats aux plaques épaisses et minces.

## 3-Validation numérique des éléments coques (3D).

- ✓ Pour les problèmes où les déformations de flexion sont importantes par rapport à celles de membrane. S4 donne des résultats meilleurs que ceux SBQ4-ACM figure (4.23).

# Chapitre 5

## Applications

## **5 Introduction :**

Pour évaluer l'efficacité des éléments finis basés sur l'approche en déformation, une série d'applications et confrontation avec Logiciel ABAQUS. Nous nous proposons dans ce chapitre du mémoire de présenter quelques applications numériques relatives à deux types de problème.

- Problème à deux dimensions paroi sur colonne et refend (membrane - poutre)
- Problème à trois dimensions plaque raidie (plaque –poutre).
- Problème à trois dimensions coque raidie (coque - poutre).

La connexion de ces éléments finis (poutre - membrane, plaque - poutre, coque - poutre) pose généralement des problèmes à cause de l'incompatibilité des degrés de liberté aux nœuds.

Pour résoudre ce problème, nous proposons des éléments finis basés sur l'approche en déformation avec D.L.L de rotation, cette approche fournit une base unifiée pour la construction d'éléments finis variés qui possèdent les mêmes degrés des libertés nodales et qui peuvent être assemblés aisément les uns avec les autres.

### 5-1 Paroi sur colonne [BEL 00]

Une paroi discrétisée par des éléments de membrane avec DDL de rotation, est supportée par deux colonnes, discrétisée chacune par une poutre classique de Bernoulli figure (5-1), le tableau (5-1) donne quelques résultats.

Les données de géométrie, chargement et de matériau sont :

paroi :  $E = 2 \times 10^6$ ,  $\nu = 0,3$  et colonnes :  $A = 7,9342$   $I = 522,82$

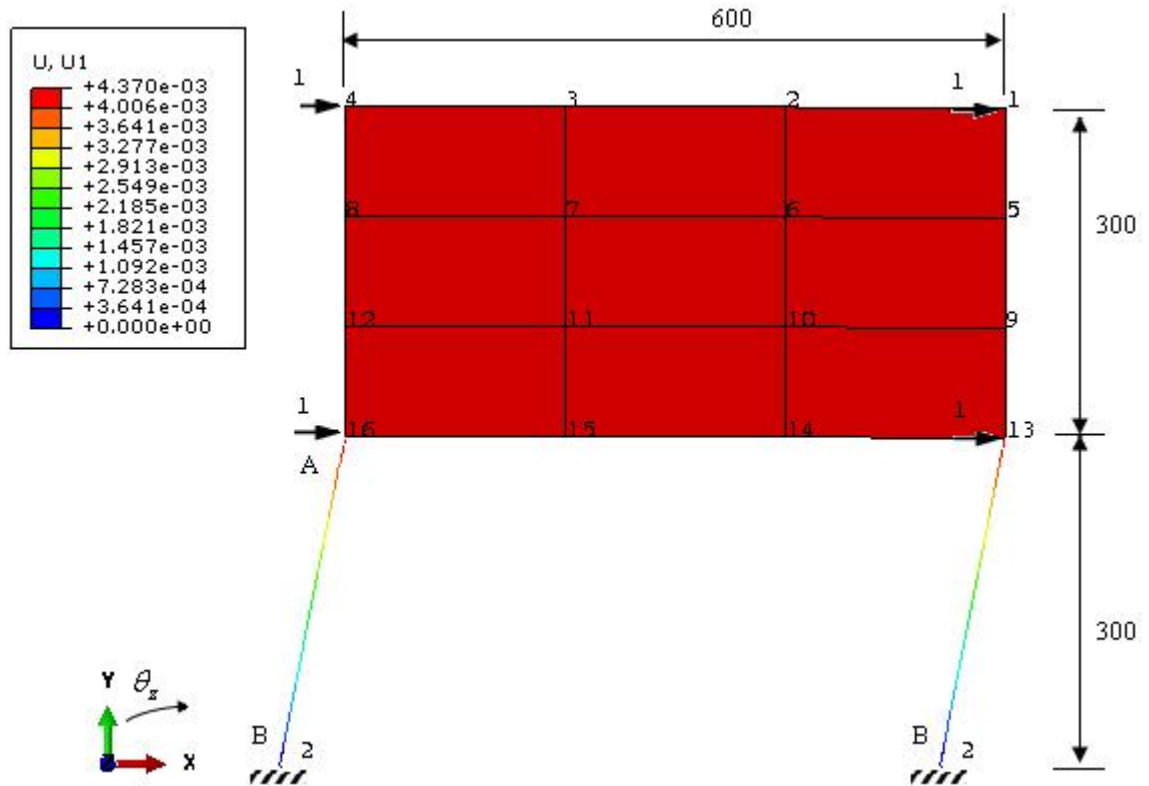


Figure (5.1): Paroi sur deux colonnes.

Le déplacement  $V_B$  et la rotation  $\theta_z$  dans la zone de jonction est illustré les résultats sur le tableau (5-1).

Modèle	$10^3 \times U_A$	$10^7 \times \theta_A$	Moment $M_A$	Moment $M_B$
[IBR93]	4,335	2,148	299,25	300,75
ABAQUS*, CPS4inc +B21	4,3258	1,476	299,486	300,514
SBQ4 [BEL 00]	4,3187	1,00	299,64	300,35
Théorie des poutres (paroi rigide) [IBR 93]	4,304	0	300	300

\*: Présente étude

Tableau (5.1): Paroi sur deux colonnes.

D'après les résultats illustrés sur le tableau on a constaté que l'élément membrane avec degré de liberté de rotation et des poutres Bernoulli assure une compatibilité entre ces deux éléments distincts au niveau de la jonction.

### 5-2 Refend plein [BEL 02]

Pour tester la convergence des éléments (SBRIE SBRIEIR, BR, CPS4-c et CPS4-inc), nous traitons l'exemple de la figure (5-2). Il s'agit d'évaluer la contrainte normale de flexion au point A et la contrainte de cisaillement au point B au sein du refend. La console est discrétisée par  $2 \times 2, 4 \times 4, 6 \times 8$ .

Les données de géométrie, chargement et de matériau sont :

$$E = 40 \times 10^6 \text{ Ib/ft}, \nu = 0,2$$

$$t = 1,0 \text{ ft}$$

$$P = 80000 \text{ lbs}$$

La solution exacte : [TIM 51]

$$u_C = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{(4 + 5\nu)}{2Eh} PL = 0,10018$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{Pxy}{I} = 12461$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{3P}{4(h/2)} \left( 1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right) \\ &= -\frac{P}{I} \frac{1}{2} [(h/2)^2 - (y^2)] = 2790,07 \end{aligned}$$

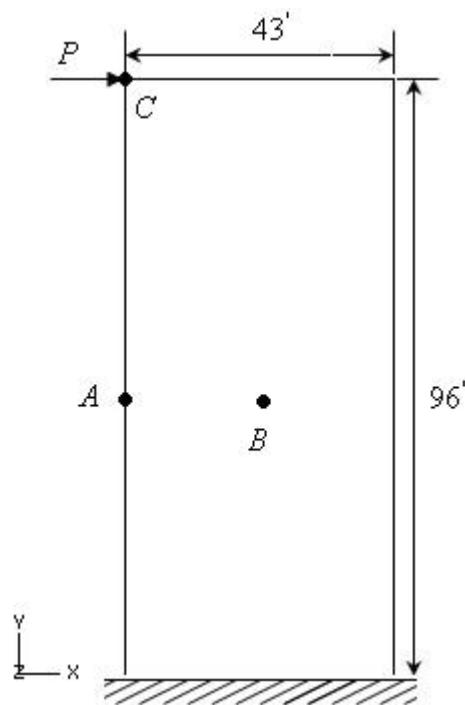


Figure (5.2): refend plein.

Pour étudier la convergence des contraintes et des déplacements, on a présenté les résultats sur les figures suivantes :

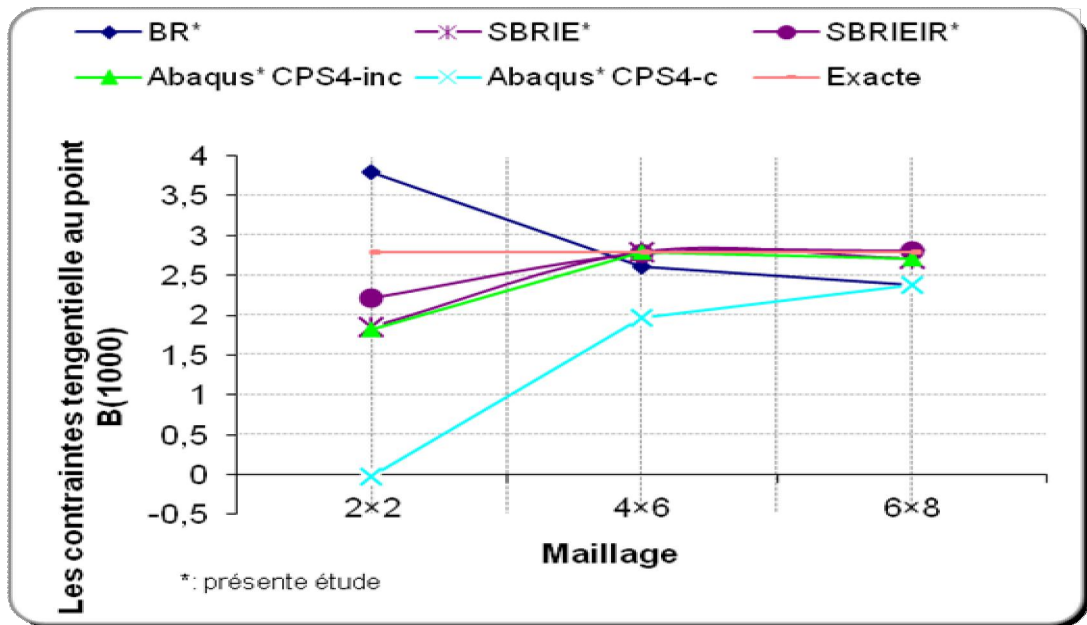


Figure (5.3) : Convergence de la contrainte tangentielle au point B.

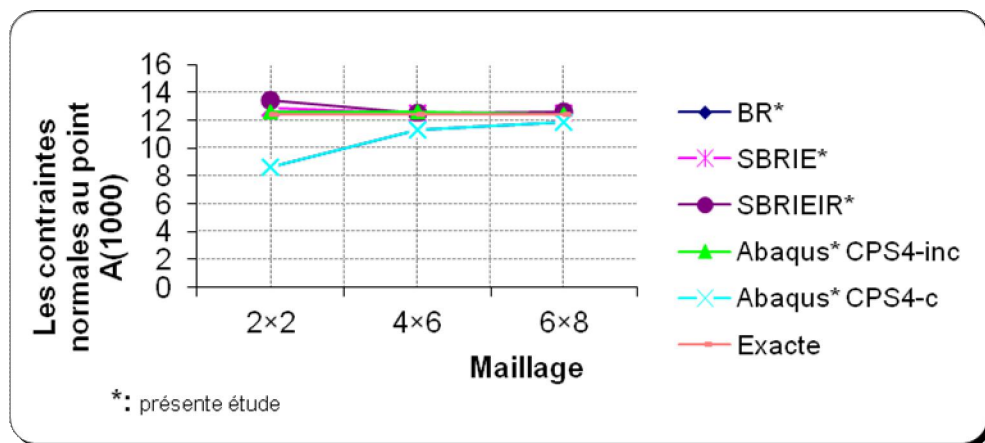


Figure (5.4) : Convergence de la contrainte normale au point A.

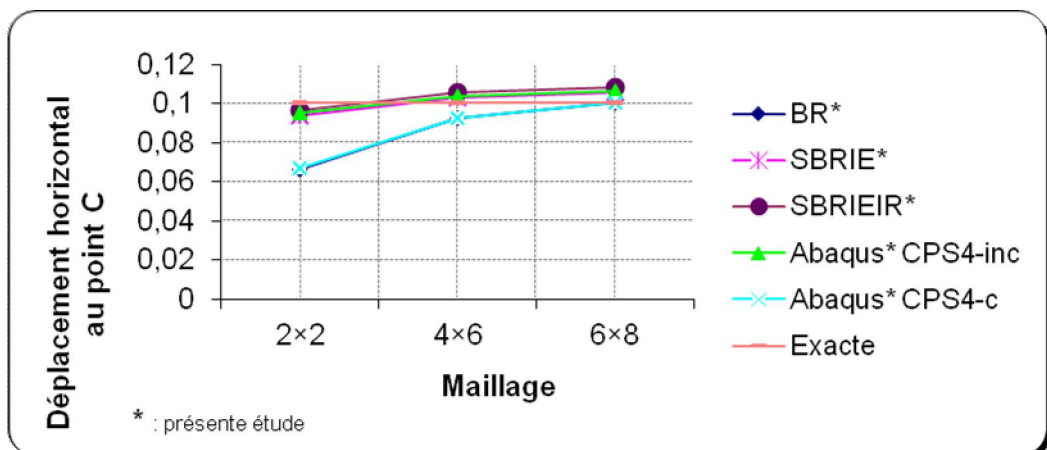


Figure (5.5) : Déplacement horizontal au point C.



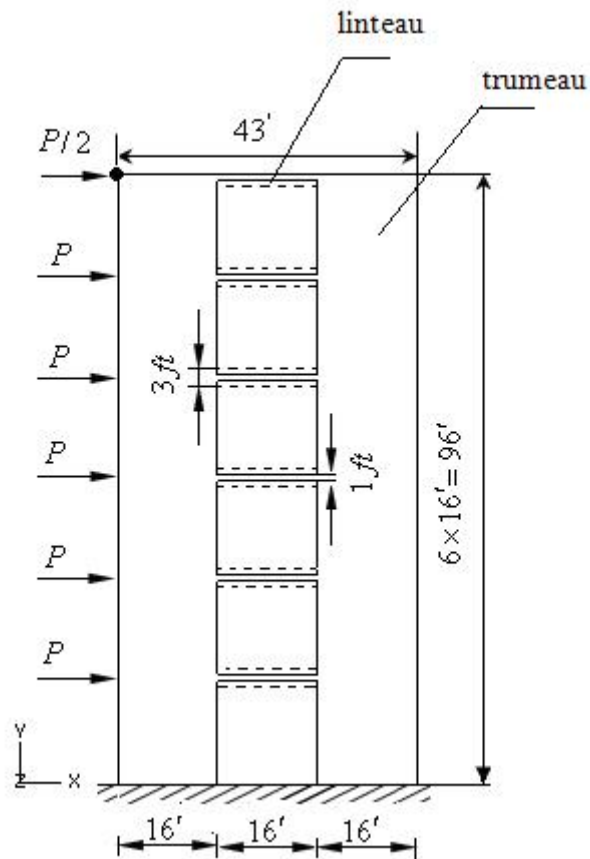
### 5-3 Refend avec une file d'ouvertures [BEL 02]

La figure (5-6) montre le refend avec un fils vertical de six ouvertures avec une dimension des linteaux de 1 ft et 3ft de hauteur. Ce dernier est soumis à une charge latérale uniforme à son extrémité libre et deux approches ont été utilisées : approche membrane - membrane et approche poutre - membrane.

-Linteau en élément membrane et le trumeau en élément membrane figure (5-7).

-Linteau en élément poutre et le trumeau en élément membrane figure (5-8).

Les données de chargement, épaisseur et de matériau comme le refend plein.



**Figure (5.6):** Refend à une file d'ouvertures (6 ouvertures).

5-3.1 Refend, approche Membrane – Membrane

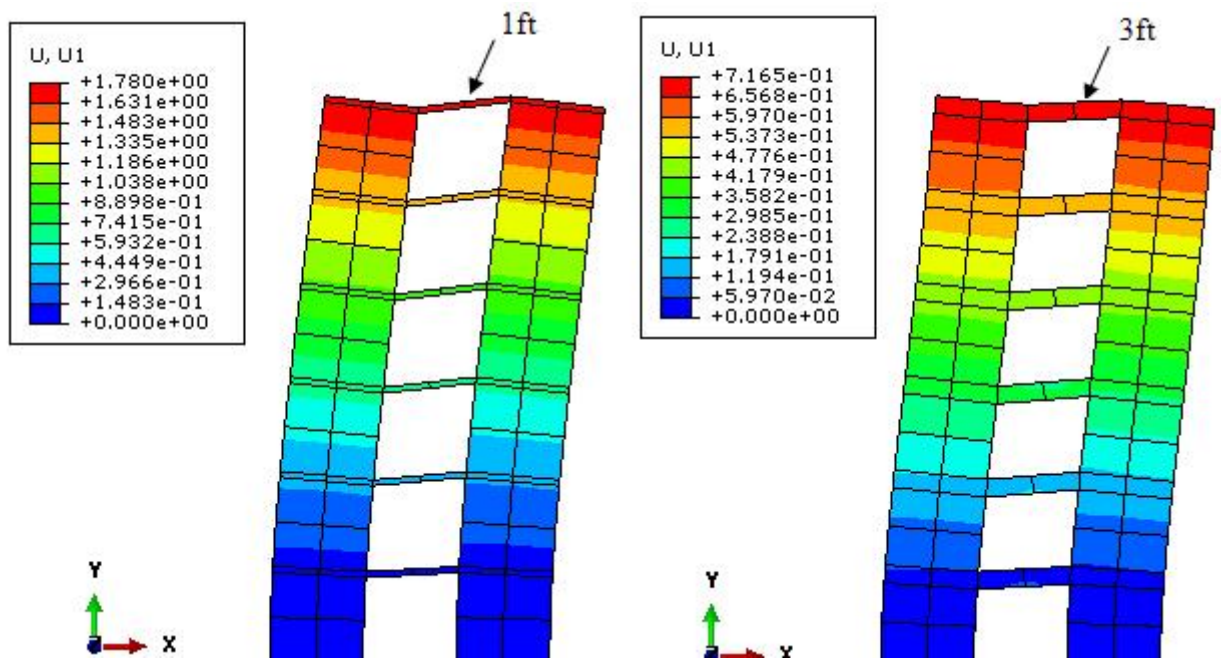


Figure (5.7): Refend, approche Membrane – Membrane (84 éléments).

La figure (5-9) montre les courbes de variation du déplacement au niveau de l'extrémité chargée du refend pour les deux cas (hauteur du linteau 1 ft et 3 ft ). On note que pour ce refend l'augmentation de la hauteur des linteaux de 1 ft à 3 ft rend ce dernier plus rigide 2,6 fois plus.

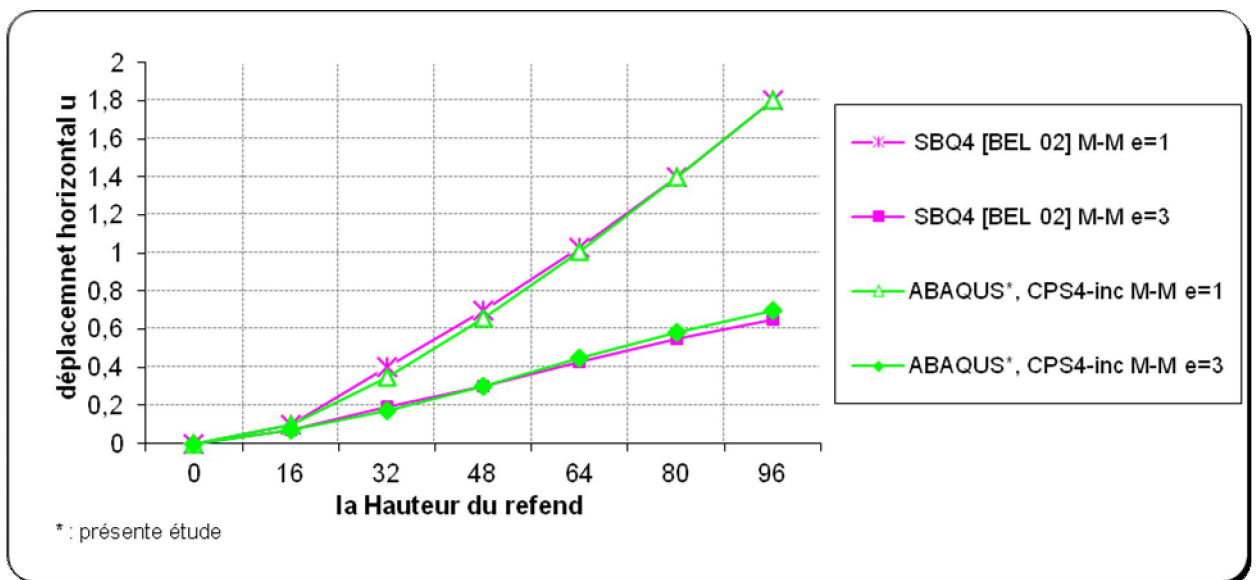


Figure (5.9): Variation du déplacement Approche Membrane - Membrane.

5-3.2 Refend, approche Poutre – Membrane

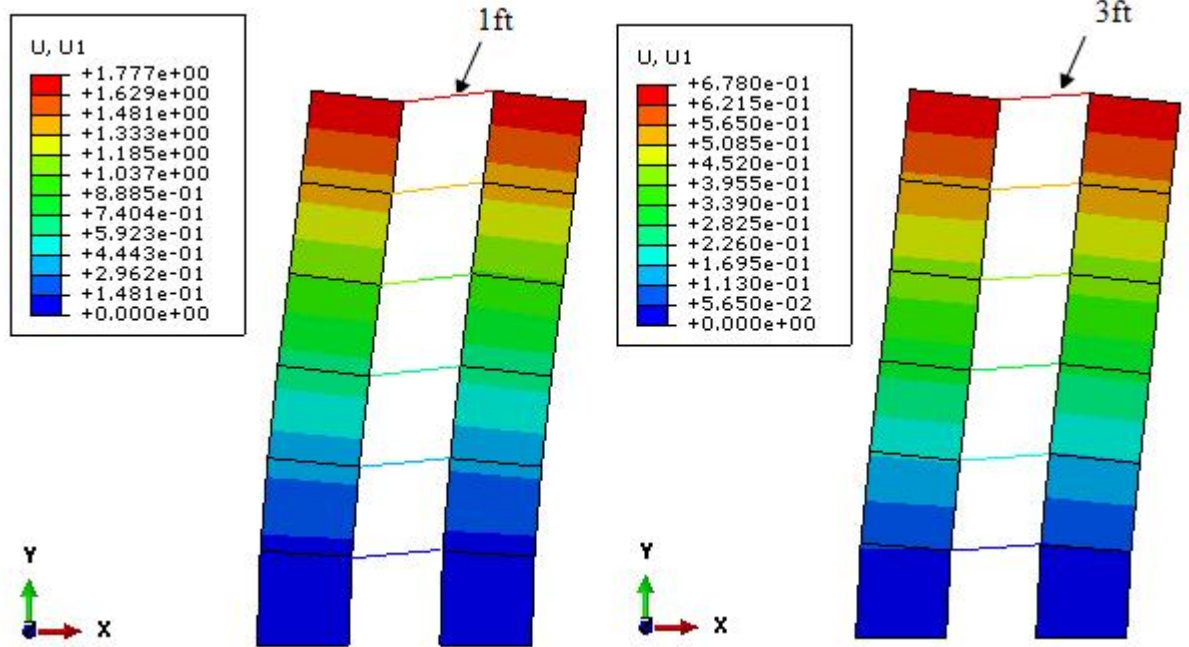


Figure (5.8): Refend, Approche poutre - Membrane (18 éléments).

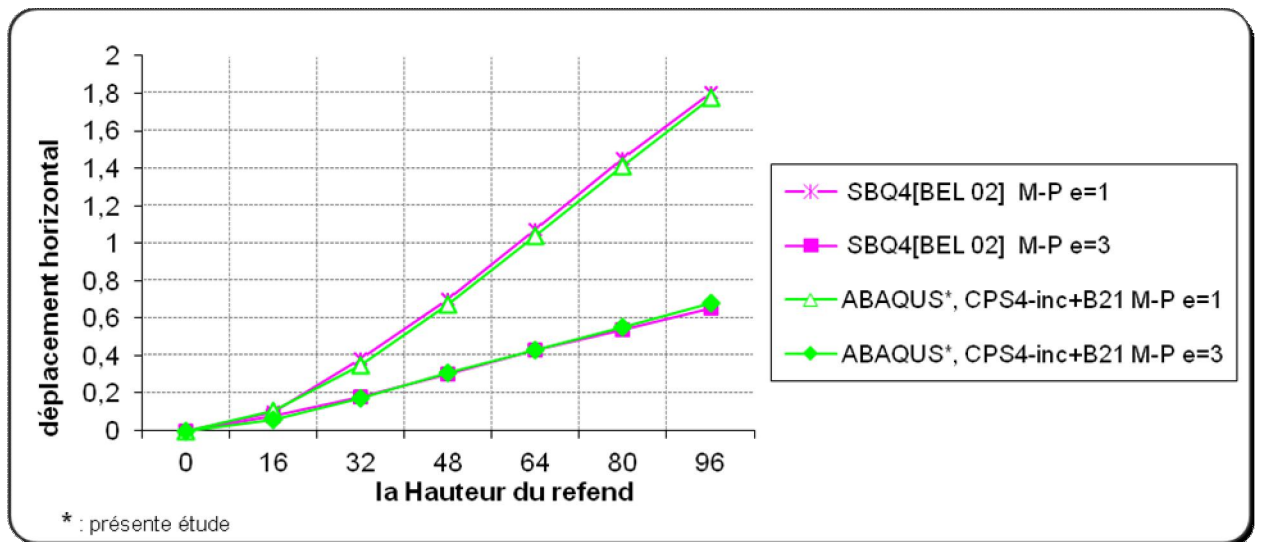


Figure (5.10): Variation des déplacements approche Poutre - Membrane.

Une différence acceptable est constatée dans l'allure du déplacement de translation (voir figures ci - dessus) pour les deux approches. Il reste à noter que l'approche Poutre - Membrane est beaucoup plus économique que celle de l'approche Membrane - Membrane. La modélisation du refend a nécessité seulement 28 nœuds (C.-à-d. 12 éléments membranaires et 6 éléments poutre) contrairement à la deuxième approche qui a demandé 126 nœuds (c.-à-d. 84 éléments membranaires).

### 5-4 Plaque raidie

#### 5-4.1 Plaque à une seule raideur [ARN 08]

Soit une plaque raidie simplement appuyée, figure (5-11) soumise à une charge uniforme  $q$ , la section droite de la plaque se forme T.

Les données de géométrie, chargement et de matériau sont :

$$E = 10^7, \nu = 0, q = 1.$$

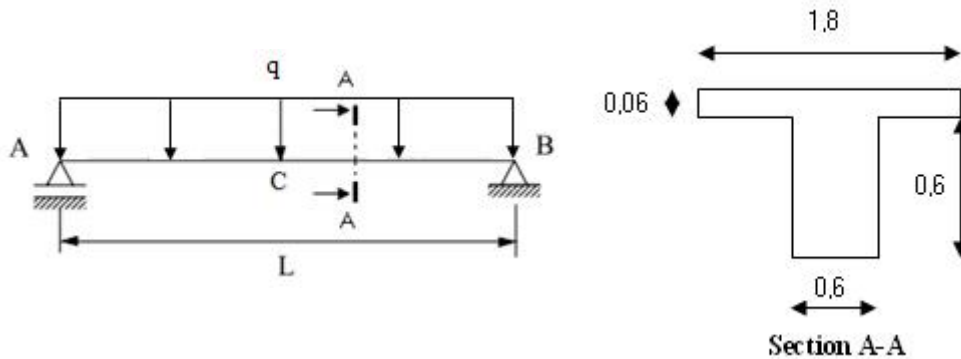


Figure (5.11) : Plaque raidie chargée uniformément.

La flèche maximale au point C obtenu par un calcul RDM est :

$$Y_{1/2} = \frac{5 \times q \times L^4}{384 \times E \times I} = \frac{5 \times 1 \times 12^4}{384 \times 10^7 \times 0,019879} = 0,001358$$

Plusieurs approches ont été utilisées pour modélisation des plaques raidies (plaque - plaque, solide et plaque - poutre excentrée).

#### 5-4.1.1 Modèle volumique :

Le modèle comporte 736 éléments finis de solides à 8 nœuds avec des modes incompatibles (C3D8I) et 1173 nœuds.

La flèche maximale au point C

Élément C3D8I, U2=0,001366

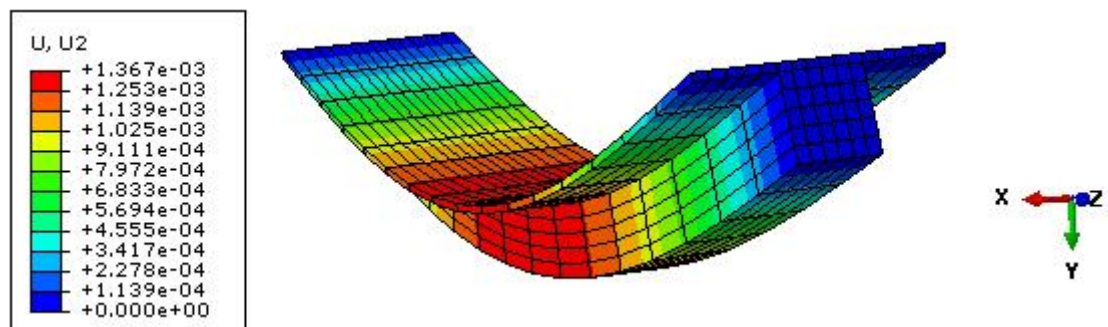


Figure (5.12) : Modèle volumique (solide).

**5-4.1.2 Modèle plaque - plaque :**

Le modèle comporte 144 éléments finis de plaques à 4 nœuds de type (S4R) et 170 nœuds.

La flèche maximale au point C

Élément S4R,  $U_2=0,001329$

Élément S4,  $U_2=0,001239$

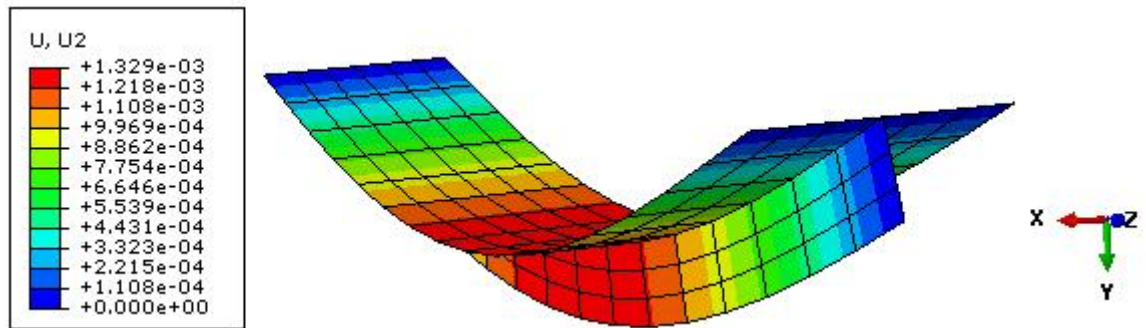


Figure (5.13) : Modèle plaque - plaque.

**5-4.1.3 Modèle plaque - poutre :**

Le modèle possède 32 éléments finis de plaques à 4 nœuds de type (S4R) et une poutre, maillés à 16 éléments de type Bernoulli (B33) de code Abaqus donc le modèle comporte 48 éléments et 68 nœuds et 16 éléments rigides de type poutre.

La flèche maximale au point C

Élément S4R+B33,  $U_2=0,001372$

Élément S4+B33,  $U_2=0,001371$

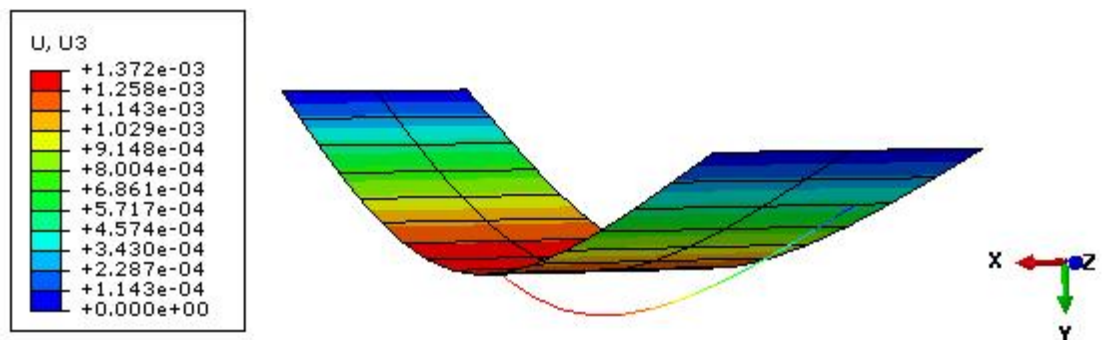


Figure (5.14): Modèle poutre-plaque.

### 5-4.1.3 Modèle poutre en section T :

Le modèle possède 16 éléments de poutre de type Bernoulli (B33) de code Abaqus.

La flèche maximale au point C

Élément B33,  $U_2=0,001365$

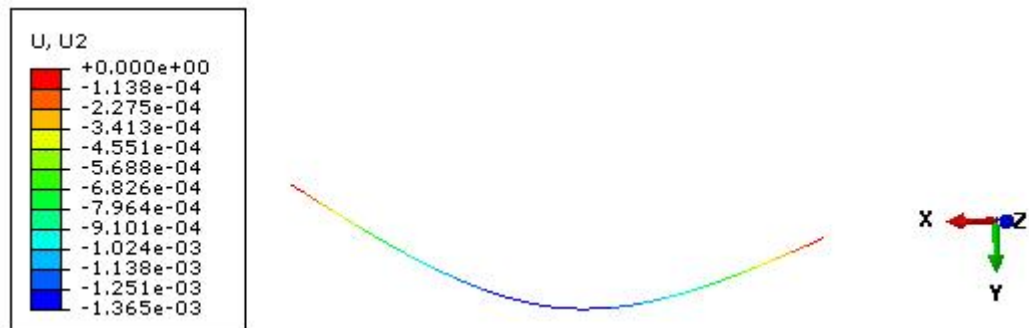


Figure (5.15): *Modèle poutre.*

Pour la modélisation des plaques raidies les résultats montrent que l'approche plaque - poutre est meilleure par contre les autres approches (solide, plaque - plaque) est le moins précis pour ce type de structure. L'utilisation de ces dernières approches nécessite un maillage très raffiné pour aboutir à des résultats assez acceptables.

## 5-5 Coque raidie

### 5-5. 1 Paraboloïde hyperbolique avec raidisseur [HAZ 89]

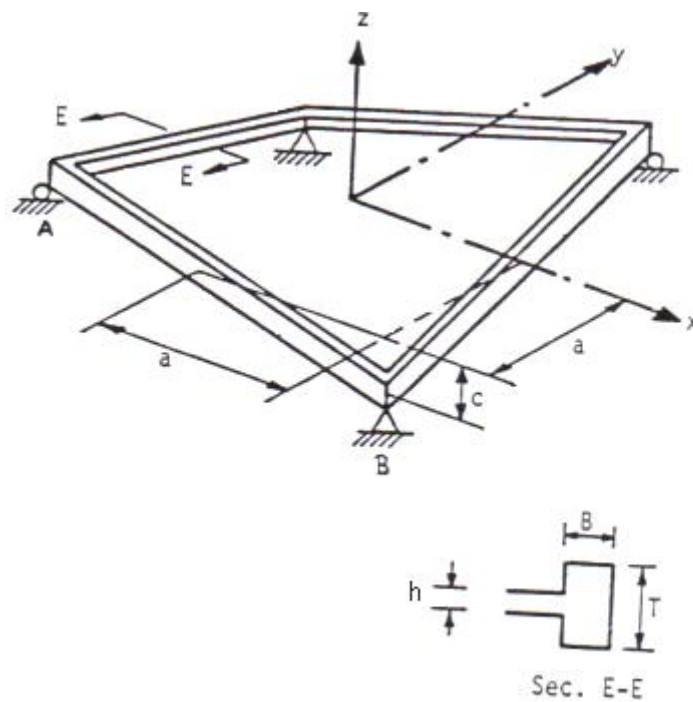
Le paraboloïde hyperbolique carré avec raidisseur modélisé par des poutres excentrées est montré dans la figure (5.16), les bas coins sont fixés ( $u = v = w = 0$ ) et les coins élevés ( $w = 0$ ).

La coque est ( $12,195 \text{ m} \times 12,195 \text{ m}$ ) dans le plan, avec  $2c = 2,44 \text{ m}$ , et  $76 \text{ mm}$  d'épaisseur.

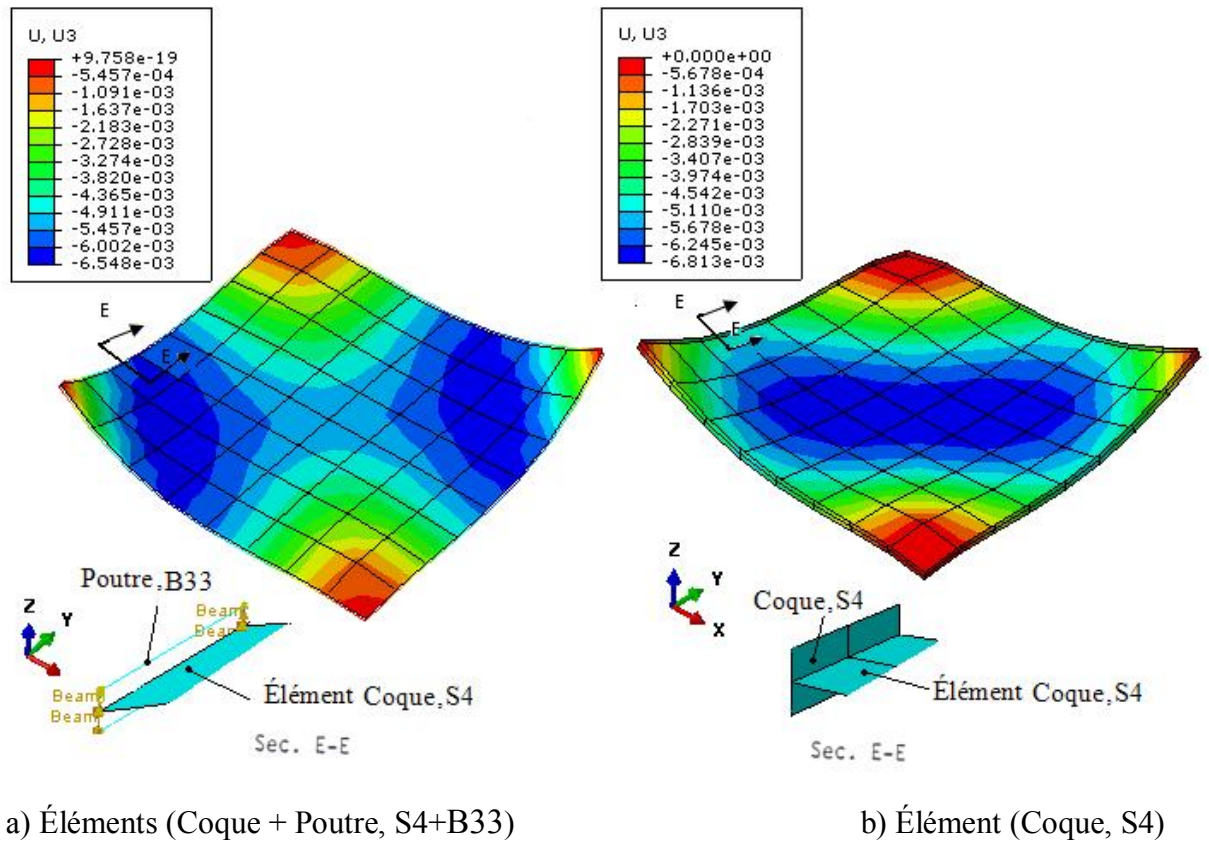
La section transversale d'une poutre sont  $305 \text{ mm} \times 305 \text{ mm}$ .

Le paraboloïde hyperbolique est soumis à une charge verticale  $q$  uniformément (poids propre)  $3,23 \text{ kN/m}^2$  et une charge  $2,62 \text{ kN/m}$  sur le raidisseur.

Le module de Young et le coefficient de Poisson sont considérés comme  $210 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$  et zéro, respectivement.



**Figure (5.16) :** Paraboloïde hyperbolique (ph).



a) Éléments (Coque + Poutre, S4+B33)

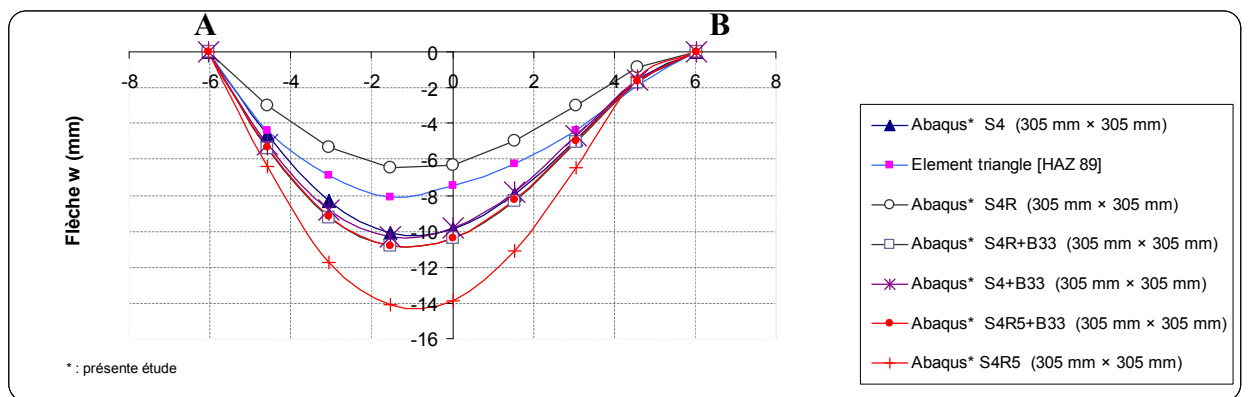
b) Élément (Coque, S4)

**Figure (5.17) :** *PH, flèche normale w le long d'une poutre A B (Éléments ABAQUS).*

La figure (5.18) montre la variation de la flèche normale le long d'une poutre.

Pour analysée la structure utilisée l'élément fini de coque triangle basée sur le champ de déformation et des éléments finis Abaqus (coque S4, S4R, S4R5) et une poutre (Abaqus, B33).

Nous constatons que les deux éléments (S4, S4+ B33) se comportent de manière similaire par contre les éléments (S4R, S4R+B33) et (S4R5, S4R5+B33) donne des résultats non semblables.



**Figure (5.18) :** *Variation de la flèche normale le long d'une poutre A B.*



### 5-5.1.1 L'effet du raidisseur sur la flèche

La coque est soumise à son poids propre,  $q = 3,23 \text{ kn/m}^2$  et le maillage  $8 \times 8$  éléments.

La section transversale d'une poutre est les suivantes :

152,5mm  $\times$  152,5mm, 228,5mm  $\times$  228,5mm, 381mm  $\times$  381mm et 305mm  $\times$  305mm.

La figure (5.19) montre l'influence du raidisseur sur le comportement d'un paraboloïde hyperbolique.

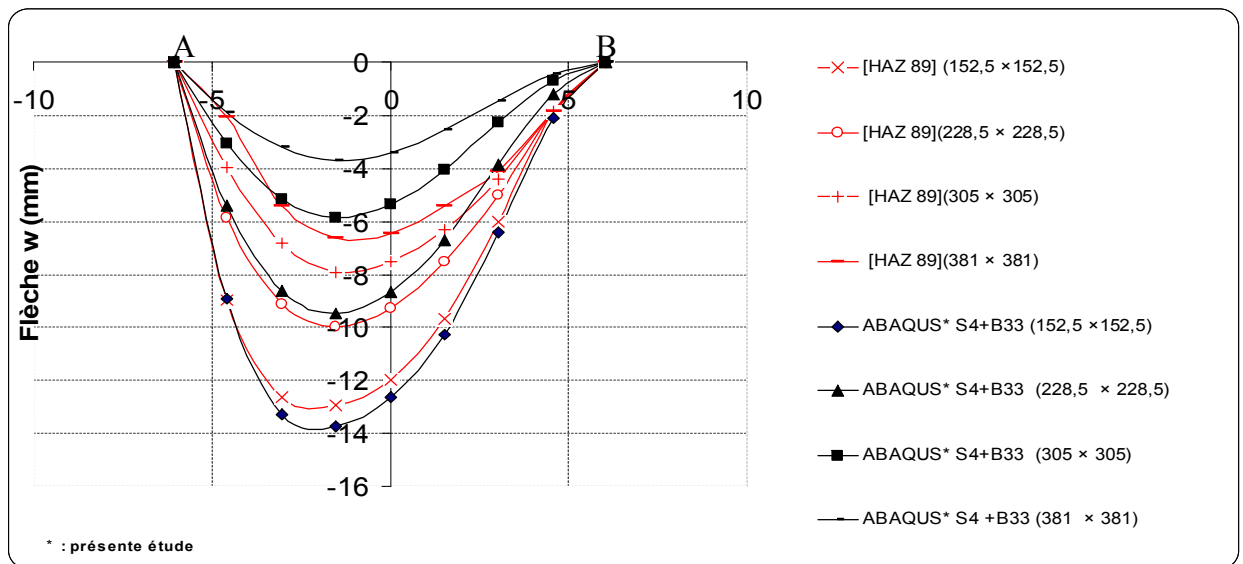


Figure (5.19) : L'effet du raidisseur sur la flèche.

La valeur de la flèche maximale présente sur le centre de la poutre (A B) ainsi la section transversale (152.5mm $\times$ 152.5mm).

Une différence acceptable est constatée dans la flèche normale pour les deux éléments, [HAZ 89] et (S4+B33 du logiciel Abaqus).

## 5-6 Conclusion

### Application : **Paroi sur colonne et refend avec des ouvertures**

Le raccord membrane - poutre (membrane avec degré de liberté de rotation) ne pose pas du problème au niveau de la jonction par ce que la flexion de la poutre transmise a la membrane (compatible au niveau des degrés de liberté nodaux).

### Application : **Plaque raidie**

L'approche géométrique par facettes planes est employée pour les éléments coques du logiciel ABAQUS. Plusieurs approches ont été utilisées pour modélisation des plaques raidies (plaque - plaque, solide et plaque - poutre excentrée).

Pour la modélisation des plaques raidies, les résultats montrent que l'approche plaque -poutre est meilleure.

### Application : **Coque raidie (Paraboloïde hyperbolique)**

Pour le problème (paraboloïde hyperbolique avec raidisseur), nous constatons que les deux éléments [HAZ 89] et (S4+B33) ont des résultats similaires.

Nous constatons que l'élément quadratique à 4 nœuds (S4 du logiciel Abaqus) et l'assemblage d'un élément coque avec un élément poutre (S4+B33 du logiciel Abaqus) ont des résultats similaires est meilleure.

L'assemblage d'une poutre avec un élément coque (S4R5) est incompatible au niveau des degrés de liberté nodaux. La poutre 3 DDL de rotation, la coque 2 DDL de rotation.

# **Conclusion**

## **Générale**

## **Conclusion générale**

Le présent travail est réalisé dans le cadre général des études bibliographiques, et de la validation d'une famille d'éléments finis basé sur l'approche en déformation construite à partir d'une formulation purement en 2D et 3D avec différents degrés de liberté en déplacement à chaque nœud. Nous avons utilisé les éléments finis ABAQUS/Standard pour la confrontation des résultats obtenus.

À partir de ce mémoire, on peut conclure les remarques suivantes :

— Le manque de compatibilité entre les degrés de liberté de divers éléments est un problème fréquemment produit dans la pratique pendant la modélisation des structures complexes.

— L'accouplement des éléments de membrane et de poutre, le problème sont généralement traités par l'ajout d'un DDL de rotation.

— L'élément à champ de déformation converge rapidement vers la solution exacte avec un nombre réduit des éléments finis, par contre les éléments basés sur le champ de déplacement exigent un nombre important d'éléments finis.

— L'élément à champ de déformation et quadrilatère avec le mode incompatible, ABAQUS (CPS4-inc) sont plus performant pour le problème d'élasticité plane comparable avec l'élément compatible, ABAQUS CPS4.

— Les modes incompatibles représentent une meilleure résolution du problème au phénomène de verrouillage dans le cas de cisaillement ou flexion.

— Pour le problème (poutre console élancée de Mac Neal), on a constaté que l'élément à champ de déformation triangulaire (SBT3) est très puissant pour ce type de problème dominé par la flexion. Cet élément reste stable avec les distorsions géométriques.

— L'approche géométrique par facettes planes est employée pour les éléments coques du logiciel ABAQUS. Plusieurs approches ont été utilisées pour modélisation des plaques raidies (plaque - plaque, solide et plaque - poutre excentrée ou centrée).

— Les éléments (SBRP, SBH8), basé à champ de déformation donne des meilleurs résultats (la convergence vers la solution de référence) par contre l'élément de type déplacement R4 souffre des phénomènes de cisaillement transverse.

— Pour le problème (paraboloïde hyperbolique), nous constatons que les deux éléments [HAZ 85] et (S4+B33) ont des résultats similaires.

En enfin, nous estimons que cette étude permet d'augurer favorablement sur les possibilités des éléments à champ de déformation pour s'adapter à l'analyse des domaines non linéaires géométriques.

# **Bibliographie**

---

---

# Bibliographies

- [ARN 08] **Arnaud D. Fabrice G et Frédéric R,** ” *Aide Mémoire –Mécanique des structures, Résistance des matériaux*”, Dunod, Paris, 2008.
- [ARG 60] **Argyris J.H. and Kelsey S,** ” *Energy theorems and Structural Analysis*”, Butterworth, London, 1960
- [ALA08 ] **Alain Berlioz et Philippe Trompette,**”*Mécanique des structures*”Lavoisier, paris septembre 2008 .
- [BAT 92] **Batoz J.L et Dhatt.G ,**” *Modélisaion des structures par éléments finis ”* Vol.3 : Coques, Eds Hermes, Paris, 1992.
- [BELO 05] **Belounar L et Guenfoud M,**”*A New Rectangular finite element based on the strain approach for plate bending*”,Thin Walled Structures 43(2005)47-63.
- [BEL 99] **Belarbi M.T. et Charif A.,** ”*Développement d’un nouvel élément hexaédrique simple basé sur Le modèle en déformation pour l’étude des plaques minces et épaisses*”, Revue Européenne des Eléments Finis, Vol.8, N0 2, pp. 135-157, 1999.
- [BEL 00] **Belarbi MT,** ” *Développement de Nouveaux Eléments Finis à Modèle en Déformation Application Linéaire et non Linéaire ”*, Thèse de Doctorat, Université de Maintouri Constantine, février 2000.
- [BEL 02] **Belarbi MT et Belounar L ,** Conférence internationale en genie civil, Université de Batna, 2002.
- [BEL 05] **Belarbi M.T and Bourezane M,**”*On improved Sabir triangular element with drilling rotation*”,Revue Européenne de Génie Civil,Vol.9,N<sup>0</sup> 9-10,pp.117-123,2005.
- [BAT 90] **Batoz J.L. et Dhatt G,**” *Modélisation des structures par éléments finis. Poutres et Plaques ”*, Vol. 2 : élastiques, Eds Hermès, Paris, 1990.

- [COOK 94] **Cook R.D.**,” *Finite Element Modelling for Stress Analysis*”, John Wiley& Sons, 1995.
- [COOK 89] **Cook R.D and Malkus D.S.,and Plesha M.E.**,”*Concepts and Applications of finite Element Analysis*”, 3<sup>rd</sup> ed.,John Wiley et Son,1989.b
- [DJO 90] **Djoudi M.S.**,” *Strain based Finite Elements for linear and geometrically analysis of structures*”, PHD thesis, University of Walles College of Cardiff (G.B), June 1990.
- [doc07a] **Abaqus 6.7 documentation**,” *Abaqus Analysis User’s Manual*”, volume 1,...5. Simulia, 2007.
- [BOUR 06] **Bourezane M.**,” *Utilisation of the strain model in the analysis of structures* ”, Thèse de Doctorat, Université de Biskra, Juillet 2006.
- [doc07b] **Abaqus 6.7 documentation**,” *Abaqus Theory Manual*” ,Simulia, 2007.
- [DAW 84] **Daw D.J** ,”Matrix and finite element displacement analysis of Structures”, Clarendon press .Oxford.1984.
- [FER 09] **Ferreira. A. J. M.**,” *Matlab codes for Finite Element analysis, Solid and structures*”, Portugal: Springer, 2009 .
- [FRE 01] **Fre F. et Jirousk J** ,”*Analyse des structures et milieux contenus, Méthode des éléments finis* ”, Vol.6 Eds P.P.U.R.,1<sup>ère</sup> Edition,Lausane, 2001.
- [GUE 09] **Guerraiche k**,”*Investigation Nmerique par Elemnts Finis de la Modilisation des Plaques et Coques* ”, mémoire de magistère, Université de Biskra, 2009.
- [HAM 06] **Hamadi D.J and Belarbi M.T**, “*Integration solution routine to evaluate the element stiffness matrix for distorted shapes*” Asian Journal of Civil Engineering (building and housing) vol. 7, no. 5 (2006) a. pages 525-549
- [HAZ 89] **Hazim F.E.**,”*finite element analysis of shell structures*” ,Phd Thesis ,University of walls, 1989, UC.



- [IMB 84] **Imbert J.F.**, ” *Analyse des structures par éléments finis* ”, Cépaduès- éditions 1984.
- [IBR 93] **Ibrahimbegovic A., Frey F. et Reborà B.**, “*Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes : les éléments finis avec degré de liberté de rotation*”, LSC Rapport interne 93/10, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (Suisse), juin 1993
- [MEZ 06] **Meziani N.**, ”*Contribution de l’approche en Déformation dans la Modélisation des Structures a Contour Circulaire*”, mémoire de magistère, Université de Biskra, 2006.
- [MAA 07] **Maalem T.**, ”*Contribution Du Modèle en Déformation dans L’analyse des Structures* ”, Thèse de Doctorat, Université de Batna, juin 2007.
- [MAC 85] **MacNeal R.H. and Harder R.L.**, “*A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*”, Finite Element Anal. Des. 1, pp. 3-20, 1985.
- [MAC 87] **MacNeal R.H.**, ”*A theorem regarding the locking of tapered four-noded membrane elements*”, IJNME., Vol. 24, pp. 1793-1799, 1987.
- [NGU 04] **Nguyen.V.**, ” *Modélisation Globale et locale des Structures Multicouches par Eléments finis de plaque*”, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Décembre 2004.
- [RAH 94] **Rahmani O. et S. Kabdani.**, ” *Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs* ”, office des publications universitaires, édition (1994).
- [ROC 79] **Rockey L. Evans R. Griffiths W. et Nethercot D.**, ” *Introduction à la Méthode des Eléments Finis* ”, Eds Eryolles, Paris 1979.
- [ROS 90] **De Rosa MA.et Franciosi C.**,”*Plate bending analysis by the cell method*”,Comput Struct 1990;37:731-5
- [SZE 92] **Sze K.Y. and Chen W. and Cheung Y.K.**, “*An efficient quadrilateral plane element with drilling degrees of freedom using orthogonal stress modes*”, C.S., Vol. 42, N° 5, pp. 695-705, 1992.

- 
- [SAB 85] **Sabir A.B.**, "A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom" Chapter 9 in proceeding of the 2nd international conference on variational methods in engineering, Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, pp. 17-25. 1985.
- [SAB 84] **Sabir A.B.**, "Strain based finite elements for the analysis of shear walls", Proc.Int.Conf.on tall buildings,447-453,Hong Kong University 1984.
- [TAY 86] **Taylor R.L., Simo J.C., Zienkiewicz O.C. and Chan A.C.**, "The patch test: A Condition for Assessing Finite Element Convergence", IJNME, Vol. 22, pp. 39-62, 1986.
- [TUR 56] **Turner G. et Dhatt G.**, " Une présentation de la méthode des éléments finis ", Eds.P.U.L.Q., France, 1981.
- [TIM 51] **Timoshenko S. and Goodier J.N.**, " *Theory of Elasticity*", Mc Graw-Hill, New York, 1951.
- [ZIE 91] **Zienkiewicz O.C et Taylor R.L.**, "The Finite element Method", McGraw-Hill, London 1991.
- [ZIE 00] **Zienkiewicz O.C et Taylor R.L.**, "The Finite element Method", Vol 1, fifth edn ,Butterworth-Heinemann.2000.
- [ZIE 71] **Zienkiewicz O.C.**, "The Finite element Methodc in engineering", science,2nd ed., McGraw-Hill,1971 .
- [YANG 90] **Yang H .T.Y., Saigal S, and Liaw D .G.**, "Advances of Thin Shell Finite éléments and some applications", version- I, Computers and Structures, 35, pp.481-504, 1990.

# **Annexe**

---

---

# Annexe A

## A-1 Analyse par M.E.F avec logiciel ABAQUS

Dans cette section le programme d'analyse d'éléments finis ABAQUS est employé pour contrôler tous calculs numériques. La version ABAQUS 6.10-1 est employée.

### A-1.1 Vue d'ensemble d'ABAQUS

ABAQUS est un programme d'élément fini très sophistiqué et tout usage d'élément, conçu modeler principalement le comportement des structures sous l'effet des charges extérieure et intérieure, pression...etc. ABAQUS comprend les fonctionnalités suivantes :

- Possibilités pour des problèmes statiques et dynamiques.
- La capacité de modeler la forme très grande change, dans deux et trois dimensions.
- Une bibliothèque d'élément.
- Des possibilités sophistiquées au contact des deux structures.
- Une bibliothèque de matériaux, élastique, plastique.
- Possibilités pour modeler un certain nombre de phénomènes d'intérêt, y compris des vibrations, les problèmes de flambement, et ainsi de suite.

La plupart des entreprises utilisent un assortiment de ces logiciels qui sont plus ou moins performants dans l'une ou l'autre de ces tâches, par exemple, dessiné avec Catia, calculé avec ABAQUS.

ABAQUS est un logiciel de simulation par éléments finis de problèmes très variés en mécanique. Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants de problèmes linéaires et non linéaires.

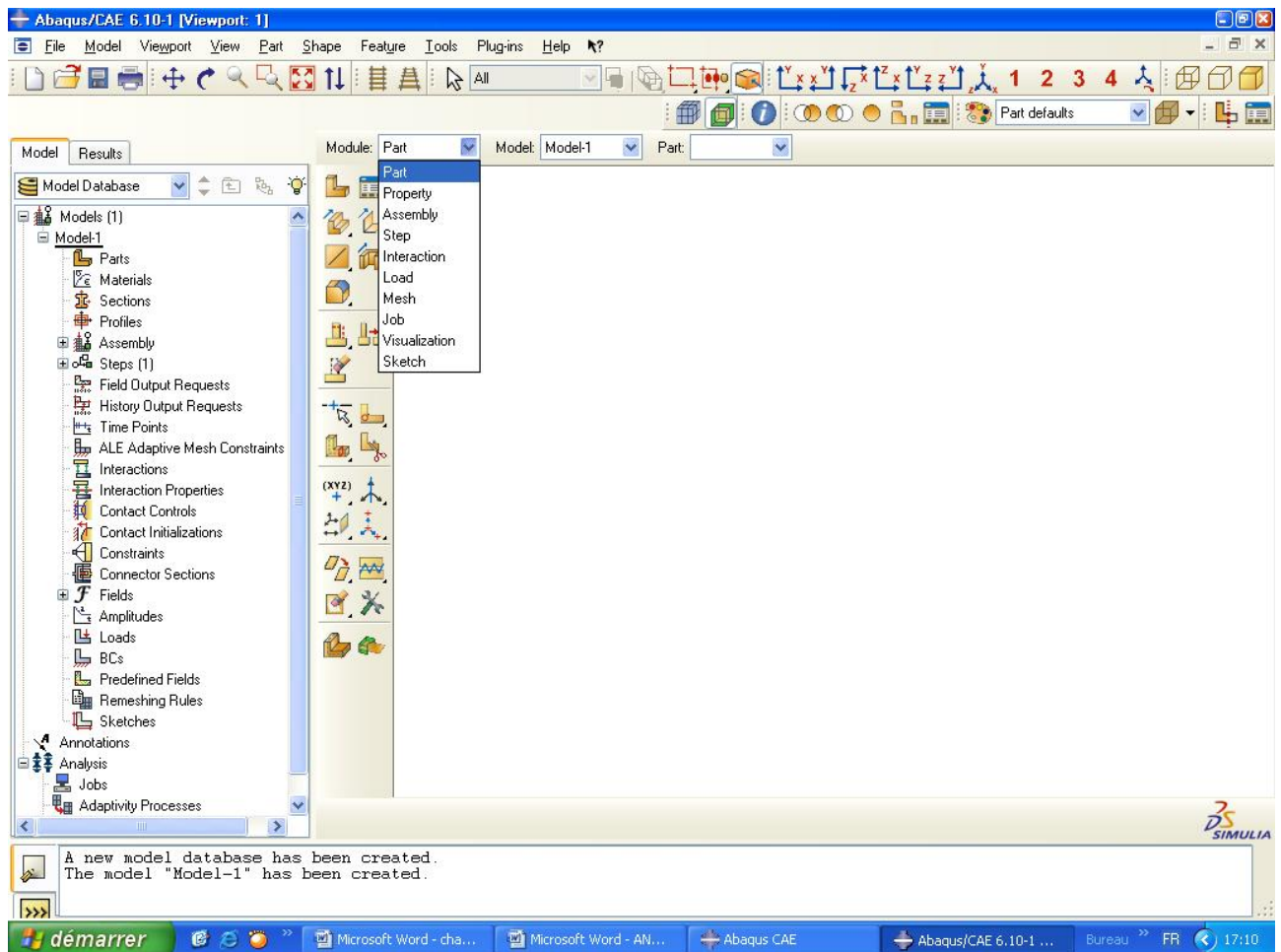
### A-2 les modules.

ABAQUS CAE est divisé en unités fonctionnelles appelées modules.

Chaque module contient les outils qui sont propres à une partie de la tâche de modélisation. Voir la figure (A-1).

Les modules de logiciel ABAQUS :

Part,Property,Assembly,Step,Interaction,Load,Mesh,Job,Visualisation,Sketch.



**Figure (A-1) :** Les modules de logiciel ABAQUS.

### A-3 Étapes en ABAQUS

Voici un petit rappel des actions à effectuer pour créer un modèle ABAQUS :

1. Dessiner notre modèle
  - a. dessiner le profil 2D de la forme voulue
  - b. Le développer en 3D
  - c. Rajouter les détails manquants
2. Affecter les propriétés à l'objet
  - a. créer le matériau
  - b. créer les sections sur lesquelles appliquer les matériaux
  - c. Affecter les matériaux aux sections correspondantes
3. Assembler le modèle
  - a. créer les instances
  - b. Les positionner dans le repère général
4. Définir les pas d'analyse
5. Créer les interactions entre les instances
  - a. créer les surfaces

- b. définir les types de contacts
- c. Associer des surfaces avec des types de contact
- 6. Appliquer les conditions limites et les chargements
  - a. définir les pas d'application
  - b. définir les types de C.L ou chargement
- 7. Mailler le modèle
  - a. partitionner le modèle
  - b. choisir les techniques de maillage
  - c. Choisir les types de maille
  - d. Mailler le modèle
- 8. Créer et soumettre un travail
- 9. Visualiser les résultats

#### A-4 Type d'éléments d'ABAQUS


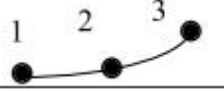
Quelques exemples d'éléments issus de la librairie d'ABAQUS.

##### A.4.1 Eléments 1D solides

- **Géométrie et degrés de liberté**

Définition des coordonnées : x, y, z

Propriétés d'éléments définis par le mot-clé SOLID SECTION (section et propriétés physiques).

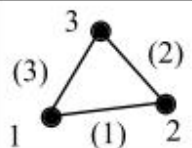
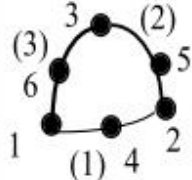
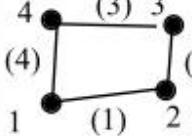
Type d'analyse	Degré(s) de liberté nodaux	Type	Réf.	Schéma
MECANIQUE	(u, v, w) : 1, 2, 3	2 noeuds, linéaire	C1D2	
		3 noeuds, quadratique	C1D3	

## A.4.2 Eléments 2D solides

- Géométrie et degrés de liberté

Définition des coordonnées :  $x, y$  ou  $r$ ,

Propriétés d'éléments définis par le mot-clé SOLID SECTION (épaisseur et propriétés physiques).



Type d'analyse	Degré(s) de liberté nodaux	Type	Réf.	Schéma
MECANIQUE  DEFORMATIONS PLANES / CONTRAINTES PLANES	$(u, v) : 1, 2$	3 noeuds, linéaire	CPE3 /CPS3	
		6 noeuds, quadratique	CPE6 /CPS6	
	$(u, v) : 1, 2$	4 noeuds, linéaire	CPE4 /CPS4	

## A.4.4 Eléments poutres

- Géométrie et degrés de liberté

Définition des coordonnées :  $x, y, z$

Propriétés d'éléments définis par le mot-clé BEAM SECTION (section et propriétés physiques).

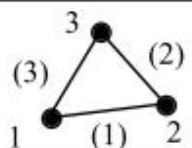
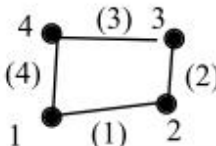
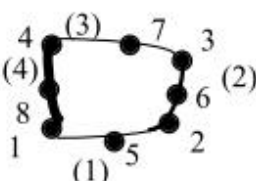
Type d'analyse	Degré(s) de liberté nodaux	Type	Réf.	Schéma
MECANIQUE	$(u, v, w) : 1, 2, 3$	2 noeuds, linéaire	B21/B31	
PLAN / ESPACE	$(\alpha, \beta, \gamma) : 4, 5, 6$	3 noeuds, quadratique	B22/B32	

### A.4.5 Eléments plaque(ou coque)

- Géométrie et degrés de liberté

Définition des coordonnées :  $x, y, z$

Propriétés d'éléments définis par le mot-clé SHELL SECTION (section et propriétés physiques).

Type d'analyse	Degré(s) de liberté nodaux	Type	Réf.	Schéma
MECANIQUE	$(u, v, w) : 1, 2, 3$ $(\alpha, \beta, \gamma) : 4, 5, 6$	3 noeuds, linéaire	S3R	
		4 noeuds, linéaire	S4R	
		8 noeuds, quadratique	S8R	



# ANNEXE B

## B-1 Les matrices $[A]$ ; $[k_\theta]$ d'un élément Flexionnel ACM :

On retrouve ici la représentation graphique des 03 d.d.l de l'élément flexionnel ACM (théorie de kirchooff) ainsi que les matrices  $[A]$  ;  $[k_\theta]$  et  $[C]$ .

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \end{bmatrix} \quad (C-1)$$

$$[K_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & H_{44} & 0 & H_{46} & H_{47} & H_{48} & H_{49} & H_{410} & H_{411} & H_{412} & \\ & & & H_{55} & 0 & 0 & H_{58} & H_{59} & 0 & H_{511} & H_{512} & \\ & & & & H_{66} & H_{67} & H_{68} & H_{69} & H_{610} & H_{611} & H_{612} & \\ & & & & & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} & H_{711} & H_{712} & \\ & & & & & & H_{88} & H_{89} & H_{810} & H_{811} & H_{812} & \\ & & & & & & & H_{99} & H_{910} & H_{911} & H_{912} & \\ & & & & & & & & H_{1010} & H_{1011} & H_{1012} & \\ & & & & & & & & & H_{1111} & H_{1112} & \\ & & & & & & & & & & H_{1212} & \end{bmatrix}$$

SYM

$$H_{44} = 4 \times d(1,1) \times a \times b$$

$$H_{46} = 4 \times d(1,2) \times a \times b$$

$$H_{47} = 6 \times d(1,1) \times a^2 \times b$$

$$H_{48} = 2 \times d(1,1) \times a \times b^2$$

$$H_{49} = 2 \times d(1,2) \times a^2 \times b$$

$$H_{410} = 6 \times d(1,2) \times a \times b^2$$

$$H_{411} = 3 \times d(1,1) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{412} = 3 \times d(1,2) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{55} = 4 \times d(3,3) \times a \times b$$

$$H_{58} = 4 \times d(3,3) \times a^2 \times b$$

$$H_{59} = 4 \times d(3,3) \times a \times b^2$$

$$H_{511} = 4 \times d(3,3) \times a^3 \times b$$

$$H_{512} = 4 \times d(3,3) \times a \times b^3$$

$$H_{66} = 4 \times d(2,2) \times a \times b$$

$$H_{6,7} = 6 \times d(2,1) \times a^2 \times b$$

$$H_{6,8} = 2 \times d(2,1) \times a \times b^2$$

$$H_{6,9} = 2 \times d(2,2) \times a^2 \times b$$

$$H_{6,10} = 6 \times d(2,2) \times a \times b^2$$

$$H_{6,11} = 3 \times d(2,1) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{6,12} = 3 \times d(2,2) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{7,7} = 12 \times d(1,1) \times a^3 \times b$$

$$H_{7,8} = 3 \times d(1,1) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{7,9} = 4 \times d(1,2) \times a^3 \times b$$

$$H_{7,10} = 9 \times d(1,2) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{7,11} = 6 \times d(1,1) \times a^3 \times b^2$$

$$H_{7,12} = 6 \times d(1,2) \times a^3 \times b^2$$

$$H_{8,8} = (4/3) \times d(1,1) \times a \times b^3 + (16/3) \times d(3,3) \times a^3 \times b$$

$$H_{8,9} = (d(1,2) + 4 \times d(3,3)) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{8,10} = 4 \times d(1,2) \times a \times b^3$$

$$H_{8,11} = 2 \times d(1,1) \times a^2 \times b^3 + 6 \times d(3,3) \times a^4 \times b$$

$$H_{8,12} = 2 \times (d(1,2) + 2 \times d(3,3)) \times a^2 \times b^3$$

$$H_{9,9} = (4/3) \times d(2,2) \times a^3 \times b + (16/3) \times d(3,3) \times a \times b^3$$

$$H_{9,10} = 3 \times d(2,2) \times a^2 \times b^2$$

$$H_{9,11} = 2 \times (d(2,1) + 2 \times d(3,3)) \times a^3 \times b^2$$

$$H_{9,12} = 2 \times d(2,2) \times a^3 \times b^2 + 6 \times d(3,3) \times a \times b^4$$

$$H_{10,10} = 12 \times d(2,2) \times a \times b^3$$

$$H_{10,11} = 6 \times d(2,1) \times a^2 \times b^3$$

$$H_{10,12} = 6 \times d(2,2) \times a^2 \times b^3$$

$$H_{11,11} = 4 \times d(1,1) \times a^3 \times b^3 + (36/5) \times d(3,3) \times a^5 \times b,$$

$$H_{11,12} = 4 \times (d(1,2) + d(3,3)) \times a^3 \times b^3$$

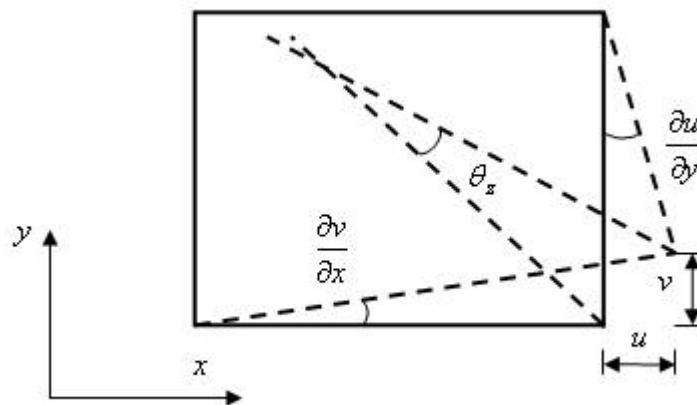
$$H_{12,12} = 4 \times d(2,2) \times a^3 \times b^3 + (36/5) \times d(3,3) \times a \times b^5$$

$$\text{Avec } d = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

# ANNEXE C

## C-1 Degré de Liberté de Rotation :

Le degré de liberté de rotation ( $\theta_z$ ), peut être physiquement interprété comme l'angle formé par les bissectrices des cotés adjacents des formes déformée et non déformée de l'élément fini. L'angle et les dérivées partielles associées aux déplacements de l'élément sont montrés sur la figure (C-1).



**Figure (C-1) :** *Interprétation physique du degré de liberté de rotation (drilling degré of freedom)*

Le degré de liberté de rotation est défini par :

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{D-1})$$

# ANNEXE D

## D-1 Les matrices $[A]$ , $[C]$ et $\{K_0\}$ pour les deux éléments (SBRIE, SBRIEIR) :

Les éléments membranaires à champ déformation (SBRIE, SBRIEIR)

Dans cette annexe les matrices  $[A]$ ,  $[C]$  et  $[K_0]$  d'élément SBRIE.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -(1/2) \times b^2 & (1/2) \times b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & -(1/2) \times a^2 & 0 & 0 & (1/2) \times a \\ 1 & 0 & -b & a & a \times b & 0 & -(1/2) \times b^2 & (1/2) \times b \\ 0 & 1 & a & 0 & -(1/2) \times a^2 & b & a \times b & (1/2) \times a \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(1,1) \times a \times b & 0 & d(1,2) \times a \times b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/12) \times d(1,1) \times a \times b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(2,1) \times a \times b & 0 & d(2,2) \times a \times b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 \times d(2,2) \times a^3 \times b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d(3,3) \times a \times b \end{bmatrix}$$

Dans cette annexe les matrices  $[A]$ ,  $[C]$  et  $[K_0]$  d'élément **SBRIEIR**.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2) \times b & 0 & (1/2) \times b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (1/2) \times b & 0 & 0 & -(1/2) \times b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2) \times a & (1/2) \times a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(1/2) \times a & 0 & 0 & 0 & (1/2) \times a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & a & a \times b & 0 & 0 & (1/2) \times b & 0 & (1/2) \times b^2 & a \times b^2 & a^2 \times b^3 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & b & a \times b & (1/2) \times a & (1/2) \times a^2 & 0 & -a^2 \times b & -a^3 \times b^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(1/2) \times a & 0 & 1/2 \times b & 0 & (1/2) \times a & -(1/2) \times b & -2 \times a \times b & -3 \times a^2 \times b^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_{44} & 0 & H_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{411} & 0 \\ & & & & H_{55} & 0 & 0 & 0 & H_{59} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & H_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{611} & 0 \\ & & & & & & H_{77} & 0 & 0 & H_{710} & 0 & 0 \\ & & & & & & & H_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & H_{99} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & H_{1010} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & H_{1111} & 0 \\ & & & & & & & & & & & H_{1212} \end{bmatrix}$$

SYM

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2 \times x \times y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & -x^2 & -2 \times y \times x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & y & 1 & x & y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{44} = d(1,1) \times a \times b,$$

$$H_{46} = d(1,2) \times a \times b$$

$$H_{411} = (1/12) \times a \times b \times (d(1,1) \times b^2 - d(1,2) \times a^2), \quad H_{55} = (1/12) \times a \times b \times (d(1,1) \times b^2 + d(3,3) \times a^2)$$

$$H_{59} = (1/12) \times d(3,3) \times a^3 \times b,$$

$$H_{66} = d(2,2) \times a \times b$$

$$H_{611} = (1/12) \times a \times b \times (d(2,1) \times b^2 - d(2,2) \times a^2), \quad H_{77} = (1/12) \times a \times b \times (d(2,2) \times a^2 + d(3,3) \times b^2)$$

$$H_{710} = (1/12) \times d(3,3) \times a \times b^3$$

$$H_{88} = d(3,3) \times a \times b$$

$$H_{99} = (1/12) \times d(3,3) \times a^3 \times b$$

$$H_{1010} = (1/12) \times d(3,3) \times a \times b^3$$

$$H_{1111} = (1/720) \times a \times b \times (9 \times d(2,2) \times a^4 - 5 \times a^2 \times d(2,1) \times b^2 - 5 \times a^2 \times d(1,2) \times b^2 + 9 \times d(1,1) \times b^4)$$

$$H_{1212} = (1/33600) \times a^3 \times b^3 \times (25 \times d(2,2) \times a^4 - 21 \times a^2 \times d(2,1) \times b^2 - 21 \times a^2 \times d(1,2) \times b^2 + 25 \times d(1,1) \times b^4)$$

## ANNEXE E

## E-1 Matrice de rigidité de l'élément de coque

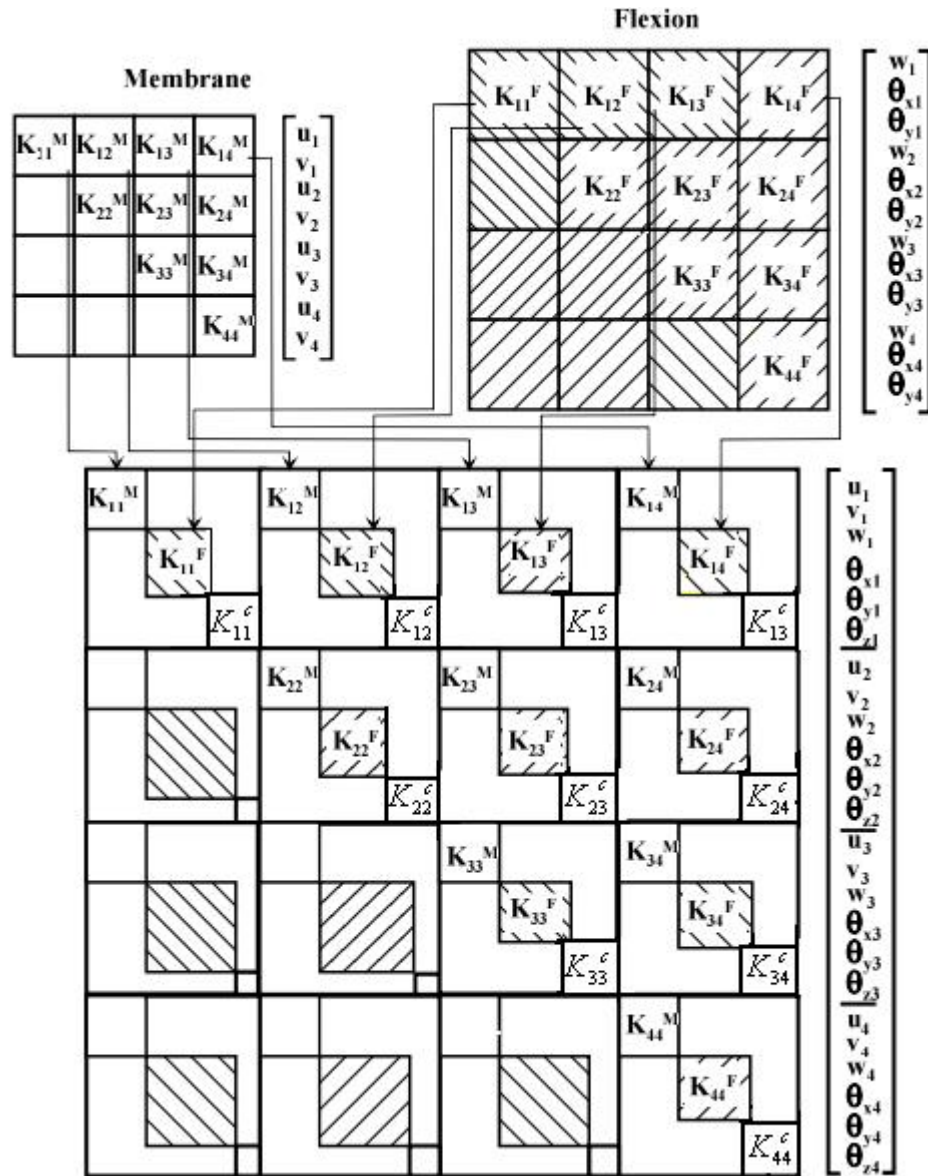


Figure (E.1) : matrice de rigidité (membrane + flexion en axes locaux).

Avec :  $\alpha = 10^{-6}$  [COOK 91] , [MACN 88]

$$[K_{ij}^C] = \alpha \cdot E \cdot h \cdot A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

# ANNEXE F

## F-1 Transformations géométriques : [ZIE 00]

On retrouve ici l'expression des matrices et vecteurs élémentaires (de l'élément plan de coque) dans le système de coordonnées globales, avant d'assembler les éléments et d'écrire les équation d'équilibre appropriés, il est nécessaire de procéder a des transformations du système de coordonnées locales  $(x', y', z')$  a celui des coordonnées globales  $(x, y, z)$ . Les deux systèmes sont représentés sur la figure .F.1

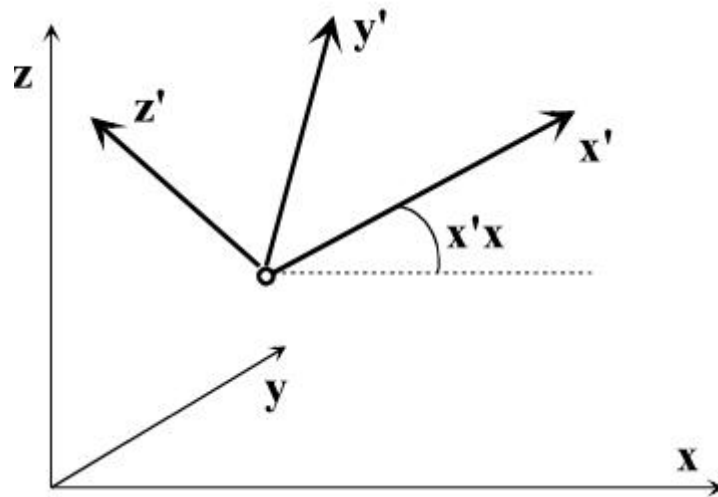


Figure F.1 : Coordonnées locales et globales.

Les déplacements et forces au niveau de chaque nœud peuvent être transformés du repère globale a un repère local par la matrice  $[L]$  définie comme suit :

$$U_i' = [L]U_i \quad (F.1)$$

$$F_i' = [L]F_i \quad (F.2)$$

Avec 
$$[L] = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix}$$

Et la matrice des cosinus directeurs:

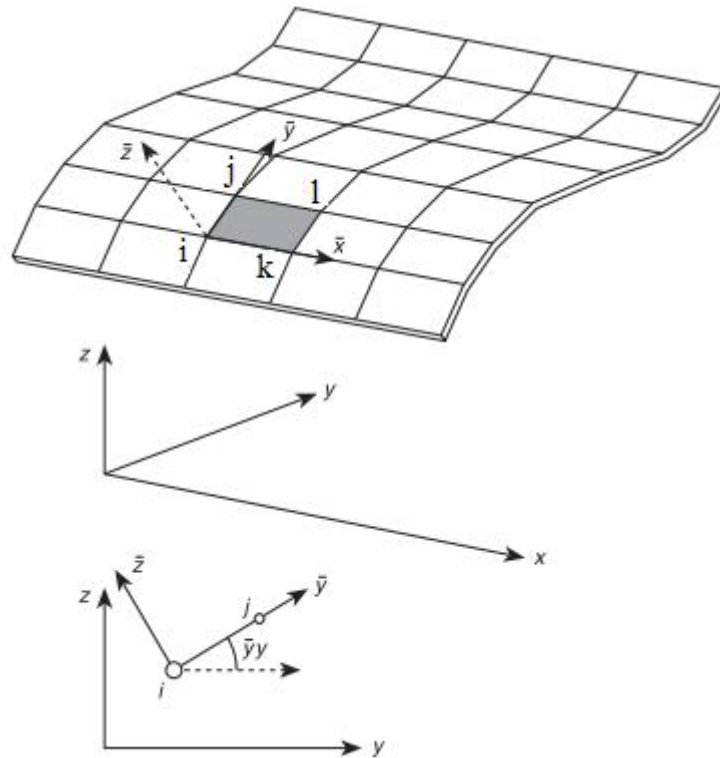
$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad (F.3)$$

Pour un élément, on définit la matrice de passage  $[T]$  comme :

$$[T]_{24 \times 24} = \begin{bmatrix} [L] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [L] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [L] \end{bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

Pour transformation de la matrice de rigidité élémentaire on a :

$$[K_e] = [T]^T [K'_e] [T] \quad (\text{F.5})$$



**Figure (F.2) :** une coque cylindrique comme ensemble des éléments rectangulaires :  
Coordonnées locales et globales.

Lorsque le repère local se présente par rapport au repère global comme le montre la figure (F.2), les cosinus directeurs auront pour valeurs.

$\lambda_{x'x} = 1$	$\lambda_{x'y} = 0$	$\lambda_{x'z} = 0$
$\lambda_{y'x} = 0$	$\lambda_{y'y} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$	$\lambda_{y'z} = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$
$\lambda_{z'x} = 0$	$\lambda_{z'y} = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$	$\lambda_{z'z} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(z_j - z_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$