

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider -
Biskra
Faculté des Sciences et de la
Technologie
Département de Génie Mécanique
Réf :



جامعة محمد خيضر
بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة الميكانيكية
المرجع:

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du diplôme de
Magistère

Spécialité : **Génie Mécanique**
Option : **Construction Mécanique**

Intitulé:

**FLAMBAGE THERMIQUE DES PLAQUES
STRATIFIEES RECTANGULAIRES MINCES
SYMETRIQUES EN MATERIAUX COMPOSITES**

Présenté Par : **Noureddine GUEDJIBA**

Soutenu publiquement le :

Devant le jury :

Dr. N. MOUMMI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Président
Dr. M. HADID	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Examinateur
Dr. A. TATI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Examinateur
Dr. M. HECINI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Rapporteur

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents,

mes frères, surtout m'a sœur,

ma femme et mes filles :

(Louiza, Selsebile, Soundesse)

et à tous mes amis

NOTATION

\int : Intégrale

$\frac{\partial}{\partial x}$: Dérivée partielle par rapport à x

$\{ \}$: Vecteur

$[]$: Matrice

$[]^t$: Matrice transposé

$[]^{-1}$: Matrice inverse

v_c : Volume de matériau composite

v_f : Volume de fibre

V_m : Fraction volumique de matrice

V_f : Fraction volumique de fibre

m_c : Masse de matériaux composite d'une couche

m_m : Masse de matrice

m_f : Masse de fibre

M_f : Fraction massique de fibre

M_m : Fraction massique de matrice

ρ : Masse volumique

$\varepsilon_f, \varepsilon_m, \varepsilon_c$: Déformation de (fibre, matrice, composite)

F_f, F_m, F_c : La charge suivant (fibre, matrice, composite)

$\sigma_f, \sigma_m, \sigma_c$: Contrainte suivant (fibre, matrice, composite)

E_f, E_m, E_c : Module d'Young (fibre, matrice, composite)

h_m, h_f : La hauteur (matrice, fibre)

ΔL : L'allongement

E_L, E_t : Module d'Young longitudinal, Module d'Young transverse

ν_{Lt} : Coefficient de Poisson longitudinal

G_{Lt} : Module de cisaillement longitudinal

G_f : Module de cisaillement de fibre

G_m : Module de cisaillement de matrice

K_f : Module de cisaillement de compressibilité

Ψ : Potentiel thermodynamique

a_{ijkl} : Les constants élastiques

a : Tenseur de 4^o ordre

C_{ij} : Les constants de rigidité

S_{ij} : Les constants de souplesse

(1, 2,3): Les axes dans repère principaux

(1', 2',3') ou (x, y, z): Les axes en-dehors de ses axes principaux

T_σ : Matrice de changement de base des contraintes

T_ε : Matrice de changement de base des déformations

$[Q]$: Matrice de rigidité réduite

$[S]$: Matrice de souplesse réduite

Q_{ij}, S_{ij} : Les constants de rigidité réduite et de souplesse réduite

h, t : Epaisseur

$N(x, y)$ et N_x, N_y, N_{xy} : Résultant en membrane

$M(x, y)$ et M_x, M_y, M_{xy} : Moment de flexion et de torsion

$Q(x, y)$: Résultant en cisaillement

$[A_{ij}]$: Matrice constitutive d'un stratifié en membrane

$[B_{ij}]$: Matrice constitutive d'un stratifié (couplage en membrane et flexion, torsion)

$[D_{ij}]$: Matrice constitutive d'un stratifié (flexion, torsion)

U : Energie de déformation

E_c : Energie cinétique

Z : Travail des actions

W : Potentiel de déformation

W_c : Potentiel complémentaire

V : Energie Potentiel total

α_i : Coefficient de dilatation

ΔT : Variation de température

ΔT_{Cr} : Température critique pour flambage thermique

N_{Cr} : La charge critique pour flambage mécanique

$[B_m]$: Matrice relier les déformations avec les déplacements (en membrane)

$[B_f]$: Matrice relier les déformations avec les déplacements (en flexion)

$[K^e]$: Matrice de rigidité élémentaire

$[K_g]$: Matrice géométrique élémentaire

$[G]$: Matrice relier les déformations avec les déplacements

ϵ_{nL}^0 : Déformation non linéaire

$N_{ij}^*, M_{ij}^*, \epsilon_{ij}^*$: (Résultants, moments, déformations) due aux phénomènes de dilatation

(Température)

$W(x, y)$: Polynôme d'Hermite

$[P^e]$: Vecteurs de force due à températures

SOMMAIRE

INTRODUCTION1
CHAPITR I : GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES STRATIFIE	
I-1) - DEFINITION D'UN MATERIAU COMPOSITE.4
I-2) - CONSTITUTIONS D'UN MATERIAU COMPOSITE4
2-1)- Le renforts4
2-2)- Les matrices5
a)- Matrices résineuses (organiques)6
b)- Matrices minérale6
c)- Matrices métalliques6
I-3)- ARCHITECTURE DES MATERIAUX COMPOSITES7
a)- Stratifié7
a-1) - Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels7
a-2)- Structure générale d'un stratifié8
b)- Composites sandwiches8
c)- Autres architectures9
I-4)-LES CARACTERISTIQUES DU MELANGE9
4-1) - Renfort – Matrice dans un pli9
1-a)- Fraction volumique9
1-b)- Fractions massiques10
1-c)- Relation entre fraction volumique et massique10
1-d)- Module d'Young longitudinale11
1-e)- Module d'Young transversal11
1-f)- Coefficient de Poisson longitudinal12
1-h)- Module de cisaillement longitudinal12
I-5)-COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAUX COMPOSITE13
5-1)-Elasticité13
5-2)-Potentiel thermodynamique13
5-3)-Elasticité linéaire anisotrope14
5-4)-Elasticité linéaire orthotrope15
5-5)-Elasticité linéaire à isotropie transverse16
5-6)-Elasticité linéaire isotrope17
I-6)- COPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE ORTHOTROPE18
6-1)-Composite orthotrope (pli)18
1-a)-Matrice de rigidité et de souplesse18
I-7)-COPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE ISOTROP TRANSVERSE20
7-1)-La matrice de rigidité et la matrice de souplesse:(1, 2,3) est (L, T, T')20
7-2)-Comportement matériaux composite en-dehors de ses axes principaux21
7-3)-Etat de contrainte planes24

I-8)-GENERALITES SUR LA THEORIE DES STRATIFIES27
8-1)- Introduction27
I-9)- RESULTANTES ET MOMENTS31
9-1)- Résultantes en membrane31
9-2)- Résultantes en cisaillement31
9-3)- Moment de flexion et de torsion32
I-10)-RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES (cas d'un schéma du 1 ^{er} degré) ...	33
I-11)- THEORIE CLASSIQUE DES STRATIFIES35
11-1)- Champ des déformations35
11-2)- Champ des contraintes37
11-3)-Expression des résultantes et moments38
11-4)-Equation du comportement mécanique d'un stratifié39
11-5)-Relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés : (statique)40
11-6)-Formulation énergétique de la théorie des stratifiés41
I-12)-CONCLUSION43

CHAPITRE II : FLAMBAGE MECANIQUE ET THERMIQUE DES PLAQUES

II)- FLAMBAGE44
II-1)- INTRODUCTION44
II-2)- THEOREMES DE L'ENERGIE47
II-3)- CONTRAINTES ET DEFORMATIONS INITIALES-THERMOELASTICITE49
II-4)- FLAMBAGE MECANIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES50
4-1)- Flambage mécanique : (approche énergétique)50
II-5)-FLAMBAGE THERMIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES51
5-1)-Influence des phénomènes de dilatation sur le comportement mécanique des stratifiés51
1-1)-Introduction51
1-2)-Relations d'élasticité dans les axes principaux51
1-3)-Relation d'élasticité en dehors des axes principaux53
5-2)- Equation du comportement d'un stratifié55
2-1)- Equation constitutive55
2-2)- Relations fondamentales55
2-3)- Energie de déformation56

CHAPITRE III : FORMULATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET PROGRAMATION

III-1)- FORMULATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	... 58
1-1)-Introduction58
1-2)-Elément utilisé58
1-3)- Fonction des déplacements des éléments59

III-2)- Flambage mécanique par la méthode des éléments finis63
III-3)- Flambage thermique par la méthode des éléments finis65
3-1)-Calcul des matrice de rigidité $[k]^e$ et matrice géométrique $[k]_g$ 65
III-4)- PROGRAMATION69
4-1)- Introduction69
4-2)- Organisation du programme69
III-5)- ORGANIGRAMME72

CHAPITR IV : VALIDATION DE L'ELEMENT FINI DANS FLAMBAGE MECANIQUE ET THERMIQUE

IV-1)- validation de l'élément finis dans l'analyse statique des plaques76
1-1)- barre isotrope : (en membrane)76
1-2)- Plaque carré soumise à une charge concentrée au centre78
IV-2)- validation de l'élément finis dans l'analyse du flambage mécanique des plaques81
2-1)- Plaque isotrope81
2-2)- Plaque orthotrope85
IV-3)- validation de l'élément finis dans l'analyse du flambage thermique des plaques87
3-1)- Plaque isotrope87
3-2)- Plaque orthotrope unidirectionnel suivant (x)91
IV-4) – Conclusion94

CHAPITR V : ETUDE PARAMETRIQUE

V -1)- Introduction95
V -2)- Effet de l'orientation des fibres pour différents conditions aux limites95
V -3)- Effet du rapport géométrique (a/b)99
V -4)- Effet du rapport d'anisotropie (E_1/E_2)106
V -5)- Effet du rapport coefficient de dilatation ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$)113
V -6)- Effet de nombre des couches117
V -7)- Conclusion121
CONCLUSION GENERALE122

INTRODUCTION :

La grande utilisation des plaques en matériaux composites stratifié, dans plusieurs types de structures aérospatiale, aéronautique, marins et d'autre est due aux avantages suivants :

- Le rapport rigidité – poids.
- Le rapport résistance– poids.

Le besoin ces matériaux composites donne l'importance à la conception des plaques stratifié et impose nécessairement des études sur le comportement du flambage mécanique et thermique des ces plaques pour déterminé la charge critique et température critique nécessaire, alors le comportement de ce type de structure vis-à-vis de la stabilité, doit être bien connu.

Objectif :

L'objectif de ce travail est la contribution dans l'étude du flambage thermique des plaques minces symétriques rectangulaire en matériau composite stratifié avec la méthode des éléments finis et donner un aperçu sur l'importance et la précision des résultats obtenus grâce à l'utilisation de la (M.E.F).

Etude bibliographique :

Les travaux sur le comportement du flambage des plaques en matériaux composites stratifié ont débuté depuis les années soixante.

En 1966 ' S.P.TIMOSHENKO, J.N.GOODIER '[10], a publié un livre ' Théorie des l'élasticité –résistance des matériaux', qui parle du flambage mécanique des matériaux composites avec différente condition aux limites, son travail est basé sur des équations analytiques.

En 1988 ' LIEN-WEN CHEN AND LEI-YI CHEN '[9], a publié une étude qui traite le flambage thermique pour des plaques cylindriques en matériaux composites antisymétriques par la méthode des éléments finis.

Leur formulation est basée sur le principe d'énergies potentielles minimum.

En 2004 ' ROBERT M. JONES'[11], a présenté une étude sur le flambage thermique pour des plaques rectangulaires en matériaux composites symétriques à des fibres unidirectionnelles avec condition aux limites de type appuis simple.

Il a trouvé les équations analytiques du flambage thermique à partir des équations du flambage mécanique puis, il a fait la comparaison entre les plaques qui à des fibres unidirectionnels suivant (x, y) pour voir la différence de température critique entre les deux types.

En 1999 'J-M.BERTHELOT'[1], à publie une livre' Matériaux composite comportement mécanique et analyse, qui parle sur des matériaux composite, et leur comportement en générale avec formulation.

En 2009' LE-CHUNG SHIAU, SHIH-YAO KUO, CHENG-YUAN CHEN'[12], a publie une étude qui parle du comportement du flambage thermique des matériaux composites par la méthode des éléments finis pour des stratifiés symétriques, il a examiné l'influence des conditions aux limites, l'ongle d'orientation des fibres et le rapport géométrique.

Organisation des chapitres :

- Le premier chapitre est consacré à une généralité, il présent les matériaux composites stratifiés en terme très généraux et leur comportement mécanique.
- Le deuxième chapitre traite les formules du flambage mécanique et thermique.
- Le troisième chapitre est consacré au traité du flambage mécanique et thermique par la méthode des éléments et finis, puis une programmation.
- Le quatrième chapitre pour la validation de l'élément finis de comportement du mécanique et thermique des plaques.
- Le cinquième chapitre est concerne à une étude paramétrique pour maitre en évidence les effets de certain paramètres sur la variation de température critique sur la plaque à savoir :
 - Condition aux limites et l'angle d'orientation des fibres.
 - Rapport géométrique (a/b) .
 - Rapport anisotropie (E_1/E_2) .
 - Nombre des couches.
 - Rapport des coefficients de dilatation (α_2/α_1) .

CHAPITRE I

GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES STRATIFIE

INRRODUCTION1
I-1) - DEFINITION D'UN MATERIAU COMPOSITE.4
I-2) - CONSTITUTION D'UN MATERIAU COMPOSITE4
2-1)- Le renforts4
2-2)- Les matrices5
a)- Matrice résineuses (organiques)6
b)- Matrice minérale6
c)- Matrice métalliques6
I-3)- ARCHITECTURE DES MATERIAUX COMPOSITE7
a)- Stratifié7
a-1) - Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels7
b)- Structure générale d'un stratifié8
c)- Composites sandwiches8
d)- Autre architecture9
I-4)-LES CARACTERISTIQUE DU MELANGE9
4-1) - Renfort – Matrice dans un pli9
1-a)- Fraction volumique9
1-b)- Fractions massiques10
1-c)- Relation entre fraction volumique et massique10
1-d)- Module d'Young longitudinale11
1-e)- Module d'Young transversal11
1-f)- Coefficient de poisson longitudinal12
1-h)- Module de cisaillement longitudinal12
I-5)-COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAUX COMPOSITE13
5-1)-Elasticité13
5-2)-Potentiel thermodynamique13
5-3)-Elasticité linéaire anisotrope14
5-4)- Elasticité linéaire orthotrope15
5-5)-Elasticité linéaire à isotropie transverse16
5-6)- Elasticité linéaire isotrope17
I-6)- COPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE ORTHOTROPE18
6-1)-Composite orthotrope (pli) : Dans les directions principales18
1-a)-Matrice de rigidité et de souplesse18

I-7)-COPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE ISOTROP TRANSVERSE	.20
7-1)-La matrice de rigidité et la matrice de souplesse:(1, 2,3) est (L, T, T')20
7-2)-Matériaux composite en-dehors de ses axes principaux21
7-3)-Etat de contrainte planes24
I-8)-GENERALITES SUR LA THEORIE DES STRATIFIES27
8-1)- Introduction27
I-9)- RESULTANTES ET MOMENTS31
9-1)- Résultantes en membrane31
9-2)- Résultantes en cisaillement31
9-3)- Moment de flexion et de torsion32
I-10)-RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES (cas d'un schéma du 1 ^{er} degré) ...	33
I-11)- THEORIE CLASSIQUE DES STRATIFIES35
11-1)- Champ des déformations35
11-2)- Champ des contraintes37
11-3)-Expression des résultantes et moments38
11-4)-Equation du comportement mécanique d'un stratifié39
11-5)-Relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés : (statique)40
11-6)-Formulation énergétique de la théorie des stratifiés41
I-12)-CONCLUSION43

CHAPITRE I : GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES STRATIFIE

I-1) -DEFINITION D'UN MATERIAU COMPOSITE:

Un matériau composite est un matériau hétérogène et anisotrope.

Il comprend la forme des arrangements de fibre – continue ou non – d'un matériau résistante (le renfort), qui est noyée dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible.

La matrice conserve leur disposition et leur transmet les sollicitations aux quelle est soumise la pièce.

On définit le stratifié comme étant le résultat de la superposition de plusieurs couche (ou plis) unidirectionnels (ou autre), avec des orientations propres à chaque plis.

I-2) -CONSTITUTIONS D'UN MATERIAU COMPOSITE :

2-1)- Les renforts:

Les renforts sont généralement constitués des fibres et en raison de la faible résistance mécanique de la matrice, les éléments de renforts (fibre) possédant des caractéristiques mécanique très élevées peut contribuer à l'amélioration des caractéristiques du produit fini, ces fibres peuvent être :

- Unidimensionnel : Fibre unidirectionnel, c'est à dire orienté suivant une même direction.
- Bidimensionnel : Surface tissée (tissus).
- Tridimensionnel : Volumes renforcés par des fibres orientées suivants plusieurs direction.

Les fibres telles que kevlar, verre et le carbone sont largement utilisés dans plusieurs application industrielle, comprenant notamment l'aéronautique, l'automobile, la marine.

Cet avantage provient de leurs propriétés générales :

- Résistance élevée à la traction.
- Faible densité.
- Résistance à la compression (verre, carbone).
- Excellente stabilité dimensionnelle.
- Bonne résistance thermique.

Les caractéristiques mécaniques de quelques fibres utilisés dans sont indiquées dans le tableau (I-1)

Tableau (I-1) : Caractéristique mécanique de quelque matériau utilisé comme élément de renfort [13]

Matériaux	Diamètre de Fibre [μm]	Masse Volumique (Kg / m^3)	Module D'élasticité de Young (Mpa)	Résistance a la rupture
Acier	De l'ordre du Millimètre (Fil)	7800	210.000	1800-2900
Bore	100	2650	420.000	3000
Carbure de silicium	100	3300	490.000	2500
Graphite HR	8	1750	250.000	2800
Graphite HM	8	1920	350.000	2000
Kevlar haut résistance	12	1450	84.000	3000
Kevlar haut Module	12	1450	130.000	2700
Silice	Variable	2200	60000 à 120000	3500
Verre E	5 à 20	2540	79000	3400
Verre R	5 à 20	2500	87000	5500
Verre S	5 à 20	2500	87000	5500

2-2)-Les matrices :

La matrice qui présente les caractéristiques mécaniques les plus faibles dans les matériaux composites a deux rôles importants qui sont de conserver les dispositions des fibres dans des directions bien précises et de leur transmettre les sollicitations aux quelles et soumise la pièce.

Elle doit être compatible avec les conditions d'environnement (mécanique, chimique, thermique, ...), la renforce se présente sous plusieurs formes :

a) Matrice résineuses (organiques) :

- Famille des résines thermoplastique.
- Famille des résines thermodurcissable (polyesters, phénolique, ...).

b) Matrice minérale :

Carbure de silicium, carbone, elles permettent d'atteindre de hautes températures.

c) Matrice métalliques :

Alliages d'aluminium, Nickel, Le titane, magnésium,

Les caractéristiques mécaniques de quelques matériaux utilisés dans les matrices sont indiquées Dans le tableau (I-2).

Tableau (I-2) : Caractéristique mécanique de quelques matériaux (matrice) [13]

Matériaux de constitution De la matrice	Module de Young (Mpa)	Résistance à la traction (Mpa)
Aluminium	74000	300
Elastomères	20	-
Epoxyde	35000	80
Phénolique	5000	-
Polyester	2500	60
Polymide	4000	-

I-3)-ARCHITECTURE DES MATERIAUX COMPOSITE :

a)-Stratifiés :

Les stratifiés sont constitués de couches successives (figure I-1) (appelées par fois **plis**) formées de renfort (Fils, stratifiés, mats, tissus,), imprégnés de résines.

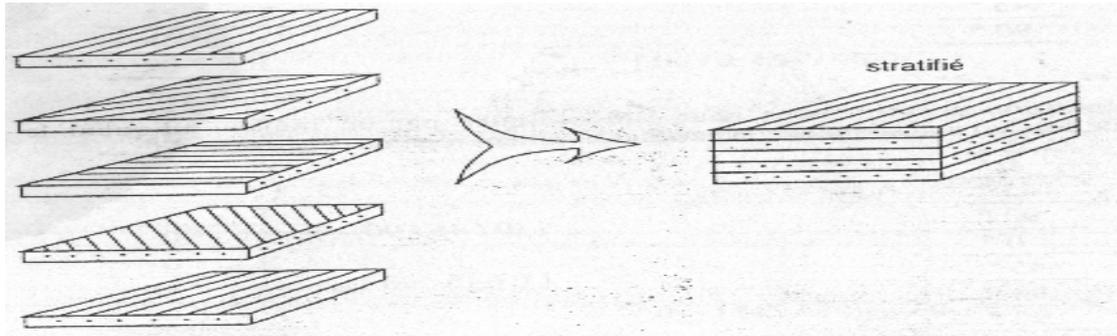


Figure (I-1): Les stratifiés

a-1) - Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels :

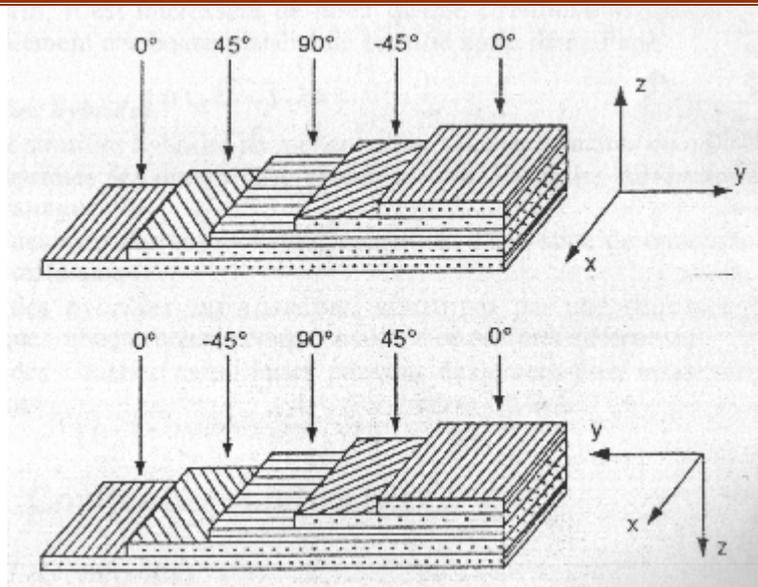
Ces types de stratifiée sont constitués (figure I-2) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.

La couche de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant.

1. Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence.
2. Les couches successives sont séparées par un /.
3. Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
4. Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre des crochets ou parenthèse indiquent le début et la fin du code.

La désignation dépend du système d'axe choisi.

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signe opposés, les signes + ou – sont utilisées et dépend du système d'axe choisis.



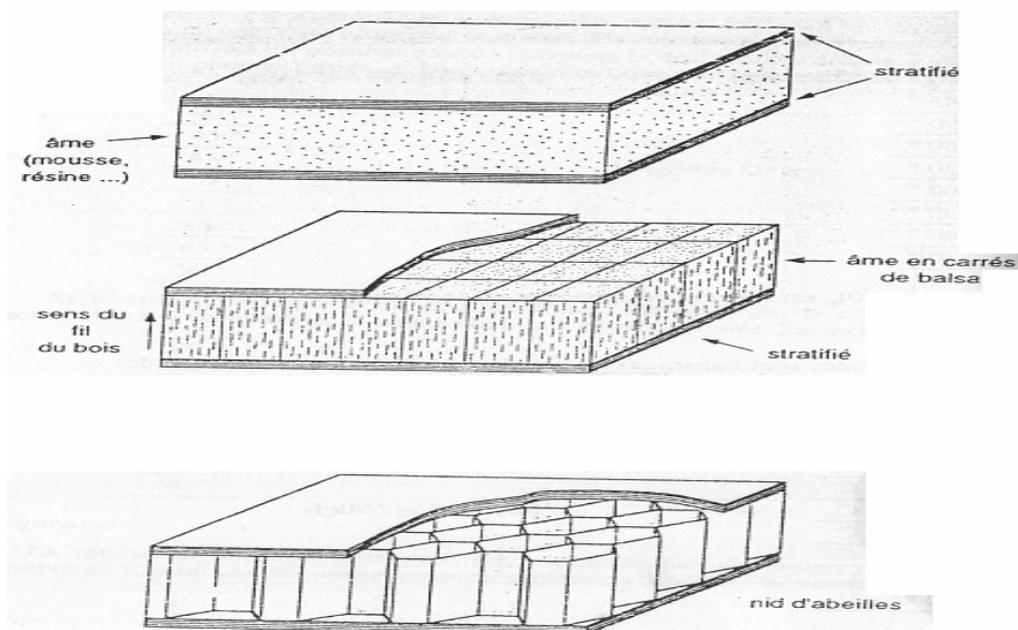
(Figure I-2) : stratifié à couches des fils unidirectionnels $[1]$, ($[0,45,90,-45,0]$, $[0,-45,90,45,0]$)

a-2)- Structure générale d'un stratifié :

Dans le cas générales, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifiés, mats, tissus, fibres de verre,). Chaque couche doit alors être désignées par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mats, tissus,).

b)- Composites sandwichs :

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme constituée d'un matériau ou du structure légère de bonne propriété en compression (Figure I-3).



(Figure I-3): Composites sandwichs $[1]$

c)-Autre architecture :

Les autres architectures des matériaux composites peuvent être schématiquement classées en :

- plastique renforcée.
- composite volumique.

I-4)-LES CARACTERISTIQUES DU MELANGE:

4-1) - Renfort – Matrice dans un pli :

Il est fondamental de connaître les caractéristiques géométriques et mécaniques du pli (mélange) qui est la structure de base des pièces composites Figure (I-4).

Le renfort et la matrice participent principalement dans la constitution du pli composite, avec une concentration bien déterminée de chacun d'eux.

Cette propriété de concentration dépend des résultats.

On distingue alors les paramètres suivants.

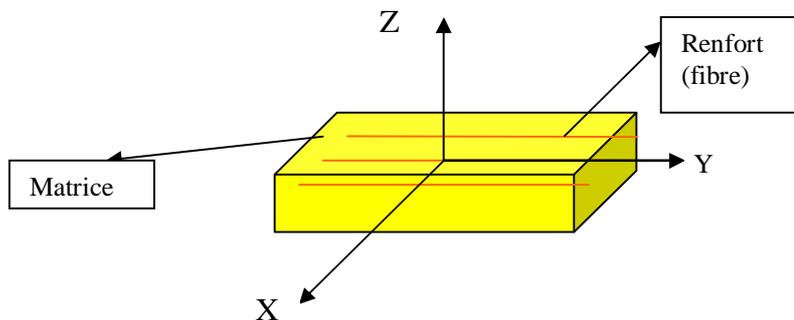


Figure (I-4): Renfort – Matrice dans un pli

1-a)-Fraction volumique (teneur en volume de renfort, matrice)

Considérons un volume v_c de matériaux composite, composé d'un volume v_f de fibre et d'un volume v_m de matrice.

La fraction volumique de fibre est : $V_f = \frac{v_f}{v_c}$

La fraction volumique de matrice est : $V_m = \frac{v_m}{v_c}$

Donc : $V_m = 1 - V_f$

Puisque : $v_c = v_f + v_m$

1-b)-Fractions massiques :

Les fractions sont définies de la même manière à partir des masses m_c, m_f, m_m respectives de matériaux composites de fibre et de matrice.

Les fractions massiques ou fraction de masse s'écrivent :

La fraction massique de fibre est :

$$M_f = \frac{m_f}{m_c}$$

La fraction massique de matrice est :

$$M_m = \frac{m_m}{m_c}$$

$$\text{Donc} \quad M_m = 1 - M_f$$

1-c)-Relation entre fraction volumique et massique :

Les masses totales du matériau composite sont :

$$m_c = m_f + m_m$$

$$m_c = \rho_c v_c \quad , \quad m_f = \rho_f v_f \quad , \quad m_m = \rho_m v_m$$

$$\rho_c v_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m$$

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m$$

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f)$$

Volume total du composite : $v_c = v_f + v_m$

$$\text{Nous obtenons :} \quad \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{m_f}{\rho_f} + \frac{m_m}{\rho_m}$$

Relation entre fraction volumique et massique :

$$M_f = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f$$

$$M_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m$$

Les expressions générales s'écrivent pour (n) constituants :

$$V_i = \frac{\rho_c}{\rho_i} M_i \quad , \quad M_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} V_i \quad , \quad \rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i$$

1-d)-Module d'Young longitudinale :

Le module d'Young longitudinale est déterminé dans un essai de traction longitudinale

Figure (I-5).

$$\epsilon_f = \epsilon_m = \epsilon_1 = \epsilon_c$$

Si les fibres et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la matrice et les fibres

sont exprimées par :

$$\sigma_f = E_f \epsilon_f \quad \text{et} \quad \sigma_m = E_m \epsilon_m$$

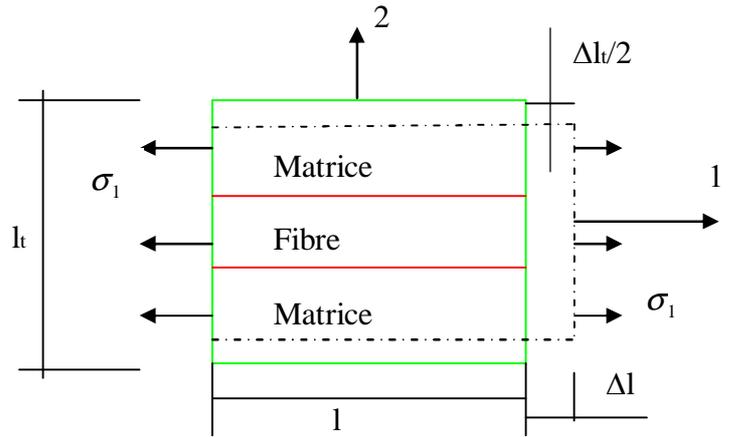


Figure (I-5):Schéma simplifié d'une traction longitudinale

La charge totale appliquée est : $F_1 = F_c = F_m + F_f$

$$F_c = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m \quad \text{Donc} \quad \sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f)$$

$$\sigma_1 = \sigma_c = E_L \epsilon_1 \quad \text{Donc} \quad E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

Cette expression est connue sous le nom de loi des mélanges pour le module d'Young longitudinal (dans la direction des fibres).

1-e)- Module d'Young transversal :

Le Module d'Young transversal est déterminée dans un essai de tractions transversales ou le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres.

Une expression simplifiée de ce module peut être obtenue dans un schéma simpliste à deux dimensions, figure (I-6), La hauteur des couches doit être vérifiée,

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m}$$

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \Rightarrow \epsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad \text{et} \quad \epsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m}$$

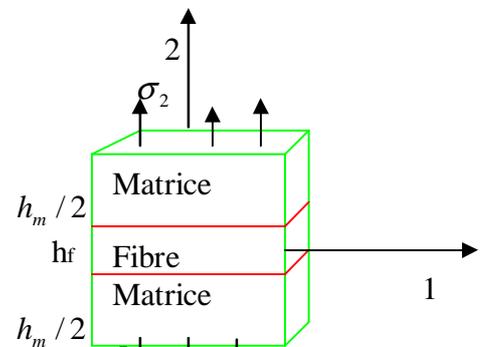


Figure (I-6): Schéma simplifié d'une traction transversal

L'allongement transversal d'une cellule élémentaire est :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f)$$

$$\frac{1}{E_t} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m}$$

1-f)- Coefficient de Poisson longitudinal :

$$\nu_{lt} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)$$

1-h)- Module de cisaillement longitudinal :

$$\frac{1}{G_{lt}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m}$$

Pour calculer ces valeurs numériques, il est nécessaire de déterminer les valeurs des divers modules des fibres et de la matrice, par les expressions suivant.

* pour les fibres :

- module de cisaillement :

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}$$

- module de compressibilité :

$$k_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}$$

- module de compression latérale :

$$K_f = \frac{E_f}{3(1 - 2\nu_f)}$$

*pour la matrice :

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad \text{et} \quad k_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)} \quad \text{et} \quad K_m = k_m + \frac{G_m}{3}$$

I-5)-COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAUX COMPOSITE :

R.Hooke (1676) , T.Young (1807) , L.Cauchy (1822) , Timoshenko (1934), sont parlent sur le comportement élastique linéaire des matériaux.

Dans ce domaine, on se bornera à des rappels sous formes de formulaire en insistant sur l'élasticité anisotrope si importante pour les matériaux composite et sur l'identification des coefficients.

Le terme élasticité est employé ici au sens de réversibilité des déformations.

La thermo élasticité introduit plusieurs coefficients supplémentaires dans les lois de comportement, dont le coefficient de dilatation, et permet de traiter les problèmes liés aux variations de température comme des contraintes d'origine thermique.

5-1)-Elasticité :

Tous les matériaux solides possèdent un domaine de l'espace des contraintes à l'intérieur duquel une variation des sollicitations n'entraîne qu'une variation de déformation élastique.

Il s'agit de mouvement réversible d'atome, de molécule ou de cellule, qui correspondent à des déformations n'excèdent pas 0.2 à 0.005 pour les matériaux métalliques, les composites, les bétons, les bois, ce qui justifie l'hypothèse des petites déformations.

5-2)-Potentiel thermodynamique :

Pour obtenir une théorie, il suffit de choisir comme potentiel thermodynamique convexe, une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2\rho} \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rightarrow \sigma_{kl} = a_{klij} \varepsilon_{ij} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (1-1)$$

Par inversion, ou par définition d'un potentiel dual : $\psi^* = \frac{1}{2\rho} \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma}$$

5-3)-Elasticité linéaire anisotrope :

On dit qu'un matériau est anisotrope si les propriétés mécaniques ne sont pas les mêmes dans des directions différentes, c'est un corps qui n'a aucun plan de symétrie.

Il possède (81) constantes élastique indépendantes.

On peut écrire la relation (1-1) sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1123} & a_{1131} & a_{1112} & a_{1132} & a_{1113} & a_{1121} \\ & a_{2222} & a_{2233} & a_{2223} & a_{2231} & a_{2212} & a_{2232} & a_{2213} & a_{2221} \\ & & a_{3333} & a_{3323} & a_{3331} & a_{3312} & a_{3332} & a_{3313} & a_{3321} \\ & & & a_{2323} & a_{2331} & a_{2312} & a_{2332} & a_{2313} & a_{2321} \\ & & & & a_{3131} & a_{3112} & a_{3132} & a_{3113} & a_{3121} \\ & & & & & a_{1212} & a_{1232} & a_{1213} & a_{1221} \\ & & & & & & a_{3232} & a_{3213} & a_{3221} \\ & & & & & & & a_{1313} & a_{1321} \\ & & & & & & & & a_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (1-2)$$

Pour des raisons de symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, la matrice (1-3) est caractérisée seulement par (21) éléments.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1123} & a_{1131} & a_{1112} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & a_{2223} & a_{2231} & a_{2212} \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & a_{3323} & a_{3331} & a_{3312} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2333} & a_{2323} & a_{2331} & a_{2312} \\ a_{3111} & a_{3122} & a_{3133} & a_{3123} & a_{3131} & a_{3112} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1233} & a_{1223} & a_{1231} & a_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (1-3)$$

Simplification de l'écriture : pour la matrice de rigidité

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = i$$

$$a_{ijkl} \rightarrow C_{\alpha\beta}$$

$$i \neq j \Rightarrow \sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{\beta}$$

$$\alpha = 9 - i - j$$

$$a_{ijkl} = C_{\alpha\beta}$$

$$\beta = 9 - i - j$$

$$\beta = 9 - k - l$$

Et la même chose pour la matrice de souplesse.

Donc la relation (1-3) devient:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1-4)$$

Et la même chose pour la matrice de souplesse.

5-4)- Elasticité linéaire orthotrope :

Un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée, si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux (ce qui entraîne d'ailleurs la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal).

Donc la matrice de rigidité (1-4) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}$$

Il ne reste que (09) coefficients, et la même chose pour la matrice de souplesse.

A l'aide de loi de Hooke la matrice de souplesse s'écrit sur la forme suivant :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu_{ij}}{E_i} \sigma_{ij} - \frac{\nu_{ij}}{E_i} Tr(\sigma_{ij}) I$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

SYM

Avec les conditions de symétrie :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \rightarrow \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \rightarrow \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Le matériau est caractérisé par (9) coefficient indépendants :

- 3 modules de tension (d'Young) E_1, E_2, E_3 , dans les directions de l'orthotropie.
- 3 modules de cisaillements G_{12}, G_{23}, G_{13} .
- 3 coefficients de contractions (poisson) $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$

5-5)-Elasticité linéaire à isotropie transverse :

Un milieu est élastique à isotropie transverse si ces caractéristiques d'élasticité sont identiques pour tous les couples de directions symétriques par rapport à un axe.

Si l'axe d'isotropie transverse repère par (x3) le matériau est (isotrope) dans tous les plans normaux à (x3).

La matrice de souplesse s'écrit sur la forme suivant:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G_{23}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

SYM

Par rapport au cas orthotrope, on a tenu compte des égalités suivantes :

E_1, E_2 mêmes modules de tension dans les directions 1 et 2.

mêmes contractions suivantes 1 et 2 pour une traction appliquée suivant 3. $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$

$G_{13} = G_{23}$ mêmes modules de cisaillements autour des directions 1 et 2.

Module de cisaillement autour de 3. $2G_{12} = \frac{E_1}{1 + \nu_{12}}$

Le matériau est alors caractérisé par (5) coefficients indépendants :

2 modules de tension E_1, E_3 .

1 module de cisaillement G_{13} .

2 coefficients de poisson ν_{12}, ν_{13} .

5-6)- Elasticité linéaire isotrope :

A partir de loi de Hooke : $\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu_{ij}}{E_i} \sigma_{ij} - \frac{\nu_{ij}}{E_i} \text{Tr}(\sigma_{ij}) I$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

SYM

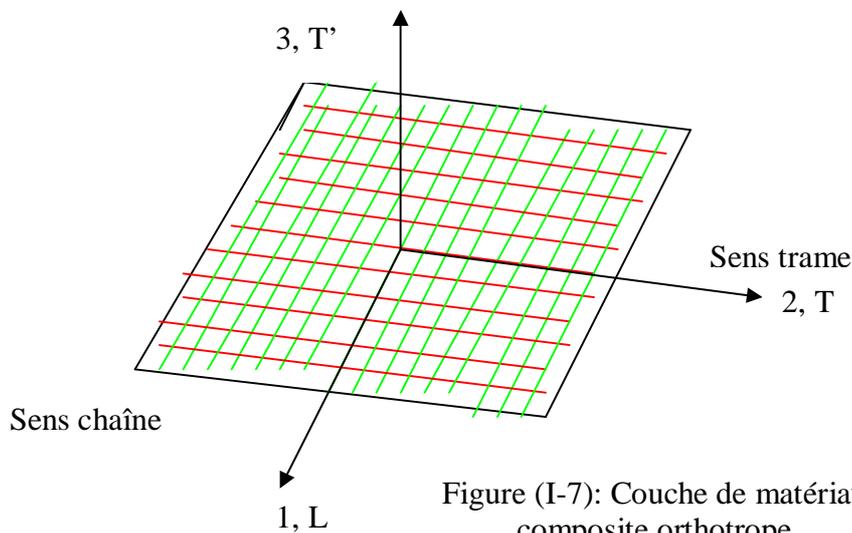
I-6)- COPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE ORTHOTROPE :**6-1)-Composite orthotrope (pli) :** Dans les directions principales

Les stratifiés sont constitués de couches de matériaux composites unidirectionnels ou de composites à base de tissus. Généralement, les tissus sont constitués de fils unidirectionnels croisés à 90° : l'un dans le sens chaîne, l'autre dans le sens trame.

Ces couches possèdent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, et se comportent d'un point de vue élastique comme un matériau orthotrope.

Les directions principales (1,2) seront prises respectivement suivant la direction trame ; ces directions seront également notées L, T figure (I-7).

La direction 3 orthogonale au plan de la couche sera également notée T'.

**6-1-a)-Matrice de rigidité et de souplesse :**

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope, en introduisant soit les constant de rigidité C_{ij} , soit les constantes de souplesse S_{ij} .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & SYM & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

* Les constantes de souplesse :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

* Les constantes de rigidité :

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \quad C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \quad C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{44} = G_{23} \quad C_{55} = G_{13} \quad C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

I-7)-COPORTEMENT ELASTIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE ISOTROP TRANSVERSE:

7-1)-La matrice de rigidité et la matrice de souplesse:

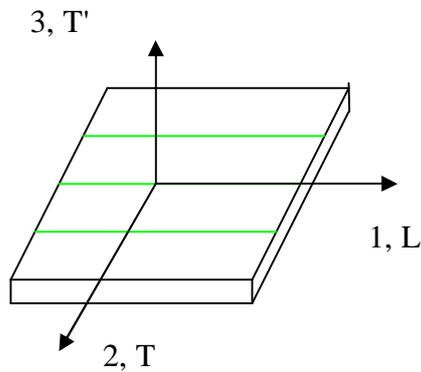


Figure (I, 8):Composite unidirectionnel

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ & & SYM & & S_{66} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ & & SYM & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$E_2 = E_3 \rightarrow \nu_{12} = \nu_{13} \rightarrow G_{12} = G_{13}$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

7-2)-Comportement matériaux composite en-dehors de ses axes principaux :

Nous avons étudié le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel ou tissu, exprimé dans les directions principales : un axe suivant la direction des fibres ou de la chaîne, les deux autres axes étant orthogonaux.

Les stratifiés étaient élaborés par couches successives, dont la direction des fibres ou de la chaîne décalé d'une couche à l'autre.

Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il faut prendre un système d'axe de référence pour l'ensemble du stratifiés, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Nous considérons donc figure (I, 9) une couche de matériau unidirectionnel ou tissu de directions principales (1, 2,3), le plan (1,2) étant confondu avec le plan de la couche, et la direction (1) confondue avec la direction des fibres ou de la chaîne.

En exprimant dans le système d'axe de référence (1',2',3) du stratifié, les directions des fibres ou de la chaîne faisant un angle θ avec la direction 1'. (1, 2,3) et (L, T, T')* (1',2',3) et (x, y, z)

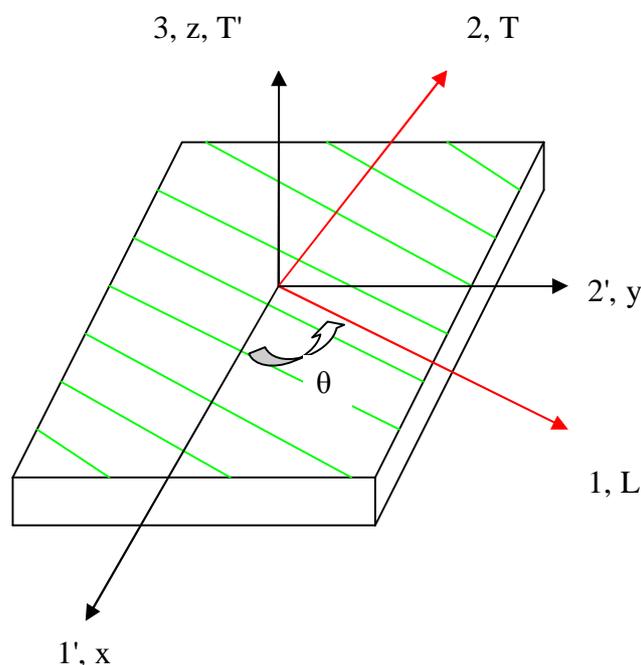


Figure (I, 9): couche unidirectionnel en-dehors de ses axes principaux

Il est nécessaire de bien faire attention au fait que le changement de base : $(1, 2, 3) \rightarrow (1', 2', 3)$ se fait, dans le cas présent, par une rotation d'angle $-\theta$.

(σ, ε) Dans le repère des directions principales $(1, 2, 3)$.

(σ', ε') Dans le repère de référence $(1', 2', 3)$.

Matrice de changement de base des contraintes T_σ $\sigma = T_\sigma \sigma' \rightarrow \varepsilon = T_\varepsilon \varepsilon'$

Matrice de changement de base des déformations T_ε $\sigma' = T_\sigma^{-1} \sigma \rightarrow \varepsilon' = T_\varepsilon^{-1} \varepsilon$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$T_\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$T_\varepsilon^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon'_{ij} = T_{\varepsilon}^{-1} \varepsilon \rightarrow \sigma'_{ij} = T_{\sigma}^{-1} \sigma$$

$$\sigma = C_{ij} \varepsilon \rightarrow \varepsilon_{ij} = S_{ij} \sigma$$

$$\sigma'_{ij} = T_{\sigma}^{-1} \sigma = T_{\sigma}^{-1} C_{ij} \varepsilon = T_{\sigma}^{-1} C_{ij} T_{\varepsilon} \varepsilon'$$

$$C' = T_{\sigma}^{-1} C T_{\varepsilon} \quad \text{Et} \quad S' = T_{\varepsilon}^{-1} S T_{\sigma}$$

Les expressions des constantes de rigidité et de souplesse dans le système d'axe (1', 2', 3)

sont: C'_{ij} et S'_{ij}

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ & & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ & & & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ & & SYM & & C'_{55} & 0 \\ & & & & & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ & & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ & & & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ & & SYM & & S'_{55} & 0 \\ & & & & & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = C'_{ij} \varepsilon' \rightarrow \varepsilon' = S'_{ij} \sigma'$$

D'après les expressions (C'et S') en peut trouver les modules et les coefficients :

$$\frac{1}{E_x} = S'_{11} = S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_L} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_T} \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$\frac{1}{E_y} = S'_{22} = \frac{1}{E_L} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cos^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$\nu_{xy} = E_x \left[\frac{\nu_{LT}}{E_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right]$$

$$\nu_{xz} = E_x \left[\frac{\nu_{LT}}{E_L} \cos^2 \theta - \frac{\nu_{TT}}{E_T} \sin^2 \theta \right]$$

Avec $(\nu_{LT}' = \nu_{LT})$ pour un composite unidirectionnel.

$$G_{xy} = \frac{1}{S'_{66}} \rightarrow \frac{1}{G_{xy}} = 2\left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + \frac{4\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\sin^4 \theta \cos^4 \theta)$$

$$G_{xz} = \frac{1}{S'_{55}} \rightarrow \frac{1}{G_{xz}} = \frac{1}{G_{TT'}} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta$$

7-3)- Etat de contrainte planes :

Comme nous avons déjà vu qu'un matériau composite constitue de pli (couche).

Pour résolution un problème quelconque d'élasticité d'un matériau composite, dans le cas où le problème d'élasticité peut être ramené à un problème d'élasticité à deux dimensions.

**Etat de contrainte à deux dimensions :

Un état de contrainte à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

** Equations d'élasticité pour un état de contrainte plane :

Les contraintes en un point (M) s'écrivent donc sous la forme :

$$\text{(En-dehors de ses axes principaux):} \quad \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\text{(Dans les axes principaux)} \quad : \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{lt} \end{bmatrix}$$

***Dans les axes principaux :**

La matrice de rigidité (réduite) et de souplesse écrire sous la forme :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (1,5) \quad \text{et} \quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

Etat de contraintes planes est caractérisé par :

$$\sigma_i \neq 0 \text{ si } i = 1, 2, 6 \quad \text{Et} \quad \varepsilon_i \neq 0 \text{ si } i = 1, 2, 3, 6$$

$$\sigma_i = 0 \text{ si } i = 3, 4, 5 \quad \text{Et} \quad \varepsilon_i = 0 \text{ si } i = 4, 5$$

Les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{avec} \quad \varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{avec} \quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2)$$

$$Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_t}{E_L} \nu_{Lt}^2}$$

$$Q_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} = \nu_{Lt} Q_{22}$$

$$Q_{16} = 0$$

$$Q_{66} = C_{66} = G_{Lt} \quad (1,6)$$

$$Q_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} = \frac{E_t}{E_L} Q_{11}$$

$$Q_{26} = 0$$

Avec en outre pour un composite unidirectionnel :

$$C_{11} = C_{12} \quad \text{Et} \quad C_{33} = C_{22}$$

Les matrices $[S_{ij}] \leftrightarrow [Q_{ij}]$ sont inverses l'une de l'autre

* En- dehors de ses axes principaux :

La matrice de rigidité (réduite) et de souplesse écrire sous la forme :

$$[Q'] = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \quad (1,7) \quad \text{et} \quad [S'] = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix}$$

Etat de contraintes planes est caractérisé par :

$$\sigma'_i \neq 0 \text{ si } \rightarrow i = 1,2,6 \quad \text{Et} \quad \varepsilon'_i \neq 0 \text{ si } \rightarrow i = 1,2,3,6$$

$$\sigma'_i = 0 \text{ si } \rightarrow i = 3,4,5 \quad \text{Et} \quad \varepsilon'_i = 0 \text{ si } \rightarrow i = 4,5$$

Les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{avec} \quad \varepsilon'_3 = S'_{13} \sigma'_1 + S'_{23} \sigma'_2 + S'_{36} \sigma'_6$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{avec} \quad \varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}} (C'_{13} \varepsilon'_1 + C'_{23} \varepsilon'_2 + C'_{36} \varepsilon'_6)$$

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3} C'_{j3}}{C'_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad Q'_{ij} = Q'_{ji}$$

Les matrices $[S'_{ij}] \leftrightarrow [Q'_{ij}]$ sont inverses l'une de l'autre

- Relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et dans les axes principaux :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (1,8)$$

I-8)-GENERALITES SUR LA THEORIE DES STRATIFIES:**8-1)- Introduction:**

Il faut mettre en évidence l'architecture des stratifiés qui résulte de la conception des pièces en matériaux composites.

- Suivant de plaque ou coques.
- par stratification de couches successives.

Ce mode de conception justifie l'importance des plaques dans l'analyse des structures en composites.

En effet, outre les structure de type plaques, l'analyse des plaques permet également, dans le cadre de calcul par éléments finis, de modéliser les structures coques.

Le stratifié est constitue de (n) couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure.

La surface moyenne est choisie comme plan de référence (oxy) et l'axe (oz) est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches.

Chaque couche (k) est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k). Figure (I-10)

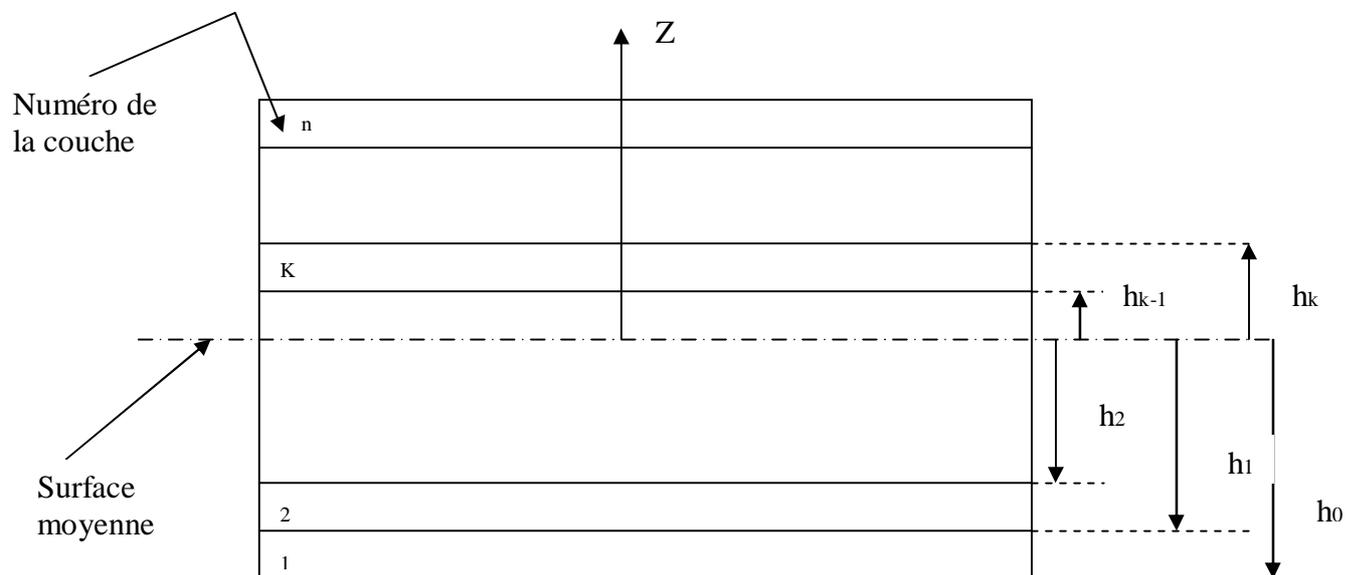


Figure (I-10) : Élément de stratifié

***Champ des déplacements :**

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point d'une plaque, de coordonnées (x, y, z) , sous la forme de polynômes en (z) , généralement limitée au degré (3), et de coefficient dépendant de (x, y) .

Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme :

$$u(x, y, z) = u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y)$$

$$\text{Avec : } u_0 = u_0(x, y) = u(x, y, 0)$$

$$v_0 = v_0(x, y) = v(x, y, 0)$$

$$w_0 = w_0(x, y) = w(x, y, 0)$$

*** Schéma du premier degré :**

Les schémas les plus simples et les plus utilisés par exemple schéma de (Hencky-Mindlin, schéma de Kirchoff) se réduisent à des schémas du premier degré de la forme:

$$u(x, y, z) = u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0)$$

$$\text{Ou : } u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \quad (1-9)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

*** Champ des déformations du premier degré :**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y
\end{aligned} \tag{1-10}$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du 1^{er} degré avec cisaillement transverse.

*** Champ des contraintes :**

La forme de la matrice de rigidité d'une couche de composite unidirectionnel ou tissu, rapportée aux axes (oxyz) du stratifié pour un point (M) appartient à la couche k du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ & & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ & & & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ & & & & C'_{55} & 0 \\ & & & & & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1-11}$$

Ou C'_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche (k).

En résulte que les contraintes dans la couche (k) sont des polynômes en (z).

La théorie des plaques a pour objet de simplifier le problème à trois dimensions (x, y, z) en un problème à deux dimensions (x, y).

La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur.

Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moment.

*** Simplification dans le cadre de la théorie des plaques :**

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes

$$(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) \dots \quad \text{Donc : } \sigma_{zz} = 0$$

La relation contrainte – déformation s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ & & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ & & & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ & & SYM & & C'_{55} & 0 \\ & & & & & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k$$

En peut écrire cette relation sous la forme suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (1-12)$$

$$\text{Avec : } \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13}\varepsilon_{xx} + C'_{23}\varepsilon_{yy} + C'_{36}\gamma_{xy})$$

I-9)-RESULTANTES ET MOMENTS :

9-1)- Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N_k(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_k(M) dz$$

Où $\sigma_k(M)$ est la matrice des contraintes en membrane $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ dans la couche k

soit: Schématisées sur la figure (I-11).
$$N_k(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz$$

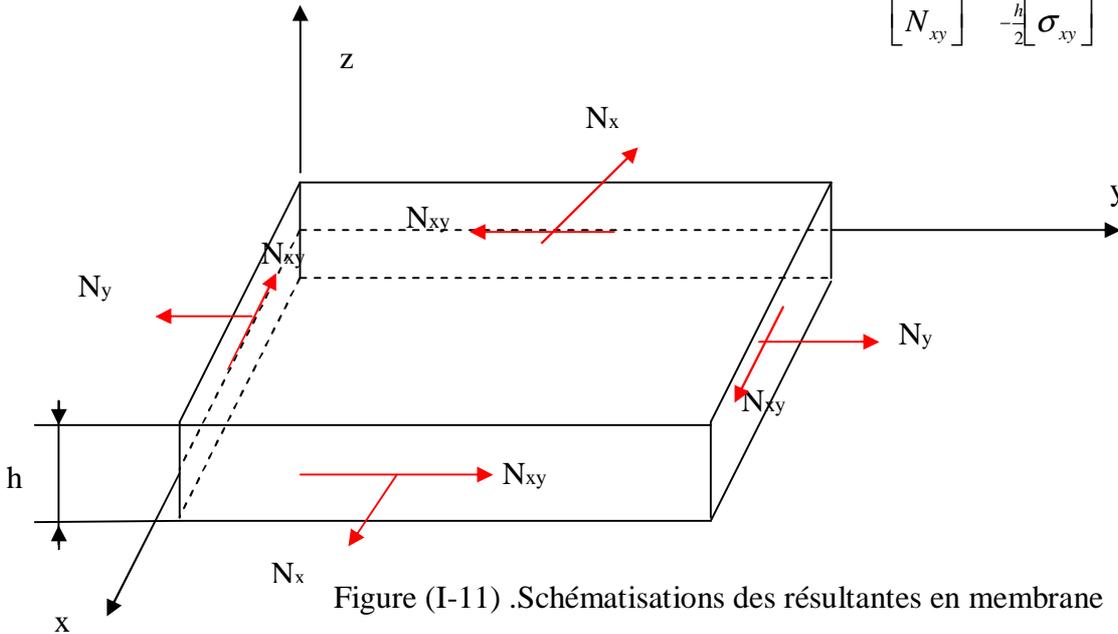


Figure (I-11) .Schématisations des résultantes en membrane

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \tag{1-13}$$

9-2)- Résultantes en cisaillement :

Les en cisaillement sont définie de la manière par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur.

Elles sont schématisées sur la figure (I-12).

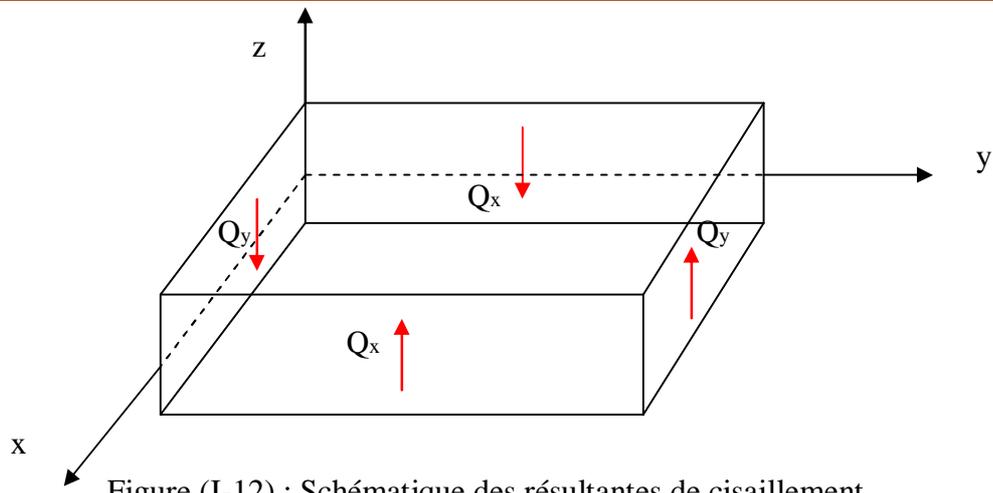


Figure (I-12) : Schématisation des résultantes de cisailement.

9-3)-Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion sont définie par :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (1-14)$$

M_x et M_y , sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion, ils sont schématisées sur la figure (I-13).

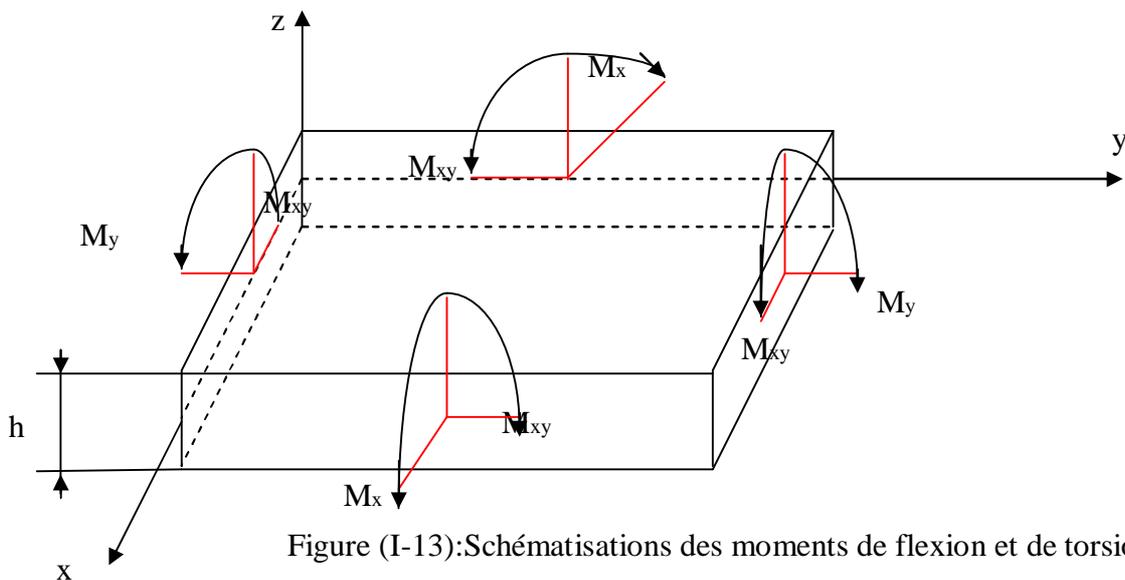


Figure (I-13): Schématisations des moments de flexion et de torsion

I-10)-RELATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES (cas d'un schéma du 1^{er} degré):

Les relations fondamentales des plaques sont tirées des équations d'équilibres que nous écrivons sous la forme suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + f_z &= \rho a_z\end{aligned}$$

Où f_x, f_y, f_z sont les composantes des forces volumiques exercées au point du matériau.

* Relation fondamentales relatives aux résultantes et moments des plaques :

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x}, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \\ \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) &= \tau_{1x}, \quad \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) = \tau_{2x} \\ \sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) &= \tau_{1y}, \quad \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) = \tau_{2y} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + F_z + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y}, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x}, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) \\ \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) &= q(x, y) = q\end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + p_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + p_x - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) dz = \left(\frac{h}{2} \right) \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) - Q_x , ,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x , \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} dz = \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) - Q_y$$

$$\text{Avec : } \rho_s, R, I_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz \rightarrow F_{x,y,z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_{x,y,z} dz \rightarrow p_{x,y} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_{x,y} dz$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial_x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right)$$

Donc les équations fondamentales des plaques en l'absence cisaillement transverse, soit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial_x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right)$$

* problème de statique :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1-16)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0$$

I-11)-THEORIE CLASSIQUE DES STRATIFIES :

11-1)- Champ des déformations :

La théorie classique des stratifiés utilise déformation du premier degré. Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négligée le cisaillement transverse.

Donc les déformations en cisaillement sont nulle figure (I-14), soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{Et} \quad \gamma_{yz} = 0$$

Ce qui permet :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après (1-9) :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \quad (1-17)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

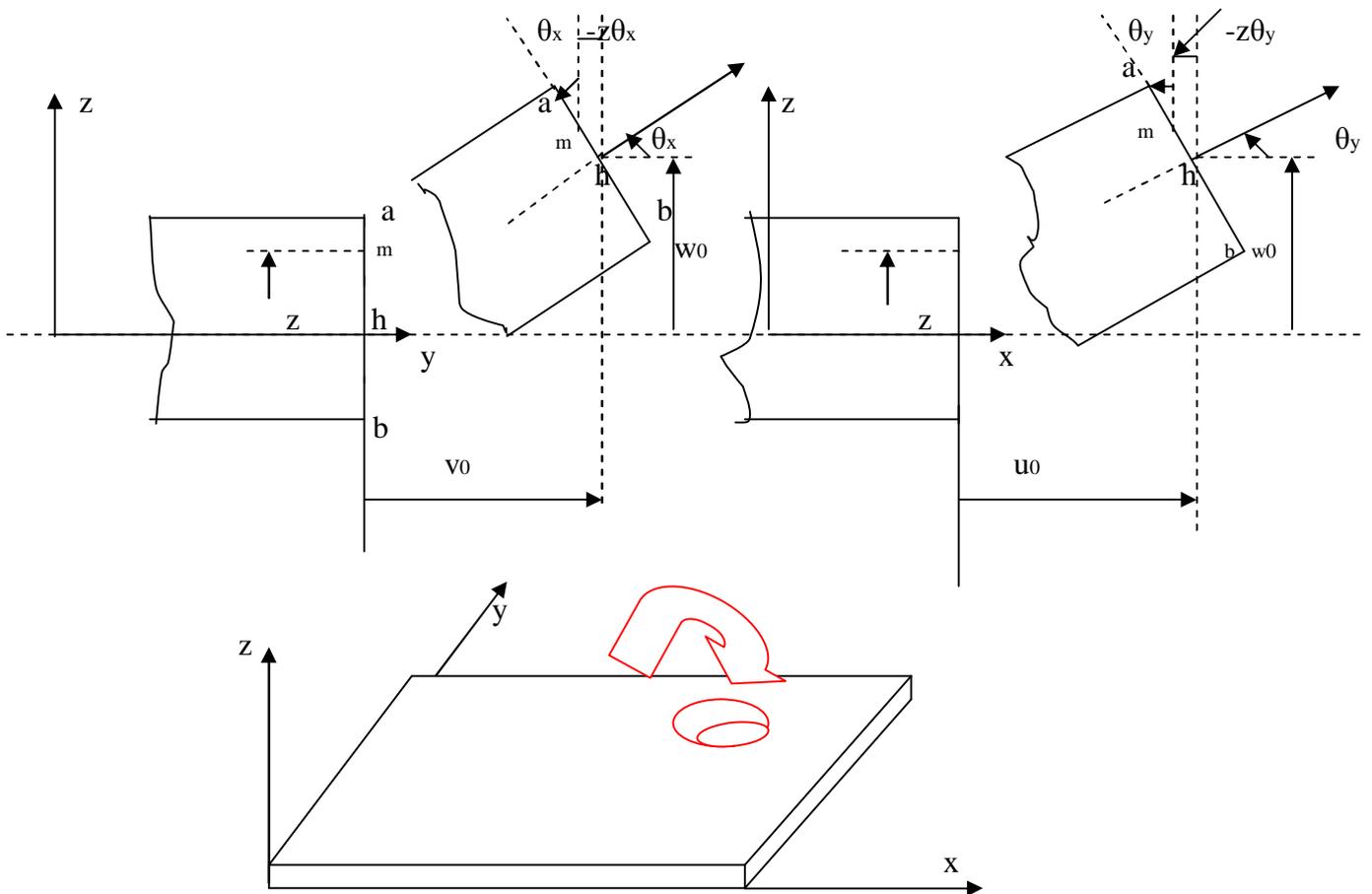


Figure (I-14) : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique de stratifiés

* Expression du champ des déformations :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0\end{aligned}$$

Le tenseur des déformations en un point (M) est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Le champ des déplacements :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\theta_y \rightarrow \theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\theta_x \rightarrow \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit (1-18) :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y) \quad \gamma_{xy}^0 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)(x, y)$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y)$$

11-2)- Champ des contraintes :

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation (1-12), dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons pour la couche (k).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= Q'_{11}\varepsilon_{xx} + Q'_{12}\varepsilon_{yy} + Q'_{16}\gamma_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= Q'_{12}\varepsilon_{xx} + Q'_{22}\varepsilon_{yy} + Q'_{26}\gamma_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= Q'_{16}\varepsilon_{xx} + Q'_{26}\varepsilon_{yy} + Q'_{66}\gamma_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= \sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0
 \end{aligned} \tag{1-19}$$

Le tenseur des contraintes en (M) est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Expression des contraintes :

Les relations (1-19) montrent que les contraintes dans la couche (k) s'expriment suivant:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = [Q'_k] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{1-20} \quad \text{Avec} \quad [Q'_k] = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}$$

Où Q'_k est la matrice de rigidité réduite de la couche (k).

Donc les contraintes dans la couche (k) s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{1-21}$$

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y)$$

11-3)-Expression des résultantes et moments:

* Résultantes en membrane :

L'expression (1-13) associée à la relation (1-21) conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + Q'_k k(x, y)] dz \quad (1-22)$$

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \\ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \end{bmatrix} \varepsilon_m(x, y) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \\ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \end{bmatrix} k(x, y)$$

Soit, en définitive :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B k(x, y)$$

En introduisant les matrices :

$$A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \\ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = [B_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \\ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

L'expression développée des résultantes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonction des déformations en membrane ($\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0$) (comme dans le cas de plaque homogène), mais sont également fonction des courbures en flexion et en torsion (k_x, k_y, k_{xy}) ...

* Moment de flexion et de torsion :

Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (1-21) des contraintes dans l'expression (1-14).

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q'_k k(x, y)] dz$$

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \\ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \end{bmatrix} \varepsilon_m(x, y) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \\ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \end{bmatrix} k(x, y)$$

Soit :
$$M_f(x, y) = B\varepsilon_m(x, y) + Dk(x, y)$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D = [D_{ij}] = \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] \quad (1-25)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

11-4)-Equation du comportement mécanique d'un stratifié:

* Equations constitutives :

Les équations constitutives d'une plaque stratifiée expriment les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures.

Elle s'obtient en regroupant les expressions (1-24) et (1-26) suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ k \end{bmatrix} \quad (1-28)$$

Les termes des matrices introduites sont donnés par les expressions (1-23), (1-25).

Ils peuvent être également exprimés en introduisant l'épaisseur e_k et la cote z_k du centre de la couche (k), sous la forme

$$[A_{ij}] = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \quad (1-29)$$

$$[B_{ij}] = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k \quad (1-30)$$

$$[D_{ij}] = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad (1-31)$$

11-5)-Relations fondamentales de la théorie classique des stratifiées : (statique)

Les relations fondamentales de la théorie classique des stratifiées sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (1-27) des stratifiées dans la relation (1-16) dans le cas de problème de statique, nous obtenons les relations fondamentales de la théorie classique des stratifiées.

$$\begin{aligned}
 * A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \\
 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \quad (1-32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \\
 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \quad (1-33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \\
 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - \\
 B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - q = 0 \quad (1-34)
 \end{aligned}$$

**Dans le cas d'un stratifié symétrique : ($B_{ij} = 0$)

$$* A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0 \quad (1-35)$$

$$* A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0 \quad (1-36)$$

$$* D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - q = 0 \quad (1-37)$$

***Expression des résultantes et moments :**

$$* N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1-38)$$

$$* N_y = A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1-39)$$

$$* N_{xy} = A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1-40)$$

$$* M_x = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1-41)$$

$$* M_y = B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1-42)$$

$$* M_{xy} = B_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1-43)$$

11-6)-Formulation énergétique de la théorie des stratifiés :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés.

Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse des stratifiés par éléments finis.

* Energie de déformation d'un stratifié :

Energie de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (1-44)$$

Où l'intégration est à l'ensemble du volume du solide.

En tenant compte des hypothèses de la théorie classique des stratifiés :

$$(\sigma_{zz} = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0)$$

Les contraintes en fonction des déformations :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = [Q'_k] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint (Q^k_{11} \varepsilon^2_{xx} + 2Q^k_{12} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2Q^k_{16} \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + 2Q^k_{26} \varepsilon_{yy} \gamma_{xz} + Q^k_{22} \varepsilon^2_{yy} + Q^k_{66} \gamma^2_{xy}) dx dy dz$$

En peut exprimée cette relation en fonction de déplacement (u_0, v_0, w_0) , dans le cas de stratifie symétrique ($B_{ij} = 0$).

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy$$

$$+ \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

* **Travail des actions exercées sur le stratifie :**

$$Z = Z_f + Z_m$$

$$Z_f = \iint q w_0 dx dy$$

$$Z_m = \int_{S_\sigma} \bar{\Phi}_i u_i ds$$

I-12)-CONCLUSION:

Dans ce chapitre, nous avons donnée une généralité sur les matériaux composite et leur avantages d'un l'industrie.

Dans le présent les composites sont des matériaux multi phases artificiels.

La plus parts des composites ont été mis au point pour obtenir une combinaison exceptionnelle de propriétés mécaniques (rigidité, ténacité,).

Après les formules que nous avons vu dans ce chapitre, en peut choisir et développé les matériaux que nous voulons avec des caractéristiques mécaniques et physique suivant les conditions demandées.

BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **J.-M.BERTHELOT** 'Matériaux composite ' comportement mécanique et analyse des structures. 3éme édition Paris 1999.
- [2] **JEAN LEMAITRE, JEAN-LOUIS CHBOCHE** 'Mécanique des matériaux solides'. 2édition Paris 1996.
- [3] **S.TIMOSHENKO, S.WOINOWSKY-KRIEGER** 'Théorie des plaques et coques'
Traduit d'après la 2éme édition américaine par 'Robert Pinto' 1961
- [13] **SEDIRA LAKHDAR**, Contribution du modèle en déformation dans l'analyse des plaques stratifiées composites, Thèse de Magistère, Université de Batna, Avril 2002

CHAPITRE II

FLAMBAGE MECANIQUE ET THERMIQUE DES PLAQUES

II)- FLAMBAGE44
II-1)- INTRODUCTION44
II-2)- THEOREMES DE L'ENERGIE47
II-3)- CONTRAINTES ET DEFORMATION INITIALES-THERMOELASTICITE49
II-4)- FLAMBAGE MECANIQUE DES PLAQUES STRATIFIANT50
4-1)- Flambage mécanique : (approche énergétique)	...50
II-5)-FLAMBAGE THERMIQUE DES PLAQUES STRATIFIANT51
5-1)-Influence des phénomènes de dilatation sur le comportement mécanique des stratifié	.51
1-1)-Introduction	...51
1-2)-Relations d'élasticité dans les axes principaux51
1-3)-Relation d'élasticité en dehors des axes principaux53
5-2)- Equation du comportement d'un stratifié55
2-1)- Equation constitutive55
2-2)- Relations fondamentales55
2-3)- Energie de déformation56

CHAPITRE II : FLAMBAGE MECANIQUE ET THERMIQUE DES PLAQUES

II)- FLAMBAGE :

II-1)- INTRODUCTION :

Dans le cas des stratifiés orthotrope, les équations de la théorie classique (1-32) à (1-34), les équations permettant de déterminer la déformée latérale du stratifié sont indépendante des équations des déplacements en membrane.

Il résulte de ces équations qu'un chargement en membrane (déplacement ou force imposée) ne peut produire que des déformations en membrane.

Si l'on considère une poutre droite figure (II-1), encastree suivant l'une de ses extrémités et soumise à un effort de compression (F), la poutre se raccourcit, la ligne moyenne restant rectiligne (figure (II-1-1)).

Si en un point (M) de la poutre, on crée une petite perturbation transversale, le système revient à sa position initiale lorsque la perturbation disparaît : l'équilibre est stable.

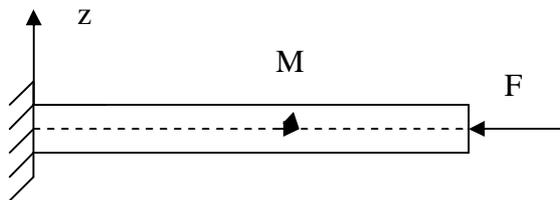


Figure (II-1-1)

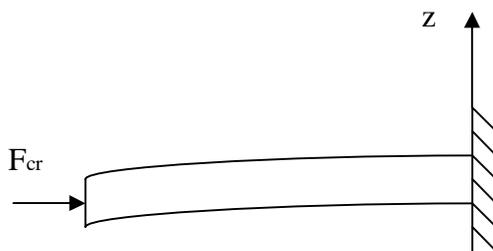


Figure (II-1-2)

Figure (II-1) : Flambement d'une poutre

Si l'on fait croître progressivement la charge (F), on observe dans le cas d'une poutre élancement élevé et pour une certaine valeur critique (F_{cr}) correspondant à une valeur σ_{cr} de la contrainte normale bien inférieure à la contrainte de rupture, il se produit une déformation latérale figure (II-1-2).

Il n'est plus possible alors d'augmenter la charge de compression sans provoquer la rupture ou une flèche très importante de la poutre, ce phénomène est appelé flambement ou instabilité élastique.

Pour décrire ce phénomène, il est alors nécessaire de développer des équations prenant en compte un déplacement latéral des plaques dans le cas d'un chargement en membrane.

1-a)- Equation des plaques tenant compte du flambement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q &= 0 \end{aligned} \quad (2,1)$$

1-b)- Formulation énergétique du problème de flambement :

Dans le cas où l'on tient de la déformation latérale les actions exercées sur le stratifié résultent des charges transverses (q) été exercées sur les faces inférieures et supérieures du stratifiés et des charges en membrane la variation du travail des actions exercées sur le stratifié s'écrit donc :

$$\delta Z = \delta Z_f + \delta Z_m$$

La fonction d'énergie (Z_m) des actions en membrane s'exprime de la façon suivante :

$$Z_m = - \iint (N_x^i \varepsilon'_{xx} + N_y^i \varepsilon'_{yy} + N_{xy}^i \gamma'_{xy}) dx dy$$

Où ($\varepsilon'_{xx}, \varepsilon'_{yy}, \gamma'_{xy}$) sont les déformations en membrane résultant de la flèche (w_0), dans le cas où l'on tient compte seulement de grandes déformations latérales, les déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_{xx}^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \rightarrow \varepsilon'_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_{yy}^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \rightarrow \varepsilon'_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = \gamma_{xy}^0 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \rightarrow \gamma'_{xy} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Donc l'énergie (Z_m) s'écrit :

$$Z_m = - \frac{1}{2} \iint \left(N_x^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^i \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right) dx dy \quad (2,2)$$

La formulation d'énergie totale : $V = U - Z$

$$Z = Z_f + Z_m$$

U: Energie de déformation

Z : Travail des actions exercée sur le stratifié

Z_f : Les actions en flexion

Z_m : Les actions en membrane

II-2)- THEOREMES DE L'ENERGIE :

Le théorème énergétique qui constitue le fondement des méthodes des éléments finis en mécanique des structures sont :

*Principe des travaux virtuels :

La relation générale du principe des travaux virtuels pour un corps solide déformable est :

$$\int_{S_\sigma} \bar{\Phi}_i \delta u_i ds + \int_v f_i \delta u_i dv = \int_v \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv$$

On peut la mettre sous la forme courante si l'on effectue les hypothèses suivantes :

H-1 : Petites déplacements et déformations: $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

H-2 : Existence d'un potentiel de déformation W : $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}$

Il vient alors : $\int_v \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv = \int_v \sigma_{ij} \delta \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) dv$

$$= \int_v \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \int_v \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dv = \int_v \delta W dv = \delta \int_v W dv$$

D'où la formulation courante du principe de travail virtuel :

$$\int_v \delta W dv = \int_{S_\sigma} \bar{\Phi}_i \delta u_i ds + \int_v f_i \delta u_i dv = \int_v \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv = \delta U$$

Pour un corps solide en équilibre, l'accroissement virtuel de l'énergie de déformation ($\int_v W dv = U$) est égale à la somme des travaux virtuels des forces de volumes et de surfaces.

On peut introduire la fonctionnelle énergie potentielle totale (V) suivante :

$$V = \int_v W dv - \int_{S_\sigma} \bar{\Phi}_i u_i ds - \int_v f_i u_i dv = U - Z$$

* **Energie de déformation :**

- Potentielle de déformation : (W, W_c) , cas d'un matériaux élastique à comportement (non linéaire) , figure(II-2)

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$$

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$$

$$\delta W_c = \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \quad \text{donc} \quad \delta W + \delta W_c = \delta(\varepsilon_{ij} \sigma_{ij})$$

$$W + W_c = (\varepsilon_{ij} \sigma_{ij})$$

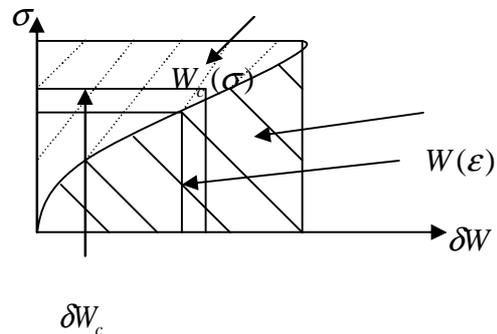


Figure (II-2) : matériau élastique à comportement (non linéaire)

* **Cas des matériaux élastiques à comportement linéaire :**

Dans le cas des matériaux élastiques à comportement linéaire, les relations contraintes – déformations s'écrivent : (loi de Hooke généralisée).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad - \quad \text{avec la propriété de la symétrie de tenseurs (contrainte, déformation)}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$$

Pour un matériau élastique linéaire, le potentielle de déformation satisfait la condition Suivant :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

On en déduit que (W) est une quadratique linéaire et symétrique des déformations

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad , \quad \text{donc} \quad W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Il en résulte immédiatement que :

$$W(\varepsilon_{ij}) = W_c(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Ainsi pour les matériaux élastiques linéaire, les potentielles de déformation W, W_c sont

$$\text{égaux. } W = W_c = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon, \text{ Figure (II-3)}$$

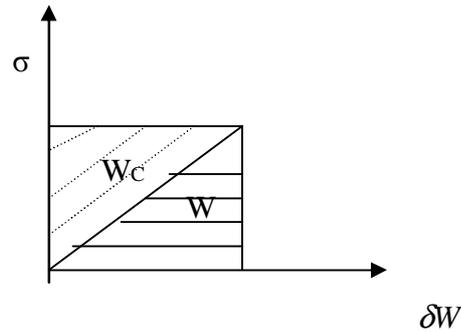


Figure (II-3): matériau élastique à comportement (Linéaire)

II-3)- CONTRAINTES ET DEFORMATIONS INITIALES-THERMOELASTICITE :

Les potentiels de déformation sont fonction de l'état actuel de déformation ou de contrainte ainsi que de l'état de déformation ou de contrainte initiale.

Ainsi, dans le cas particulier d'une température (T) non uniforme dans la structure, on a pour les potentiels (W, W_c) respectivement :

$$W = W(\varepsilon_{ij}, T) \quad W_c = W_c(\sigma_{ij}, T)$$

* Energie de déformation :

Dans un matériau élastique linéaire et dans le cas d'un état initial de contrainte σ_{ij}^0 et de déformation ε_{ij}^0 , l'équation constitutive (loi de Hooke généralisée) s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) + \sigma_{ij}^0$$

Nous nous limiterons à l'existence d'un état de contrainte initiale seul, le cas de déformation initiale s'en déduisent aisément, d'où :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0 \quad (2, 3)$$

L'existence de gradients thermique constitue un cas particulier du précédent, la loi de Hooke généralisée pour un matériau anisotrope s'écrit sous la forme suivante établie par (Duhamel- Newman) : [4]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \Delta T$$

$$\sigma_{ij}^0 = - \beta_{ij} \Delta T$$

- Avec (β_{ij}) coefficients dépendant à la fois des caractéristiques élastique et de dilatation.

- Et $(\Delta T = T - T_0)$, T_0 étant la température de référence.

Revenons au cas général d'un état de contrainte initiale, on a alors :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0$$

$$D'où : W = W(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^0) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} = W^*(\varepsilon_{ij}) + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}$$

Avec $W^*(\varepsilon_{ij})$: potentiel de déformation sans contrainte initiale

II-4)- FLAMBAGE MECANIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES :

4-1)- Flambage mécanique :(approche énergétique)

Les équations constitutives d'une plaque stratifiée expriment les résultantes et moment en fonction des déformations en membrane et de courbures s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2,4)$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ k \end{bmatrix}$$

Donc l'énergie potentielle totale est: $V = U - Z$

$$U = \frac{1}{2} \iint \sigma_{ij}^t \varepsilon_{ij} dx dy = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_{ij}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \varepsilon_{ij} dx dy = \frac{1}{2} \iint (\varepsilon_m, \varepsilon_f) \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \end{bmatrix} dx dy$$

$$Z_m = -\frac{1}{2} \iint \left(N_x^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^i \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right) dx dy = -\frac{1}{2} \iint (\varepsilon_{nl}^0)^t \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} dx dy$$

$$\varepsilon_{nl}^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \text{ donc : } -\frac{1}{2} \iint (\varepsilon_{nl}^0)^t \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} dx dy = -\frac{1}{2} \iint \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} & \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} dx dy$$

II-5)-FLAMBAGE THERMIQUE DES PLAQUES STRATIFIES :

5-1)-Influence des phénomènes de dilatation sur le comportement mécanique des stratifié

1-1)-Introduction :

Généralement, les propriétés des matériaux composites sont affectées par les conditions d'environnement auxquelles ils sont soumis.

Dans le cas des structures en matériaux composites ces phénomènes sont la conséquence de la variation de la température, de l'absorption par la matrice polymère d'agent de gonflement tel que la vapeur d'eau, de la dilatation de gaz absorbés par la matrice, etc

Ces phénomènes induisent des déformations et des contraintes qui peuvent modifier notablement le comportement mécanique des structures en matériaux composite : rigidité, flambement, fréquence de vibration, etc.

1-2)-Relations d'élasticité dans les axes principaux :

Les phénomènes de dilatation thermique peuvent être décrit en écrivant les déformations en un point (x, y, z) à l'instant (t) sous forme :

$$\varepsilon_{i(thermique)}^* = \alpha_i \Delta T(x, y, z, t) \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Où α_i sont le coefficient de dilatation thermique et ΔT est la variation de température à partir d'une température de référence pour laquelle les déformations thermiques sont considérées comme étant égales à zéro.

La répartition des températures dans la structure et au cours du temps est déterminée à partir des phénomènes de transfert de chaleur.

La loi de Hooke généralisée pour un matériau anisotrope s'écrit sous la forme suivante établie par (Duhamel- Newman) :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0 \quad (2-5)$$

On peut écrire la relation (2-5) sous la forme : $\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j - C_{ij} \varepsilon_j^* = \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_j - \varepsilon_j^*)$
 $i=1,2,\dots,6$

Dans le cas des matériaux orthotropes, la relation d'élasticité, rapportée aux axe principaux du matériau s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & SYM & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^* \\ \varepsilon_4 - \varepsilon_4^* \\ \varepsilon_5 - \varepsilon_5^* \\ \varepsilon_6 - \varepsilon_6^* \end{Bmatrix} \quad (2-6)$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & SYM & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

Avec dans le cas d'un matériau unidirectionnel :

$$C_{13} = C_{12} \quad C_{33} = C_{22} \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad C_{55} = C_{66}$$

Dans un état de contrainte plane la relation (2-6) réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^* \\ \varepsilon_6 - \varepsilon_6^* \end{Bmatrix}$$

1-3)-Relation d'élasticité en dehors des axes principaux :

Dans le cas où les axes principaux du matériau font un angle (θ) avec les axes de référence (x,y,z), la relation d'élasticité rapportée à ces axes s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ & & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ & & & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ & & & & C'_{55} & 0 \\ & & & & & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{yz} - \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{xz} - \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

Où ($\varepsilon_{xx}^*, \varepsilon_{yy}^*, \varepsilon_{zz}^*, \gamma_{yz}^*, \gamma_{xz}^*, \gamma_{xy}^*$) sont les déformations dues aux phénomènes de dilatation aux axes (x, y), en notant que le changement de base (1,2,3) \rightarrow (x,y,z) se fait par une rotation d'angle $-\theta$

Nous avons par exemple :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} = T \varepsilon^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \gamma_{23}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{12}^* \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

Dans le cas de matériaux orthotropes les relations d'élasticités rapportées aux axes principaux s'écrit : soit ($\gamma_{23}^*, \gamma_{13}^*, \gamma_{12}^*$) = 0, les relations de dilatation dans le système d'axe (x,y,z) se réduisent donc :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \varepsilon_{33}^* \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

Donc la relation (2-7) se réduit alors à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ & & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ & & & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ & & SYM & & C'_{55} & 0 \\ & & & & & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^* \\ \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^* \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}$$

Dans le cas d'un état de contrainte plane $\varepsilon_{zz}^* = 0$ et la relation (2-9) se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \end{Bmatrix} \quad (2-10)$$

La relation d'élasticité s'écrit alors, sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}$$

5-2)- Equation du comportement d'un stratifié :

2-1)- Equation constitutive :

La relation d'élasticité s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 + zk_x \\ \epsilon_{yy}^0 + zk_y \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^* \\ \epsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

L'équation constitutive s'obtient avec des résultantes et des moments, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_{xy}^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

Donc les résultantes et moments dus aux phénomènes de dilatation, définis par :

$$\begin{aligned} (N_x^*, M_x^*) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{11} \epsilon_{xx}^* + Q'_{12} \epsilon_{yy}^* + Q'_{16} \gamma_{xy}^*)_k (1, z) dz \\ (N_y^*, M_y^*) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{12} \epsilon_{xx}^* + Q'_{22} \epsilon_{yy}^* + Q'_{26} \gamma_{xy}^*)_k (1, z) dz \\ (N_{xy}^*, M_{xy}^*) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{16} \epsilon_{xx}^* + Q'_{26} \epsilon_{yy}^* + Q'_{66} \gamma_{xy}^*)_k (1, z) dz \end{aligned} \quad (2,13)$$

2-2)- Relations fondamentales :

Les relations fondamentales du comportement mécanique des stratifiées, en présence de phénomène de dilatation, sont obtenues en reportant l'équation constitutive (2-11) dans les équations (1-16), pour rendre compte du flambement.

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} * A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \\ 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - \frac{\partial N_x^*}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned}
& * A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \\
& 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - \frac{\partial N_y^*}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} = 0 \quad (2-15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \\
& 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \\
& \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^*}{\partial x \partial y} = N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q \quad (2-16)
\end{aligned}$$

Dans le cas d'un stratifié symétrique : ($B_{ij} = 0$)

$$* A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{\partial N_x^*}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} = 0$$

$$* A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{\partial N_y^*}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} = 0$$

$$* D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} +$$

$$\frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^*}{\partial x \partial y} = N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q$$

2-3)- Energie de déformation :

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \iiint (& (\sigma_{xx} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^*) + \sigma_{yy} (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^*) + \sigma_{zz} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^*) + \sigma_{xz} (\gamma_{xz} - \gamma_{xz}^*) \\
& + \sigma_{yz} (\gamma_{yz} - \gamma_{yz}^*) + \sigma_{xy} (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*)) dx dy dz \quad (2-17)
\end{aligned}$$

En tenant compte des hypothèses de la théorie classique des stratifiés :

$$(\sigma_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xz}^*, \gamma_{yz}^* = 0)$$

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \iiint (& (Q_{11}^k (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{*k})^2 + 2Q_{12}^k (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{*k}) (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^{*k}) + 2Q_{16}^k (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{*k}) (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^{*k}) \\
& + 2Q_{16}^k (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{*k}) (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^{*k}) + Q_{22}^k (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}^{*k})^2 + Q_{66}^k (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^{*k})^2) dx dy dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U = U(\varepsilon^* = 0) - \iint \left[N_x^* \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_y^* \frac{\partial v_0}{\partial y} + N_{xy}^* \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
+ \iint \left(M_x^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2M_{xy}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + M_y^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) dx dy + \iint \left[\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(\varepsilon_i^{*k}) dz \right] dx dy \quad (2-18)
\end{aligned}$$

Où $U(\varepsilon^* = 0)$ est l'énergie de déformation, en l'absence de phénomène de dilatation.

$$f(\varepsilon_i^{*k}) = Q_{11}^k (\varepsilon_{xx}^{*k})^2 + 2Q_{12}^k \varepsilon_{xx}^{*k} \varepsilon_{yy}^{*k} + 2Q_{16}^k \varepsilon_{xx}^{*k} \gamma_{xy}^{*k} + 2Q_{26}^k \varepsilon_{yy}^{*k} \gamma_{xy}^{*k} + Q_{22}^k (\varepsilon_{yy}^{*k})^2 + Q_{66}^k (\gamma_{xy}^{*k})^2$$

La fonction $f(\varepsilon_i^{*k})$ étant indépendante des déplacements (u_0, v_0, w_0) , l'intégrale faisant intervenir cette fonction s'annulera dans l'expression de la première variation δU de l'énergie de déformation.

BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **J.-M.BERTHELOT** 'Matériaux composite ' comportement mécanique et analyse des structures. 3éme édition Paris 1999.

[4] **J.F.IMBERT** 'Analyse des structures par éléments finis' cepadues-édition, décembre 1984.

[5] **C.ROCKEY-H.R.EVANS-D.W.GRIFFITHS-D.A.NETHERC** 'Introduction a la méthode des éléments finis, traduit par Claude Gomez' Edition Eyrolles' Paris 1979

[6] **JEAN-LOUIS BATOZ, GOURI DHATT** 'Modélisation des structures par éléments finis, poutre et plaque', Volume 2 – Edition Hermès –Paris 1990

[7] **FRANCOIS FREY, JAROSLAV JIROUSEK** ' Analyse des structures et milieu continus (Méthode des éléments finis)' Volume 6.L'école polytechnique fédérale de Lausanne 2001

[8] **U.TOPAL, U.UZMAN** ' Thermal buckling load optimisation of laminated composite plates, Thin-Walled Structures , Volume46,Issue 6,June 2008,Pages 667-675.

[9] **LIEN-WEN CHEN AND LEI-YI CHEN** ' Thermal buckling analysis of laminate cylindrical plates by the finite element methode,Computers &Structures, Volume 34,Issue 1,1990,Pages 71-78.

CHAPITRE III

FORMULATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET PROGRAMATION

III-1)- FLAMBAGE THERMIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS 58
1-1)-Introduction58
1-2)-Elément utilisé58
1-3)- Fonction des déplacements des éléments59
III-2)- Flambage mécanique par la méthode des éléments finis63
III-3)- Flambage thermique par la méthode des éléments finis65
3-1)-Calcul des matrice de rigidité $[k]^e$ et matrice géométrique $[k]_g$ 65
III-4)- PROGRAMATION69
4-1)- Introduction69
4-2)- Organisation du programme69
III-5)- ORGANIGRAMME72

CHAPITRE III : FORMULATION PAR (MEF) ET PROGRAMMATION

III-1)- FORMULATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

1-1)-Introduction :

La méthode des éléments finis a été établie comme un outil très performant pour la résolution des systèmes d'analyse des structures et les sciences d'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique) permettent de décrire le comportement de système physique grâce à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations.

Elle constitue un outil de travail efficace, ce qui permet de traiter les équations différentielles les plus compliquées pour des formes géométriques et conditions limites délicates.

1-2)- Elément utilisé :

Pour effectuer nos études du flambage thermique, après la formulation en élément fini de ces plaques nous avons choisi élément rectangulaire à quatre nœuds, chaque nœud a six degrés de liberté.

La figure (III-1) montre la géométrie de l'élément rectangulaire utilisé, les dimensions (a et b) et l'épaisseur (t).

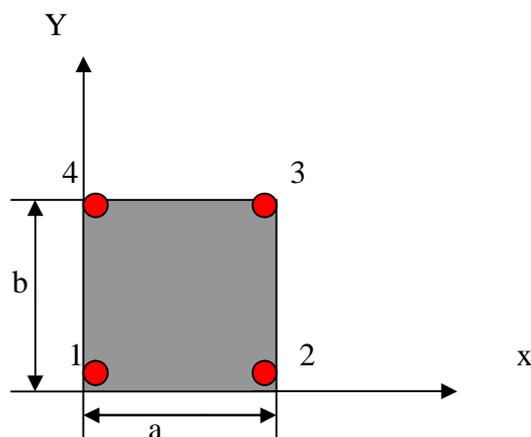


Figure (III-1): élément plaque rectangulaire

1-3)- Fonction des déplacements des éléments :

L'élément possède quatre (4) nœuds de (6) degrés de libertés chacun, qui sont :

* deux degrés dans le plan (x, y) à savoir (u, v).

* quatre hors plan à savoir $(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})$.

** En membrane :

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy$$

On peut écrire ces équations sous formes matricielles :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix}$$

$$\text{- nœud (1) : (x=0, y=0) } \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{a_i\}$$

$$\text{- nœud (2) : (x=a, y=0) } \rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \{a_i\}$$

$$\text{- nœud (3) : (x=a, y=b) } \rightarrow \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \{a_i\}$$

$$\text{- nœud (4) : (x=0, y=b) } \rightarrow \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \{a_i\}$$

$$\text{Donc } \{a_i\} = [R]^{-1} \{q_m^e\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [R]^{-1} \{q_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{bmatrix} \{q_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 & L_4 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 & L_4 \end{bmatrix} \{q_m^e\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \{a_i\} \Rightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = [C] \{a_i\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C][R]^{-1} \{q_m^e\} \Rightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = [B_m] \{q_m^e\}$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial L_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial L_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial L_4}{\partial y} \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_4}{\partial y} & \frac{\partial L_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{q_m^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Donc la matrice $[B_m]$ relie les déformations avec les déplacements :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B_m] \{q_m^e\}$$

$[B_m]$ est de dimension (3x8).

**En flexion:

Dans notre travail et pour l'élément de plaque en flexion, nous choisissons les hypothèses de kirchoff Les fonctions d'interpolation sont obtenues en effectuant les produits de fonction d'interpolation de la poutre (polynômes d'Hermite du 3ème degré) suivant x et y.

On aura :

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + \\ c_{12}x^2y^2 + c_{13}xy^3 + \\ c_{14}x^3y^2 + c_{15}x^2y^3 + c_{16}x^3y^3 \end{bmatrix}$$

$$w(x, y) = (L^*)^t q_f^e = \begin{bmatrix} L_w^* & L_{\theta_x}^* & L_{\theta_y}^* & L_{\theta_z}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

$$(L_w^*)^t = \begin{bmatrix} [L_1^*(x)L_1^*(y)] & [L_2^*(x)L_1^*(y)] & [L_2^*(x)L_2^*(y)] & [L_1^*(x)L_2^*(y)] \end{bmatrix}$$

$$(L_{\theta_x}^*)^t = \begin{bmatrix} [L_3^*(x)L_1^*(y)] & [L_4^*(x)L_1^*(y)] & [L_4^*(x)L_2^*(y)] & [L_3^*(x)L_2^*(y)] \end{bmatrix}$$

$$(L_{\theta_y}^*)^t = \begin{bmatrix} [L_1^*(x)L_3^*(y)] & [L_2^*(x)L_3^*(y)] & [L_2^*(x)L_4^*(y)] & [L_1^*(x)L_4^*(y)] \end{bmatrix}$$

$$(L_{\theta_z}^*)^t = \begin{bmatrix} [L_3^*(x)L_3^*(y)] & [L_4^*(x)L_3^*(y)] & [L_4^*(x)L_4^*(y)] & [L_3^*(x)L_4^*(y)] \end{bmatrix}$$

$$L_1^*(x) = (1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}) \quad L_1^*(y) = (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3})$$

$$L_2^*(x) = (3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}) \quad L_2^*(y) = (3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3})$$

$$L_3^*(x) = -x(\frac{x}{a} - 1)^2 \quad L_3^*(y) = y(\frac{y}{b} - 1)^2$$

$$L_4^*(x) = -x(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}) \quad L_4^*(y) = y(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b})$$

$$** w_1^*(x, y) = (1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}) (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}) w_1 + (-x(\frac{x}{a} - 1)^2) (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}) \theta_{x1} +$$

$$(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{y1} + (-x(\frac{x}{a} - 1)^2) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{z1}$$

$$** w_2^*(x, y) = (3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}) (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}) w_2 + (-x(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a})) (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}) \theta_{x2} +$$

$$(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{y2} + (-x(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a})) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{z2}$$

$$\begin{aligned}
 ** w^*_3(x, y) &= \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_3 + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x3} + \\
 &\left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) y\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y3} + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) y\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{z3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ** w^*_4(x, y) &= \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_4 + \left(-x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x4} + \\
 &\left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) y\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y4} + \left(-x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) y\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{z4}
 \end{aligned}$$

$$w(x, y) = \begin{Bmatrix} w^*_1 \\ w^*_2 \\ w^*_3 \\ w^*_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L^*_1(x)L^*_1(y) & L^*_3(x)L^*_1(y) & L^*_1(x)L^*_3(y) & L^*_3(x)L^*_3(y) \\ L^*_2(x)L^*_1(y) & L^*_4(x)L^*_1(y) & L^*_2(x)L^*_3(y) & L^*_4(x)L^*_3(y) \\ L^*_2(x)L^*_2(y) & L^*_4(x)L^*_2(y) & L^*_2(x)L^*_4(y) & L^*_4(x)L^*_4(y) \\ L^*_1(x)L^*_2(y) & L^*_3(x)L^*_2(y) & L^*_1(x)L^*_4(y) & L^*_3(x)L^*_4(y) \end{bmatrix} \{q_f^e\} \quad (a)$$

$$\{\mathcal{E}(x, y)\} = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \text{ et}$$

$$\{q_f^e\}^t = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{xy1} \quad * \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad \theta_{xy4}\}$$

$$\{\mathcal{E}(x, y)\} = [B_f] \{q_f^e\} \Rightarrow$$

$[B_f]$ est de dimension (3x16)

III-2)- Flambage mécanique par la méthode des éléments finis :

L'énergie potentielle totale est: $V = U - Z$

$$U = \frac{1}{2} \iint \sigma_{ij}^t \varepsilon_{ij} dx dy = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_{ij}^t \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \varepsilon_{ij} dx dy = \frac{1}{2} \iint (\varepsilon_m, \varepsilon_f) \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \end{pmatrix} dx dy =$$

$$U = \frac{1}{2} \iint \left([\varepsilon_m]^t [A] [\varepsilon_m] + [\varepsilon_m]^t [B] [\varepsilon_f] + [\varepsilon_f]^t [B] [\varepsilon_m] + [\varepsilon_f]^t [D] [\varepsilon_f] \right) dx dy$$

$$U = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \left([B_m]^t [A] [B_m] + [B_m]^t [B] [B_f] + [B_f]^t [B] [B_m] + [B_f]^t [D] [B_f] \right) \{q\} dx dy$$

1-a)- Cas sans flambage mécanique :

$$Z = \iint \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^t \{q\} dx dy = \iint \{q^t\} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx dy \rightarrow \delta V = 0$$

$$\delta U = \delta Z \quad \delta(q^T K q) = \delta(q^T F) \quad \text{D'où :} \quad K q = F \quad (\text{cas d'équilibre})$$

1-b) - Avec le flambage mécanique :

$$U = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \left([B_m]^t [A] [B_m] + [B_m]^t [B] [B_f] + [B_f]^t [B] [B_m] + [B_f]^t [D] [B_f] \right) \{q\} dx dy$$

$$U = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} [k^e] \{q\} dx dy$$

$$Z_m = -\frac{1}{2} \iint \left(N_x^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^i \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right) dx dy = -\frac{1}{2} \iint (\varepsilon_{nl}^0)^t \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} dx dy$$

$$\varepsilon_{nl}^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{donc :} \quad -\frac{1}{2} \iint (\varepsilon_{nl}^0)^t \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} dx dy = -\frac{1}{2} \iint \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} & \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} dx dy$$

On pose :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G] \{q\} \rightarrow [G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_w}{\partial x} \\ \frac{\partial L_w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} \right\} \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} dx dy = -\frac{1}{2} \iint \{q^t\} [G]^t [N][G] \{q\} dx dy$$

$$V = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \left([B_m]^t [A][B_m] + [B_m]^t [B][B_f] + [B_f]^t [B][B_m] + [B_f]^t [D][B_f] \right) \{q\} dx dy - \iint q^t \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint \{q^t\} [G]^t [N][G] \{q\} dx dy$$

Pour le cas (stabilité initiale), on va appliquer la deuxième variation de l'énergie potentielle

totale : $\delta^2 V = 0$ (Pour déterminée les charges critiques)

$$\delta^2 V = \frac{1}{2} (\delta q)^t \left([k] + \lambda [k_g] \right) (\delta q) = 0$$

$$\left([k] + \lambda [k_g] \right) \{q\} = 0$$

$[k]_G$: Matrice de rigidité globale

$[k_g]_G$: Matrice géométrique global

III-3)- Flambage thermique par la méthode des éléments finis:

3-1)-Calcul des matrices de rigidité $[k]^e$ et matrice géométrique $[k]^g$:

On applique le théorème de l'énergie (V), pour un élément de dimension (a et b) et d'épaisseur (t).

$$V = U - Z$$

La relation d'élasticité s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + zk_x \\ \varepsilon_{yy}^0 + zk_y \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + zk_x \\ \varepsilon_{yy}^0 + zk_y \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy} \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \Delta T \alpha_x \\ \Delta T \alpha_y \\ \Delta T \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k$$

La relation de constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_{xy}^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{bmatrix}$$

On peut écrire la relation de constitutive sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \{N\} \\ \{M_f\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varepsilon_m\} \\ \{k\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{N^*\} \\ \{M^*\} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\{N^*\} = [N_x^* \quad N_y^* \quad N_{xy}^*]^t = \Delta T \sum_{k=1}^n [Q'_{ij}]_k \{\alpha\}_k (h_k - h_{k-1}) \quad (3,1)$$

$$\{M^*\} = [M_x^* \quad M_y^* \quad M_{xy}^*]^t = \frac{\Delta T}{2} \sum_{k=1}^n [Q'_{ij}]_k \{\alpha\}_k (h^2_k - h^2_{k-1}) \quad (3,2)$$

Donc l'énergie potentielle totale de flambage thermique à partir des équations (2-17), (2-12), (2-3) en peut déterminée l'énergie sous la forme suivant :

**l'énergie de déformation : (hypothèse de la théorie des plaques)

$$U = \frac{1}{2} \iint (\sigma_{ij})^t (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) dx dy = \frac{1}{2} \iint (\sigma_{ij})^t \varepsilon_{ij} dx dy - \frac{1}{2} \iint (\sigma_{ij})^t \varepsilon_{ij}^* dx dy$$

$$U = \frac{1}{2} \iint \varepsilon_{ij}^t \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \varepsilon_{ij} dx dy - \frac{1}{2} \iint \varepsilon_{ij}^t \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \varepsilon_{ij}^* dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint (\varepsilon_m, \varepsilon_f) \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \end{pmatrix} dx dy - \frac{1}{2} \iint (\varepsilon_m, \varepsilon_f) \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_m^* \\ 0 \end{pmatrix} dx dy$$

$$U = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \left\{ \begin{bmatrix} [B_m] \\ [A] \\ [B_m] \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} [B_m] \\ [B] \\ [B_f] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_m] \\ [B] \\ [B_f] \end{bmatrix} [B] \begin{bmatrix} [B_m] \\ [B] \\ [B_f] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_f] \\ [D] \\ [B_f] \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} [B_f] \\ [B] \\ [B_f] \end{bmatrix} \right\} \{q\} dx dy$$

$$- \frac{1}{2} \iint ((\varepsilon_m)^t, (\varepsilon_f)^t) \begin{bmatrix} [N^*] \\ [M^*] \end{bmatrix} dx dy$$

$$U = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \{k^e\} q dx dy - \frac{1}{2} \iint [\varepsilon_m]^t [N^*] dx dy - \frac{1}{2} \iint [\varepsilon_f]^t [M^*] dx dy$$

$$Z_m = -\frac{1}{2} \iint \left(N_x^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y^i \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^i \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right) dx dy = -\frac{1}{2} \iint (\varepsilon_{nl}^0)^t \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} dx dy$$

$$\text{Donc: } V = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \{k^e\} q dx dy - \frac{1}{2} \iint [\varepsilon_m]^t [N^*] dx dy - \frac{1}{2} \iint [\varepsilon_f]^t [M^*] dx dy - Z_m$$

$$Z_m = \iint [\varepsilon_{nl}^0] [N] dx dy = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} [G]^t [N] [G] \{q\} dx dy$$

On peut écrire l'énergie potentielle totale de flambage thermique sous la forme :

$$** V = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \{k^e\} \{q\} dx dy - \frac{1}{2} \iint [\varepsilon_m]^t [N^*] dx dy - \frac{1}{2} \iint [\varepsilon_f]^t [M^*] dx dy + \iint [\varepsilon_{nl}^0]^t [N] dx dy **$$

a) –Cas sans flambage thermique :

On prend l'énergie potentielle totale sous la forme:

$$V = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \{k^e\} q dx dy - \frac{1}{2} \iint [\varepsilon_m]^t [N^*] dx dy - \frac{1}{2} \iint [\varepsilon_f]^t [M^*] dx dy$$

$$V = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} \{k^e\} q dx dy - \frac{1}{2} \iint ([\varepsilon_m]^t [N^*] + [\varepsilon_f]^t [M^*]) dx dy$$

$$V = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} [k^e] q dx dy - \frac{1}{2} \iint \{q^t\} ([B_m]^t \{N^*\} + [B_f]^t \{M^*\}) dx dy$$

On appliquant le principe de minimum d'énergie potentiel on obtient :

$$[k^e] \{q^e\} = [P^e] \quad \text{avec} \quad [P^e] = [B_m]^t \{N^*\} + [B_f]^t \{M^*\}$$

$[P^e]$: Vecteurs de force due à températures

b) - Cas avec flambage thermique existe donc :

On prend l'énergie potentielle totale sous la forme

$$V = \frac{1}{2} \iint q^t [k^e] q dx dy - \frac{1}{2} \iint q^t ([B_m]^t \{N^*\} + [B_f]^t \{M^*\}) dx dy + \iint [\varepsilon_{nl}^0]^t \{N\} dx dy$$

On à :

$$\iint [\varepsilon_{nl}^0]^t \{N\} dx dy = \iint \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \right) \{N\} dx dy = \iint \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} [N] \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \right) dx dy$$

$$\text{Avec : } [N] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}$$

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* & w_3^* & w_4^* \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_{f1} \\ q_{f2} \\ q_{f3} \\ q_{f4} \end{Bmatrix} = w_1^* \{q_{f1}\} + w_2^* \{q_{f2}\} + w_3^* \{q_{f3}\} + w_4^* \{q_{f4}\}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1^*}{\partial x} & \frac{\partial w_2^*}{\partial x} & \frac{\partial w_3^*}{\partial x} & \frac{\partial w_4^*}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1^*}{\partial y} & \frac{\partial w_2^*}{\partial y} & \frac{\partial w_3^*}{\partial y} & \frac{\partial w_4^*}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{f1} \\ q_{f2} \\ q_{f3} \\ q_{f4} \end{Bmatrix} \quad \text{donc} \quad [G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1^*}{\partial x} & \frac{\partial w_2^*}{\partial x} & \frac{\partial w_3^*}{\partial x} & \frac{\partial w_4^*}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1^*}{\partial y} & \frac{\partial w_2^*}{\partial y} & \frac{\partial w_3^*}{\partial y} & \frac{\partial w_4^*}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc : } V = \frac{1}{2} \iint \{q^t\} [k^e] \{q\} dx dy - \frac{1}{2} \iint \{q^t\} ([B_m]^t \{N^*\} + [B_f]^t \{M^*\}) dx dy + \iint \{q^t\} [G]^t [N] [G] \{q\} dx dy$$

La deuxième dérivée de l'énergie potentiel totale nous permet d'avoir l'état stabilité initiale

$\partial^2 V = 0$, donc on obtient l'équation standard du problème de valeur propre suivant.

$$([k^e] + \lambda [k_g]) \{q\} = 0 \quad (3,3)$$

$$[k_g] = [G]^t [N] [G] \quad \text{matrice géométrique.} \quad (3,4)$$

$$[k^e] = [k]_m + [k]_{mf} + [k]_{fm} + [k]_f \quad \text{matrice de rigidité.} \quad (3,5)$$

III-4)- PROGRAMATION :

4-1)- Introduction :

On a développé dans le présent chapitre les étapes nécessaires à l'obtention la matrice rigidité et la matrice géométrique. La résolution d'un problème par méthode des éléments finis entraîne le calcul de la matrice rigidité et la matrice géométrique.

Les valeurs propres 'les charges critiques ' de la structure étaient reliées aux matrices rigidité et matrice géométrique par l'équation $([k] + \lambda[k_g])\{q\} = 0$.

Dans cette méthode, les valeurs inconnues sont les valeurs propres 'les charges critiques' pour le flambage mécanique (N_{cr}) et 'températures critiques' pour le flambage thermique (T_{cr}) de structure.

Le travail numérique consiste en la mise en oeuvre de cette étude pour les plaques minces symétrie.

On donne dans ce travail une technique à adopter lorsque l'on développe ces programmes sur ordinateurs. Ce dernier peut être construit en un grand nombre de partie appelée sous-programme (Subroutine), chacun d'eux ayant une fonction particulière dans l'étude complète, tableau (3-1).

Le langage de programme utilisé est **FORTAN 90**.

4-2)- Organisation du programme :

La figure (III-2) résume les parties de base du programme pour la résolution complète d'un problème par la méthode des éléments finis.

L'étude s'effectue en utilisant une introduction des données qui décrivent complètement la structure modélisée et en effectuant des sortie qui consiste en la tabulation des valeurs propre 'charge critique (N_{cr}) et températures critiques (T_{cr})' soit effet mécanique ou thermique.

2-a)- Entrée des données :

Pour poser les problèmes, il est nécessaire d'introduire des données ; ces derniers doivent spécifier les caractéristiques géométrique des couches, le nombre des couches les orientations et l'épaisseur, le nombre et les dimensions des éléments, le coefficient de dilatation et les charge soit mécanique ou thermique avec les conditions.

2-b)- Caractérisation du matériau composite stratifié :

Le programme contient un sous programme pour calculer la matrice de rigidité réduite qui sera utilisée pour calculer les matrices de rigidité en membrane $[A]$, rigidité en flexion-torsion $[D]$, couplage membrane / flexion-torsion $[B]$.

Ils sont indiqués par les équations (1,23), (1,25), la matrice de constituive est indiquée par équation (1,27).

Le programme contient aussi un sous programme pour calculer les déformations d'origine thermique de chaque couche indiqué par équation (2,10) et calculer les résultantes et moment dus aux phénomènes dilatation indiqués par les équations (3,1), (3,2).

2-c)- Matrice de rigidité et géométrique :

Le sous-programme dans lequel la matrice de rigidité et de géométrique de l'élément $[k^e]$ et $[k_g^e]$ est calculée nécessite un certain nombre d'informations qui sont incluses dans les données initiales, les coordonnées nodales et les propriétés de l'élément ; des qu'elles ont été lues par le programme principale, on peut calculer $[k^e]$ et $[k_g^e]$ pour chaque élément.

Le sous-programme contient l'expression algébrique des termes de $[k^e]$ et $[k_g^e]$, en effectuant les multiplications matricielles nécessaires pour obtenir les termes $[k^e]$ et $[k_g^e]$ comme cela est indiqué par les équations (3,4) et (3,5).

2-d)- Assemblage de la matrice de rigidité et de géométrique de la structure :

La matrice de rigidité et de géométrique élémentaire sont utilisées pour calculer la matrice de rigidité et de géométrique de la structure complète permettant d'exprimer les localisations ou les connectivités géométriques des éléments.

2-f)- Introduction des conditions aux limites :

En générale, la structure s'appuie sur plusieurs nœuds pour lesquels certains déplacements sont interdits, il est nécessaire d'enlever les lignes et les colonnes appropriées des matrices de rigidité et de géométrique globale ; c'est-à-dire on élimine les lignes et les colonnes correspondant aux déplacements fixés.

2-e)- Obtention des valeurs propres :

Pour tous, si ce n'est pour le plus trivial des problèmes, l'ensemble final d'équations sera grand.

Il existe plusieurs schémas pour résoudre de gros systèmes d'équations et parmi ceux qui ont été utilisés avec succès en conjonction avec la méthode des éléments finis, on peut citer la méthode de **Cholesky**.

L'équation $([k] + \lambda[k_g])\{q\} = 0$, sera résolu pour donner les valeurs propres 'charge critique (N_{cr}) et températures critiques (T_{cr}) à l'aide de la logicielle **MATLAB**.

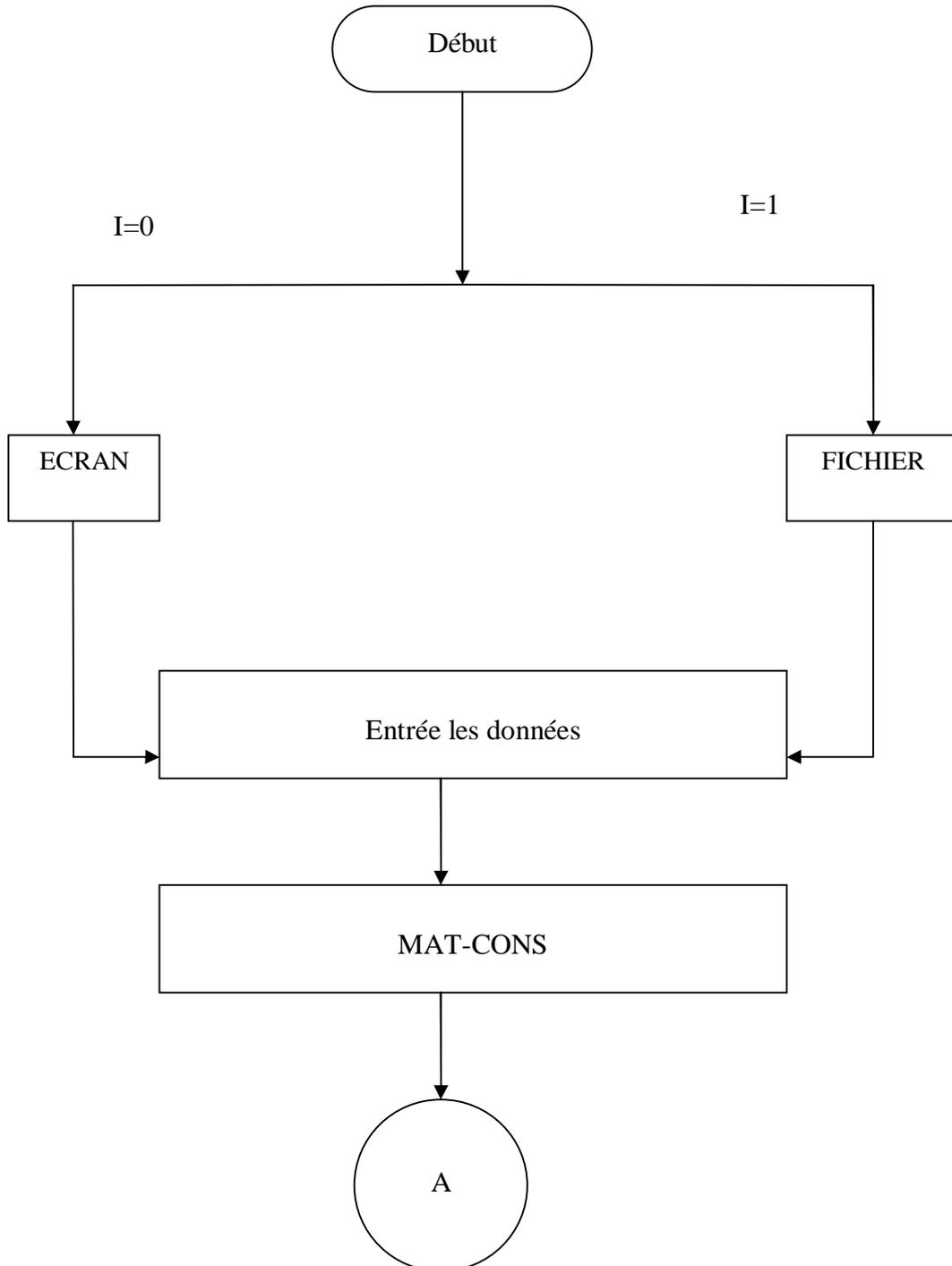
* La charge critique (N_{cr}) pour flambage mécanique c'est la valeur minimale de λ_{cr} .

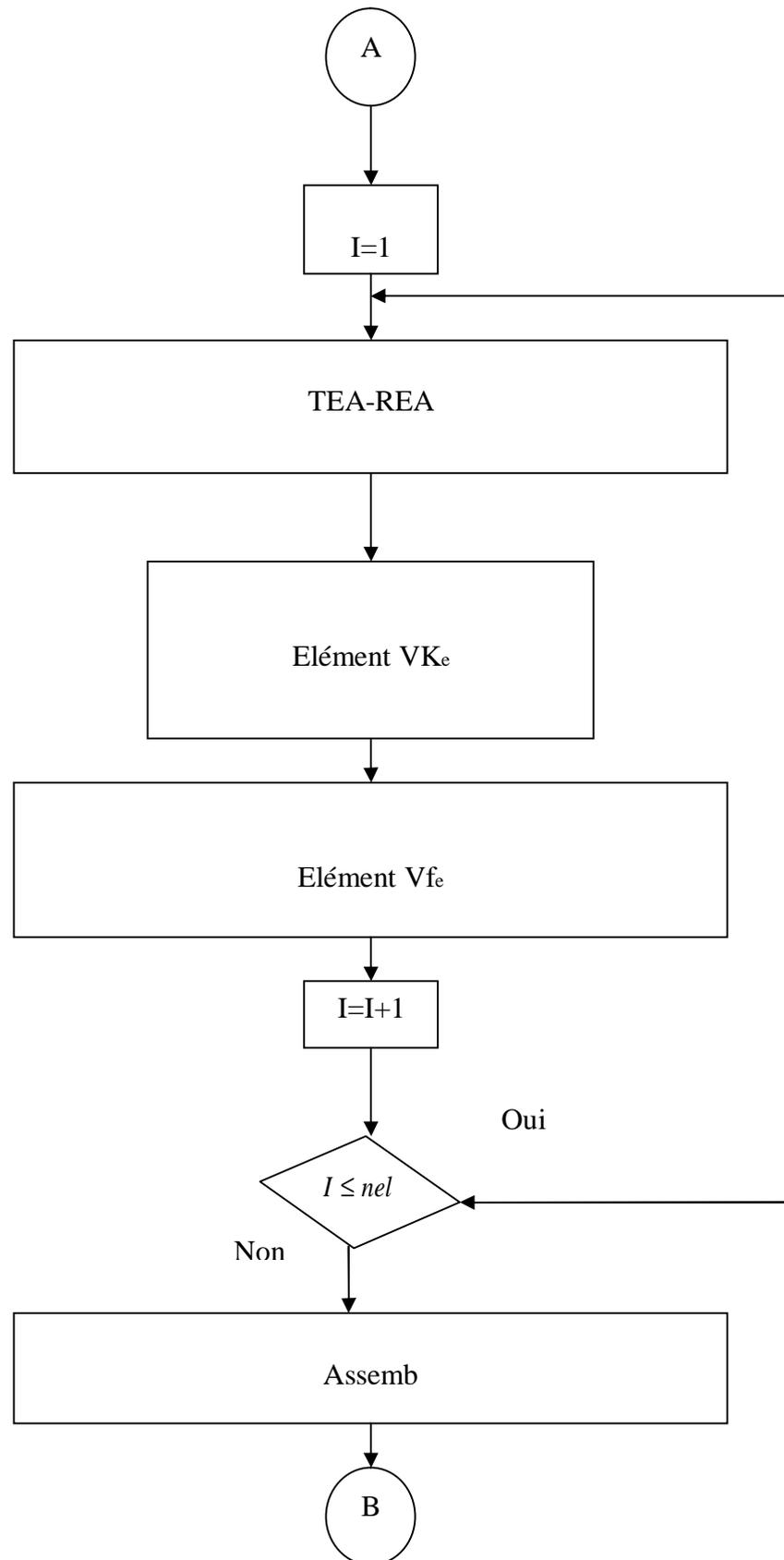
* La température critiques (T_{cr}) pour flambage thermique c'est la valeur minimale de λ_{cr} .

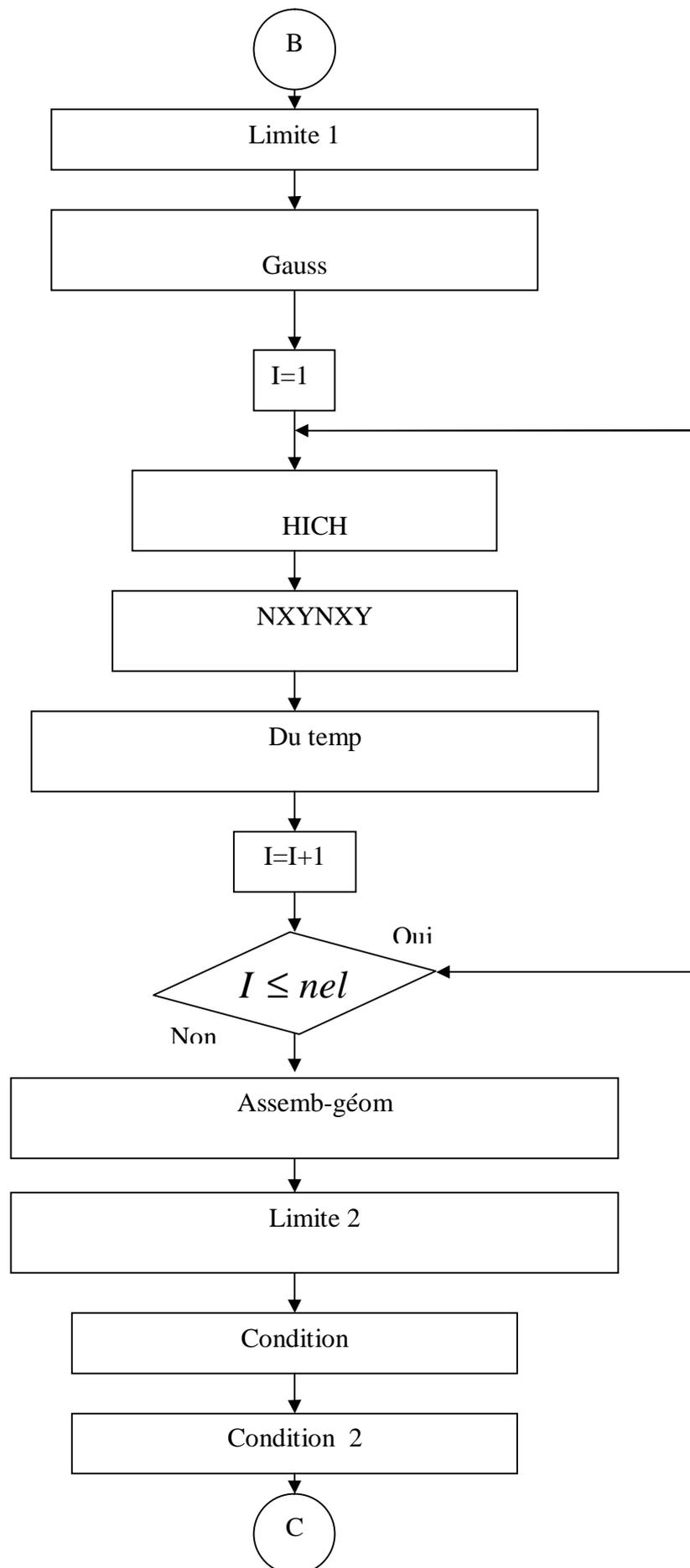
2-i)- Présentation des résultats :

Il est habituel d'imprimer les données dans un fichier sortie, à la fois pour vérification et interpréter les résultats. De plus, on doit imprimer les valeurs propres 'charge critique pour flambage mécanique (N_{cr}) et températures critiques pour flambage thermique (T_{cr})'.

III-5)- ORGANIGRAMME:







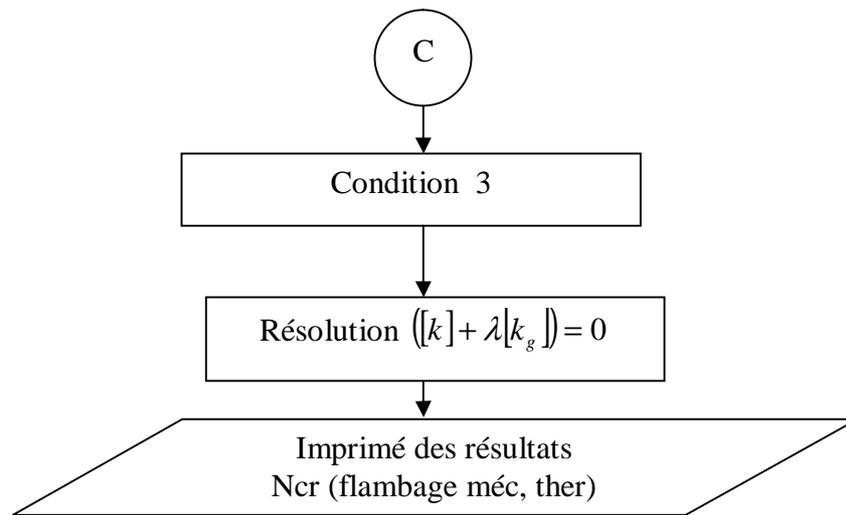


Figure (III-2): Organigramme globale

Tableau (3, 1): Tableau des Subroutines

Subroutine	Fonction
MAT-CONS	Calcul les matrices (A, B, D) et caractéristiques élastiques équivalents, les efforts dues à la température (N_x^*, N_y^*, N_{xy}^*)
TEA-REA	Calcul des coefficients des dilatations équivalentes (α_L, α_t)
Elément VK _e	Calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$
Elément V _f _e	Calcul des vecteurs des efforts dus soit à l'effet mécanique et température
Assemb	Calcul (matrice de rigidité $[k^e]_G$ et vecteurs des efforts) globale
Limite 1	Condition aux limites ($[k^e]_G$, vecteurs des efforts)
Gausse	Calcul des déplacements
HICH	Localisation
NXYNXY	Calcul des résultantes $(N_x^*, N_y^*, N_{xy}^*), (N_x, N_y, N_{xy})$
Du temp	Calcul de la matrice géométrique $[k^e_g]$ élémentaire
Assemb-géom	Calcul de la matrice géométrique $[k^e_g]_G$ globale
Limite 2	Conditions aux limites $[k^e_g]_G$
Condition	Elimination des lignes zéro pour $[k^e]_G, [k^e_g]_G$
Condition 2	Elimination des colonnes zéro pour $[k^e]_G$
Condition 3	Elimination des colonnes zéro pour $[k^e_g]_G$

BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **J.-M.BERTHELOT** 'Matériaux composite ' comportement mécanique et analyse des structures. 3éme édition Paris 1999.

[4] **J.F.IMBERT** 'Analyse des structures par éléments finis' cepadues-édition, décembre 1984.

[5] **C.ROCKEY-H.R.EVANS-D.W.GRIFFITHS-D.A.NETHERC** 'Introduction a la méthode des éléments finis, traduit par Claude Gomez' Edition Eyrolles' Paris 1979

[6] **JEAN-LOUIS BATOZ, GOURI DHATT** 'Modélisation des structures par éléments finis, poutre et plaque', Volume 2 – Edition Hermès –Paris 1990

[7] **FRANCOIS FREY, JAROSLAV JIROUSEK** ' Analyse des structures et milieu continus (Méthode des éléments finis)' Volume 6. L'école polytechnique fédérale de Lausanne 2001

[8] **U.TOPAL, U.UZMAN** ' Thermal buckling load optimisation of laminated composite plates, Thin-Walled Structures , Volume46,Issue 6,June 2008,Pages 667-675.

[9] **LIEN-WEN CHEN AND LEI-YI CHEN** ' Thermal buckling analysis of laminate cylindrical plates by the finite element methode,Computers &Structures, Volume 34,Issue 1,1990,Pages 71-78.

CHAPITRE IV

VALIDATION DE L'ÉLÉMENT FINI DANS FLAMBAGE MÉCANIQUE ET THERMIQUE

IV-1)- validation de l'élément finis dans l'analyse statique des plaques76
1-1)- barre isotrope : (en membrane)76
1-2)- Plaque carré soumise à une charge concentrée en centre78
IV-2)- validation de l'élément finis dans l'analyse flambage mécanique des plaques81
2-1)- Plaque isotrope81
2-2)- Plaque orthotrope85
IV-3)- validation de l'élément finis dans l'analyse flambage thermique des plaques87
3-1)- Plaque isotrope87
3-2)- Plaque orthotrope unidirectionnel suivant (x)91
IV-4) – Conclusion94

CHAPITRE IV : VALIDATION DE L'ELEMENT FINI DANS FLAMBAGE (MEC, THER)

IV-1)- validation de l'élément finis dans l'analyse statique des plaques :

1-1)- barre isotrope : (membrane)

On prend comme exemple une barre isotrope avec un coté fixe et une charge de compression à l'autre l'extrémité, figure (IV, 1).

$$f=20\text{N}, E_t = E_l = 210.10^3 \text{ N/mm}^2, G_L = 80769 \text{ N/mm}^2, \nu_L = 0,3$$

Longueur $a=100 \text{ mm}$, Largeur $b=10\text{mm}$, hauteur = 1mm

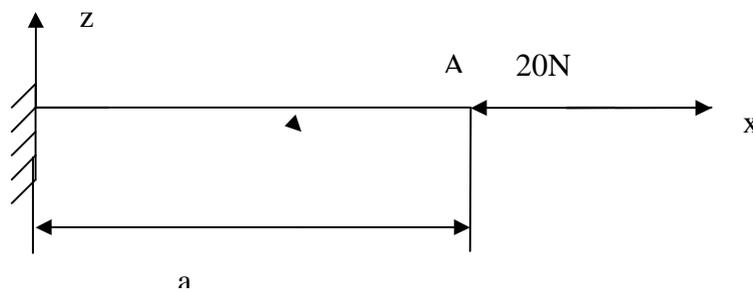


Figure (IV-1): compression d'une barre

* Solution analytique de déplacement du point (A) :

$$u = \frac{fl}{ES} = \frac{20.100}{210.10^3.10} = 0,95238.10^{-3} \text{ mm}$$

Tableau (4, 1): convergence de déplacement en fonction du nombre des éléments

	Maillage	E, E, F, F	Erreur (%)
Solution Analytique	-	$0,95238.10^{-3}$ mm	-
Présente étude	2	$0,93941.10^{-3}$ mm	1,36
	4	$0,94572.10^{-3}$ mm	0,69
	10	$0,94937.10^{-3}$ mm	0,316
	20	$0,95037.10^{-3}$ mm	0,21
	30	$0,95062.10^{-3}$ mm	0,184
	60	$0,95079.10^{-3}$ mm	0,166
	100	$0,95082.10^{-3}$ mm	0,163
	200	$0,95084.10^{-3}$ mm	0,161

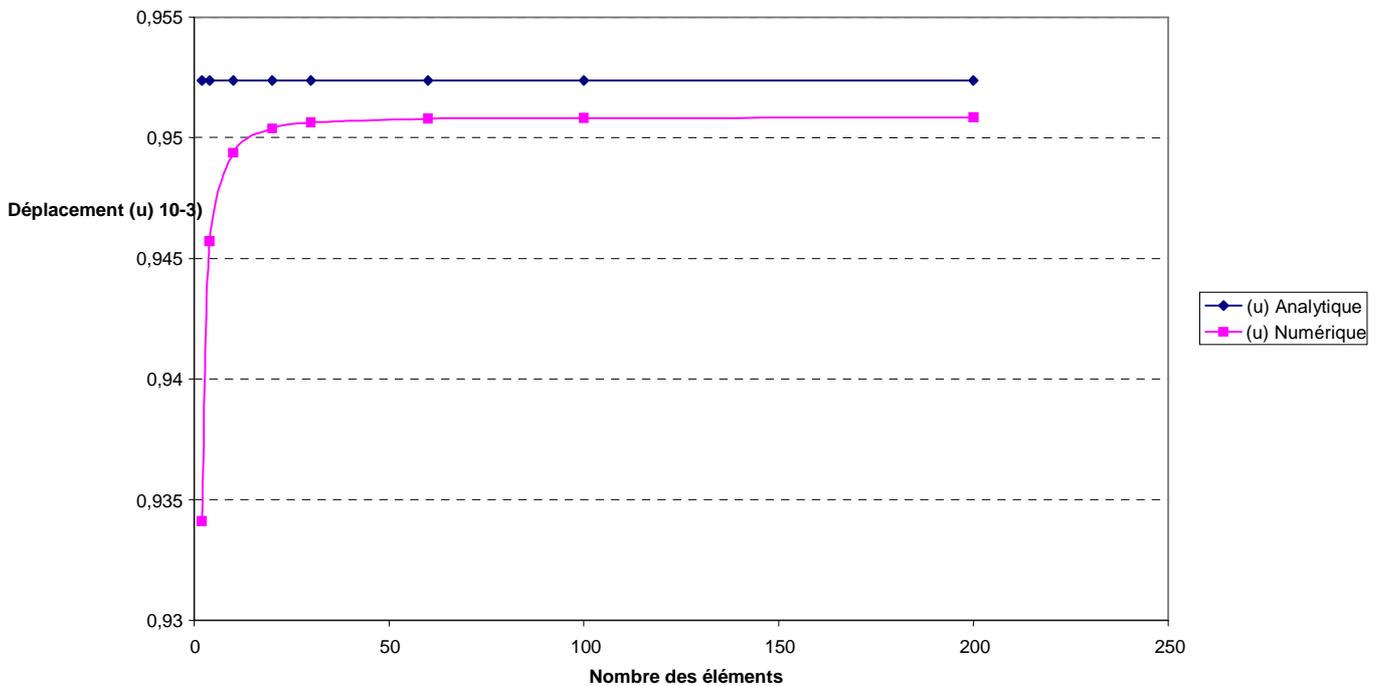


Figure (IV-2) Variation de (u) en fonction du nombre des éléments

La courbe de la figure (IV-2) montre la convergence de la valeur du déplacement de la section (B) par comparaisons à la valeur analytique.

Quand le nombre des éléments augmente les deux valeurs se rapprochent de plus en plus.

1-2)- Plaque carrée soumise à une charge concentrée au centre :

On prend deux cas d'exemple:

1^{er} Cas: les quatre cotés de la plaque sont complètement fixé avec une charge centrée au milieu.

2^{em} Cas: les quatre cotés de la plaque sont sur un appui simple avec une charge centrée au milieu, figure (IV, 3).

$$f=100N, E_t = E_l = 210.10^3 N / mm^2, G_{Lt} = 80769 N / mm^2, \nu_{Lt} = 0,3$$

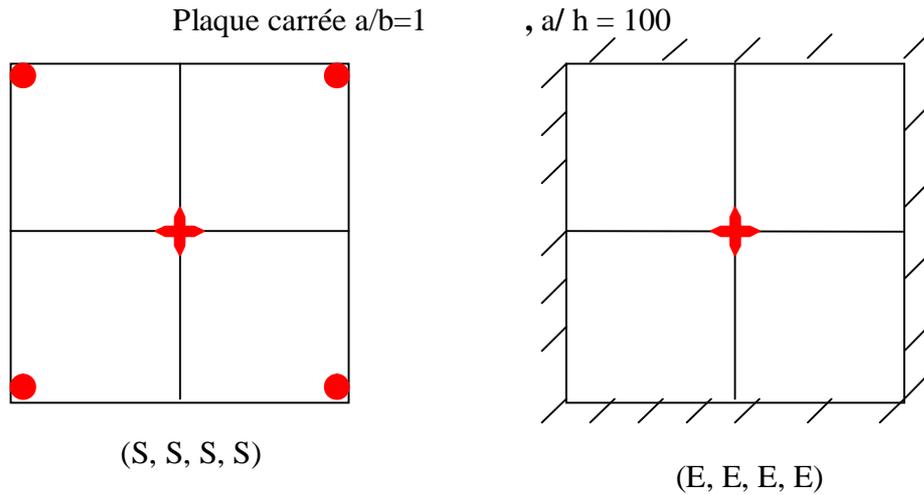


Figure (IV, 3): Plaque isotrope (EEEE), (SSSS)

* Solution analytique : $\bar{w} = \omega D / fa^2$

Tableau (4, 2): convergence de la flèche en fonction du nombre des éléments (SSSS), (EEEE)

	Maillage	SSSS	Erreur (%)	EEEE	Erreur (%)
Solution Analytique	—————	0,0116008	—————	0,005605	—————
Présente étude	2x2	0,011462	1,19	0,0052993	5,45
	4x4	0,011487	0,98	0,0054845	2,14
	8x8	0,011569	0,27	0,0055799	0,44
	10x10	0,011581	0,17	-	-
	12x12	0,011587	0,11	-	-
	14x14	0,011591	0,08	-	-
	16x16	0,011593	0,06	-	-
	18x18	0,011595	0,049	-	-

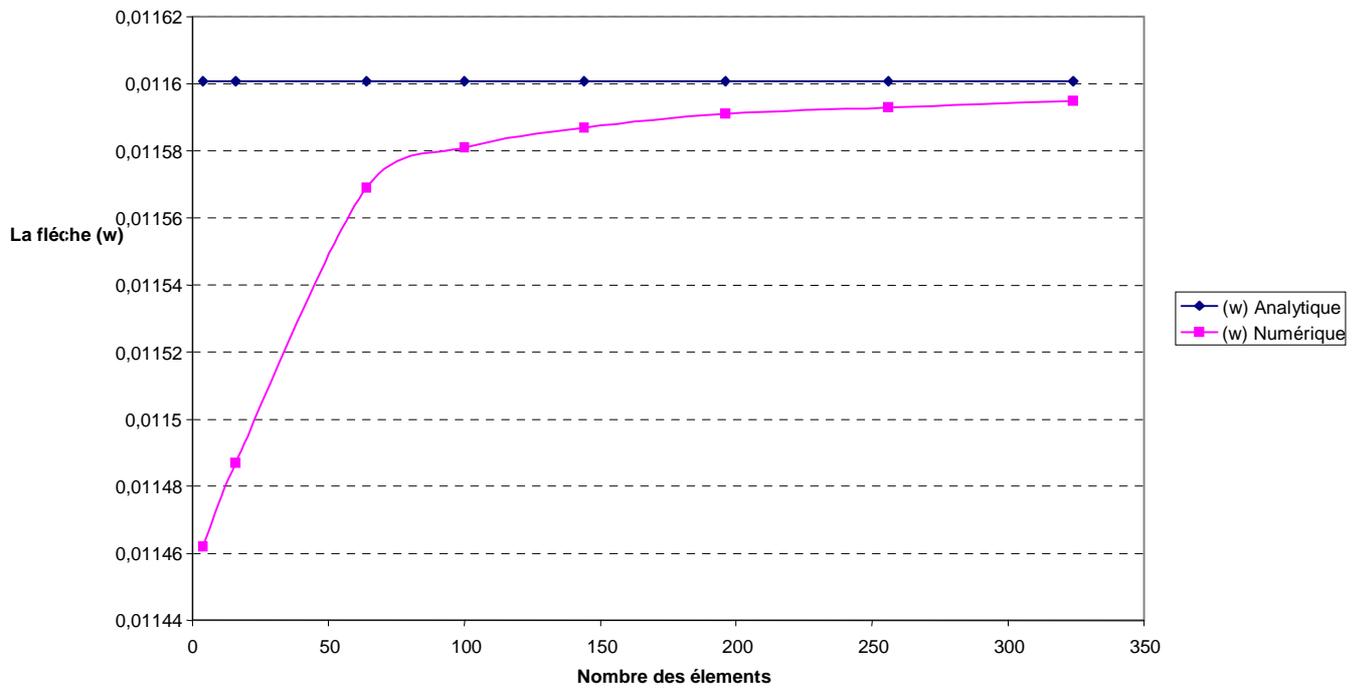


Figure (IV-4): Variation de flèche (w) en fonction du nombre d'éléments (ssss)

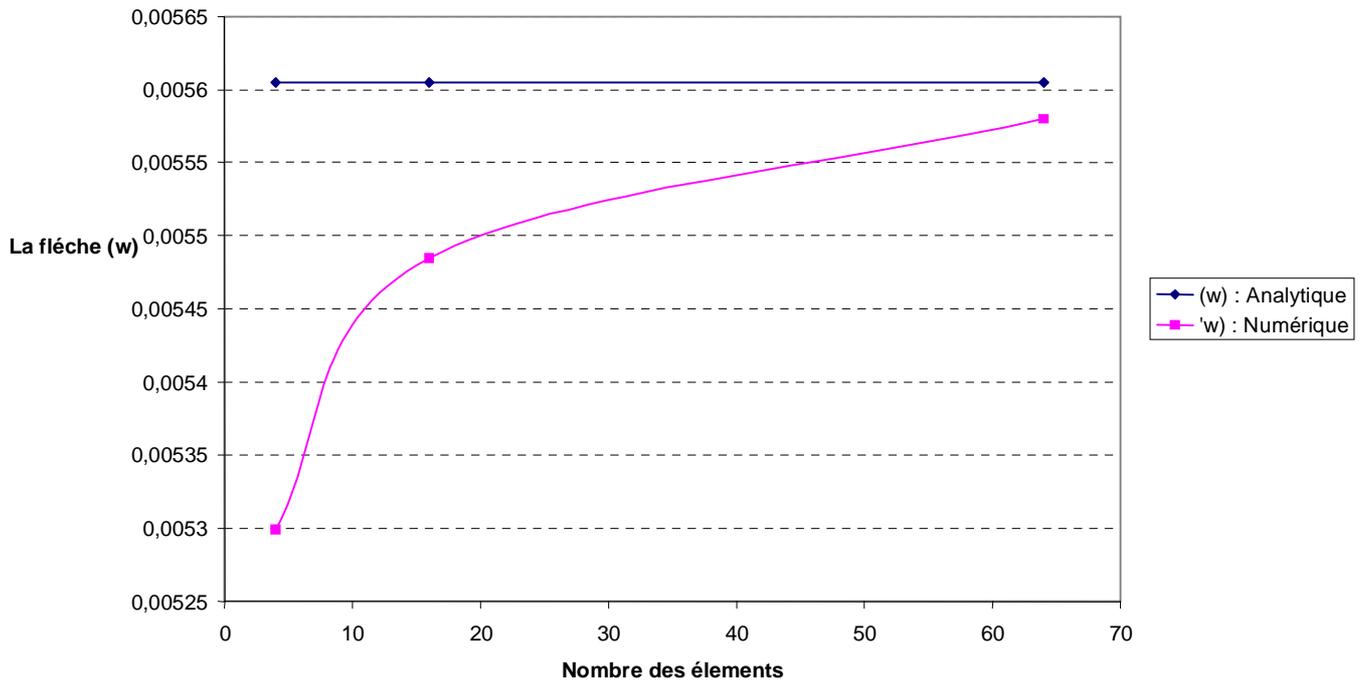


Figure (IV-5) : Variation de flèche en fonction du nombre d'éléments (EEEE)

Les courbes montrées sur les figures (IV-4) et (IV-5) montre la variation de la flèche au centre d'une plaque carrée respectivement pour simple appuis et encastree.

Les courbes montrent la précision de la convergence du résultat par comparaison au résultat analytique.

IV-2)- validation de l'élément finis dans l'analyse du flambage mécanique des plaques :

2-1)- Plaque isotrope : [10]

1-a)- Charge de compression uni axial suivant (x), simplement appuyée (SSSS)

On prend une plaque isotrope simplement appuyée sur les quatre cotés, figure (IV, 6).

* Conditions limites :

– (SSSS) : appuis simple sur quatre cotées

$x = \pm \frac{a}{2}$ les retenues (w) bloquées , $y = \pm \frac{b}{2}$ le retenue (w) bloquée

$E_l = E_t = 30.10^6 N/mm^2, G_{Lt} = 11,54.10^6 N/mm^2, \nu_{Lt} = 0,3$, $\frac{a}{b} = 1, \frac{a}{h} = 100$

- Solution analytique de flambage mécanique sens (x) : [10]

$$\sigma_{Cr} = (N_x)_{Cr} / h = \frac{k\pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2)b^2}$$

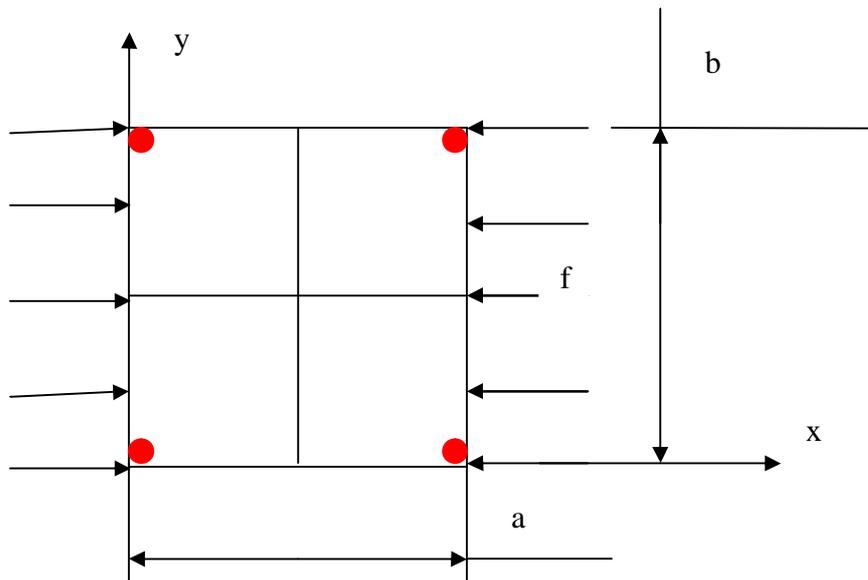


Figure (IV, 6): Plaque isotrope (SSSS)

Tableau (4.3) : $(N_x)_{Cr}$ minimal en fonction du nombre des éléments pour plaque isotrope (SSSS)

	Maillage	S, S, S, S	Erreur (%)
Solution Analytique [10]	-	1,084.10 ³ N	-
Présente étude	2x2	1,0182.10 ³ N	6,07
	4x4	1,0828.10 ³ N	0,11
	8x8	1,0846.10 ³ N	- 0,05

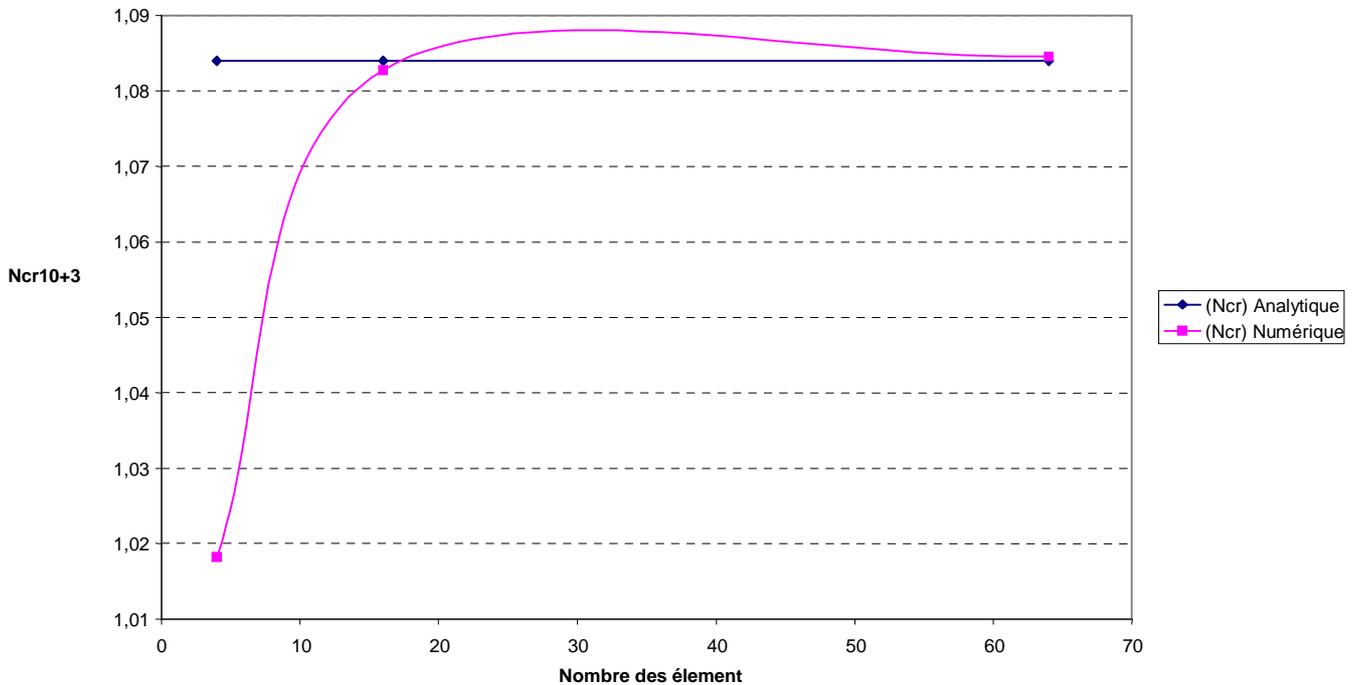


Figure (IV-7): Variation de Ncr en fonction du nombre d'éléments plaque isotrope, (SSSS)

1-b)- charge de compression uni axial suivant (x), simplement appuyée, coté libre (SSSL)

On prend une plaque isotrope simplement appuyée avec coté libre, figure (IV, 8).

* Conditions limites :

$$x = \pm \frac{a}{2} \quad \text{les retenues } (w) \text{ bloquée.}$$

$$y = 0 \quad \text{le retenue } (w) \text{ bloquée}$$

$$y = b \quad \text{les retenues sont libres}$$

$$E_l = E_t = 30.10^6 \text{ N/mm}^2, G_L = 12.10^6 \text{ N/mm}^2, \nu_L = 0,25$$

$$\frac{a}{b} = 1, \frac{a}{h} = 100$$

- Solution analytique de flambage mécanique, sens (x) :

$$\sigma_{Cr} = (N_x)_{Cr} / h = \frac{k\Pi^2 E h^2}{12(1-\nu^2) b^2}$$

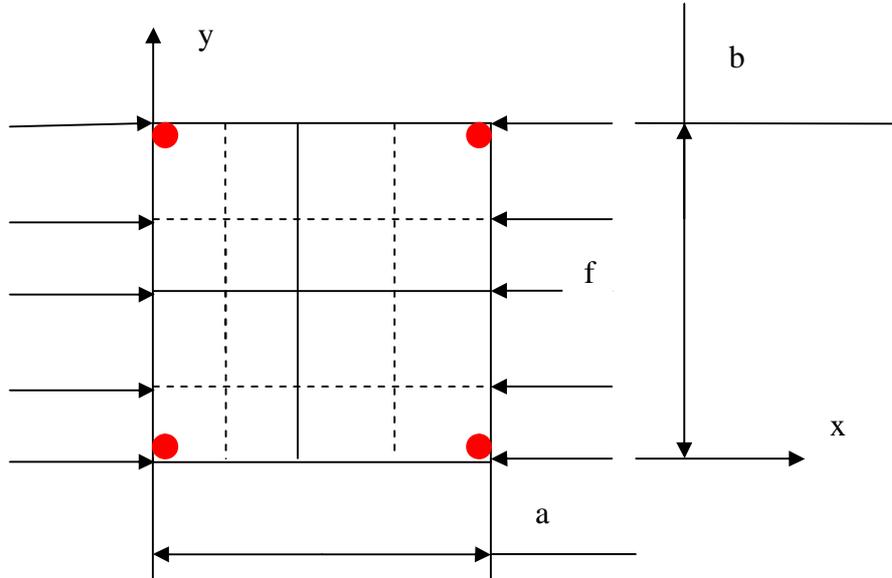


Figure (IV, 8): Plaque isotrope (SSSL)

Tableau (4, 4) : $(N_x)_{Cr}$ minimal en fonction du nombre des éléments (SSSL), cas (isotrope)

	Maillage	S, S, S, S	Erreur (%)
Solution Analytique [10]	-	$3,789.10^2 \text{ N}$	-
Présente étude	1x1	$3,0000.10^2 \text{ N}$	20,00
	2x2	$3,7403.10^2 \text{ N}$	1,12
	4x4	$3,7710.10^2 \text{ N}$	0,47
	8x8	$3,7743.10^2 \text{ N}$	0,387
	10x10	$3,7745.10^2 \text{ N}$	0,382
	16x16	$3,7746.10^2 \text{ N}$	0,380

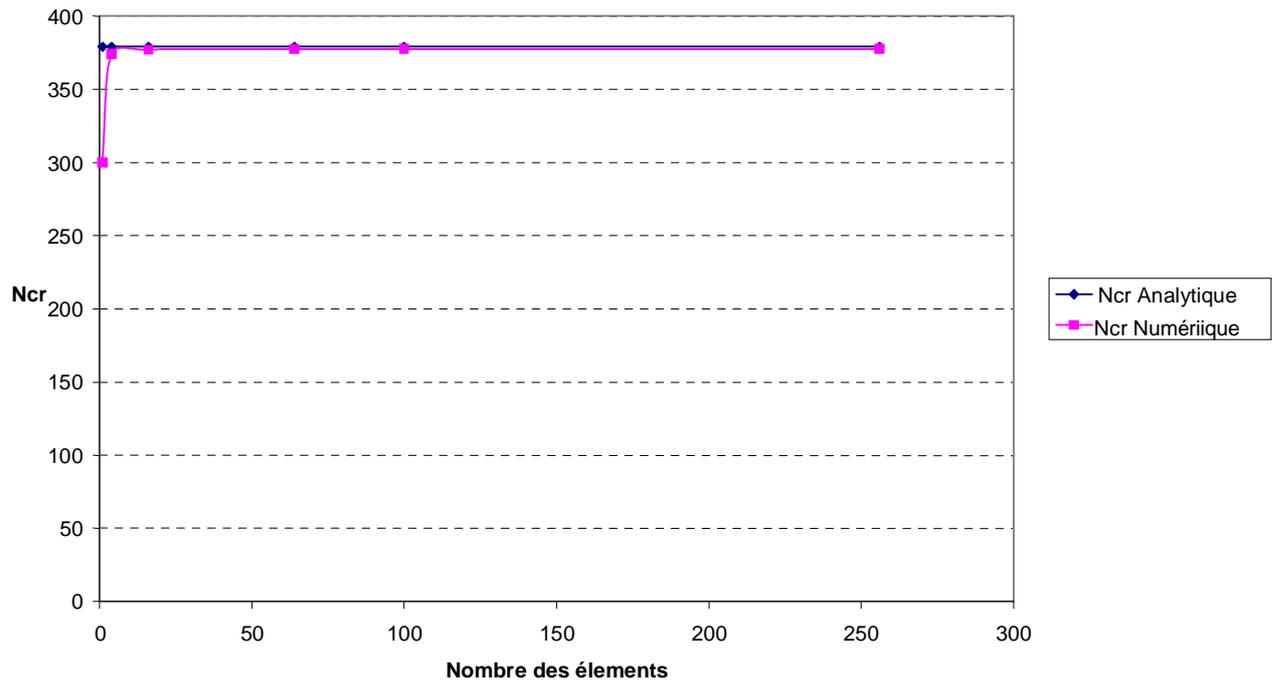


Figure (IV-9) : Variation de Ncr en fonction du nombre des éléments, plaque isotrope (SSSL)

Les figures (IV-7), (IV-9) représentent la variation de la charge critique (Ncr) en fonction du nombre des éléments avec divers conditions aux limites pour une plaque isotrope.

Les résultats montrent que les valeurs obtenues sont très proche l'une à l'autre et quand le nombre des éléments augmente les deux valeurs se rapprochent de plus en plus.

2-2)- Plaque orthotrope : [1]

2-a)- Charge de compression uni axial suivant (x), simplement appuyée (SSSS)

On prend une plaque orthotrope composée de six couche symétrique (90,-90, 0, 0, -90,90) en appuis simple aux quatre cotés avec une charge en 'compression'.

– (SSSS) : appuis simple sur quatre cotés

$x = \pm \frac{a}{2}$ les retenues (w) bloquées.

$y = \pm \frac{b}{2}$ le retenue (w) bloquée

$$E_l = 123.10^5 N/mm^2, E_t = 8,2.10^5 N/mm^2, G_{Lt} = 4,1.10^5 N/mm^2, \nu_{Lt} = 0,25$$

$$a/b=1, \quad a/h=19,0476$$

* Solution analytique de flambage mécanique, sens (x) :

$$N_{Cr} = \frac{\pi^2}{4a^2} [16D_{11} + 8(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4] : n=1, m=2$$

Tableau (4, 5) : $(N)_{Cr}$ minimal en fonction des éléments(SSSS), cas d'un stratifié (orthotrope)

	Maillage	S, S, S, S	Erreur (%)
Solution Analytique [1]	-	$2,38831.10^4 N$	-
Présente étude	2x2	$1,4449.10^4 N$	39,50
	4x4	$2,3545.10^4 N$	1,41
	8x8	$2,3877.10^4 N$	0,02
	10x10	$2,3883.10^4 N$	0,0004

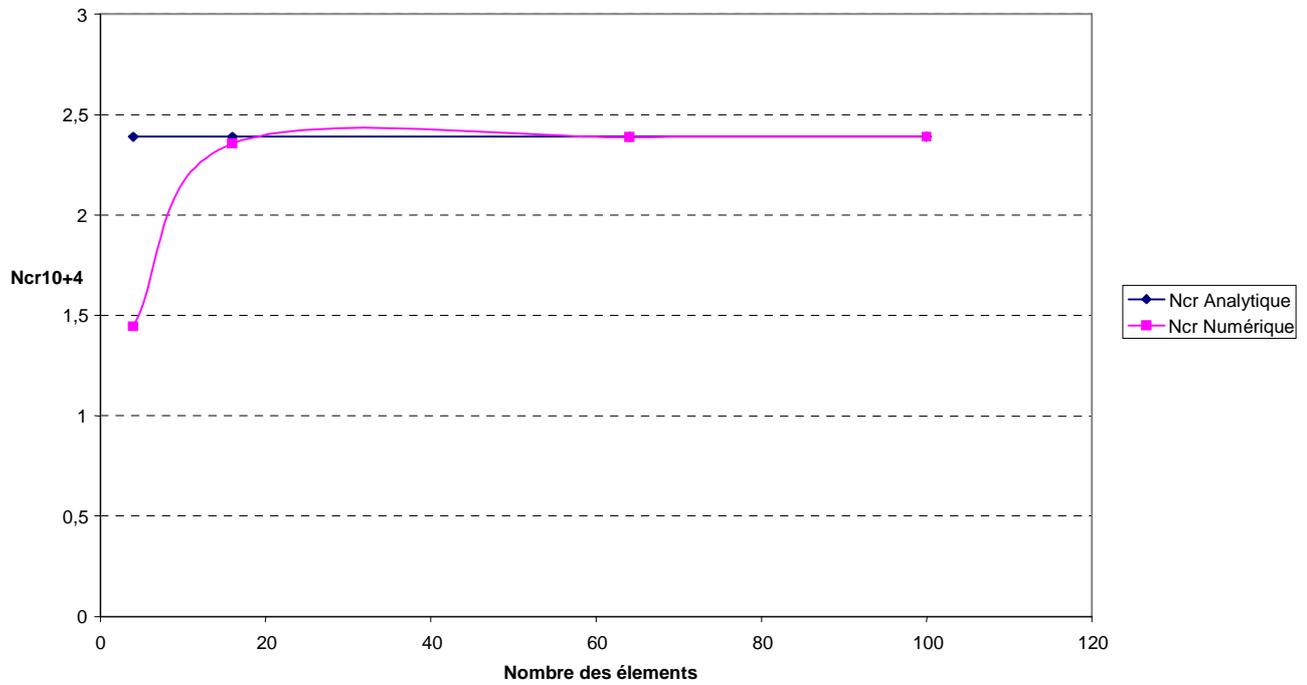


Figure (IV-10) : Ncr minimal en fonction du nombre des éléments cas d'un stratifié orthotrope(SSSS)

La figure (IV-10) représente la variation de la charge critique (Ncr) en fonction du nombre des éléments avec condition aux limites (SSSS) pour plaque orthotrope.

Les résultats montrent que les valeurs obtenues sont très proche l'une à l'autre (Analy, Numé) et quand le nombre des éléments augmente les deux valeurs se rapprochent de plus en plus.

IV-3)- validation de l'élément finis dans l'analyse du flambage thermique des plaques :

3-1)- Plaque isotrope : [11],[12]

1-a)- Effet de la température uniforme, blocage suivant (x): simplement appuyée (SSSS)

On prend une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS) aux quatre cotés avec blocage suivant l'axe (x=0 et x=a), c'est-à-dire que $N_y = \epsilon_x = 0$ figure (IV, 11).

* Solution analytique de flambage thermique pour plaque isotrope dans le sens

(x) uni axial, on peut donner par la relation suivant :

$$\text{Température critique : } \overline{\Delta T}_{Cr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{E_{eq} \alpha_{eq} t m^2} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2$$

* Conditions limites :

$x = \pm \frac{a}{2}$ les retenues (u, w) bloquées.

$y = \pm \frac{b}{2}$ le retenue (w) bloquée

$$E_l = E_t = 1.10^{-6} N/mm^2, G_L = 0,3846.10^{-6} N/mm^2, \nu_L = 0,3, \alpha_L = \alpha_t = 1.10^{-6} C^{-1}$$

$$\frac{a}{b} = 1, \frac{b}{h} = 100$$

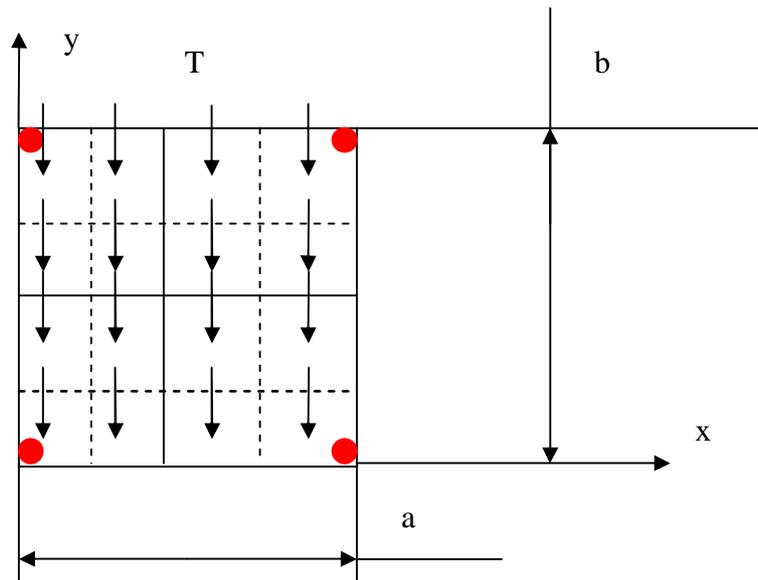


Figure (IV, 11): Plaque isotrope (SSSS)

Tableau (4, 6) : ΔT_{Cr} minimal en fonction du nombre des éléments (isotrope) uni axial

	Maillage	S, S, S, S	Erreur (%)
Sol-Analy [11]	-	$\Delta T_{Cr} = 253,16C^\circ$	-
Présente étude	2x2	237,58C°	6,15
	4x4	252,64C°	0,20
	8x8	253,06C°	0,039
	10x10	253,07C°	0,035

Le programme donne λ_{Cr} et $N_{Cr} = \lambda_{Cr} \cdot x N_x$ donc $\overline{\Delta T_{Cr}} = \frac{N_{Cr}}{E_{eq} \alpha_{eq} t}$

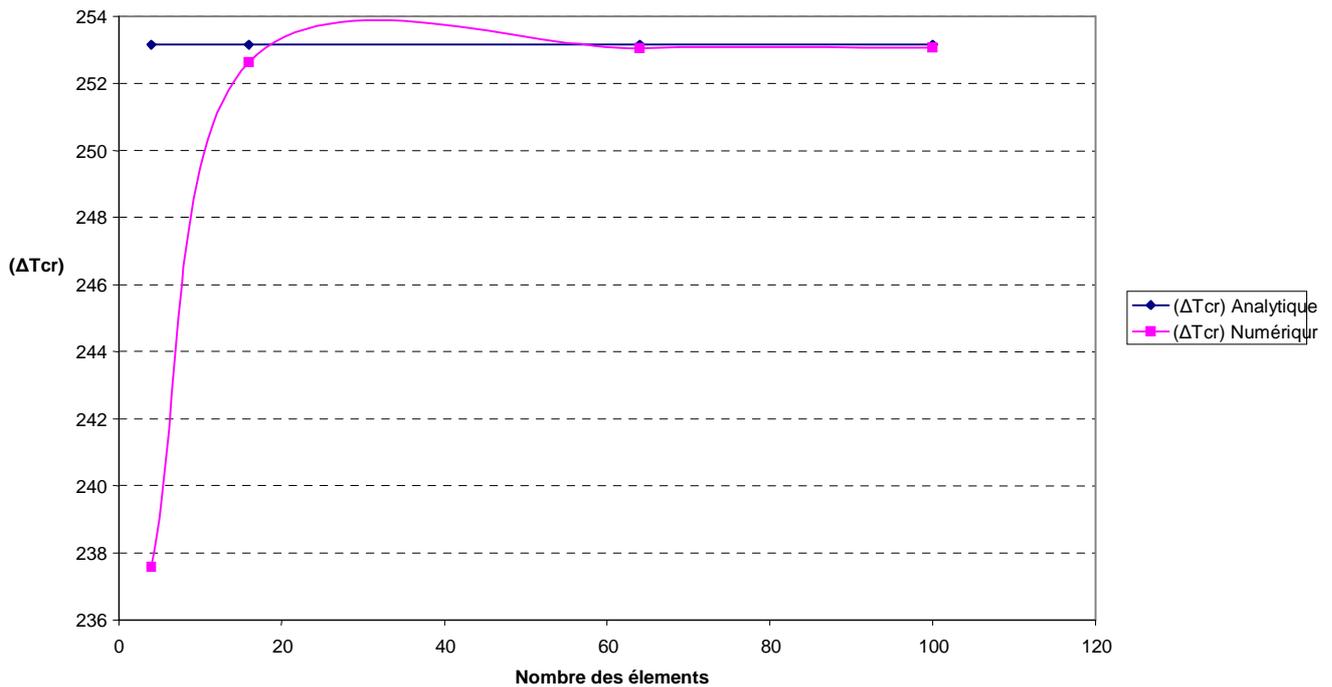


Figure (IV-12) : Variation (ΔT_{cr}) en fonction du nombre des éléments, plaque isotrope (uni axial)

1-b)- Effet de température uniforme, blocage suivant (xy): simplement appuyée (SSSS)

On prend une plaque isotrope simplement appuyée aux quatre cotés avec blocage suivant l'axe ($x=0$, $x=a$ et $y=0$ et $y=b$).

$$E_i = E_t = 1.10^{-6} N/mm^2, G_{Lt} = 0,3846.10^{-6} N/mm^2, \nu_{Lt} = 0,3, \alpha_L = \alpha_t = 1.10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\frac{a}{b} = 1, \frac{b}{h} = 100$$

* Conditions limites :

$$x = \pm \frac{a}{2} \quad \text{les retenues } (u, v, w) \text{ bloquées.}$$

$$y = \pm \frac{b}{2} \quad \text{les retenues } (v, w) \text{ bloquée}$$

Pour le flambage thermique (isotrope) suivant (x, y) bi axial ΔT_{Cr} minimal c'est la moitié de ΔT_{Cr} minimal uni axial (isotrope).

Donc la température critique minimale (bi axial) analytique :

$$\Delta T_{Cr} = 126.58 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Tableau (4, 7) : ΔT_{Cr} minimal en fonction du nombre des éléments (isotrope) bi axial

Solu-Analytique [11]	Mastsunaga	Le-Chung et Shih		Maillage	Présente étude	Erreur (%)
	Burton	[12]				
$\Delta T_{Cr} = 126.58 \text{ } ^\circ\text{C}$	126.40 $^\circ\text{C}$	Maillage	résultat	-	-	-
		2x2	126,60	2x2	126,3194 $^\circ\text{C}$	0,20
		4x4	126,50	4x4	126,53 $^\circ\text{C}$	0,039
		6x6	126,50	8x8	126,53 $^\circ\text{C}$	0,039
		-	-	10x10	126,53 $^\circ\text{C}$	0,039

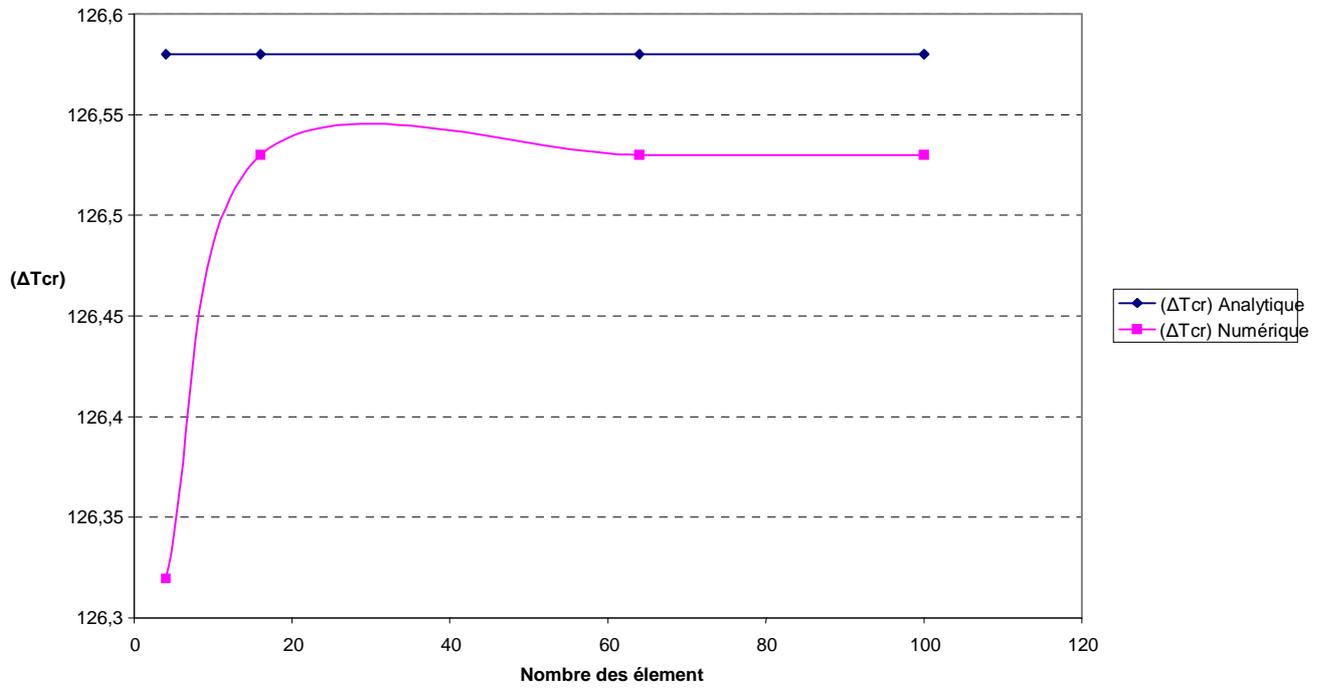


Figure (IV-13)- Variation ΔT_{cr} en fonction du nombre des éléments, plaque isotrope (bi axial)

3-2)- Plaque orthotrope unidirectionnel suivant (x) : [11]

2-a)- Effet de la température uniforme, blocage suivant (x): simplement appuyée(SSSS)

On prend une plaque orthotrope en appuis simple aux quatre cotés avec blocage suivant l'axe ($x=0$ et $x=a$), c'est-à-dire que $N_y = \varepsilon_x = 0$ figure (IV, 14).

$$E_L = 228GPa, E_t = 145GPa, G_{Lt} = 48,3GPa, \nu_{Lt} = 0,23, \theta = 0^\circ$$

$$\alpha_L = 5,76 \cdot 10^{-6}, \alpha_t = 19,8 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \frac{a}{b} = 1, \frac{a}{h} = 400$$

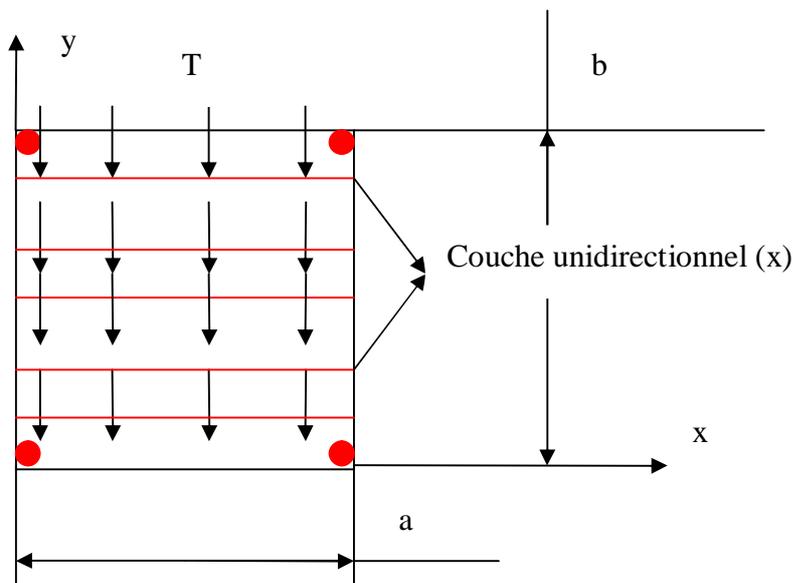


Figure (IV, 14): Plaque orthotrope unidirectionnel (SSSS)

* Conditions limites :

$x = \pm \frac{a}{2}$ les retenues (u, w) bloquées.

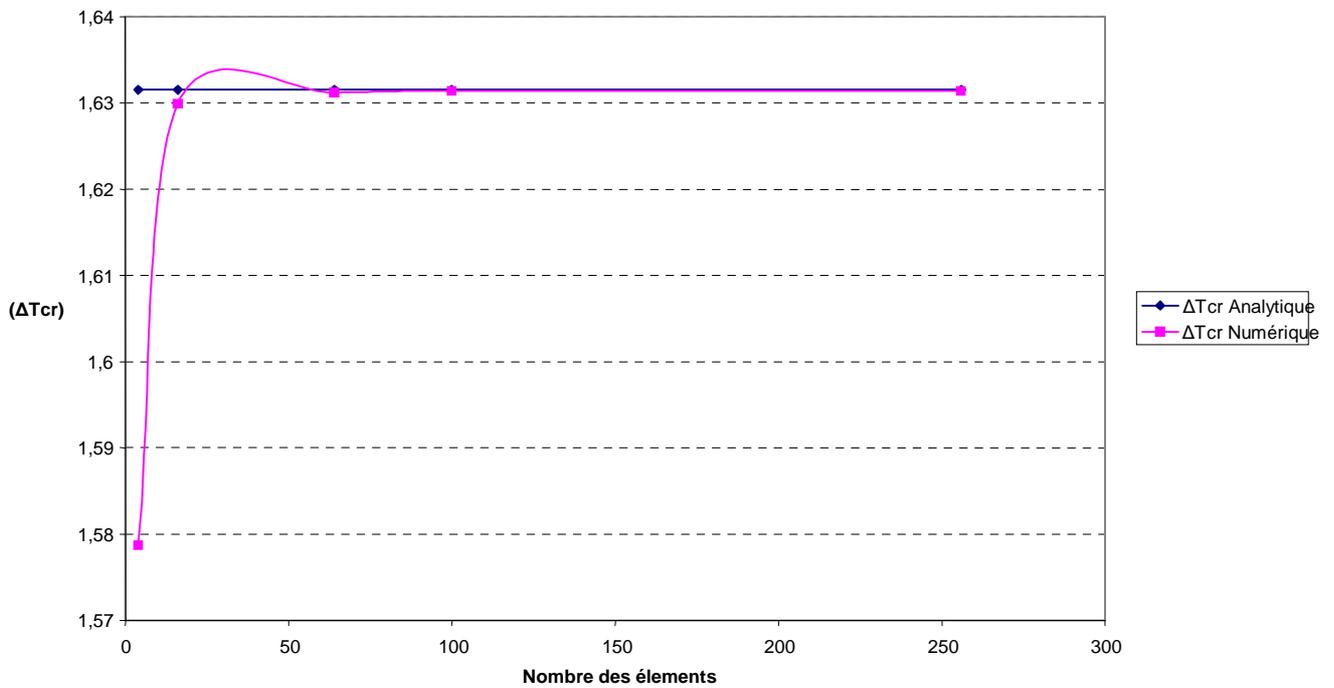
$y = \pm \frac{b}{2}$ le retenue (w) bloquée

*Solution analytique :

$$\overline{\Delta T} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})\alpha_1} \left\{ m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 2 \left[\nu_{21} + 2 \left(2(1-\nu_{12}\nu_{21}) \frac{G_{12}}{E_1} \right) \right] + \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{1}{m^2} \right\} \left(\frac{t}{b} \right)^2$$

Tableau (4, 8) : ΔT_{Cr} minimal en fonction du nombre des éléments (orthotrope) uni axial

	Maillage	S, S, S, S	Erreur (%)
Solu-Analytique [11]	-	$\Delta T_{Cr} = 1,631553C^\circ$	-
Présente étude	2x2	$1,5787C^\circ$	3,23
	4x4	$1,6299C^\circ$	0,1
	8x8	$1,6312C^\circ$	0,02
	10x10	$1,6314C^\circ$	0,009
	16x16	$1,6314C^\circ$	0,009

Figure (IV-15) : Variation ΔT_{Cr} en fonction du nombre des éléments, plaque orthotrope (uniaxiale)

2-b)- Effet de la température uniforme, blocage suivant (x): simplement appuyée (SSSS) pour une plaque stratifiée. On prend quatre couche orthotrope en appuis simple aux quatre cotés avec blocage suivant l'axe ($x=0$ et $x=a$),

$$E_L = 228GPa, E_t = 145GPa, G_{Lt} = 48,3GPa, \nu_{Lt} = 0,23, (90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$$

$$\alpha_L = 5,76.10^{-6}, \alpha_t = 19,8.10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \frac{a}{b} = 1, \frac{b}{h} = 100$$

* Conditions limites :

$$x = \pm \frac{a}{2} \quad \text{les retenues } (u, w) \text{ bloquées.}$$

$$y = \pm \frac{b}{2} \quad \text{le retenue } (w) \text{ bloquée}$$

* Solution analytique est : $\Delta T_{Cr} = 20,458C^\circ$

Tableau (4, 9) : ΔT_{Cr} minimal en fonction des éléments (orthotrope) uni axial (stratifié) ($90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ$)

	Maillage	S, S, S, S	Erreur (%)
Solu-Analy [11]	-	$\Delta T_{Cr} = 20,458C^\circ$	-
Présente étude	2x2	19,209C°	6,10
	4x4	20,424C°	0,16
	6x6	20,455C°	0,01
	8x8	20,459C°	-0,004

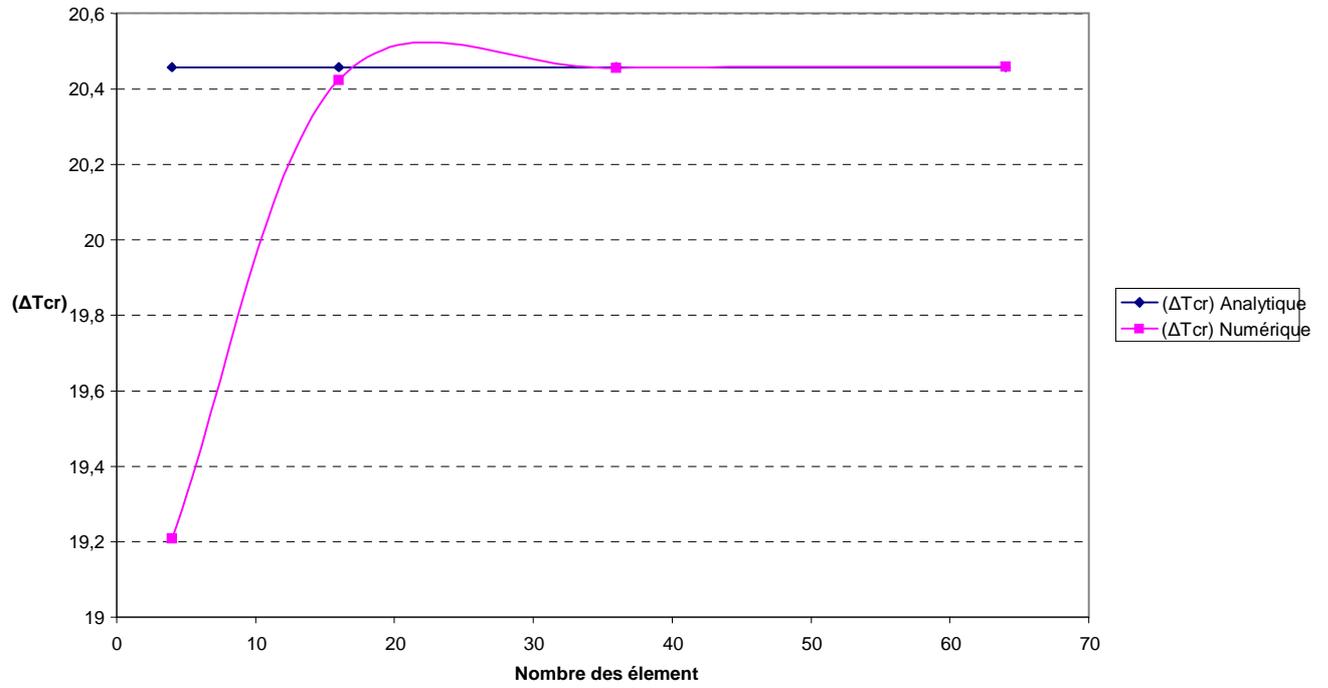


Figure (IV-16) : Variation ΔT_{cr} en fonction du nombre des éléments, plaque orthotrope stratifiée (uniaxial)

2-c)- Effet de la température uniforme: simplement appuyée (SSSS/xy) et encastrement (EEEE), pour une plaque stratifiée.

Matériaux 1: $E_L = 181GPa, E_t = 10,3GPa, G_{Lt} = 7,17GPa, \nu_{Lt} = 0,28, \left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \theta \right)_2$ et $(+\theta_2, -\theta_2)_s$
 $\alpha_L = 0,02 \times 10^{-6}, \alpha_t = 22,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\frac{a}{b} = 2, \frac{b}{h} = 150$

Matériaux 2: $E_L = 142GPa, E_t = 10,3GPa, G_{Lt} = 7,2GPa, \nu_{Lt} = 0,27, \left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \theta \right)_2$ et $(+\theta_2, -\theta_2)_s$
 $\alpha_L = -0,09 \cdot 10^{-6}, \alpha_t = 27 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\frac{a}{b} = 2, \frac{b}{h} = 150$

Tableau (4, 10) : ΔT_{Cr} en fonction des éléments (orthotrope) uni axial (stratifié) $\left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \theta \right)_2$, $(+\theta_2, -\theta_2)_s$

Matériaux	angle	C-aux limites	L-Chung,S-Yao , C-Yuan [12]	Maillage	Présent étude	Erreur
Matériaux : 1 $\left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \theta \right)_2$	55°	(EEEE)	83,8176°C	8X8	83,8460°C	-0,033
	62°	(SSSS/xy)	38,3852°C	10x10 16x16	83,7900°C 38,2453°C	0,032 0,36
Matériaux : 1 $(+\theta_2, -\theta_2)_s$	54°	(EEEE)	65,3033°C	8X8	65,4391°C	-0,20
	59°	(SSSS/xy)	31,6241°C	10x10 16x16	65,2700°C 31,0281°C	0,05 1,88
Matériaux : 2 $\left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \theta \right)_2$	52°	(EEEE)	88,9574°C	8X8	88,9878°C	-0,034
	56°	(SSSS/xy)	44,6363°C	10x10 16x16	88,9234°C 44,4517°C	0,038 0,41
Matériaux : 2 $(+\theta_2, -\theta_2)_s$	51°	(EEEE)	70,9225°C	8X8	70,9665°C	-0,062
	54°	(SSSS/xy)	36,2904°C	10x10 16x16	70,8629°C 35,5122°C	0,075 2,14

IV-4) – Conclusion :

Afin de valider la convergence de notre modèle, une étude a été effectuée pour comparer les résultats obtenu par notre modèle et au les solutions analytique et quelque résultat dans les littératures.

Les effets qu'ont été considéré sont :

- * Analyse statique (membrane, flexion).
- * Flambage mécanique pour plaque (isotrope, orthotrope).
- * Flambage thermique pour plaque (isotrope, orthotrope).

Les résultats montrent que les valeurs obtenues sont très proche l'une à l'autre (Analy, Num) et quand le nombre des éléments augmente les deux valeurs se rapprochent de plus en plus et que l'erreur sera très petite.

Après ces résultats en peut dire que le modèle et notre programme donne des résultats acceptable.

BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **J.-M.BERTHELOT** 'Matériaux composite ' comportement mécanique et analyse des structures. 3éme édition Paris 1999.
- [10] **S.P.TIMOSHENKO, J.N.GOODIER** ' Théorie des l'élasticité résistance des matériaux', 2émé édition Dunod Paris 1966
- [11] **ROBERT M. JONES**' Thermal buckling of heated unidirectional and symmetric cross-ply laminated fiber-reinforced composite uniaxial in plane restrained simply supported rectangular plate, composite Part A: Applied Science and Manufacturing,, Volume 36,Issue 10,October 2005,Pages 1355-1367.
- [12] **LE-CHUNG SHIAU, SHIH-YAO KUO, CHENG-YUAN CHEN**' Thermal Buckling behavior of composite laminated plate, composite Structures, Volume 92,Issue 2,Junuar 2010,Pages 508-514.

CHAPITRE V

ETUDE PARAMETRIQUE

V -1)- Introduction95
V -2)- Effet de l'orientation des fibres pour différentes conditions aux limites95
V -3)- Effet du rapport géométrique (a/b) sur la température critique99
V -4)- Effet du rapport d'anisotropie (E_1/E_2) sur la température critique106
V -5)- Effet du rapport coefficient de dilatation ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$) sur la température critique	..113
V -6)- Effet de nombre des couches sur la température critique117
V -7)- Conclusion121

CHAPITRE V : ETUDE PARAMETRIQUE

V -1)- Introduction :

Cette étude est réalisée sur des plaques stratifiées rectangulaires minces symétrique en matériaux composites à des fibres unidirectionnels pour déterminé la température critique de flambage.

Pour faire cette étude, on a choisit un matériau composite avec les caractéristiques élastiques et coefficients des dilatations suivant :

$$E_L = 204Gpa, E_t = 18,5Gpa, G_{LT} = 5,6Gpa, \nu_t = 0,23$$

$$\alpha_{1L} = 6,1 \times 10^{-6} / C^\circ, \alpha_t = 30,3 \times 10^{-6} / C^\circ$$

Avec : a/b=1 et a/h=100

Cette plaque est constituée d'un nombre de couches égal à quatre $[\theta, -\theta, -\theta, \theta]$.

Les angles d'orientation choisis sont par ordre comme suit: (0° jusqu'a 90°) avec des conditions aux limites différents.

La plaque est discrétisée en (16x16) éléments, soit au total 256 nœud.

V -2)- Effet de l'orientation des fibres pour différentes conditions aux limites :

Cette étude basé sur un stratifié symétrique $[\theta, -\theta, -\theta, \theta]$ quatre couche :

Les conditions aux limites que nous avons choisies sont :

E: Encastrement, S: Simple appuis, L: Libre

a) – (EEEE)

$x = \pm \frac{a}{2}$ les retenues $(u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_{xy})$ bloquées.

$y = \pm \frac{b}{2}$ les retenues $(u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_{xy})$ bloquées.

b) – (SSSS/x) blocage dans le sen (x)

$x = \pm \frac{a}{2}$ les retenues (u, w) bloquées.

$y = \pm \frac{b}{2}$ le retenues (w) bloquée

c) – (SLSL) blocage dans le sen (x)

$x = \pm \frac{a}{2}$ les retenues (u, w) bloquées.

$y = \pm \frac{b}{2}$ le retenues sont libres.

d) – (SSSS/xy) blocage dans les sens(x,y)

$x = \pm \frac{a}{2}$ les retenues (u, w) bloquées.

$y = \pm \frac{b}{2}$ les retenues (v, w) bloquées.

Tableau (5-1) : Variation de ΔT_{cr} en fonction de l'angle d'orientation des fibres et les conditions aux limites

Tcr C- limites	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
EEEE	35,23°C	35,40°C	32,069°C	30,66°C	32,069°C	35,40°C	35,23°C
SSSS/(x)	15,165°C	17,06°C	22,75°C	29,60°C	32,936°C	25,789°C	21,846°C
SLSL/(x)	12,18°C	10,76°C	7,11°C	3,72°C	2,19°C	2,284°C	2,5827°C
SSSS/(xy)	10,63°C	11,51°C	13,63°C	14,83°C	13,63°C	11,51°C	10,63°C

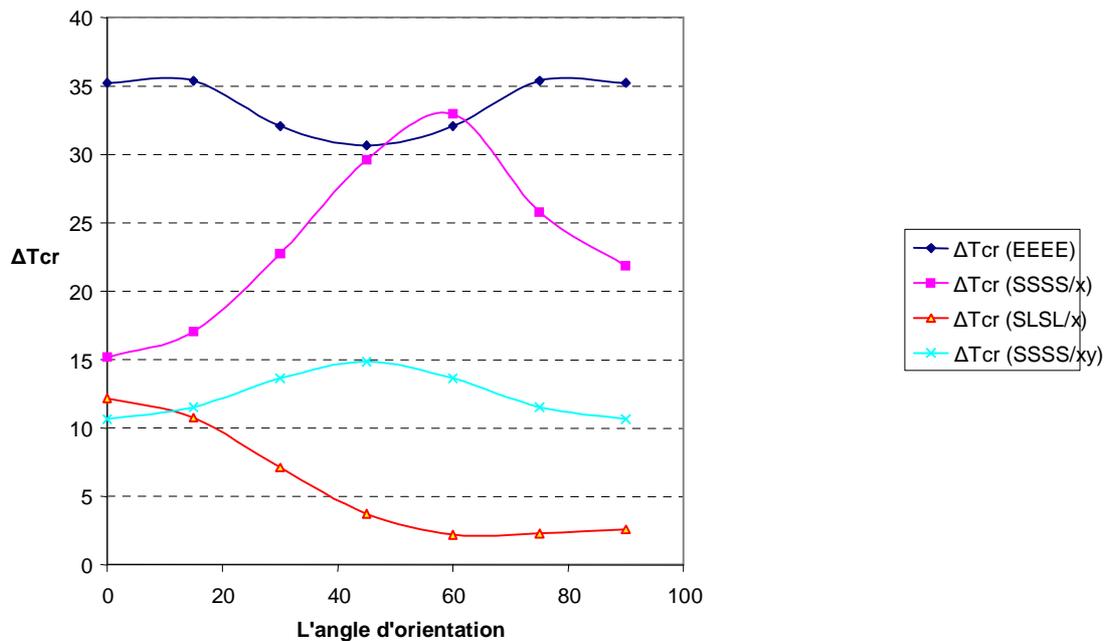


Figure (V-1): Variation de ΔT_{cr} en fonction de l'angle d'orientation des fibres et les conditions aux limites

Les figures (V-1), montrent l'influence de l'angle de stratification ($\Theta, -\Theta, -\Theta, \Theta$) et différents conditions aux limites sur T_{cr} .

On trouve les résultats obtenus dans le tableau (5-1).

* On remarque, sur les conditions aux limites (EEEE) et différent angle (Θ), que les valeurs de ΔT_{cr} sont symétriques par rapport l'angle $\Theta=45^\circ$, puis elle atteint une valeur minimale.

- Pour $\Theta=0^\circ, 45^\circ$ ΔT_{cr} diminue

- Pour $\Theta=45^\circ, 90^\circ$ ΔT_{cr} augmente

* Sur les conditions aux limites (SSSS/x) blocage dans le sens (x), on remarque un changement de ΔT_{cr} lorsque l'angle (Θ) atteint à 60° , puis c'est une valeur maximale.

- Pour $\Theta=0^\circ, 60^\circ$ ΔT_{cr} augmente

- Pour $\Theta=60^\circ, 90^\circ$ ΔT_{cr} diminue

* Sur les conditions aux limites (SLSL/x) blocage dans le sens (x), on remarque un changement de ΔT_{cr} lorsque l'angle (Θ) atteint à 60° , puis c'est une valeur minimale.

- Pour $\Theta=0^\circ, 60^\circ$ ΔT_{cr} diminue avec valeur maximal à $\Theta=0^\circ$

- Pour $\Theta=60^\circ, 90^\circ$ ΔT_{cr} augmente

* On remarque, Sur les conditions aux limites (SSSS/xy) blocage dans le sens (x, y), et différent angle (Θ), que les valeurs de ΔT_{cr} sont symétrique par rapport l'angle $\Theta=45^\circ$, puis c'est une valeur maximale.

- Pour $\Theta=0^\circ, 45^\circ$ ΔT_{cr} augment

- Pour $\Theta=45^\circ, 90^\circ$ ΔT_{cr} diminue

V -3)- Effet du rapport géométrique (a/b) :

a)-Conditions aux limites : (EEEE) encastrement sur les quatre cotés.

On prend un stratifié symétrique $[\theta, -\theta, -\theta, \theta]$ avec quatre couche, en fixée (b) et en varie (a).

Tableau (5-2) : Variation de ΔT_{cr} en fonction (a/b), appuis (EEEE)

angles	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
a/b=1	35,23°C	35,40°C	32,069°C	30,66°C	32,069°C	35,40°C	35,23°C
a/b=2	11,95°C	12,48°C	15,074°C	21,28°C	28,51°C	31,00°C	31,43°C
a/b=4	9,69°C	9,85°C	12,55°C	20,35°C	27,45°C	29,93°C	30,50°C
a/b=8	9,10°C	9,72°C	12,22°C	20,099°C	27,21°C	29,72°C	30,46°C

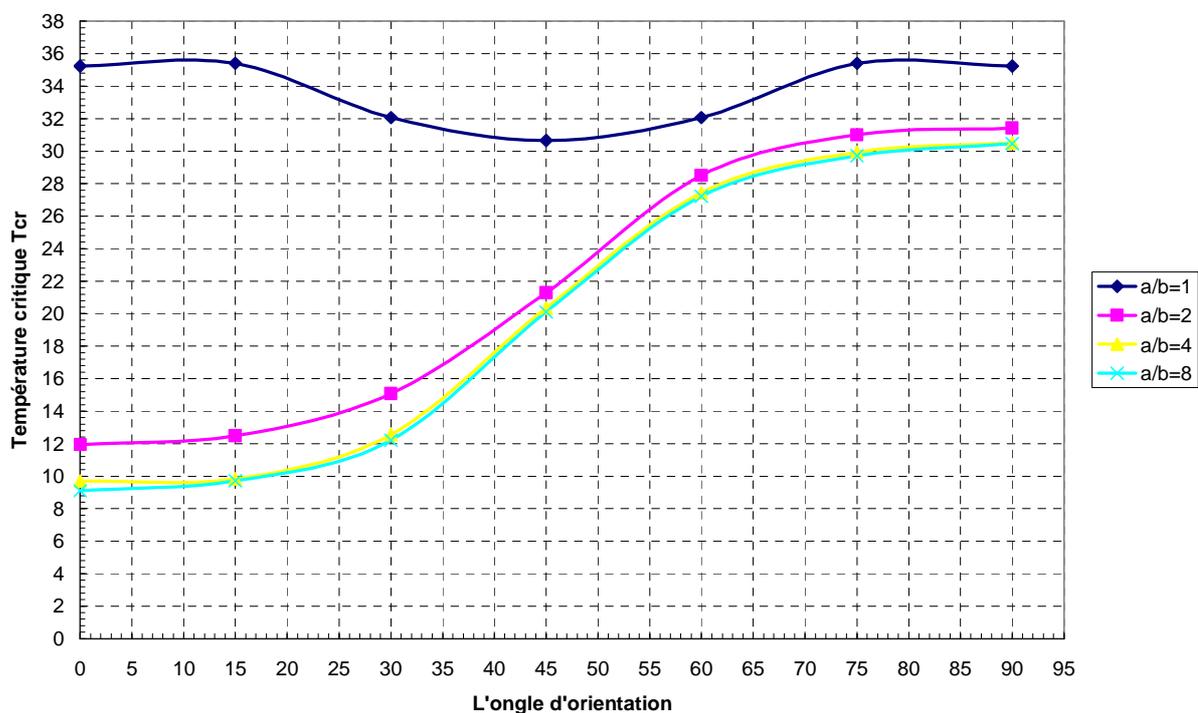


Figure (V-2): Variation de ΔT_{cr} pour différent rapport a/b en fonction l'angle d'orientation des fibres (EEEE)

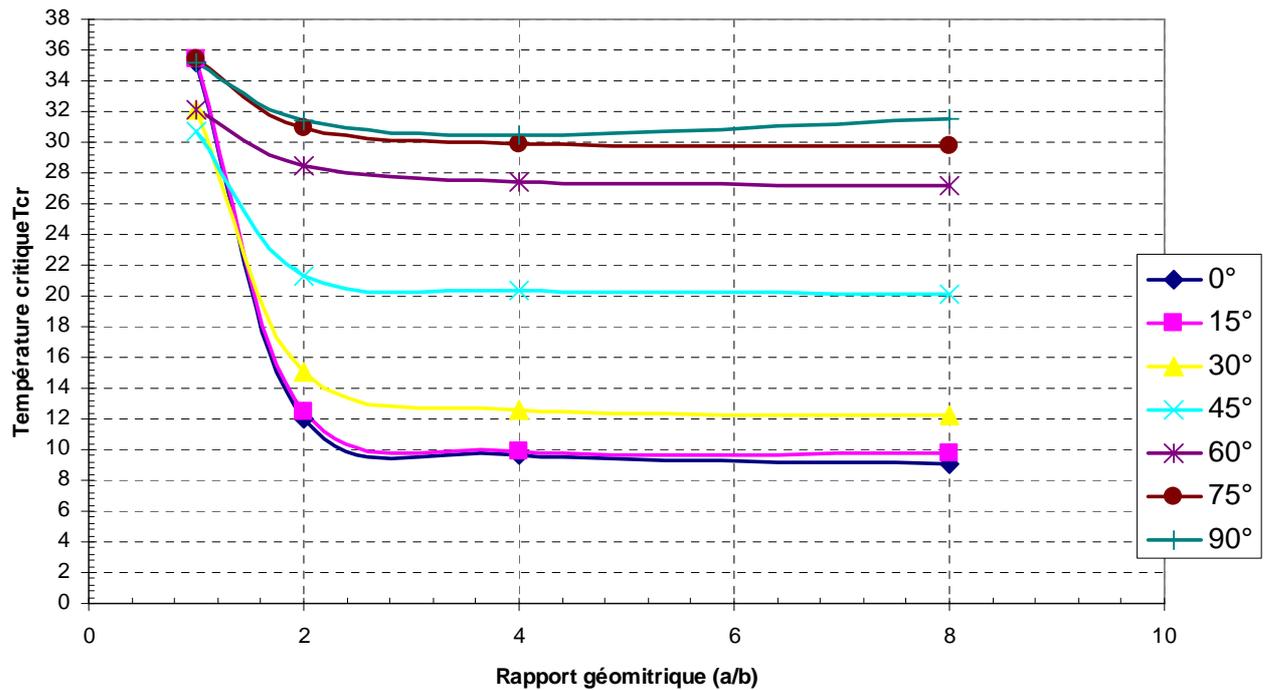


Figure (V-3): Variation de ΔT_{cr} en fonction de rapport géométrique (a/b) pour différent angle d'orientation, (EEEE)

1)- La figure (V-2), montre les courbes de la variation température critique en fonction de l'angle d'orientation (θ) du stratifiée et pour différents rapport géométrique (a/b) pour la condition aux limites, encastrement en quatre cotés. On remarque que :

* Pour ($a/b=1$), Les valeurs de ΔT_{cr} est symétrique par rapport a l'angle $\theta=45^\circ$, le changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint à $\theta=45^\circ$

* Pour ($a/b=2, 4, 8$), les courbes ont la même allure mais la température critiques ΔT_{cr} augmente suivant l'angle de $\theta=0^\circ$ jusqu'à 90°

On remarque aussi, quand (a/b) augmente la température critique diminue.

2)- La figure (V-3), montre les courbes températures critiques en fonction du rapport géométrique et pour différent l'angle d'orientation (θ) pour la condition aux limites encastrement. On remarque que quand (a/b)>4 les valeurs de ΔT_{cr} sont très proches.

b)-Condition aux limites : (SSSS/xy) Simply appuyé, blocage dans les sens (xy)

Tableau (5-3) : Variation de ΔT_{cr} en fonction de (a/b), appuis (SSSS/xy)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
a/b=1	10,63°C	11,51°C	13,63°C	14,83°C	13,63°C	11,51°C	10,63°C
a/b=2	3,4453°C	4,43°C	6,4233°C	8,15°C	9,65°C	10,95°C	10,6301°C
a/b=4	2,5961°C	2,92°C	3,99°C	6,01°C	8,737°C	10,82°C	10,62°C
a/b=8	2,57°C	2,55°C	3,28°C	5,47°C	8,554°C	10,62°C	9,53°C

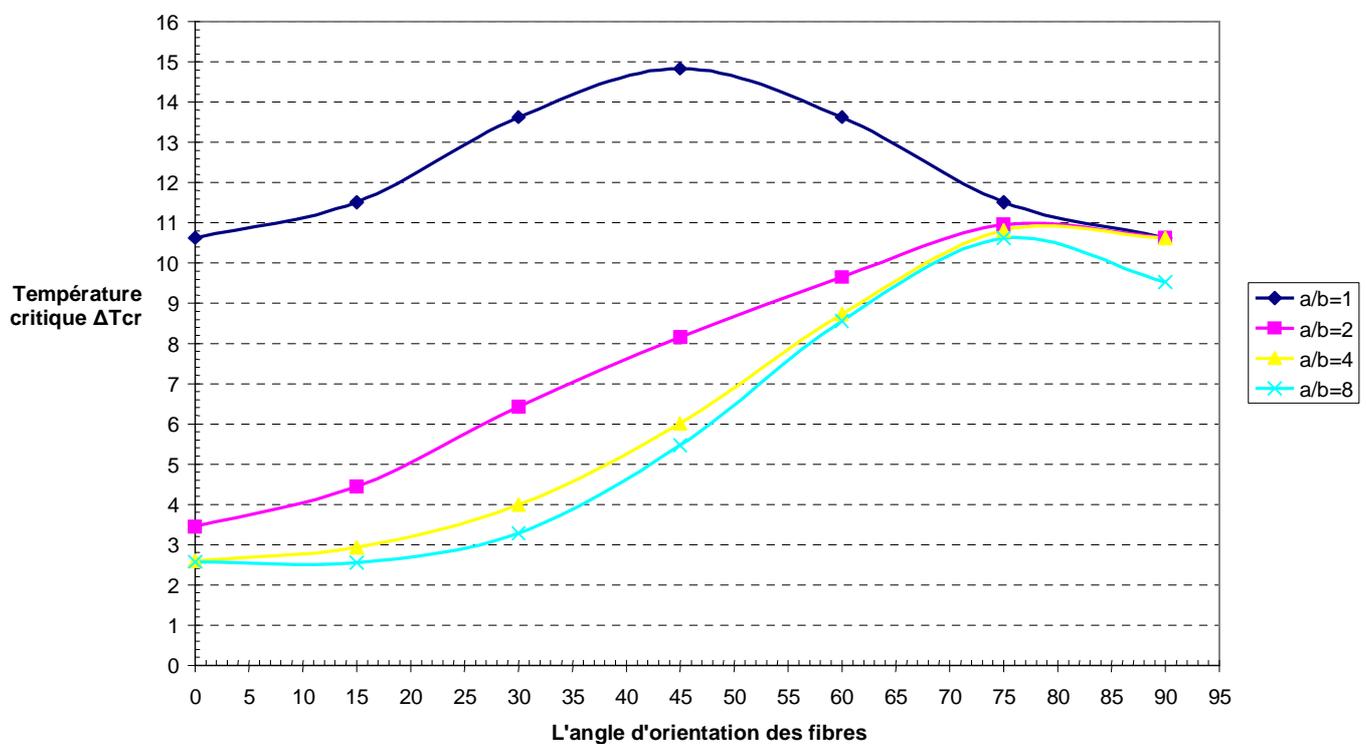


Figure (V-4): Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent (a/b), (SSSS/xy)

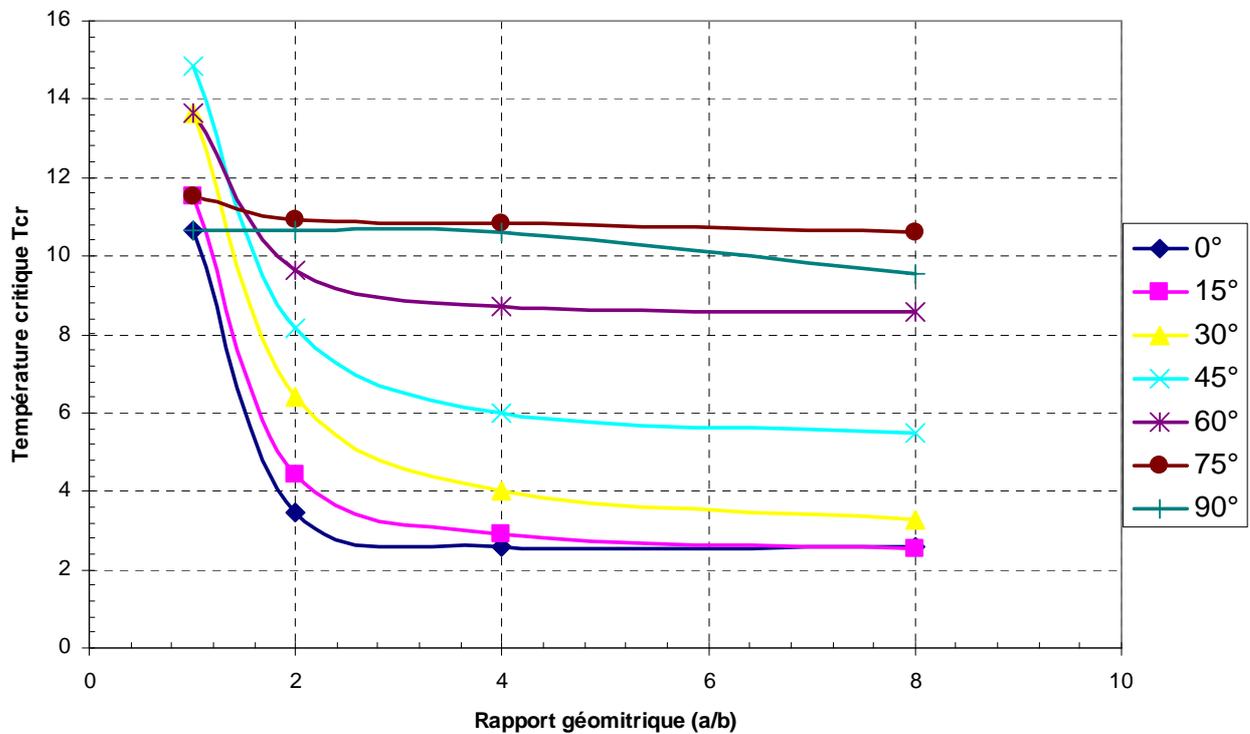


Figure (V-5): Variation de ΔT_{cr} en fonction de rapport géométrique (a/b) pour différent angle d'orientation, (SSSS/xy)

1)- La figure (V-4), montre les courbes de la variation température critiques en fonction de l'angle d'orientation (θ) du stratifiée et pour différents rapport géométrique (a/b) pour la condition aux limites, simplement appuyée avec blocage dans les sens (x et y). On remarque que :

- * Pour ($a/b=1$), Les valeurs de ΔT_{cr} est symétrique par rapport a l'angle $\theta=45^\circ$, puis le changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint à $\theta=45^\circ$.
- * Pour ($a/b=2, 4, 8$), les courbes ont la même allure avec changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint à $\theta=75^\circ$.

On remarque aussi, quand (a/b) augmente la température critiques diminue.

2)- La figure (V-5), montre les courbes températures critiques en fonction du rapport géométrique et pour différents l'angle d'orientation (θ) pour la condition aux limites (SSSS/xy).

On remarque que quand (a/b)>4 les valeurs de ΔT_{cr} sont très proches.

c)-Conditions aux limites : (SSSS/x) Simplement appuyé, blocage dans le sens (x)

Tableau (5-4) : Variation de ΔT_{cr} en fonction (a/b), appuis (SSSS/x)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
a/b=1	15,16°C	17,09°C	22,75°C	29,60°C	32,93°C	25,78°C	21,84°C
a/b=2	9,32°C	12,99°C	22,37°C	28,29°C	29,18°C	25,14°C	21,70°C
a/b=4	9,32°C	13,24°C	21,02°C	27,56°C	28,11°C	23,80°C	21,12°C
a/b=8	9,31°C	12,94°C	19,96°C	20,84°C	12,77°C	11,42°C	12,49°C

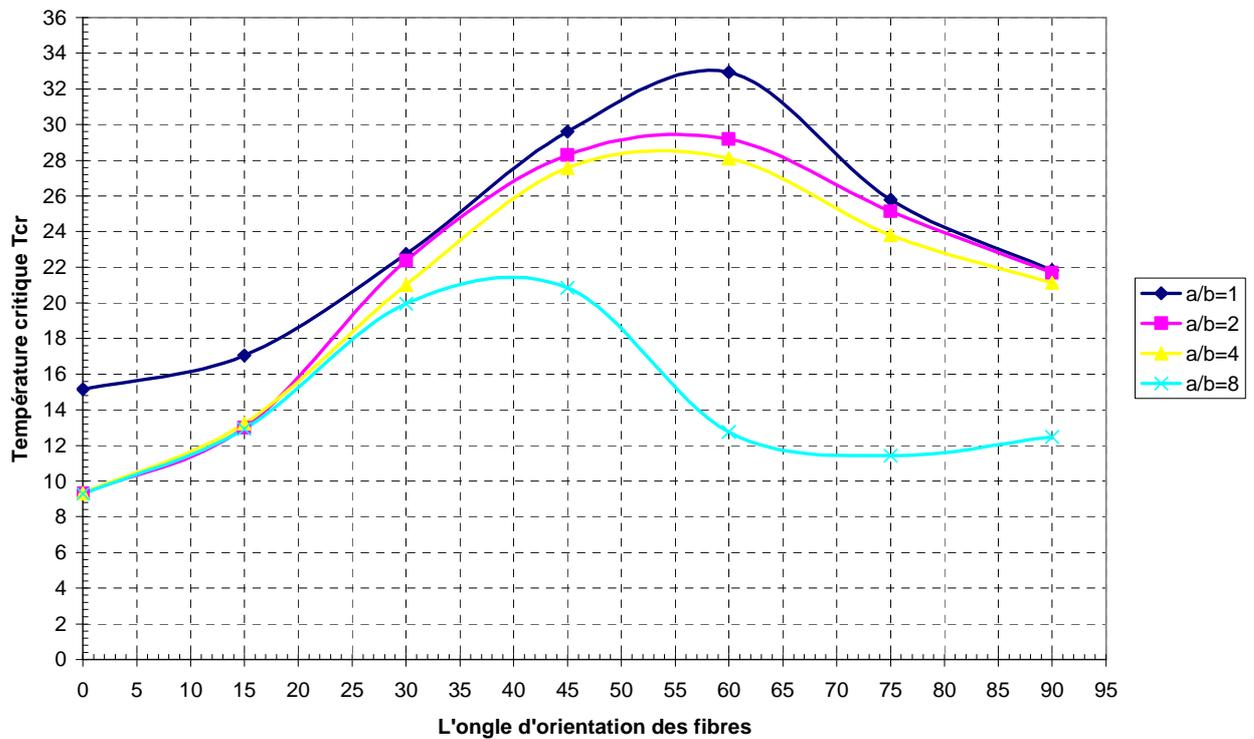


Figure (V-6) : Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent (a/b), (SSSS/x)

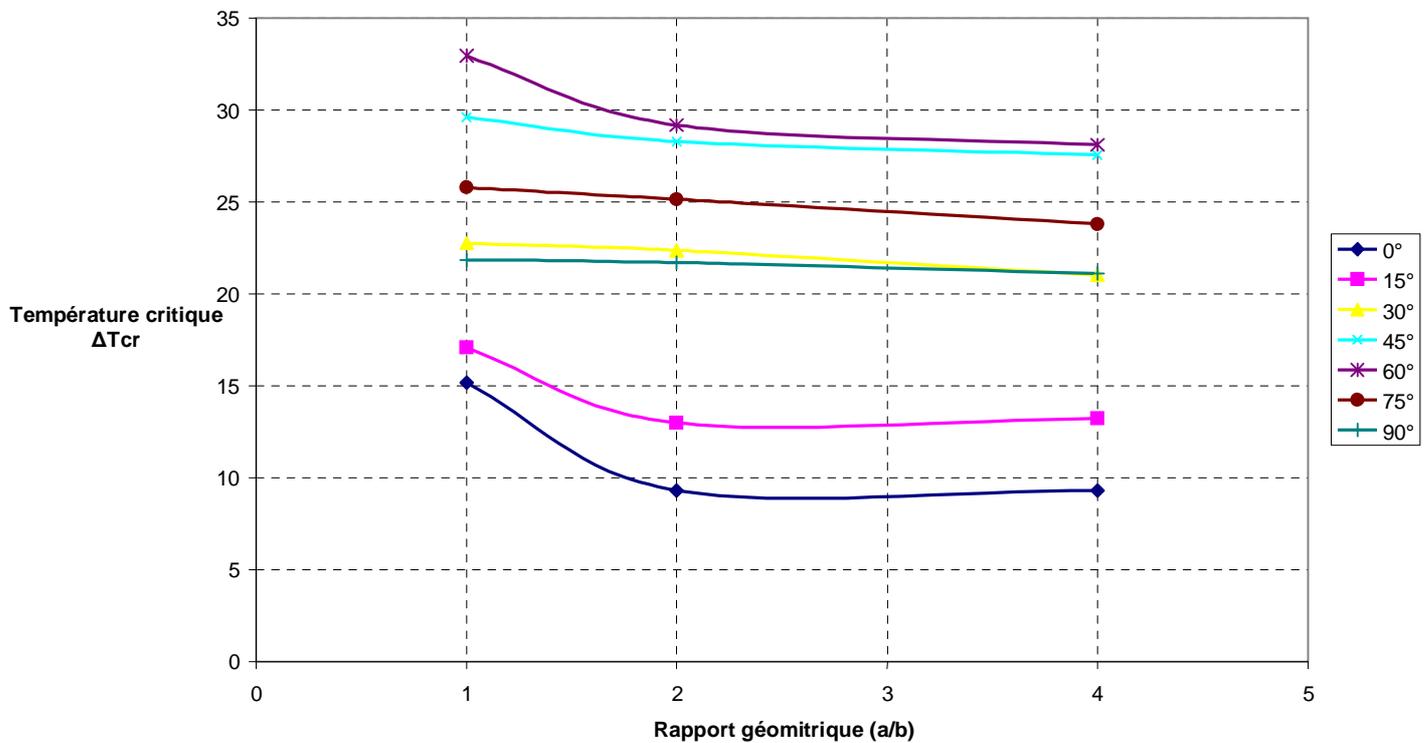


Figure (V-7): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport géométrique (a/b) pour différents angles d'orientation, (SSSS/x)

1)- La figure (V-6), montre les courbes de la variation température critiques en fonction de l'angle d'orientation (θ) du stratifiée et pour différents rapport géométrique (a/b) pour la condition aux limites, simplement appuyée avec blocage dans le sens (x). On remarque que :

- * Pour ($a/b=1$), Les valeurs de ΔT_{cr} augmente jusqu'a l'angle $\theta=60^\circ$, puis diminue jusqu'a $\theta=90^\circ$ le changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint à $\theta=60^\circ$.
- * Pour ($a/b=2, 4$), les courbes ont la même allure avec changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint à $\theta=60^\circ$.
- * Pour ($a/b=8$), Les valeurs de ΔT_{cr} augmente jusqu'a l'angle $\theta=45^\circ$, puis diminue jusqu'a $\theta=90^\circ$ le changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint à $\theta=45^\circ$

On remarque aussi, quand (a/b) augmente la température critiques diminue.

2)- La figure (V-7), montre les courbes températures critiques en fonction rapport géométrique et pour différents l'angle d'orientation (θ) pour la condition aux limites (SSSS/x). On remarque que quand (a/b)>4 les valeurs de ΔT_{cr} sont très proches.

Finalement, on conclue que les paramètres suivants :

- * Conditions aux limites
- * L'angle d'orientation des stratifiée
- * Rapport géométrique

A eu un effet sur la variation de température critique (ΔT_{cr}).

La différence de diminuassions de température critique entre les rapports (a/b).

- Pour conditions aux limites (EEEE), entre les rapports a/b=1-2, a/b=2-4, a/b=4 -8 est 66% ,18.91%,6.00%, respectivement.
- Pour conditions aux limites (SSSS/xy), entre les rapports a/b=1-2, a/b=2-4, a/b=4 -8 est 67.58% ,24.64%,1.00, respectivement.
- Pour conditions aux limites (SSSS/x), entre les rapports a/b=1-2, a/b=2-4, a/b=4 -8 est 38.52% ,0%,0.1, respectivement, tous ces valeurs pour l'angle $\theta=0^\circ$.

V -4)- Effet du rapport d'anisotropie (E_1/E_2) :

a)-Conditions aux limites : (EEEE) encastrement sur les quatre cotés.

On prend un stratifié symétrique $[\theta, -\theta, -\theta, \theta]$ quatre couche, en fixée (E_2) et en varie (E_1).

Tableau (5-5) : Variation de ΔT_{cr} en fonction (E_1/E_2), appuis (EEEE)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
(E_1/E_2) =1	19,311°C	19,355°C	19,442°C	19,48°C	19,442°C	19,355°C	19,311°C
(E_1/E_2)=10	34,610°C	34,733°C	31,625°C	30,294°C	31,625°C	34,733°C	34,610°C
(E_1/E_2)=20	39,318°C	38,144°C	34,346°C	32,195°C	34,346°C	38,144°C	39,318°C
(E_1/E_2)=30	42,161°C	39,567°C	35,442°C	33,363°C	35,442°C	39,567°C	42,161°C
(E_1/E_2)=40	44.069°C	40.398°C	36.033°C	33.827°C	36.033°C	40.398°C	44.069°C

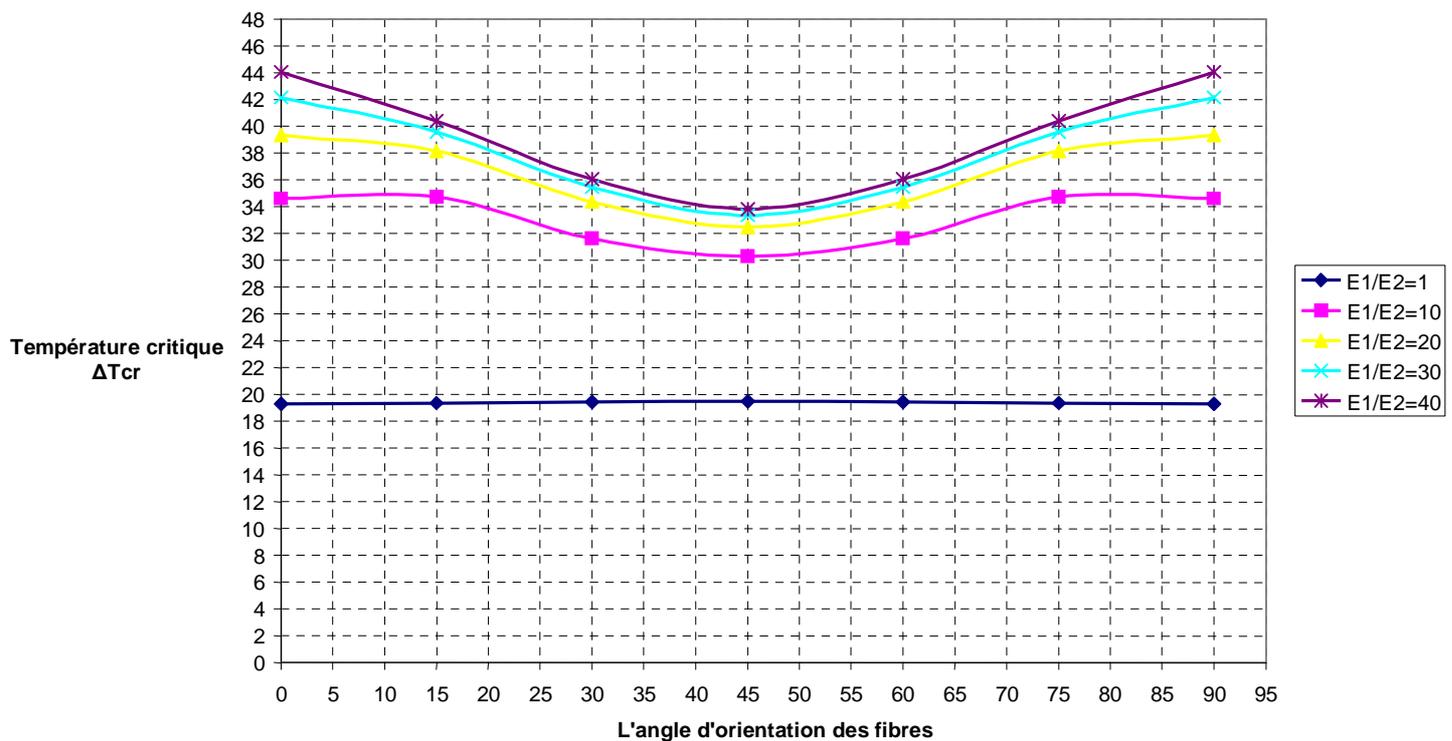


Figure (V-8): Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent rapport anisotropie (E_1/E_2), (EEEE)

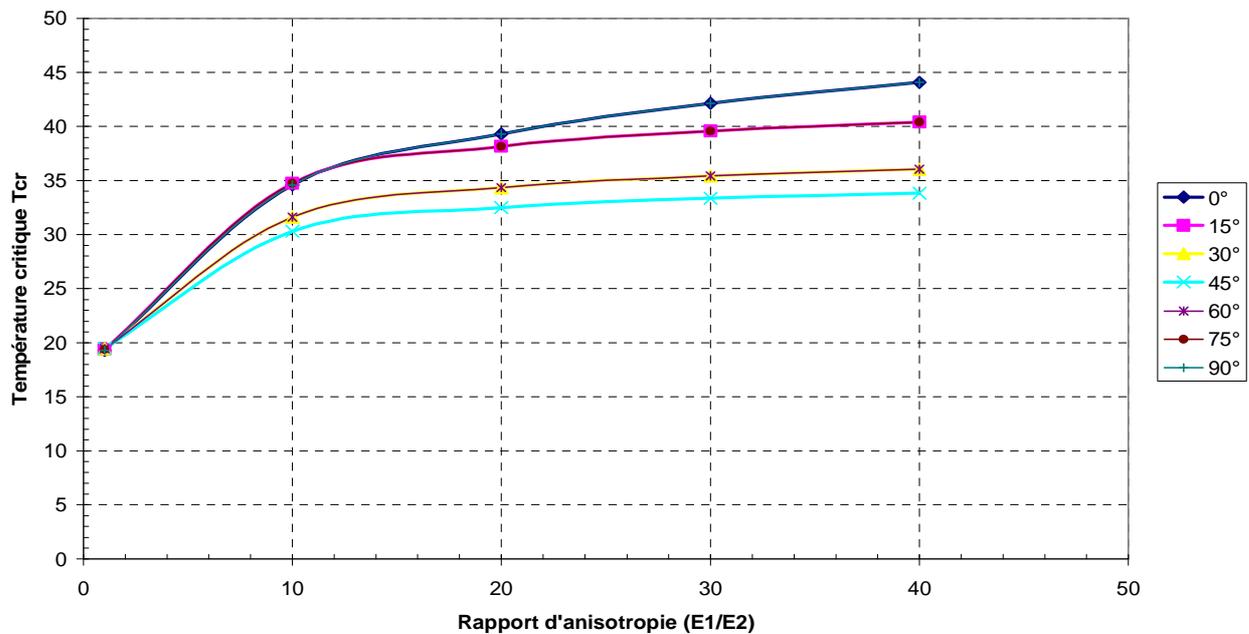


Figure (V-9): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport d'anisotropie ($E1/E2$) pour différent angle d'orientation, (EEEE)

1)- La figure (V-8), montre les courbes de la variation températures critique en fonction de l'angle d'orientation (θ) du stratifiée et pour différents rapport d'anisotropie ($E1/E2$) pour la condition aux limites, encastrement sur les quatre cotés. On remarque que :

- * Pour ($E1/E2=1$), Le matériau presque est isotrope parce-que la température critiques stable.
- * Pour ($E1/E2=10, 20, 30,40$), le changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint $\theta=45^\circ$, On remarque aussi, quand ($E1/E2$) augmente la température critique augmente.

2)- La figure (V-9), montre les courbes températures critiques en fonction du rapport d'anisotropie et pour différents l'angle d'orientation (θ) pour conditions aux limites encastrement.

On remarque que quand ($E1/E2$)>20 les valeurs de ΔT_{cr} sont très proches.

b)-Conditions aux limites : (SSSS/xy) Simply appuyé, blocage dans les sens (xy)

Tableau (5-6) : Variation de ΔT_{cr} en fonction (E_1/E_2), appuis (SSSS/xy)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
(E_1/E_2) =1	7,347°C	7,348°C	7,348°C	7,348°C	7,348°C	7,348°C	7,347°C
(E_1/E_2)=10	10,44°C	11,33°C	13,42°C	14,569°C	13,42°C	11,33°C	10,44°C
(E_1/E_2)=20	11,60°C	12,452°C	14,71°C	16,039°C	14,71°C	12,452°C	11,60°C
(E_1/E_2)=30	12,121°C	12,917°C	15,22°C	16,629°C	15,22°C	12,917°C	12,121°C
(E_1/E_2)=40	12,415°C	13,167°C	15,488°C	16,946°C	15,488°C	13,167°C	12,415°C

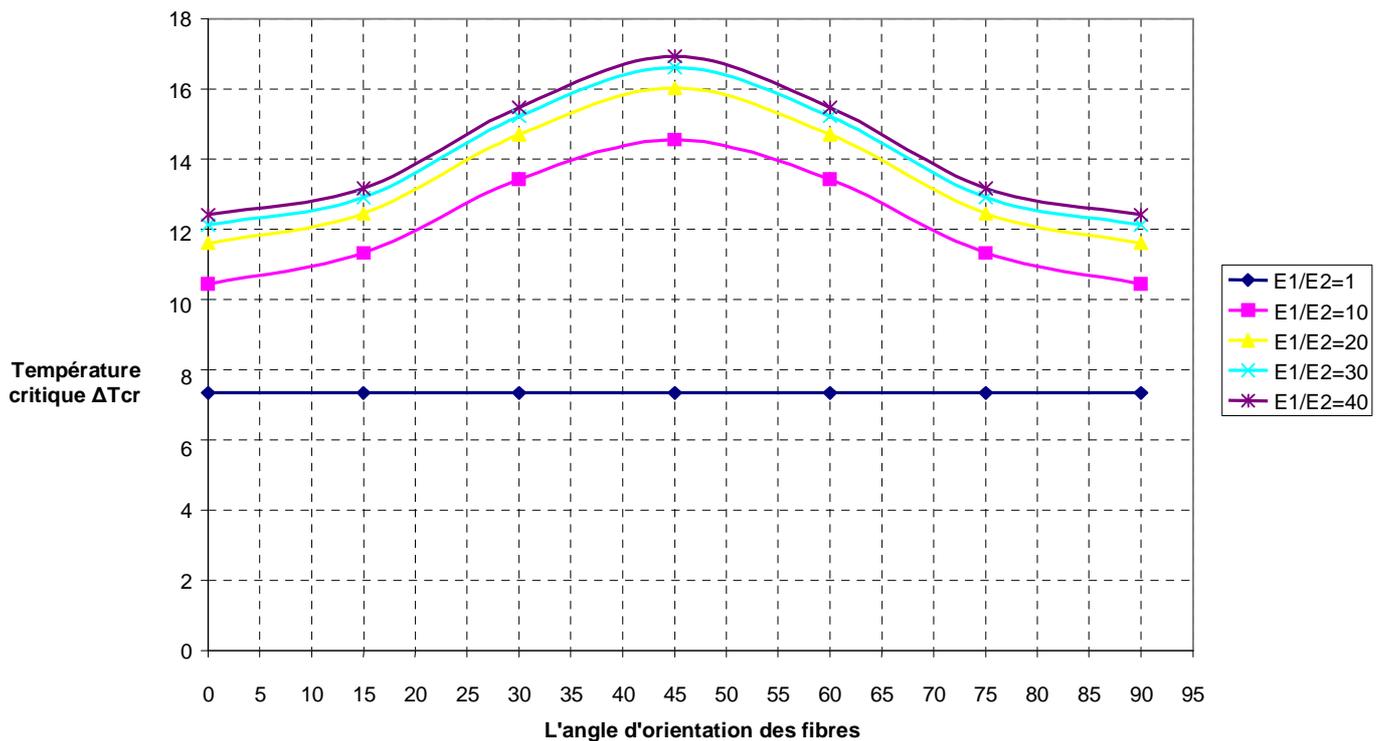


Figure (V-10) : Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent rapport anisotropie (E_1/E_2), (SSSS/xy)

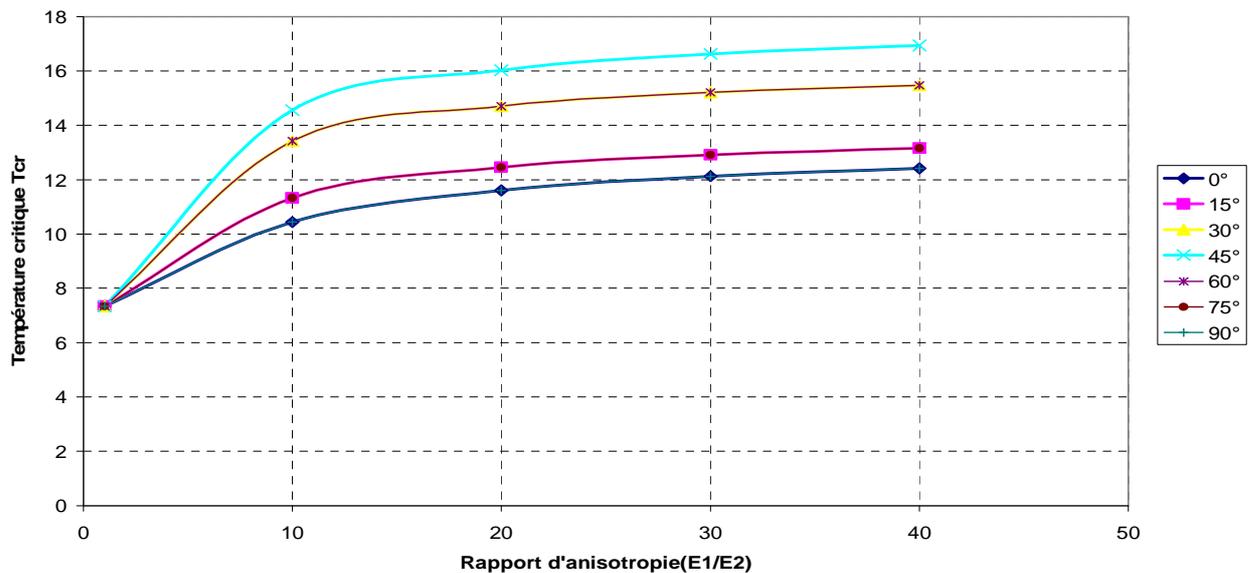


Figure (V-11): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport d'anisotropie ($E1/E2$) pour différents angle d'orientation, (SSSS/xy)

1)- La figure (V-10), montre les courbes de la variation température critique en fonction de l'angle d'orientation (θ) du stratifiée et pour différents rapport d'anisotropie ($E1/E2$) pour la condition aux limites, simplement appuyée avec blocage dans les sens (x et y). On remarque que :

- * Pour ($E1/E2=1$) : Le matériau presque est isotrope parce-que la température critique stable.
- * Pour ($E1/E2=10, 20, 30,40$), le changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint $\theta=45^\circ$. On remarque aussi, quand ($E1/E2$) augmente la température critique augmente.

2)- La figure (V-11), montre les courbes températures critiques en fonction du rapport d'anisotropie et pour différents l'angle d'orientation (θ) pour la condition aux limites (SSSS/xy).

On remarque que quand ($E1/E2$)>20 les valeurs de ΔT_{cr} sont très proches.

c)-Conditions aux limites : (SSSS/x) Simplement appuyé, blocage dans les sens (x)

Tableau (5-7) : Variation de ΔT_{cr} en fonction (E_1/E_2), appuis (SSSS/x)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
(E_1/E_2) =1	25,183°C	22,971°C	18,56°C	14,69°C	12,163°C	10,803°C	10,37°C
(E_1/E_2)=10	15,318°C	17,246°C	22,73°C	29,12°C	32,161°C	24,988°C	21,182°C
(E_1/E_2)=20	14,455°C	16,372°C	22,649°C	32,042°C	37,598°C	31,858°C	27,676°C
(E_1/E_2)=30	14,141°C	15,999°C	22,5°C	33,214°C	40,462°C	37,134°C	34,158°C
(E_1/E_2)=40	13,9835°C	15,797°C	22,40°C	33,831°C	42,231°C	41,32°C	39,21°C

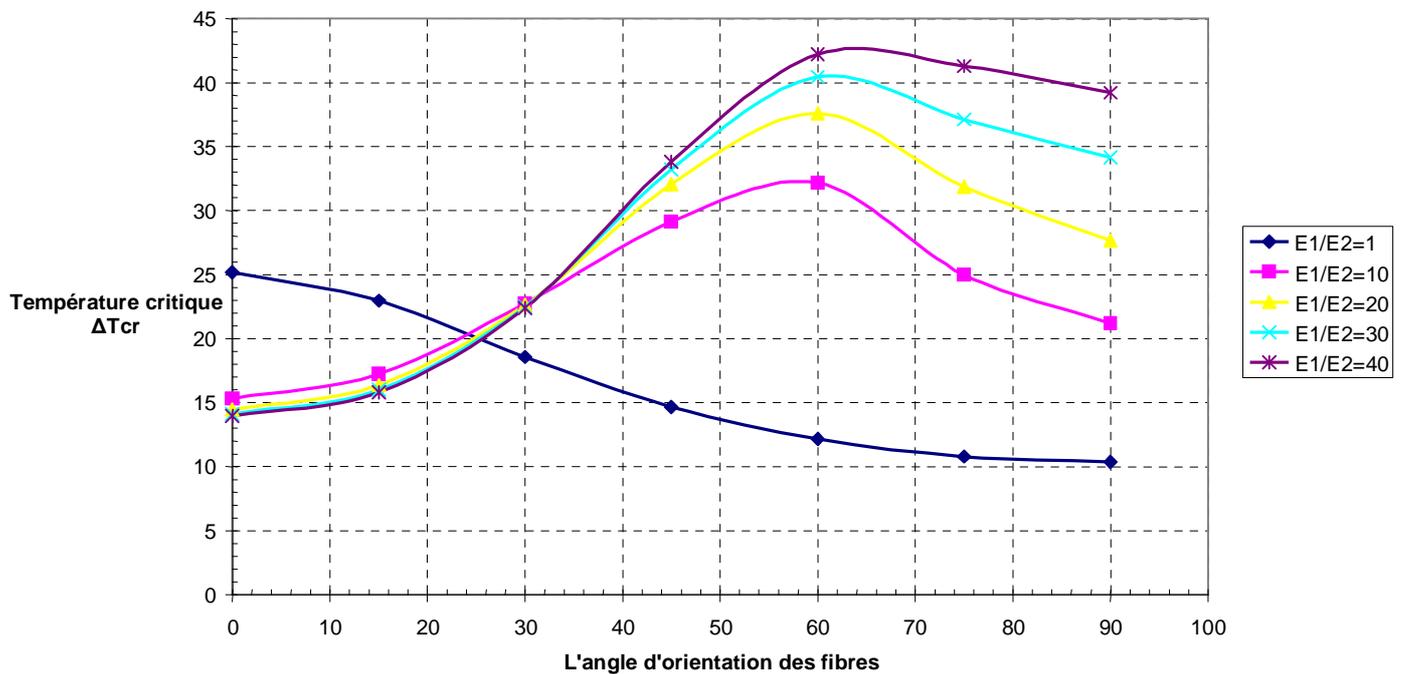


Figure (V-12): Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent rapport anisotropie (E_1/E_2), (SSSS/x)

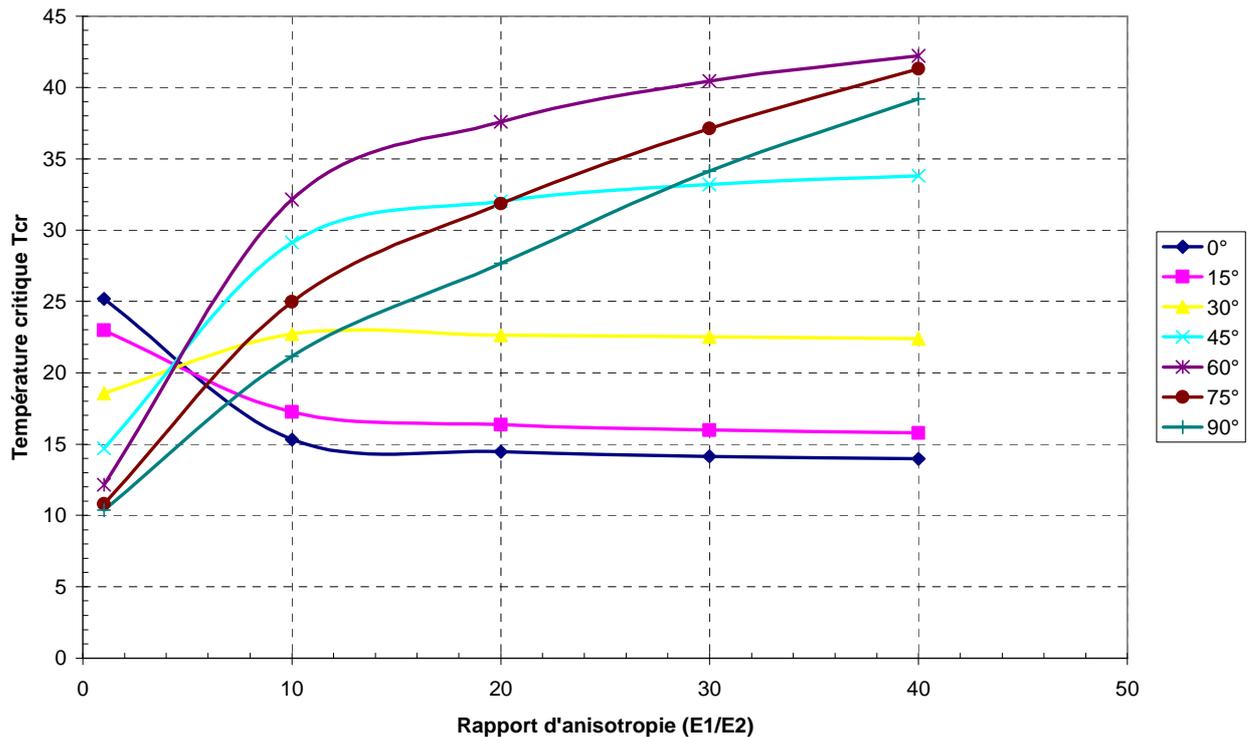


Figure (V-13): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport d'anisotropie ($E1/E2$) pour différent angle d'orientation, (SSSS/x)

1)- La figure (V-12), montre les courbes de la variation température critique en fonction de l'angle d'orientation (θ) du stratifiée et pour différents rapport d'anisotropie ($E1/E2$) pour la condition aux limites, simplement appuyée avec blocage dans le sens (x). On remarque que :

- * Pour ($E1/E2=1$), La température critique diminue de ($\theta=0^\circ$ jusqu'a 90°).
- * Pour ($E1/E2=10, 20, 30, 40$), représente la même allure et le changement de mode de flambage lorsque l'angle atteint $\theta=60^\circ$.

2)- La figure (V-13), montre les courbes températures critiques en fonction du rapport d'anisotropie et pour différents l'angle d'orientation (θ) pour la condition aux limites (SSSS/x). On remarque que quand ($E1/E2 > 20$) les valeurs de ΔT_{cr} sont très proches.

Finalement, on conclue que le paramètre de rapport d'anisotropie, a eu un effet sur la variation de température critique.

La différence de l'augmentation de température critique entre les rapports d'anisotropie ($E1/E2$).

- Pour conditions aux limites (EEEE), entre les rapports d'anisotropie $E1/E2=1-10,10-20, 20-30, 30-40$ est 44.20%, 11.97%, 6.74%, 4.32%, respectivement.
- Pour conditions aux limites (SSSS/xy), entre les rapports d'anisotropie $E1/E2=1-10,10-20,20-30, 30-40$ est 29.62%, 10.00%, 4.29%, 2.36%, respectivement.

La différence de diminuassions Pour la condition aux limites (SSSS/x), entre les rapports $E1/E2=1-10, 10-20, 20-30, 30-40$ est 39.17%, 5.63%, 2.17%, 1.11%, respectivement.

Tous ces valeurs pour l'angle $\theta=0^\circ$.

V -5)- Effet du rapport coefficient de dilatation ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$) :

a)-Conditions aux limites : (EEEE) encastrement sur les quatre cotés

On prend un stratifié symétrique $[\theta, -\theta, -\theta, \theta]$ avec quatre couche, en fixée (α_1) et en varie (α_2).

Tableau (5-8) : Variation de ΔT_{cr} en fonction ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$), appuis (EEEE)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\alpha_2/\alpha_1=1$	54,319°C	50,420°C	44,716°C	42,647°C	44,716°C	50,420°C	54,319°C
$\alpha_2/\alpha_1=10$	21,358°C	22,526°C	23,493°C	22,606°C	23,493°C	22,526°C	21,358°C
$\alpha_2/\alpha_1=20$	11,931°C	12,959°C	15,261°C	14,851°C	15,261°C	12,959°C	11,931°C
$\alpha_2/\alpha_1=40$	6,325°C	6,994°C	8,936°C	8,808°C	8,936°C	6,994°C	6,325°C

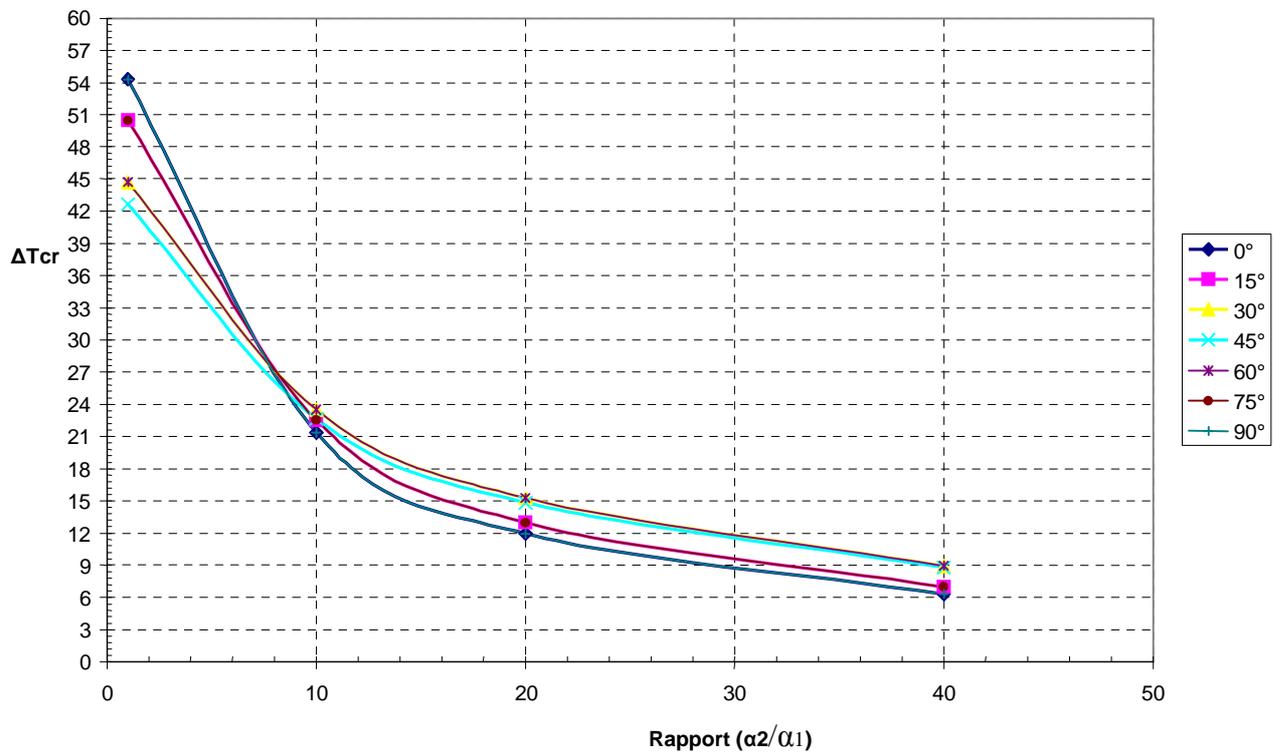


Figure (V-14): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport (α_2/α_1) pour différent angle d'orientation, (EEEE)

b)-Conditions aux limites : (SSSS/xy) Simplement appuyé, blocage dans les sens (xy)

Tableau (5-9) : Variation de ΔT_{cr} en fonction ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$), appuis (SSSS/xy)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\alpha_2/\alpha_1=1$	14,784°C	16,018°C	18,979°C	20,603°C	18,979°C	16,018°C	14,784°C
$\alpha_2/\alpha_1=10$	7,836°C	8,483°C	10,052°C	10,921°C	10,052°C	8,483°C	7,836°C
$\alpha_2/\alpha_1=20$	4,704°C	5,569°C	6,601°C	7,174°C	6,601°C	5,569°C	4,704°C
$\alpha_2/\alpha_1=40$	2,507°C	2,280°C	3,914°C	4,255°C	3,914°C	2,280°C	2,507°C

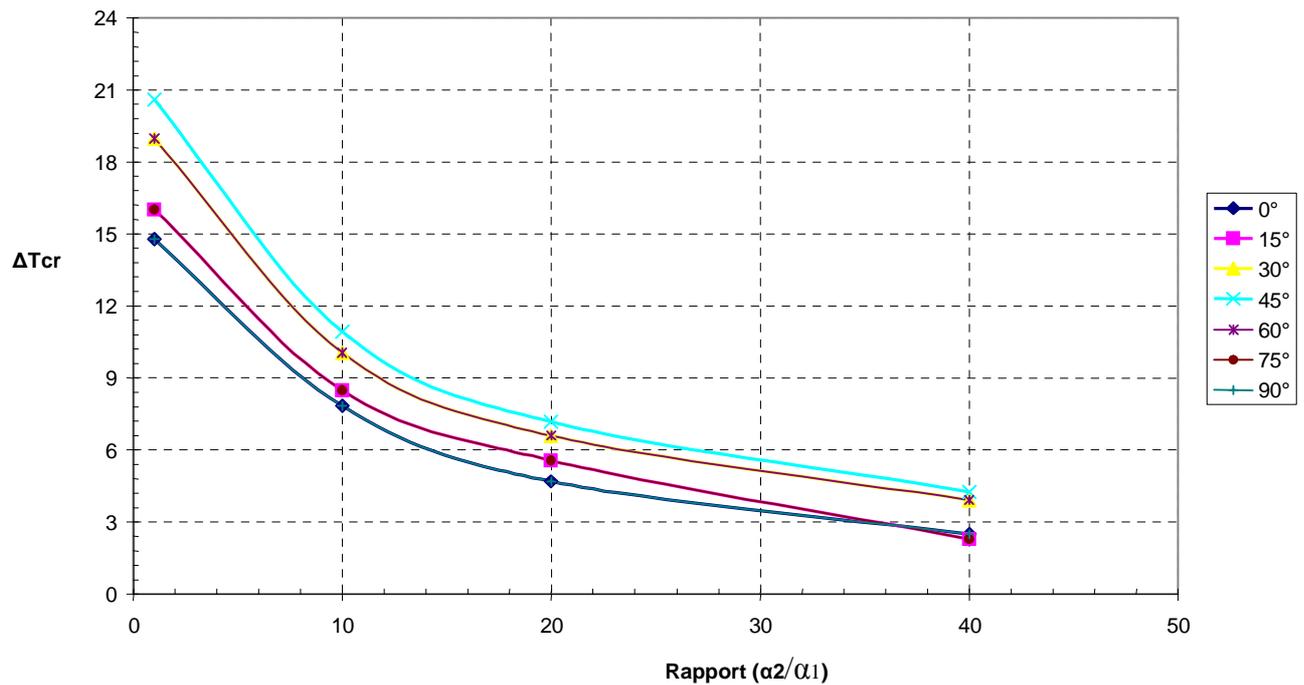


Figure (V-15): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport (α_2/α_1) pour différent angle d'orientation, (SSSS/xy)

c)-Conditions aux limites : (SSSS/x) Simplement appuyé, blocage dans les sens (x)

Tableau (5-10) : Variation de ΔT_{cr} en fonction ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$), appuis (SSSS/x)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\alpha_2/\alpha_1=1$	16,394°C	18,907°C	27,107°C	41,168°C	61,174°C	76,800°C	92,35°C
$\alpha_2/\alpha_1=10$	13,847°C	15,248°C	18,893°C	21,827°C	20,773°C	13,996°C	11,104°C
$\alpha_2/\alpha_1=20$	11,809°C	12,552°C	14,131°C	14,336°C	11,981°C	7,334°C	5,612°C
$\alpha_2/\alpha_1=40$	9,123°C	9,277°C	9,403°C	8,50°C	6,489°C	3,756°C	2,822°C

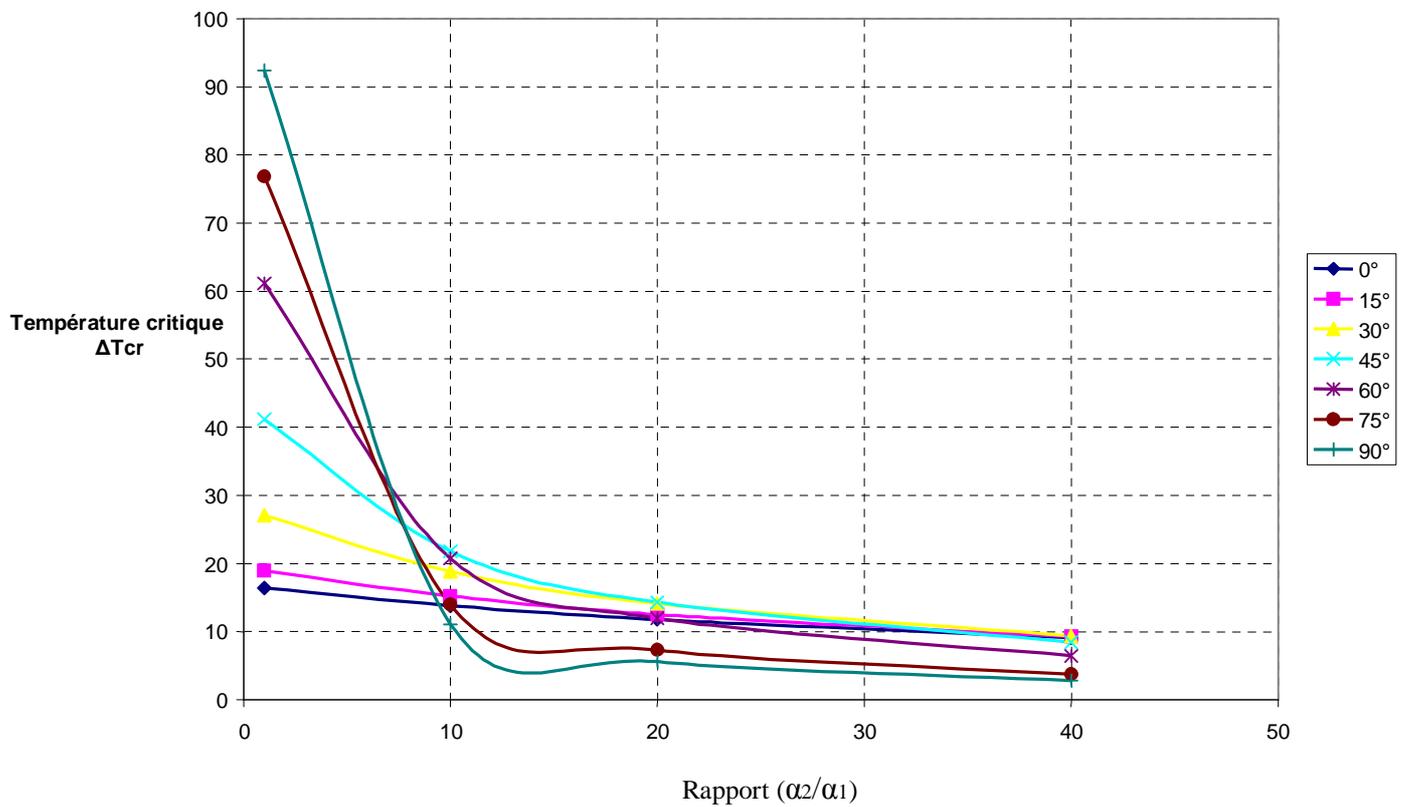


Figure (V-16): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport (α_2/α_1) pour différent angle d'orientation, (SSSS/x)

1)- Les figures (V-14), (V-15), (V-16), montre les courbes de la variation température critique en fonction du rapport (α_2/α_1) de stratifiée et pour différents l'angle d'orientation (θ) pour la condition aux limites. On remarque que :

L'augmentation des rapports (α_2/α_1), la température ΔT_{cr} diminue.

La différence de diminuassions de température critique entre les rapports (α_2/α_1):

- Pour conditions aux limites (EEEE), entre les rapports (α_2/α_1)= 1-10, 10-20,20-40 est 60.68%, 44.13%, 46.98%, respectivement.

- Pour conditions aux limites (SSSS/xy), entre les rapports (α_2/α_1)= 1-10, 10-20,20-40 est 46.99%, 39.96%, 46.70%, respectivement.

- Pour conditions aux limites (SSSS/x), entre les rapports (α_2/α_1)=1-10, 10-20, 20-40 est 15.53%, 14.71%, 22.74%, respectivement.

Tous ces valeurs pour l'angle $\theta=0^\circ$.

V -6)- Effet de nombre des couches:

On prend un stratifié symétrique $[\theta, -\theta, -\theta, \theta]_x$, chaque fois en augmente le nombre des couches, $a/h=100$ (fixée).

a)-Conditions aux limites : (EEEE) encastrement sur les quatre cotés

Tableau (5-11) : Variation de ΔT_{cr} en fonction des nombre des couches sur appuis (EEEE)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
n =4	35,23°C	35,40°C	32,069°C	30,66°C	32,069°C	35,40°C	35,23°C
n =8	35,23°C	38,354°C	38,272°C	37,922°C	38,272°C	38,354°C	35,23°C
n =12	35,23°C	38,50°C	38,561°C	38,259°C	38,561°C	38,50°C	35,23°C
n =16	35,23°C	38,524°C	38,610°C	38,316°C	38,610°C	38,524°C	35,23°C
n =20	35,23°C	38,531°C	38,623°C	38,331°C	38,623°C	38,531°C	35,23°C

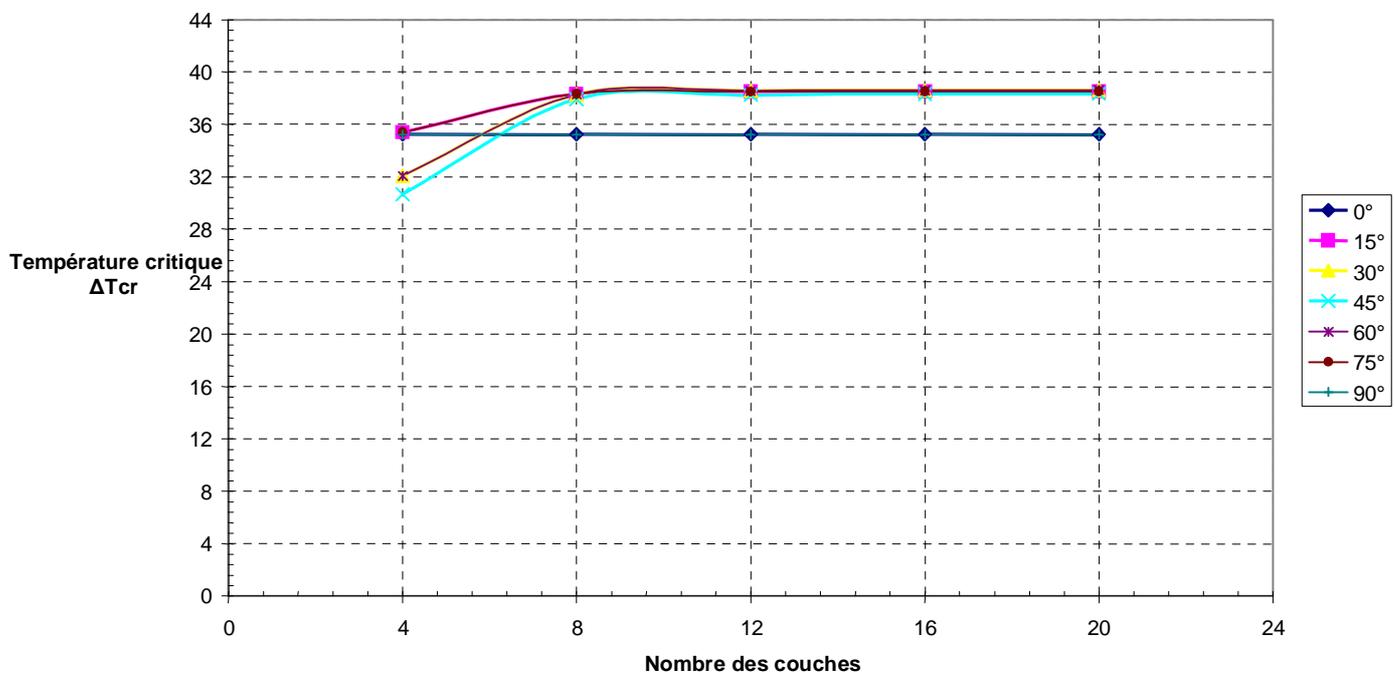


Figure (V-17): Variation de ΔT_{cr} en fonction nombre des couches pour différent angle d'orientation, (EEEE)

b)-Conditions aux limites : (SSSS/xy) Simply supported, blocking in the sense (xy)

Tableau (5-12) : Variation de ΔT_{cr} en fonction des nombre des couches sur appuis (SSSS/xy)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
n =4	10,63°C	11,51°C	13,63°C	14,83°C	13,63°C	11,51°C	10,63°C
n =8	10,63°C	12,575°C	16,494°C	18,46°C	16,494°C	12,575°C	10,63°C
n =12	10,63°C	12,628°C	16,630°C	18,63°C	16,630°C	12,628°C	10,63°C
n =16	10,63°C	12,637°C	16,653°C	18,66°C	16,653°C	12,637°C	10,63°C
n =20	10,63°C	12,639°C	16,659°C	18,66°C	16,659°C	12,639°C	10,63°C

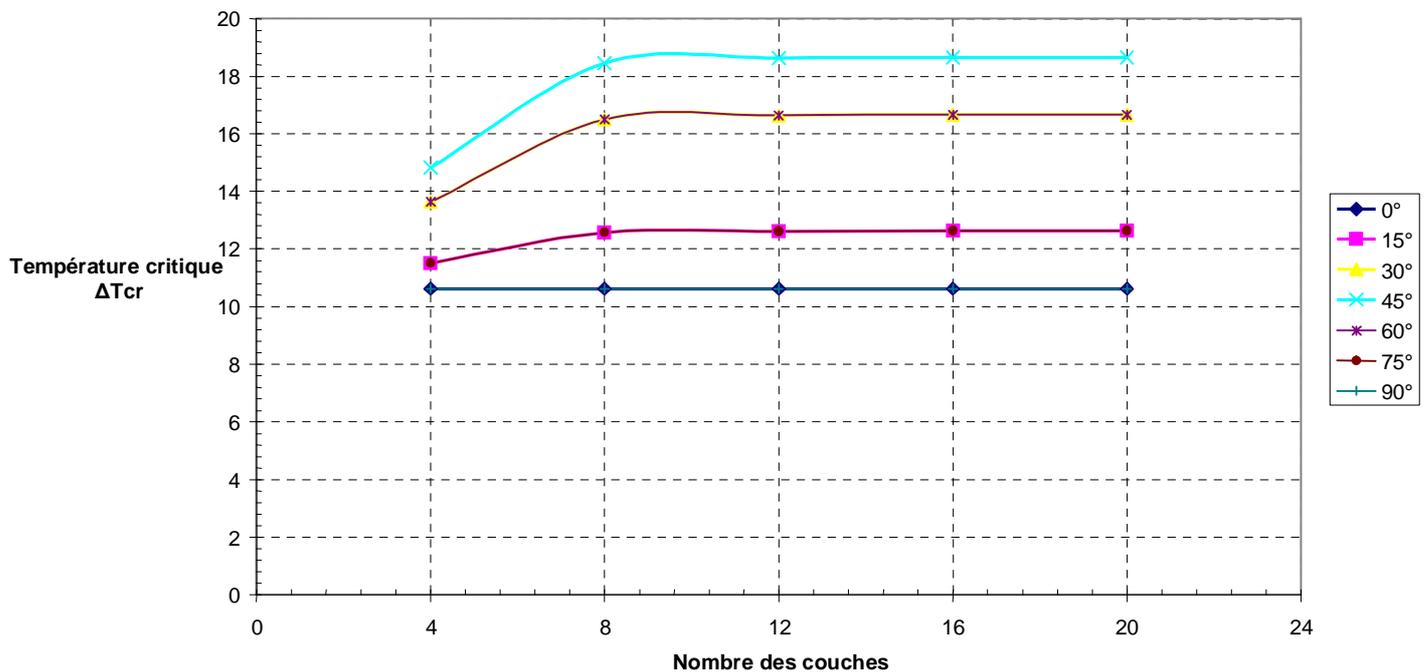


Figure (V-18): Variation de ΔT_{cr} en fonction nombre des couches pour différent angle d'orientation, (SSSS/xy)

c)-Conditions aux limites : (SSSS/x) Simplement appuyé, blocage dans les sens (x)

Tableau (5-13) : Variation de ΔT_{cr} en fonction des nombre des couches sur appuis (SSSS/x)

ΔT_{cr}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
n =4	15,16°C	17,09°C	22,75°C	29,60°C	32,93°C	25,78°C	21,85°C
n =8	15,16°C	18,658°C	27,46°C	36,914°C	40,741°C	28,563°C	21,85°C
n =12	15,16°C	18,737°C	27,698°C	37,25°C	41,124°C	28,706°C	21,85°C
n =16	15,16°C	18,750°C	27,737°C	37,316°C	41,189°C	28,729°C	21,85°C
n =20	15,16°C	18,754°C	27,746°C	37,333°C	41,206°C	28,736°C	21,85°C

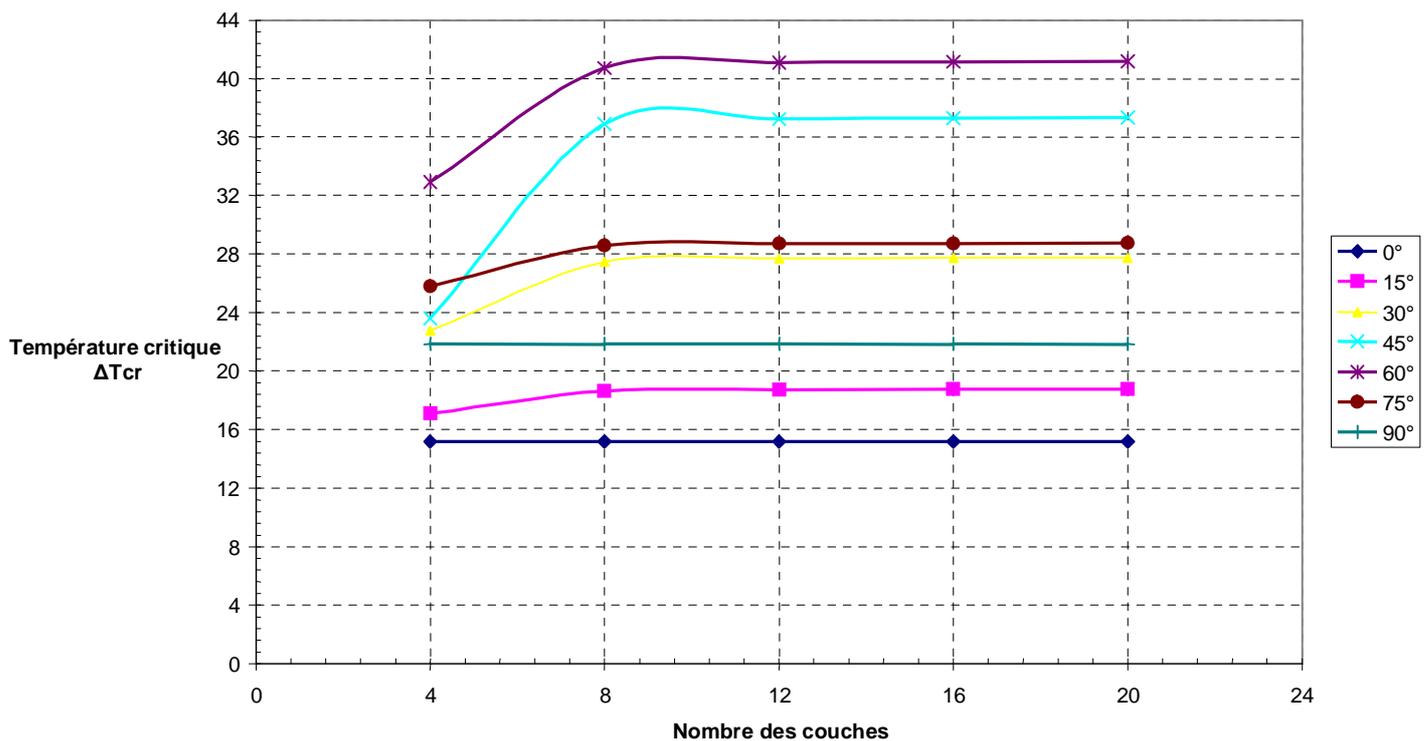


Figure (V-19): Variation de ΔT_{cr} en fonction nombre des couches pour différent angle d'orientation, (SSSS/x)

Les figures (V-17), (V-18), (V-19), montre l'influence de nombre des couches sur ΔT_{cr} en fonction de l'angle de stratification $(\Theta, -\Theta, -\Theta, \Theta) \times$ pour les conditions aux limites, on trouve les résultats obtenues dans tableau (5-11). (5-12). (5-13).

- On remarque, dans les figures que l'augmentation de nombre des couches conduit à une position de stabilité pour température critique (ΔT_{cr}).
 - pour $(\Theta=0^\circ \text{ et } 90^\circ)$, les résultats de température critique (ΔT_{cr}) sont les mêmes et stable quelque soit nombre des couches.
 - pour $(\Theta=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ)$, l'augmentation de nombre des couches jusqu'à (12) couches, nous conduisons à une position de stabilité pour les résultats de température critique (ΔT_{cr}).

V -7)- Conclusion :

Après le travail effectué pour le matériau composite à (04) couches suivant des différents angles d'orientation des fibres ($\Theta, -\Theta, -\Theta, \Theta$) et avec la même épaisseur h , on peut conclure que les caractéristique des plaques rectangulaires des matériaux stratifié, qui sont souvent utilisées pour la construction, sont très sensible aux efforts due aux températures.

La différence de température provoque le flambement et par conséquent la connaissance des températures critique (ΔT_{cr}) est nécessaire pour la conception de structure.

D'après les résultats obtenus, sur effet des paramètres, on a remarqué que :

- L'effet des conditions aux limites et l'angle d'orientation des fibres :

Les meilleures valeurs de la température critique (ΔT_{cr}) sont en fonction des conditions aux limites et l'angle d'orientation des fibres sur appuis (EEEE).

- L'effet du rapport géométrique (a/b)

L'augmentation du rapport géométrique (a/b) conduit une valeur minimale pour la température critique (ΔT_{cr}).

- L'effet du rapport anisotropie (E_1/E_2)

L'augmentation du rapport anisotropie (E_1/E_2) conduit une valeur maximale pour la température critique (ΔT_{cr}).

- L'effet de nombre des couches :

L'augmentation de nombre des couches conduit a une position de stabilité pour la température critique (ΔT_{cr}).

- L'effet du rapport de coefficient de dilatation (α_2/α_1) : (α_2 varie - α_1 fixée)

L'augmentation de rapport (α_2/α_1) conduit a une température critique (ΔT_{cr}) minimal.

CONCLUSION GENERALE :

Le but de ce travail était de déterminer la température critique des plaques stratifiées minces rectangulaires symétrique en matériaux composite.

Nous avons commencé par une généralité sur les matériaux composites stratifiées et leur comportement mécanique, puis on a donné un aperçu sur le comportement du flambage thermique avec des formulations par la méthode des éléments finis.

L'analyse a été basée sur un élément rectangulaire à quatre nœuds de type Hermite adapté aux stratifié.

On a élaboré une programmation par fortran.

Ainsi, nous avons fait des tests de précisions sur notre programme avec :

- * Analyse statique (membrane, flexion)
- * Flambage mécanique pour plaque (isotrope, orthotrope)
- * Flambage thermique pour plaque (isotrope, orthotrope)

On a ensuite fait une comparaison avec des solutions analytiques de littérature.

Cette comparaison a montré que les résultats sont très proches.

A la fin, nous avons fait une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la variation de température critique des plaques stratifiées minces rectangulaires symétrique en matériaux composites.

Les paramètres sont :

- Condition aux limites et l'angle d'orientation des fibres
- Rapport géométrique (a/b)
- Rapport anisotropie (E_1/E_2)
- Nombre de couches
- Rapport du coefficient de dilatation (α_2/α_1)

LISTE DES FIGURES

- (I-1): Les stratifie
- (I-2) : Stratifie à couches de fils unidirectionnels
- (I-3): Composites sandwiches
- (I-4): Renfort – Matrice dans un pli
- (I-5): Schéma simplifié d'une traction longitudinale
- (I-6): Schéma simplifié d'une traction transversal
- (I-7): Couche de matériau composite orthotrope
- (I, 8): Composite unidirectionnel
- (I, 9): Couche unidirectionnel en-dehors de ses axes principaux
- (I-10) : Élément de stratifié
- (I-11) : Schématisations des résultantes en membrane
- (I-12) : Schématique des résultantes de cisaillement
- (I-13): Schématisations des moments de flexion et de torsion
- (I-14) : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique de stratifiés
- (II-1) : Flambement d'une poutre
- (II-2) : matériaux élastique à comportement (non linéaire)
- (II-3): matériaux élastique à comportement (linéaire)
- (III-1): élément plaque rectangulaire
- (III-2): Organigramme globale
- (IV-1): compression d'une barre
- (IV-2) Variation de (u) en fonction du nombre des éléments
- (IV, 3): Plaque isotrope (EEEE), (SSSS)
- (IV-4): Variation de flèche (w) en fonction du nombre des éléments (ssss)

(IV-5): Variation de flèche en fonction du nombre des éléments, (EEEE)

(IV, 6): Plaque isotrope (SSSS)

(IV-7): Variation de Ncr en fonction du nombre des éléments plaque isotrope, (SSSS)

(IV, 8): Plaque isotrope (SSSL)

(IV-9): Variation de Ncr en fonction du nombre des éléments, plaque isotrope (SSSL)

(IV-10): Ncr minimal en fonction du nombre des éléments, cas d'un (stratifié) orthotrope (SSSS)

(IV, 11): Plaque isotrope (SSSS)

(IV-12): Variation (ΔT_{cr}) en fonction du nombre des éléments, plaque isotrope (uni axial)

(IV-13)- Variation ΔT_{cr} en fonction du nombre des éléments, plaque isotrope (bi axial)

(IV, 14): Plaque orthotrope unidirectionnel (SSSS)

(IV-15): Variation ΔT_{cr} en fonction du nombre des éléments, plaque orthotrope (uni axial)

(IV-16): Variation ΔT_{cr} en fonction du nombre des éléments, plaque orthotrope stratifié (uni axial)

(V-1): Variation de ΔT_{cr} en fonction de l'angle d'orientation des fibres et les conditions aux limites

(V-2): Variation de ΔT_{cr} pour différent rapport (a/b) en fonction l'angle d'orientation des fibres (EEEE)

(V-3): Variation de ΔT_{cr} en fonction de rapport géométrique (a/b) pour différent angle d'orientation,(EEEE)

(V-4): Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent (a/b), (SSSS/xy)

(V-5): Variation de ΔT_{cr} en fonction de rapport géométrique (a/b) pour différent angle d'orientation, (SSSS/xy)

(V-6) : Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent (a/b), (SSSS/x)

(V-7): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport géométrique (a/b) pour différent angle d'orientation, (SSSS/x)

(V-8): Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent rapport anisotropie, (EEEE)

(V-9) : Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport d'anisotropie (E_1/E_2) pour différent angle d'orientation, (EEEE)

(V-10) : Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent rapport anisotropie (E_1/E_2), (SSSS/xy)

(V-11): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport d'anisotropie (E_1/E_2) pour différent angle d'orientation, (SSSS/xy)

(V-12): Variation de ΔT_{cr} en fonction l'angle d'orientation des fibres pour différent rapport anisotropie (E_1/E_2), (SSSS/x)

(V-13): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport d'anisotropie (E_1/E_2) pour différent angle d'orientation, (SSSS/x)

(V-14): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport (α_2/α_1) pour différent angle d'orientation, (EEEE)

(V-15): Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport (α_2/α_1) pour différent angle d'orientation, (SSSS/xy)

(V-16) : Variation de ΔT_{cr} en fonction du rapport (α_2/α_1) pour différent angle d'orientation, (SSSS/x)

(V-17): Variation de ΔT_{cr} en fonction nombre des couches pour différent angle d'orientation, (EEEE)

(V-18): Variation de ΔT_{cr} en fonction nombre des couches pour différent angle d'orientation, (SSSS/xy)

(V-19): Variation de ΔT_{cr} en fonction nombre des couches pour différent angle d'orientation, (SSSS/x)

LISTE DES TABLEAUX

- (I-1) : Caractéristique mécanique de quelque matériau utilisé comme élément de renfort
- (I-2) : Caractéristique mécanique De quelques matériaux (matrice)
- (3, 1): Tableau des Subroutine
- (4, 1): Convergence de déplacement en fonction du nombre des éléments
- (4, 2): Convergence de la flèche en fonction du nombre des éléments (SSSS), (EEEE)
- (4.3) : $(N_x)_{Cr}$ minimal en fonction du nombre des éléments pour plaque isotrope (SSSS)
- (4, 4) : $(N_x)_{Cr}$ minimal en fonction du nombre des éléments (SSSL), cas isotrope
- (4, 5) : $(N)_{Cr}$ minimal en fonction des éléments(SSSS), cas d'un stratifié orthotrope
- (4, 6) : ΔT_{Cr} minimal en fonction du nombre des éléments (isotrope) uni axial
- (4, 7) : ΔT_{Cr} minimal en fonction du nombre des éléments (isotrope) bi axial
- (4, 8) : ΔT_{Cr} Minimal en fonction du nombre des éléments (orthotrope) uni axial
- (4,9): ΔT_{Cr} minimal en fonction des éléments (orthotrope) uni axial (stratifié)
- (4, 10) : ΔT_{Cr} en fonction des éléments (orthotrope) uni axial (stratifié) $((^+\theta)_2)_s, (+\theta_2, -\theta_2)_s$
- (5-1) : Variation ΔT_{Cr} en fonction de l'angle d'orientation des fibres et les conditions aux limites
- (5-2) : Variation de ΔT_{Cr} en fonction (a/b), appuis (EEEE)
- (5-3) : Variation de ΔT_{Cr} en fonction (a/b), appuis (SSSS/xy)
- (5-4) : Variation de ΔT_{Cr} en fonction (a/b), appuis (SSSS/x)
- (5-5) : Variation de ΔT_{Cr} en fonction (E_1/E_2) , appuis (EEEE)
- (5-6) : Variation de ΔT_{Cr} en fonction (E_1/E_2) , appuis (SSSS/xy)
- (5-7) : Variation de ΔT_{Cr} en fonction (E_1/E_2) , appuis (SSSS/x)

(5-8) : Variation de ΔT_{cr} en fonction ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$), appuis (EEEE)

(5-9) : Variation de ΔT_{cr} en fonction ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$), appuis (SSSS/xy)

(5-10) : Variation de ΔT_{cr} en fonction ($\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$), appuis (SSSS/x)

(5-11) : Variation de ΔT_{cr} en fonction des nombre des couches sur appuis (EEEE)

(5-12) : Variation de ΔT_{cr} en fonction des nombre des couches sur appuis (SSSS/xy)

(5-13) : Variation de ΔT_{cr} en fonction des nombre des couches sur appuis (SSSS/x)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **J.-M.BERTHELOT** 'Matériaux composite ' comportement mécanique et analyse des structures. 3éme édition Paris 1999.
- [2] **JEAN LEMAITRE, JEAN-LOUIS CHABOCHE** 'Mécanique des matériaux solides'. 2édition Paris 1996.
- [3] **S.TIMOSHENKO, S.WOINOWSKY-KRIEGER** 'Théorie des plaques et coques' Traduit d'après la 2éme édition américaine par 'Robert Pinto' 1961
- [4] **J.F.IMBERT** 'Analyse des structures par éléments finis' cepadues-édition, décembre 1984.
- [5] **C.ROCKEY-H.R.EVANS-D.W.GRIFFITHS-D.A.NETHERC** 'Introduction a la méthode des éléments finis, traduit par Claude Gomez' Edition Eyrolles' Paris 1979
- [6] **JEAN-LOUIS BATOZ, GOURI DHATT** 'Modélisation des structures par éléments finis, poutre et plaque', Volume 2 – Edition Hermès –Paris 1990
- [7] **FRANCOIS FREY, JAROSLAV JIROUSEK** ' Analyse des structures et milieux continus (Méthode des éléments finis)' Volume 6.L'école polytechnique fédérale de Lausanne 2001
- [8] **U.TOPAL, U.UZMAN** ' Thermal buckling load optimisation of laminated composite plates, Thin-Walled Structures , Volume46,Issue 6,June 2008,Pages 667-675.

- [9] **LIEN-WEN CHEN AND LEI-YI CHEN** ' Thermal buckling analysis of laminated cylindrical plates by the finite element methode,Computers &Structures, Volume 34,Issue 1,1990,Pages 71-78.
- [10] **S.P.TIMOSHENKO, J.N.GOODIER** ' Théorie des l'élasticité –résistance des matériaux', 2émé édition Dunod Paris 1966
- [11] **ROBERT M. JONES**' Thermal buckling of heated unidirectional and symmetric cross-ply laminated fiber–reinforced composite uniaxial in plane restrained simply supported rectangular plate, composite Part A: Applied Science and Manufacturing,, Volume 36,Issue 10,October 2005,Pages 1355-1367.
- [12] **LE-CHUNG SHIAU, SHIH-YAO KUO, CHENG-YUAN CHEN**' Thermal Buckling behavior of composite laminated plate, composite Structures, Volume 92,Issue 2,January 2010,Pages 508-514.
- [13] **SEDIRA LAKHDAR**, Contribution du modèle en déformation dans l'analyse des plaques stratifiées composites, Thèse de Magistère, Université de Batna, Avril 2002

RÉSUMÉ: l'objectif de ce travail est de déterminer la température critique minimale pour le flambage thermique, avec la prise en compte du flambage mécanique.

Notre travail est basé sur des plaques rectangulaires minces symétriques en matériaux composites à renfort unidirectionnel.

A l'aide des formulations avec les éléments finis on a choisi un élément à quatre nœuds, chaque nœud à six degrés de liberté de type "Hermite".

On a élaboré un programme en "fortran", puis on a validé de ce programme avec des solutions analytiques.

Les tests donnent des bons résultats.

A la fin nous avons fait une étude paramétrique pour examiner leur influence sur la température critique de flambage thermique.

ABSTRACT: The objective of this study is determined the minimum critical temperature thermal buckling, buckling forget mechanical sounds.

Our work based on thin rectangular plates of symmetric laminates unidirectional reinforced composite, using formulations with a finite elements chosen an item to four nodes, each node has six degrees of freedom of "Hermite" type.

We has developed a program with "fortran", and then validate the program and comparison it with analytical solution, the test gives good results at the end we made a study parametric to examine their influence on the critical temperature for thermal buckling.

ملخص:

الهدف من هذه المذكرة هي تحديد درجة الحرارة الدنيا للانبعاج الحراري دون نسيان الانبعاج الميكانيكي. يركز عملنا على دراسة صفائح مستطيلة رقيقة و متناظرة لمواد مركبة طبقية بتأثير أحادي الاتجاه، بواسطة معادلات بالعناصر المنتهية، باختيار عنصر ذو أربع عقد، كل عقدة لها ست درجات حرية من نوع "هرميت". قمنا بإنجاز برنامج بلغة الفورتران من أجل تأكيد النتائج المحصل عليها و مقارنتها مع النتائج التحليلية. النتائج كانت جد جيدة، و في النهاية قمنا بدراسة مقارنة من أجل فحص تأثير درجة الحرارة الحرجة للانبعاج الحراري.