

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE
ET LA VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire Présenté En Vue De L'obtention Du

DIPLÔME DE MAGISTER

EN MATHÉMATIQUES

Option : Analyse et Modélisation Aléatoire

Par

Nassima BERROUIS

Titre

Sur l'estimation des paramètres de la loi Lévy-stable

Membres du comité d'examination

Abdelhakim NECIR	Professeur	UMKB	Président
Djamel MERAGHNI	MCA	UMKB	Rapporteur
Brahim MEZERDI	Professeur	UMKB	Examineur
Boubakeur LABED	MCA	UMKB	Examineur

Juin 2012

Dédicace

A mes parents,

A mes frères et soeurs,

A tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

Au nom de DIEU Le Plus Clément et Le Plus Miséricordieux.

Je tiens à témoigner publiquement au Docteur Mr Djamel MERAGHNI, nom Directeur de mémoire, toute la reconnaissance que je lui dois. Ce dernier a suscité, développé puis accompagné mes premiers pas dans la domaine de statistique avec une grande patience et avec une pédagogie extraordinaire. Sincèrement Merci.

Je suis très honoré que les professeurs : Abdelhakim NECIR et Brahim MEZERDI et le docteur Boubakeur LABEDaient accepté de rapporter cette mémoire. Je leur suis reconnaissant pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail, d'avoir apporté de très judicieuses remarques et de m'avoir aidé à améliorer la qualité de la présentation.

Je tiens aussi à remercier tout mes amis et mes collègues. qui ont partagé avec moi leur contexte humain.

Enfin, je me permets également de remercier toute ma famille qui a supporté toutes les difficultés pour me soutenir tout au long de mes études.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
1 Lois stables	3
1.1 Historique	3
1.2 Variable aléatoire α -stables	5
1.3 Lois indéfiniment divisibles	5
1.4 Définitions équivalentes	7
1.5 Interprétation des paramètres	10
1.6 Propriétés diverses	13
1.6.1 Densité	13
1.6.2 Stabilité	17
1.6.3 Comportement Queues lourdes	17
1.6.4 Calcul des moments	19
1.6.5 Propriétés algébriques	21
1.7 Représentation en série de Lepage d'une variable aléatoire α -stable	23
1.8 Générateur de variables aléatoires stables	25
1.8.1 Algorithme de Chambers, Mallows et Stuck	25
1.8.2 L'algorithme de Weron et Weron	30
1.9 Statistique sur les Lois Stables	30
2 Estimation des paramètres stables	32
2.1 Estimation du maximum de vraisemblance	32
2.2 Méthode de recuit simulée par chaîne de Markov de Monte Carlo	33
2.3 Méthode basées sur les quantiles	35

2.3.1	Méthode de Fama et Roll	35
2.3.2	Méthode de McCulloch	36
2.3.3	Méthode de L-Moments	39
2.4	Méthode basées sur la fonction caractéristique	45
2.4.1	Méthodes de minimum de distance	45
2.4.2	Méthode des moments	46
2.4.3	Méthode basée sur la régression	48
2.4.4	Méthode de Régression Itérative	50
2.5	Méthode de Régression de Queue	51
2.6	Méthodes basées sur la théorie des valeurs extrêmes	51
2.6.1	Estimateur de Hill	53
2.6.2	L'estimation de μ	56
2.6.3	L'estimation de σ	57
3	Modélisation des données financières	59
3.1	Les indices boursiers	60
3.2	Taux de change	60
3.3	Ajustement stable contre ajustement normal	61
	Conclusion	74
	Bibliographie	76
	Annexe : Abréviations et Notations	80

Table des figures

1.1	Courbes de la densité stable pour différentes valeurs de l'indice de stabilité	11
1.2	Courbes de la densité stable pour différentes valeurs de paramètre de symétrie.	12
1.3	Courbes de la densité stable pour différentes valeurs de paramètre d'échelle.	12
1.4	Courbes de la densité stable pour différentes valeurs du paramètre de position	13
1.5	Les queues de la densité de probabilité α -stable pour différentes valeur de α	18
2.1	estimateur de hill de l'indice de stabilité $\alpha = 1.1$ (à droite), $\alpha = 1.9$ (à gauche) avec $\beta = 0$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$, la taille d'échantillon est 5000.	54
2.2	estimateur de paramètre d'échelle $\sigma = 1.1$ (à droite), $\sigma = 0.1$ (à gauche) avec $\alpha = 1.1$, $\beta = 0$, $\mu = 0$, la taille d'échantillon est 5000.	58
3.1	Boite à moustaches relative des indices	61
3.2	Graphes de série de CAC 40 de la période 02/01/2002 – 30/12/2011 (2562) observations)	62
3.3	Graphes de série de DJIA de la période 02/01/2002 – 30/12/2011 (2519 observations).	63
3.4	Graphes de série de NIKKEI de la période 02/01/2002 – 30/12/2011 (2451 observations).	64
3.5	Boite à moustaches relative des taux de change.	65
3.6	Graphes de taux de change CAD contre USD de la période 28/01/2002 – 30/12/2011 (2491 observations).	66
3.7	Graphes de taux de change EURO contre USD de la période 13/02/2002 – 30/12/2011 (2479 observations).	67
3.8	Graphes de taux de change YEN contre USD de la période 13/02/2002 – 30/12/2011 (2478 observations).	68
3.9	Rendements de l'indice CAC 40 : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).	69
3.10	Rendements de l'indice DJIA : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).	69

3.11 Rendements de l'indice NIKKEI : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).	70
3.12 Rendements de taux de change USD contre CAD : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).	70
3.13 Rendements de taux de change USD contre EURO : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).	71
3.14 Rendements de taux de change USD contre YEN : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).	71

Liste des tableaux

1.1	Moyenne et variance empirique calculées sur 5000 réalisations pour différentes valeurs de α	31
2.1	Table de DuMouchel pour $\nu(\alpha)$	37
2.2	Table de DuMouchel pour $\nu(\beta)$	38
2.3	Table de DuMouchel pour estimer α	39
2.4	Table de DuMouchel pour estimer β	40
2.5	Table de DuMouchel pour $\nu(\sigma)$	41
2.6	Table de DuMouchel pour $\nu(\zeta)$	42
2.7	L'estimation de McCulloch pour des ensembles de paramètres stables basé sur 100 échantillons de taille 5000.	43
2.8	Valeurs optimales de K pour différentes valeurs de α	49
3.1	Quartiles empiriques des rendements des indices boursiers.	60
3.2	Statistiques élémentaires des rendements des indices boursiers.	60
3.3	Quartiles empiriques des rendements des taux de change.	61
3.4	Statistiques élémentaires des rendements des taux de change.	65
3.5	Statistiques du test de normalité de Shapiro-Wilk avec des p-valeurs $< 2.2 \cdot 10^{-16}$	72
3.6	Paramètres des indices boursiers estimés par la méthode de McCulloch.	72
3.7	Paramètres des taux de change estimés par la méthode de McCulloch.	73

Introduction

De nombreux problèmes physiques et financiers présentent de très grandes variabilités et les distributions α -stables sont souvent utilisées pour leurs modélisations. Ces lois, introduites par Paul Lévy en 1924, constituent une classe très riche de modèles de probabilité. Elles prennent en compte l'asymétrie et les queues lourdes. Une distribution est dite à queues lourdes si sa queue décroît plus lentement que la queue d'une distribution gaussienne. La propriété d'asymétrie signifie que le mode n'est pas au centre de la distribution. L'avantage des distributions stables de Lévy par rapport à celles de Gauss est qu'elles permettent de mettre en évidence ces caractéristiques. En vertu du théorème central limite généralisé, elles sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Les trois cas particuliers (lois de Gauss, de Cauchy et de Lévy), sont les seules ayant une forme explicite pour la densité de probabilité et la fonction de répartition. Les autres sont caractérisées par leurs fonctions caractéristiques. Cette absence d'écriture explicite de la densité et de la fonction de répartition a été un inconvénient important à l'utilisation des distributions stables par les praticiens. Les variables aléatoires stables non-gaussiennes ne possèdent pas de moments de second ordre. En général la loi stable, notée $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, est décrite par quatre paramètres : l'exposant caractéristique, noté α , qui prend ses valeurs entre 0 et 2, le paramètre d'asymétrie β compris entre -1 et 1 , le paramètre d'échelle σ et le paramètre de position μ . La notion de stabilité traduit le fait que la somme de 2 variables indépendantes, suivant chacune une loi de paramètre α , suit également une loi de paramètre α . Il y a des paramétrisations pour les lois stables, ce qui a engendré beaucoup de confusion.

Dans les années 60 Mandelbrot [30] a proposé le modèle α -stable dans la modélisation financière. Il a examiné les variations des prix du coton (1816–1940), du blé (1857–1936) et des taux de change (périodes assimilées) et il a trouvé un très grand nombre de valeurs extrêmes dans les séries observées. Fama [11] a ensuite analysé les rendements journaliers de 30 actions du Dow Jones dans une période allant de la fin de 1957 à septembre 1962, avec la même conclusion.

L'estimation des paramètres stables est une étape essentielle au processus de modélisation. Elle s'est développée petit à petit ; Fama et Roll (1968) [13] donnent les premières tabulations des lois symétriques α -stables ($S\alpha S$), ce aura permis de concevoir les premiers estimateurs de ces lois.

Comme Fama l'indique dès 1965, ces premières mises en évidence de distributions de

Lévy sont fragiles car les méthodes d'estimation de l'exposant caractéristique α sont peu sûres. En effet, la méthode d'ajustement des queues de distribution dans un graphique bilogarithmique est très sensible au choix subjectif du point à partir duquel la queue de distribution commence. Fama (1965a) avait proposé deux autres estimateurs fondés sur la propriété d'invariance par addition. Mais ces deux estimateurs étaient également fragiles, le premier présupposait l'indépendance des accroissements, et le second était très sensible au choix de la taille de l'échantillon. Une étape est franchie en 1971 où Fama et Roll, utilisant des propriétés relatives aux quantiles, détectées grâce aux tabulations des distributions stables symétriques faites précédemment, proposent de nouvelles méthodes d'estimation des paramètres α et σ des lois symétriques. Ces premiers outils statistiques vont permettre la mise en œuvre des premiers tests du modèle i.i.d α -stable à partir de 1970. Puis une seconde génération d'estimateurs va apparaître au cours des années 70. Successivement Press (1972) [49] et [50], DuMouchel (1973, 1975) [10], Paulson et al. (1975) [47], Arad (1980), Koutrouvélis (1980) [25], et McCulloch (1981) [32], développent de nouvelles méthodes d'estimation des paramètres, utilisant la fonction caractéristique. Récemment, de nouvelles classes d'estimateurs sont introduites grâce aux outils de la théorie des valeurs extrêmes.

Simultanément, des générateurs de variables aléatoires stables sont conçus par Chambers et al. (1976), dont les algorithmes permettent une amélioration des possibilités de simulation sur les marchés financiers. Ces nouvelles étapes théoriques permettent d'améliorer les tests sur l'hypothèse d'invariance d'échelle.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres qui détaillent l'évolution de mon travail.

Le premier chapitre est dédié à un rappel sur l'histoire et l'évolution des recherches concernant les variables aléatoires α -stables. Ce rappel est donné dans l'ordre suivant : on commence par les définitions et propriétés fondamentales des variables α -stables, puis on donne des méthodes pour simuler les variables stables.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de différentes méthodes d'estimation des paramètres de la distribution Lévy-stable, à savoir les méthodes classiques et celles basées sur la théorie des valeurs extrêmes. Les performances de ces méthodes est illustrées sur des données simulées.

Le troisième chapitre exploite les résultats du chapitre 2 pour proposer des modèles α -stables pour des données financières et en même temps vérifier la non validité du modèle normal. On commence par la modélisation des rendements d'actifs de quelques indices boursiers parmi les plus connus, ensuite on ajuste les séries de taux de change entre les devises mondiales les plus importantes.

Chapitre 1

Lois stables

1.1 Historique

Au cours des développements historiques en astronomie au 18-ème siècle, Gauss a introduit sa méthode d'estimation par le critère du moindre carré et insista sur l'importance de la loi qui porte actuellement son nom [17]. Suivi par les développements de la théorie des séries de Fourier, Laplace et Poisson tentent de trouver l'expression analytique de la transformée de Fourier (TF) d'une densité de probabilité et lancent alors la théorie des fonctions caractéristiques sur la bonne voie. Laplace, en particulier a souligné le fait que la densité de Gauss et sa TF ont la même expression analytique. Son étudiant Cauchy étend l'analyse de Laplace et considère la TF d'une fonction de "Gauss généralisée" de la forme

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-ct^n) \cos(tx) dt,$$

en remplaçant 2 par n , il n'a pas réussi à résoudre le problème mais quand en considérant le cas $n = 1$, il a obtenu la fameuse loi de Cauchy de densité $f_1(x) = c / (\pi(c^2 + x^2))$.

En remplaçant l'entier n par un réel α on obtient la fameuse famille f_α des densités α -stables. Cependant, à l'époque on ne savait pas qu'il s'agit d'une densité de probabilité et c'est seulement après les travaux de Polya et Bernstein que la famille f_α est devenue officiellement une classe de PDF pour $0 \leq \alpha \leq 2$ [22]. En 1924, le mathématicien Français Lévy [28], en étudiant le théorème limite centrale, confirme que lorsque on relâche la condition de variance finie, la loi limite est une loi stable. Motivé par ce dernier résultat Lévy établit la TF de toutes les distributions α -stable, ce qui lui attribue l'originalité de la théorie des lois stables. Plus tard en 1937, Lévy a introduit une nouvelle approche pour le traitement des lois stables qui est celles des distributions infiniment divisibles.

D'autres mathématiciens ont contribué plus tard à l'étude approfondie des lois stables, notamment de Doblin (1939) en utilisant les fonctions à variations régulières, de Gnedenko et Komogorov et de [61] quelques années plus tard, [12] donnent les premières

tabulations des lois symétriques α -stable, ce qui va permettre de concevoir les premiers estimateurs de ces lois. Malgré cette longue histoire de recherche scientifique, les lois α -stable n'attirent que peu d'attention des chercheurs en sciences appliquées.

- **En astronomie** : la première application des distributions α -stable est apparue avant Lévy dans le domaine de l'astronomie, quand Holsmark a montré que la force gravitationnelle exercée par le système stellaire sur un point de l'univers a une distribution α -stable d'indice $\alpha = 3/2$.
- **En finance** : si on regarde par exemple les courbes boursières représentant l'évolution du prix d'un titre au cours du temps, des périodes hautes s'altèrent à des périodes basses et ainsi de suite. De plus, des fluctuations et des périodes irrégulières peuvent être observées Mandelbrot s'appuie alors sur la loi de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé loi α -stable.[30] confirme que son modèle décrit de façon réaliste la variation de prix pratiqués sur certaines bourses des valeurs. Par la suite, [11] valide le modèle des lois α -stable sur le prix du marché des actions. A la fin des années 80, plusieurs travaux semblent rejeter le modèle i.i.d α -stable en se retournant vers la remise en question de l'hypothèse d'indépendance ce qui a conduit à la découverte des lois d'échelle ou loi à longue dépendance.
- **En Télécommunications** : les premiers travaux effectués pour l'application des lois α -stable en traitement de signal ont vu le jour durant les années 70 par trois chercheurs des laboratoires de BELL (Chamber, Mallow et stuck) en prouvant que le modèle α -stable est bien adéquat pour modéliser le bruit des lignes téléphoniques. Ils ont conduit une série de travaux qui ont abouti à plusieurs résultats de références comme le critère de dispersion minimum, filtrage de Kalman des processus α -stable et l'analyse de plusieurs algorithmes d'estimation et de détection dans un bruit non-gaussien. En 1993, Shao et Nikiais ont publié dans IEEE Magazine un article qui a introduit la méthodologie de traitement du signal dans un environnement α -stable. Plus tard, l'intérêt à ce thème devient publique et plus de 120 article de revue et de conférence sont apparus dans plusieurs applications de ce modèle. D'autre applications sont beaucoup plus récentes, dans l'inténêt par exemple, le temps d'apparitions d'une page Web est très variable, ce qui rappelle certains modèles à variance infinie. Dans ce contexte, [1] donnent divers exemples d'application des lois à queues lourdes et en particulier les distributions α -stables. Par ailleurs, en 1999 une conférence internationale sur le sujet "application of heavy tailed Distributions in Statistics, Engineering and Economics" était organisée. Quelques mois plus tard, durant la conférence IEEE Higher order statistics workshop, une session spéciale était consacrée au sujet. en 2000, la conférence ICASSP aussi consacre une session spéciale au sujet. Récemment en 2002, un numéro spécial du journal "Signal Processing" est dédié aux modèle à queues et leurs applications en Radar, images, vidéo et en analyse des données télégraphiques (No. 82, 2002).

- **D'une manière Générale :** notons toutefois que même si le modèle i.i.d α – *stable* n'est pas toujours approprié, il représente un bon compromis entre exactitude de modélisation et complexité d'inférence statistique. Plusieurs livres sont consacrés à ces lois [62] qui a étudié les lois α – *stable* dans le contexte univarié [55] qui ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié, [39] qui ont appliqué ces lois dans le domaine du traitement du signal et [43] pour une étude de point de vue implémentation et modélisation des données.

1.2 Variable aléatoire α –stables

Dans cette partie, on rappelle les définitions d'une distribution stable de quatre manières équivalentes. Les deux premières définitions concernent la propriété de stabilité par produit de convolution, c'est-à-dire que la famille des distributions stables est préservée par convolution. La troisième définition explique le rôle des distributions stables dans le contexte du théorème central limite, c'est-à-dire que les distributions stables peuvent être approchées par une somme normalisée des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cette propriété rend importante l'utilisation des distributions α –stables dans la modélisation. La quatrième définition spécifie la fonction caractéristique d'une variable aléatoire α –stable. Cette fonction caractéristique est explicitée d'une manière analytique exacte. Par contre, les densités de probabilité ne sont données par une formule explicite que pour les trois distributions de Gauss($\alpha = 2$), de Cauchy($\alpha = 1$) et de Lévy($\alpha = 0, 5$). On donne l'interprétation pratique de chaque paramètre de cette distribution et on rappelle des Propriétés diverses. Les définitions et propriétés énoncées dans ce chapitre sont issues de Janicki et Weron [22] et de Samorodnitsky et Taqqu [55].

1.3 Loix indéfiniment divisibles

Avant de définir les lois α –stables, on va introduire une famille de lois plus générale : les lois indéfiniment divisibles, C'est à partir de ces lois que sera précisée la forme de la fonction caractéristique des lois stables.

l'intérêt principal de telles lois réside dans la solution du problème suivant : comment détermine-t-on toutes les distributions qui expriment comme limite d'une somme de n variables aléatoires réelles (v.a.r) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) ?

Intuitivement, si une suite de v.a.r T_n converge en loi vers une v.a.r T et que ces T et que ces T_n s'expriment comme une somme de n v.a.r indépendantes de même loi, alors T va aussi s'exprimer de la même manière. Introduisons alors la définition suivante

Définition 1.3.1 Une v.a.r X a une distribution indéfiniment divisible si et seulement si

$\forall n ; \exists X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi telle que

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

où $\stackrel{d}{=}$ signifie l'égalité en distribution.

Il faut noter que les v.a.r X_i n'ont pas forcément la même loi que X mais elles appartiennent à la même classe de distributions.

La classe des v.a.r indéfiniment divisible permet de résoudre le problème ci-dessus.

En effet, on a le théorème suivant.

Théorème 1.3.1 Une v.a.r X est la limite d'une somme de n v.a.r (i.i.d) si et seulement si X est indéfiniment divisible.

La démonstration est détaillé dans [[56], page 336].

Remarque 1.3.1 Une des caractérisations des lois indéfiniment divisibles est que leur fonction caractéristique peut s'écrire comme puissance $n^{\text{ème}}$ d'une autre fonction caractéristique.

Théorème 1.3.2 (Levy-Khinchin)

Si X a une distribution indéfiniment divisible, alors sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\varphi(t) = \exp \left\{ i\mu t + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - it \sin x}{x^2} M(dx) \right\},$$

où μ est un réel et M est une mesure qui attribue une masse finie à tout intervalle fini et telle que les deux intégrales suivantes

$$M^+(x) = \int_x^{+\infty} y^{-2} M(dy) \quad \text{et} \quad M^-(-x) = \int_{-\infty}^{-x} y^{-2} M(dy),$$

sont convergentes pour tout $x > 0$.

La démonstration est détaillée dans [14].

Exemple 1.3.3 Beaucoup de lois connues sont indéfiniment divisibles. Si une v.a.r X suit :

la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp \left\{ i\mu t - \frac{t^2 \sigma^2}{2} \right\} \\ &= \left[\exp \left\{ i \frac{\mu}{n} t - \frac{t^2 \frac{\sigma^2}{n}}{2} \right\} \right]^n \end{aligned}$$

comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi normale $N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$.

la loi de Cauchy $C(c)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp(-c|t|) \\ &= \left[\exp\left(-\frac{c}{n}|t|\right) \right]^n\end{aligned}$$

comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy $C(\frac{c}{n})$.

la loi de Poisson $P(\lambda)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\} \\ &= \left[\exp\left\{\frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right\} \right]^n\end{aligned}$$

comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi de Poisson $P(\frac{\lambda}{n})$.

contre exemples :

- une loi à support borné (hormis la Dirac en un point) n'est pas indéfiniment divisible,
- un mélange fini de lois normales n'est pas indéfiniment divisible.

Pour se rapprocher du théorème de la limite centrale et afin d'obtenir une forme explicite de la fonction caractéristique, on va introduire la famille des distributions α -stable.

1.4 Définitions équivalentes

Définition 1.4.1 (*Propriété de stabilité*)

Une v.a.r X est dite stable (ou a une distribution stable) si et seulement si pour tout réels positifs A et B , il existe un réel positif C et un réel D tels que

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D, \tag{1.1}$$

où X_1 et X_2 sont des copies aléatoires de X indépendantes .

Lorsque $D = 0$, on parle de distribution strictement stable.

Une variable aléatoire est dite stable symétrique si elle est stable et a une distribution symétrique.

La loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est le produit de convolution des lois respectives de ces deux variables. La définition 1.4.1 justifie donc la nomination "stable" car elle fait intervenir la stabilité par le produit de convolution. Il est démontré dans Feller [14] que pour toute variable aléatoire X stable, il existe un réel $\alpha \in]0, 2]$, tel que les nombres réels positifs A , B et C vérifient,

$$A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha. \tag{1.2}$$

Le nombre α est unique et ne dépend que de la loi de la variable aléatoire X , d'où la nomination α - stable.

Exemple 1.4.1 (*Distribution normale*).

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors X est stable d'indice de stabilité $\alpha = 2$ car si X_1, X_2 sont deux copies indépendantes de X , on a

$$AX_1 \sim N(A\mu, (A\sigma)^2) \text{ et } BX_2 \sim N(B\mu, (B\sigma)^2),$$

alors

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2 + B^2)\sigma^2),$$

et donc on retrouve bien 1.1 avec $C = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$ et $D = (A+B-C)\mu$.

La relation 1.2 peut être généralisée pour un nombre fini de copies indépendantes d'une variable α – stable. La définition suivante explicite cela.

Définition 1.4.2 (*Définition équivalente*)

Une v.a.r X a une distribution stable si et seulement si pour tout entier $n \geq 2$ et toute famille X_1, X_2, \dots, X_n indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X , il existe $C_n > 0$ et D_n , deux réels, tels que

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n.$$

On utilise la relation 1.2 en procédant par récurrence, il est facile de voir que la constante $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ où α est celui défini dans la relation 1.2. En particulier quand $\alpha = 2$, on a $C_n = \sqrt{n}$. La définition suivante explicite les variables stables en termes de théorème limite centrale.

Définition 1.4.3 (*Domaine d'attraction*)

Une variable aléatoire réelle X est dite avoir une distribution stable si et seulement si elle possède un domaine d'attraction, Cela veut dire qu'il existe une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(Y_i)_i$, une suite de nombres positifs $\{a_n\}$ et une suite de nombres réels $\{b_n\}$, telles que

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{a_n} + b_n \xrightarrow{d} X.$$

Proposition 1.4.1 Si X est stable alors X est indéfiniment divisible. La réciproque est fausse.

Preuve Il suffit de prendre des v.a.r $Y_j = (X_j - (b_n/n))/a_n$; $j = 1, \dots, n$.

Comme les X_j sont indépendantes, les Y_j sont aussi indépendantes.

$$Y_1 + \dots + Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{a_n} - \frac{b_n}{a_n}.$$

Or

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n,$$

d'où

$$Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{d}{=} X.$$

Pour la réciproque, on a le contre exemple la loi de Poisson, en effet, soient X_1 et X_2 deux v.a.r suivant une loi de Poisson. Supposons que X_1 et X_2 sont stables, alors il existe $a > 0$ et b tels que

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} aX_1 + b.$$

Par égalité des moyennes et des variances, on peut voir que

$$\begin{cases} 2\lambda = a\lambda + b \\ 2\lambda = a^2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} b = (2 - \sqrt{2})\lambda, \\ a = \sqrt{2}, \end{cases}$$

ce qui entraîne une contradiction car $X_1 + X_2$ a ses valeurs dans \mathbb{N} alors que $\sqrt{2}X_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$ n'a pas que des valeurs dans \mathbb{N} . ■

La définition 1.4.3 est équivalente aux définitions 1.4.1 et 1.4.2. Pour plus de détails voir Feller [14] ou [55]. Elle permet de définir une variable aléatoire stable comme somme normalisée d'une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées. On remarque que ce résultat est très utile dans la pratique car il permet d'approcher une somme normalisée d'une suite de variables aléatoires i.i.d par une variable aléatoire stable. Cela généralise le cas classique du théorème de la limite centrale pour les variables aléatoires de variance finie (cas gaussien). Ces trois dernières définitions introduisent les variables aléatoires α -stable d'une manière abstraite et ne donnent aucune précision sur la distribution de probabilité de ces variables. La définition suivante donne la fonction caractéristique de ces variables.

Définition 1.4.4 Une variable aléatoire X est dite avoir une distribution stable si et seulement si il existe quatre paramètres uniques $0 < \alpha \leq 2, \sigma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1$, et un réel μ tel que

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu t) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp(-\sigma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) \log |t|) + i\mu t) & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

où

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases} .$$

Une variable aléatoire réelle qui a cette expression pour sa fonction caractéristique est notée $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Mais cette représentation de la (FC), qui s'appelle paramétrisation standard, a le désavantage de ne pas être continue en ses paramètres. En fait, il y a discontinuité en les points où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Par ailleurs il existe d'autres paramétrisations de la (FC) plus adaptées aux différents problèmes.

Ici, on fait référence à deux paramétrisations proposées par Zolotarev

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha \{1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} [(\sigma |t|)^{1-\alpha} - 1] + i\mu_0 t\}), & \alpha \neq 1, \\ \exp(-\sigma |t| \{1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \log(\sigma |t|)\} + i\mu_0 t), & \alpha = 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Cette représentation S^0 se note $X \sim S_\alpha^0(\sigma, \beta, \mu_0)$. Les paramètres α , β et σ de la paramétrisation standard, mais μ et μ_0 sont reliés par

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 - \sigma\beta \tan(\pi\alpha/2) & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ \mu_0 - \sigma\beta(2/\pi) \log \sigma & \text{pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

Cette paramétrisation est très importante parce que la fonction caractéristique, la densité et la fonction cumulative de répartition sont continues par rapport aux quatre paramètres. Donc, elle est bien conditionnée numériquement pour le calcul.

Pour $\beta = 0$, les deux représentations sont équivalentes, cependant dans le cas général la représentation S^0 est préféré.

Une autre paramétrisation S^1 est donnée par

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp(-\sigma_2^\alpha |t|^\alpha \exp\{-i\beta_2 \operatorname{sign}(t) \frac{\pi}{2} K(\alpha)\} + i\mu t), & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp(-\sigma_2 |t| \{\frac{\pi}{2} + i\beta_2 \operatorname{sign}(t) \log |t|\} + i\mu t), & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

où

$$K(\alpha) = \alpha - 1 + \operatorname{sign}(1 - \alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha < 1, \\ \alpha - 2 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Les paramètres α et μ sont les mêmes que pour la paramétrisation standard, les autres paramètres satisfont les relations suivantes

$$\begin{cases} \tan(\beta_2 \frac{\pi K(\alpha)}{2}) = \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \beta_2 = \beta & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Et

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2})^{1/2\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \sigma_2 = \frac{2}{\pi} \sigma & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

1.5 Interprétation des paramètres

Les quatre paramètres α , β , σ et μ caractérisent d'une manière unique les distributions stables, ce qui signifie que les lois stables sont paramétriques. Pour un praticien, il est

important de connaître la signification statistique de chaque paramètre ainsi que son influence sur l'allure de la courbe de la densité ou de la fonction de répartition.

- α : **L'exposant caractéristique**, indice de stabilité ou paramètre de forme ($0 < \alpha \leq 2$) il caractérise les queues de distribution en mesurant leurs épaisseurs. C'est pourquoi on parle des distributions α -stable à queues lourdes ou à queues épaisses. Plus α est petit, plus les queues de la distribution sont épaisses. Autrement dit, Plus α est petit, plus on constate l'existence de très grandes fluctuations. Quand α est proche de 2, la probabilité d'observer des valeurs de la variable aléatoire loin de la position centrale est faible. Une valeur proche de 0 de l'indice α signifie que la masse de la queue a une probabilité considérable. La valeur maximum de α soit $\alpha = 2$ correspond à la loi de Gauss pour toute valeur de β , alors que $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ correspond à la loi de Cauchy.

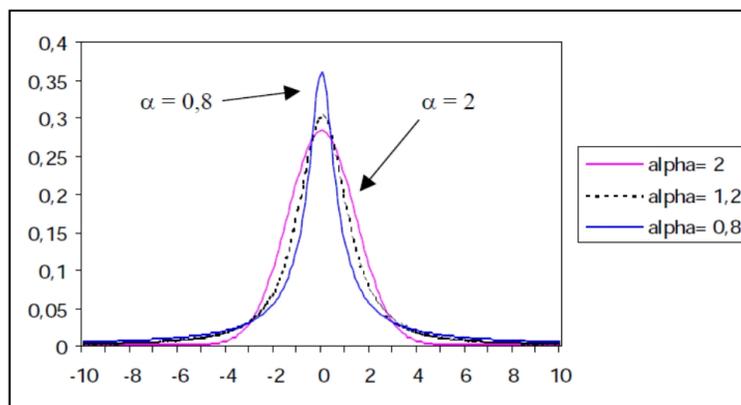


FIG. 1.1 – Courbes de la densité stable pour différentes valeurs de l'indice de stabilité

Plus le paramètre α est petit, plus la courbe de la densité est pointue et a des queues de distribution épaisses.

- β : **paramètre de symétrie** le paramètre β est appelé paramètre de symétrie, dit aussi paramètre de biais, il prend ses valeurs sur l'intervalle $[-1, 1]$ et mesure la dissymétrie de la densité d'une variable aléatoire stable. Si β est égal à -1 (resp. $+1$) la distribution est totalement asymétrique à gauche (resp. à droite). Lorsque β vaut zéro alors la distribution est symétrique.

- Lorsque β est positif (resp. négatif), le mode est à gauche (resp. à droite) de la moyenne.

- Lorsque β est positif (resp. négatif), la queue de distribution est plus épaisse à droite (resp. à gauche).

- σ : **paramètre d'échelle** et parfois dit paramètre de dispersion. Plus σ est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre σ permet de cintrer plus ou moins le corps de la distribution, dans le cas d'une variable normale son rôle similaire à celui de l'écart-type.

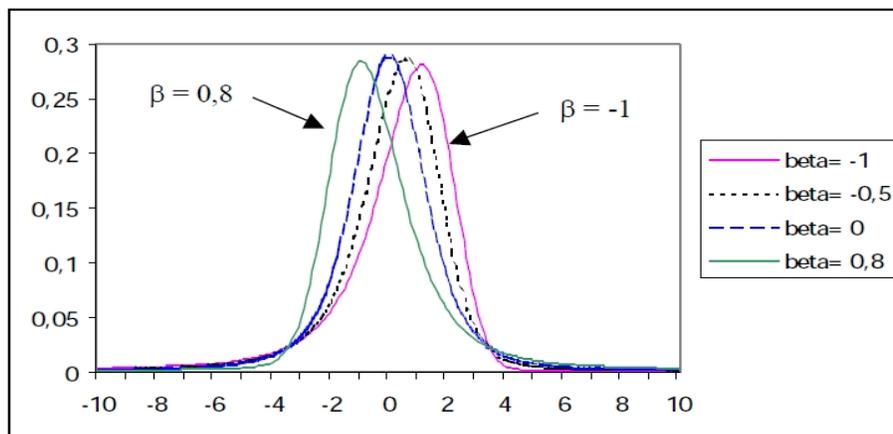


FIG. 1.2 – Courbes de la densité stable pour différentes valeurs de paramètre de symétrie.

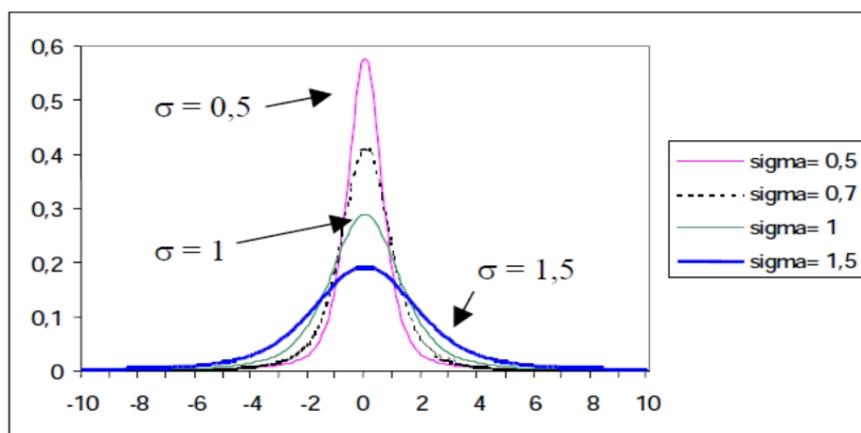


FIG. 1.3 – Courbes de la densité stable pour différentes valeurs de paramètre d'échelle.

- μ : **paramètre de position** où le paramètre de localisation, il mesure la tendance centrale de la distribution. Lorsque $\alpha > 1$, μ représente la moyenne de la loi de distribution. Si, $\beta = 0$ alors μ est la médiane. Dans les autres cas le paramètre μ ne peut pas être interprété.

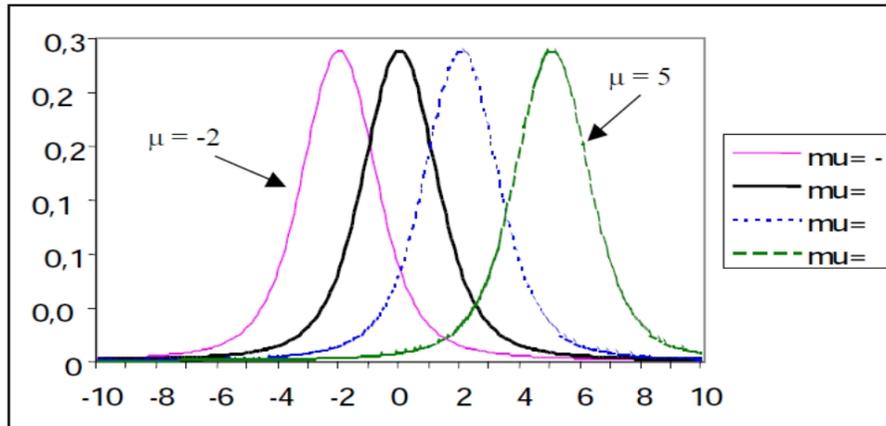


FIG. 1.4 – Courbes de la densité stable pour différentes valeurs du paramètre de position

1.6 Propriétés diverses

Dans cette partie, quelques propriétés des lois α -stables seront présentées, en particulier celles du calcul des moments.

1.6.1 Densité

Pour les v.a. α -stables, il n'existe pas une expression explicite de la densité de probabilité (PDF) dans le cas général. Cependant il y a deux approches de ce problème. Soit le transformée de Fourier rapide doit être appliquée à la fonction caractéristique (Mittnik, Daganogh 1999 [38]) ou l'intégration numérique directe doit être utilisée (Nolan 1997, 1999).

Obtention de la densité par la transformée de Fourier rapide

On n'a pas une expression explicite de la densité de probabilité dans le cas général, à l'aide de transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique, on peut écrire la fonction de la densité sous forme.

$$f(x, \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \varphi_X(t) dt. \quad (1.7)$$

La transformée de Fourier Rapide est un algorithme efficace pour calculer les transformées de Fourier. Il exige $N \log_2 N$ opérations, l'intégrale précédente est calculée pour N points également espacés d'une distance h , à savoir

$$x_k = (k - 1 - (N/2)) \times h \text{ où } k \text{ varie de } 1 \text{ à } N.$$

Posons $t = 2\pi\omega$, la relation 1.7 devient

$$f(x_k, \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(2\pi\omega) \exp(-2i\pi\omega x_k) d\omega. \quad (1.8)$$

L'intégrale 1.8 peut-être aproximée par :

$$f(x_k, \alpha, \beta, \sigma, \mu) \approx s(-1)^{k-1-(N/2)} \times \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \varphi_X(2\pi s(n - 1 - \frac{N}{2})) e^{(-2i\pi \frac{(n-1)(k-1)}{N})}. \quad (1.9)$$

La somme dans 1.9 est calculée efficacement en effectuant la transformée de Fourier Rapide sur la serie :

$$(-1)^{n-1} \varphi_X(2\pi s(n - 1 - \frac{N}{2})) \quad , n = 1, \dots, N.$$

on multiplie le $k^{\text{ème}}$ résultat pour $s(-1)^{k-1-(N/2)}$, pour obtenir la valeur de la fonction de densité pour chaque point $k = 1, \dots, N$.

Representation intégrale de Nolan-Zolotarev

Dans la méthode d'intégration directe, soit des formules pour la densité et la fonction de répartition.

Posant $\zeta = -\beta \tan(\pi\alpha/2)$ Si $X \sim S_\alpha^0(1, \beta, 0)$ alors la densité est donnée par

Quand $\alpha \neq 1$ et $x > \zeta$,

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha(x - \zeta)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi |\alpha - 1|} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta, \alpha, \beta) \exp(-(x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta, \alpha, \beta)) d\theta. \quad (1.10)$$

Quand $\alpha \neq 1$ et $x = \zeta$,

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \cos(\theta_0)}{\pi(1 + \zeta^2)^{\frac{1}{2\alpha}}}. \quad (1.11)$$

Quand $\alpha \neq 1$ et $x < \zeta$

$$f(x, \alpha, \beta) = f(-x, \alpha, -\beta). \quad (1.12)$$

Quand $\alpha = 1$

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta, 1, \beta) \exp\left\{-e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\theta, 1, \beta)\right\} d\theta & \text{pour } \beta \neq 0, \\ \frac{1}{\pi(1+x^2)} & \text{pour } \beta = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Où

$$\theta_0 = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \arctan(-\zeta) & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pour } \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.14)$$

et

$$V(\theta, \alpha, \beta) = \begin{cases} (\cos \alpha \theta_0)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \alpha(\theta_0 + \theta)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos(\alpha \theta_0 + (\alpha - 1)\theta)}{\cos \theta} & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \exp\left(\frac{1}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \theta\right) \tan \theta\right) & \text{pour } \alpha = 1, \beta \neq 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \sim S_\alpha^0(1, \beta, 0)$ peut être exprimée comme suit

Quand $\alpha \neq 1$ et $x > \zeta$

$$F(x; \alpha, \beta) = c_1(\alpha, \beta) + \frac{\text{sign}(1 - \alpha)}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-(x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta, \alpha, \beta)) d\theta, \quad (1.16)$$

où

$$c_1(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) & \text{pour } \alpha < 1, \\ 1 & \text{pour } \alpha > 1. \end{cases}$$

Quand $\alpha \neq 1$ et $x = \zeta$

$$F(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right). \quad (1.17)$$

Quand $\alpha \neq 1$ et $x < \zeta$

$$F(x, \alpha, \beta) = 1 - F(-x, \alpha, -\beta). \quad (1.18)$$

Quand $\alpha = 1$

$$F(x, 1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp \left\{ -e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\theta, 1, \beta) \right\} d\theta & \text{pour } \beta > 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x & \text{pour } \beta = 0. \\ 1 - F(x, 1, -\beta) & \text{pour } \beta < 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Pour étudier la performance de ces approches, Borak, Härdle et Weron [6] notent que la méthode basée par (TF) est plus rapide pour des échantillons dépassant 100 observations et plus lente pour les petits ensembles des données. D'ailleurs elle n'est pas aussi universelle que la méthode basée par intégration directe. En effet, elle est seulement efficace pour le grand valeurs de α et seulement applicable en calculant le PDF, qui doit être intégré numériquement afin d'obtenir le FD. En revanche, la méthode directe d'intégration fournit des formules pour le PDF ou le FD.

Proposition 1.6.1 (*propriétés de la densité*)

1. La densité de probabilité verifie : $f(x, \alpha, \beta) = f(-x, \alpha, -\beta)$.
2. La densité de probabilité d'une distribution α -stable est une fonction bornée.
3. La densité de probabilité d'une distribution α -stable est de la Classe C^∞ .

Pour la démonstration voir [62].

La forme explicite de la densité des lois α -stables n'existe que dans les trois cas importants suivants :

1. La distribution Gaussienne : $S_2(\sigma, 0, \mu)$ avec

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}\right).$$

2. La distribution de Cauchy : $S_1(\sigma, 0, \mu)$ avec

$$f(x) = \frac{2\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + 4\sigma^2)}.$$

3. La distribution de Lévy : $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$ avec

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} (x-\mu)^{3/2} \exp\left(\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right) 1_{] \mu, \infty[}(x).$$

1.6.2 Stabilité

Proposition 1.6.2 *pour $\alpha \neq 1$, on a l'équivalence suivante*

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\sigma, \beta, \mu) \Leftrightarrow Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ suit une loi } S_\alpha(1, \beta, 0).$$

Preuve Tout d'abord, on remarque que

$$\varphi_{mX+p}(t) = E[e^{it(mX+p)}] = e^{itp} \varphi_X(mt).$$

condition nécessaire : prenons $m = \frac{1}{\sigma}$ et $p = \frac{-\mu}{\sigma}$.

On a alors :

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(\frac{-i\mu t}{\sigma}\right) \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma}\right),$$

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(\frac{-i\mu t}{\sigma}\right) \exp\left\{\frac{i\mu t}{\sigma} - \sigma \left|\frac{t}{\sigma}\right|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}\left(\frac{t}{\sigma} \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]\right\},$$

où

$$\operatorname{sign}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = \operatorname{sign}(t).$$

Car $\sigma > 0$, donc

$$\varphi_Y(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\},$$

qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi stable.

Condition suffisante : la démonstration est similaire à la condition nécessaire en prenant $m = \sigma$ et $p = \mu$. ■

1.6.3 Comportement Queues lourdes

Définition 1.6.1 *La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est dite "heavy-tailed" d'indice α s'il existe une fonction h à variation lente, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(tx)/h(x)] = 1$*

pour tout $t > 0$, telle que

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x).$$

Les lois α -stable sont des "heavy-tailed distributions". En effet, ce résultat se résume dans la proposition suivante :

Proposition 1.6.3 *Soit X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $0 < \alpha < 2$, on a les deux résultats suivants*

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X > t) = \sigma^\alpha C_\alpha \frac{1+\beta}{2}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X < -t) = \sigma^\alpha C_\alpha \frac{1-\beta}{2}, \end{cases}$$

où C_α est une constante qui ne dépend de α et donnée par

$$C_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\pi\alpha/2)} & \text{si } \alpha \neq 1, \end{cases} \quad (1.20)$$

où $\Gamma(\theta)$ est la fonction de gamma définie, pour $\theta > 0$, par

$$\Gamma(\theta) = \int_0^{\infty} x^{\theta-1} e^{-x} dx.$$

la démonstration est dans [[55], page.16].

Proposition 1.6.4 *Les queues d'une distribution α -stable satisfont comme $x \rightarrow \infty$, ce qui s'appelle les états d'équilibre*

$$\frac{P(X > x)}{P(|X| < x)} \rightarrow p = \frac{1 + \beta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{P(X < -x)}{P(|X| > x)} \rightarrow q = \frac{1 - \beta}{2}. \quad (1.21)$$

Pour une meilleure illustration des densités α -stables, on a présenté la courbe de les queues de densités pour différentes valeur de α dans la figure 1.5, on remarque que plus α est petit, plus les queues sont lourdes.

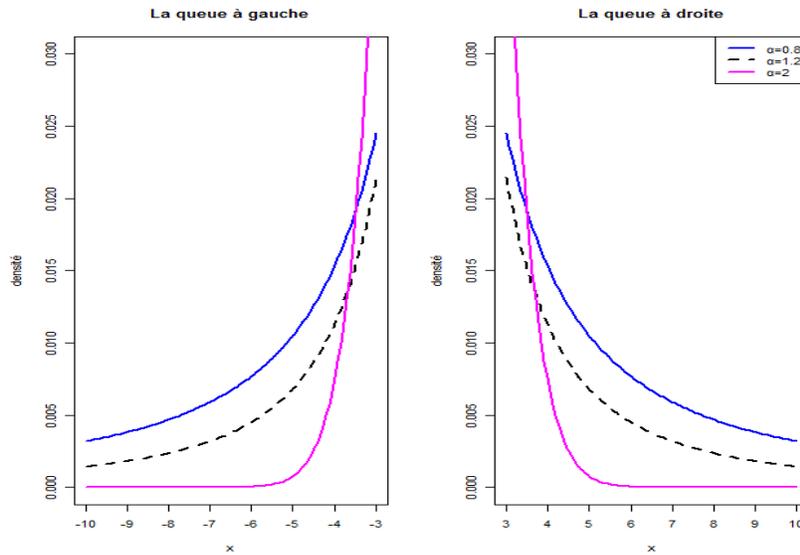


FIG. 1.5 – Les queues de la densité de probabilité α -stable pour différentes valeur de α .

1.6.4 Calcul des moments

Proposition 1.6.5 *Si X suit une loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, alors*

- Si $\alpha = 2$, $\forall p, E|X|^p < +\infty$.
- Si $0 < \alpha < 2$, $\begin{cases} \forall 0 < p < \alpha, E|X|^p < +\infty, \\ \forall p \geq \alpha, E|X|^p = +\infty. \end{cases}$

Preuve En fait pour la première partie de cette propriété 1.6.5, on a vu que le cas $\alpha = 2$ correspond au cas gaussien. Et on sait que les variables aléatoires gaussiennes ont toutes leurs moments finis.

Pour la seconde partie de la propriété, on remarque tout d'abord que pour toute v.a.r positive et intégrable, on a

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} P(Y > v)dv.$$

En posant $Y = |X|^p$ et $v = u^p$, on a

$$E(|X|^p) = \int_0^{+\infty} P(|X|^p > u^p)pu^{p-1}du. \quad (1.22)$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{p-1}P(|X| > u)}{u^{p-1}} = \lim_{u \rightarrow 0} P(|X| > u) = 1,$$

donc

$$u^{p-1}P(|X| > u) \underset{0}{\sim} u^{p-1}.$$

Et

$$\int_0^M u^{p-1}P(|X| > u)du < +\infty \Leftrightarrow \int_0^M u^{p-1}du < +\infty \Leftrightarrow p > 0.$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{p-1}P(|X| > u)}{u^{p-\alpha-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^\alpha P(|X| > u) = \sigma^\alpha C(\alpha),$$

donc

$$u^{p-1}P(|X| > u) \underset{+\infty}{\sim} u^{p-\alpha-1}.$$

Et

$$\int_M^{+\infty} u^{p-1}P(|X| > u)du < +\infty \Leftrightarrow \int_M^{+\infty} u^{p-\alpha-1}du < +\infty \Leftrightarrow p < \alpha.$$

■

Conclusion

D'après 1.22, il est facile de voir que $E|X|^p < +\infty$,

$$\text{lorsque } \begin{cases} \int_0^M u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty, \\ \int_M^{+\infty} u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty. \end{cases} \quad \text{c'est -à- dire lorsque } 0 < p < \alpha.$$

Remarque 1.6.1 *Dés que α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α -stable est infinie. Dés que α est strictement inférieur à 1, c'est la moyenne qui devient infinie.*

Si α est plus grande que 1, la moyenne d'une loi α -stable est μ .

Preuve on sait que $\varphi'_X(0) = iE(X)$. Or on sait aussi que

$$\varphi_X(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu t),$$

et donc que

$$\varphi'_X(t) = (i\mu - \alpha\sigma^\alpha \text{sign}(t) |t|^{\alpha-1} (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2})) \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu t).$$

ce qui entraîne que

$$\varphi'_X(0) = i\mu.$$

d'où

$$E(X) = \mu.$$

■

Rappelons qu'on dit que la variance est infinie pour signaler que la variance est instable. La variance infinie ne représente pas un obstacle à la compréhension du phénomène dans lequel apparaissent des grands changements de prix, mais au contraire, elle permet d'expliquer ce phénomène. Supposons que X soit la somme de variables lévy-stables X_i , il est probable que x de X provienne en partie substantielles, il faut donc pas les négliger comme on le fait malheureusement en considérant la loi de Gauss.

Proposition 1.6.6 *Moment fractionnaires d'ordre inférieur*

Les moments du second ordre d'une v.a avec $0 < \alpha < 2$ n'existent pas, les moments d'ordre inférieur à α existent et s'appellent les moments fractionnaires d'ordre inférieur.

Soit une v.a qui suit $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ alors :

Les moments fractionnaire positifs :

- Si $\alpha = 2$: $\forall p \geq 0, E[|X|^p] < +\infty$.

$$\text{- Si } \alpha < 2 : E[|X|^p] = \begin{cases} C(\alpha, \beta, p)\sigma^p & 0 < p < \alpha, \\ +\infty & p \geq \alpha. \end{cases}$$

où

$$C(\alpha, \beta, p) = \frac{2^{p-1} \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})}{p \int_0^{+\infty} u^{-p-1} \sin^2 u du} \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{p}{2\alpha}} \cos\left(\frac{p}{\alpha} \arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right).$$

Les moments fractionnaire négatifs :

Dans [29] les auteurs ont démontré que les v.a.r. $S\alpha S$ ont aussi des moments finis d'ordre négatif. Ce résultat surprenant pour les lois α -stables symétriques $S\alpha S$.

Soit X une v.a.r. $S\alpha S$ de paramètre de position nulle. Alors la formule unifiée pour ces moments d'ordre positif et d'ordre négatif est

$$E(|X|^p) = C(p, \alpha)\sigma^\alpha \quad \text{pour tout } -1 < p < \alpha,$$

avec

$$C(p, \alpha) = 2^{p+1}(\Gamma(-p/\alpha)\Gamma((1+p)/2))/\alpha\sqrt{\pi}\Gamma(-p/2).$$

Proposition 1.6.7 Soit X une variable aléatoire $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, alors on a les deux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{r \nearrow \alpha} (\alpha - r)E|x|^r &= \alpha C_\alpha \sigma^\alpha, \\ \lim_{r \nearrow \alpha} (\alpha - r)EX^{(r)} &= \alpha \beta C_\alpha \sigma^\alpha. \end{aligned}$$

telle que C_α est donné par 1.20 et $x^{(a)} := |x|^a \text{sign}(x)$.

Cette dernière proposition donne la vitesse de convergence vers l'infini des moments quand leur ordre s'approche de α .

1.6.5 Propriétés algébriques

On va rappeler quelques propriétés importantes des variables aléatoires stables de loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire.

Proposition 1.6.8 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de la loi stable $S_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1)$ et $S_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit une loi stable $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

On note que si $\beta_1 = \beta_2$ alors $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

Preuve En vérifiant cette proposition pour $\alpha \neq 1$. D'après l'indépendance

$$\begin{aligned} \ln E[\exp(it(X_1 + X_2))] &= \ln E[\exp(it(X_1))] + \ln E[\exp(it(X_2))] \\ &= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha) |t|^\alpha + i |t|^\alpha \text{sign}(t) (\tan \frac{\pi\alpha}{2}) \times \\ &\quad (\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha) + it(\mu_1 + \mu_2) \\ &= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha) |t|^\alpha [1 - i \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \text{sign}(t) \times \\ &\quad \tan \frac{\pi\alpha}{2}] + it(\mu_1 + \mu_2). \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$ la démonstration est similaire. ■

Cette propriété d'additivité est très intéressante en finance, car deux titres ayant les mêmes valeurs des paramètres α peuvent être considérés ensemble et la loi qui résultera de cette association conservera les mêmes valeurs du paramètre α mais les autres paramètres seront modifiés. On utilise cette propriété pour étudier des portefeuilles.

Proposition 1.6.9 *Si $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ et a un nombre réel, alors $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.*

Proposition 1.6.10 *Si $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ et a un constant réel non nul, alors*

$$\begin{aligned} aX &\sim S_\alpha(|a| \sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu) && \text{si } \alpha \neq 1, \\ aX &\sim S_1(|a| \sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a (\ln |a|) \sigma\beta) && \text{si } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Preuve On a pour $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} \ln \{E \exp it(aX)\} &= -|ta|^\alpha \sigma^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(at) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + iu(ta), \\ &= -(\sigma |a|^\alpha) |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(a)\text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i(ua)t. \end{aligned}$$

Le cas $\alpha = 1$ le preuve est similaire. ■

Proposition 1.6.11 *pour $0 < \alpha < 2$*

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \iff -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0).$$

Proposition 1.6.12 *Si $\beta = 0$, la loi est symétrique par rapport au paramètre μ . Si de plus $\mu = 0$ la loi est dite symétrique α -stable, et on note $S_\alpha S$.*

Proposition 1.6.13 *Soit $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $\alpha \neq 1$. X est strictement stable si et seulement si $\mu = 0$.*

Et $X \sim S_1(\sigma, \beta, \mu)$ est strictement stable si et seulement si $\beta = 0$.

Preuve La première partie, soit X_1, X_2 de copies indépendantes de X et A, B deux nombres réels positifs, d'après les propriétés 1.6.8, 1.6.10 on a

$$AX_1 + BX_2 \sim S_\alpha(\sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, \mu(A + B)).$$

X est a une distribution stable alors

$$C = (A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Et aussi d'après les propriété 1.6.8, 1.6.9 on a

$$CX + D \sim S_\alpha(\sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + D).$$

Et donc

$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$ avec $D = 0$ si et seulement si $\mu(A + B) = \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.
alors $\mu = 0$.

Pour $\alpha = 1$, soit X_1, X_2 de copies indépendantes de X et A, B deux nombres réels strictement positifs

Alors d'après les propriétés 1.6.8, 1.6.10 on a

$$AX_1 + BX_2 \sim S_1(\sigma(A + B), \beta, \mu(A + B) - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(A \ln A + B \ln B)).$$

Alors

$$(A + B)X \sim S_1(\sigma(A + B), \beta, \mu(A + B) - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(A + B) \ln(A + B)).$$

Donc

$D = 0$ si et seulement si $AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} (A + B)X$

C'est-à-dire

$$\beta(A \ln A + B \ln B) = \beta(A + B) \ln(A + B) \text{ pour tout } A > 0, B > 0.$$

ainsi on a $\beta = 0$. ■

Corollaire 1.6.1 *Si $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $\alpha \neq 1$ alors $X - \mu$ est strictement stable. On peut utiliser les propriétés 1.6.9, 1.6.13 pour la démonstration.*

Proposition 1.6.14 *Si X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ avec $\alpha < 2$ alors, il existe deux variables aléatoires réelle indépendantes et identiquement distribuées suivant la même distribution $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ tel que*

$$\begin{aligned} X &\stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} Y_2 && \text{si } \alpha \neq 1, \\ X &\stackrel{d}{=} \left(\frac{1+\beta}{2}\right) Y_1 - \left(\frac{1-\beta}{2}\right) Y_2 + \sigma\left(\frac{1+\beta}{\pi} \ln \frac{1+\beta}{2} - \frac{1-\beta}{\pi} \ln \frac{1-\beta}{2}\right) && \text{si } \alpha = 1. \end{aligned}$$

La démonstration est resultat direct des propriétés 1.6.8, 1.6.9 et 1.6.10.

1.7 Représentation en série de Lepage d'une variable aléatoire α -stable

En général la représentation en série d'une variable aléatoire indéfiniment divisible sans composante gaussienne a été établie par Fergusson et Klass [15], puis développée par Lepage [27]. L'extension de cette représentation à des situations plus générales a été étudiée par Rosinski [53]. L'idée de cette représentation consiste à écrire une variable aléatoire α -stable comme une somme infinie faisant intervenir des variables aléatoires indépendantes et des temps d'arrivée d'un processus de Poisson. L'utilité de cette décomposition réside dans le fait qu'elle permet la démonstration de plusieurs

résultats théoriques, voir par exemple [55]. A noter également que les séries de type Lepage peuvent être utilisées pour générer une variable α -stable, mais plusieurs auteurs déconseillent l'utilisation de cette décomposition dans la simulation à cause de la lenteur de sa convergence. ils conseillent plutôt les méthodes directes de simulation introduites par [8]. Nous nous intéressons au cas particulier des variables aléatoires $S\alpha S$ pour leur utilisation pratique. pour énoncer la proposition suivante, on utilise le formalisme, soient $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ trois suites indépendantes de variables aléatoires telles que :

- Les variables aléatoires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées d'une loi de Redemacher : il s'agit d'une distribution concentrée sur 1 et -1 , telle que

$$P(\varepsilon_1 = 1) = P(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

- Les variables $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n \dots$ sont des temps d'arrive d'un processus de Poisson d'intensité 1. Elles suivent une loi gamma de paramètre i et elles sont dépendantes entre elles comme suit

$$\Gamma_i = E_1 + \dots + E_i.$$

Les variables aléatoires $(E_k)_k$ sont indépendantes et identiquement distribuées d'une loi exponentielle de paramètre 1

- $W_1, W_2, \dots, W_n \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Proposition 1.7.1 *Si W est une variable aléatoire de moment d'ordre α fini, c'est-à-dire $E|W|^\alpha < \infty$ alors pour tout $0 \leq \alpha < 2$, la série $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-1/\alpha} W_i$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $S\alpha S$ de paramètre d'échelle $\sigma = C_\alpha^{-1} [E|W_1|^\alpha]^{1/\alpha}$, avec C_α donnée dans 1.20.*

Pour la démonstration voir [55] ou [22]. Inversement, chaque variable aléatoire symétrique α -stable ($S\alpha S$) admet une décomposition de type Lepage. On a le resultat suivant.

Proposition 1.7.2 *Soit X une variable aléatoire $S\alpha S$ telle que $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ alors*

$$X \stackrel{d}{=} (C_\alpha)^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-1/\alpha} W_i, \tag{1.23}$$

avec

$$\sigma = (E|W|^\alpha)^{1/\alpha}.$$

La démonstration de ce résultat est détaillé dans [55]. A noter que la représentation 1.23 n'est pas unique car le choix de W est arbitraire mais de moment d'ordre α vérifiant $\sigma^\alpha = E|W|^\alpha < \infty$.

1.8 Générateur de variables aléatoires stables

La complexité du problème de simulation des variables aléatoires est qu'il n'existe pas de fonction de densité explicite, sauf dans quelques cas particuliers, donc les méthodes classiques, comme la méthode de la transformation inverse, ne peuvent pas s'appliquer. La première solution a été faite par Kanter [23], qui a donné une méthode directe pour simuler de variable de loi $S_\alpha(1, 1, 0)$ pour $\alpha < 1$, puis cette méthode pourrait facilement adaptée au cas général. Chambers, Mallows et Stuck ont été les premiers ont obtenu cette formule en se basant sur la représentation intégrale de la densité.

Plus récemment, dans [58] Weron a développé une technique exacte à partir d'une transformation non-linéaire d'une paire de variables aléatoires indépendantes.

1.8.1 Algorithme de Chambers, Mallows et Stuck

Pour simuler les lois stables, il existe un algorithme développé par Chambers et al (1976). Celui-ci permet de générer une loi $S_\alpha(1, \beta, 0)$, il suffit de faire un changement de variables.

première étape

Elle consiste à générer une loi Φ uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et une loi W exponentielle de paramètre 1. Pour cela, il faut d'abord générer 2 v.a.r uniforme sur $]0, 1[$ (notées U_1 et U_2). Puis en utilisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} \Phi &= \pi U_1 - \frac{\pi}{2}. \\ W &= -\log(1 - U_2). \end{cases}$$

on obtient bien le résultat désiré.

Deuxième étape

Elle consiste à calculer différentes quantités (fonction de Φ et de W)

$$\begin{cases} \varepsilon &= 1 - \alpha, \\ a &= \tan \frac{\Phi}{2}, \\ b &= \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2}, \\ \tau &= -\varepsilon \tan(\alpha\phi_0), \\ B &= \frac{b}{\frac{\varepsilon\Phi}{2}}, \\ d &= \frac{z^{\varepsilon/1-\varepsilon} - 1}{\varepsilon}, \\ z &= \frac{\cos(\varepsilon\Phi) - \tan(\alpha\phi_0) \sin(\varepsilon\Phi)}{W \cos \Phi}. \end{cases}$$

Troisième étape Elle consiste à générer une loi Y stable $S_\alpha(1, \beta, 0)$. Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante

Proposition 1.8.1 *soit Φ une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et W une loi exponentielle de paramètre 1, si on pose*
pour $\alpha \neq 1$

$$Y = (\cos(\alpha\phi_0))^{1/\alpha} \left\{ \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi\tau B [b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} \cdot (1 + \epsilon d) + \tau(d + \frac{1}{\epsilon}) \right\}$$

$$= \frac{\sin \alpha(\Phi - \phi_0)}{(\cos \Phi)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

où

$$\phi_0 = -\frac{\pi\beta}{2} \cdot \frac{1-|1-\alpha|}{\alpha},$$

pour $\alpha = 1$

$$Y = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left(\frac{\frac{1}{2}\pi W \cos \Phi}{\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi} \right) \right).$$

alors la v.a.r Y suit une loi $S_\alpha(1, \beta, 0)$.

Exemple 1.8.1 -Dans le cas d'une loi $S_\alpha S$, on a

$$Y = \frac{\sin(\alpha\Phi)}{(\cos \Phi)^{1/\alpha}} \cdot \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

-Plus particulièrement, dans le cas où α est égal à 2, on a

$$Y = \frac{\sin 2\Phi}{\sqrt{\cos \Phi}} \cdot \left(\frac{\cos \Phi}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin \Phi.$$

Enfin, dans le cas où α est égal à 1 et β égal à 0, on a

$$Y = \tan \Phi,$$

formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

Preuve Pour le cas $\alpha \neq 1$, la démonstration du passage de la première ligne à la seconde

On a

$$Y = (\cos(\alpha\phi_0))^{1/\alpha} \left\{ \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi\tau B [b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} \cdot (1 + \epsilon d) + \tau(d + \frac{1}{\epsilon}) \right\}$$

Tout d'abord, quelques rappels sur la fonction tangente

$$\tan 2x - \tan 2y = \frac{2(\tan x - \tan y)(1 + \tan x \tan y)}{(1 - \tan^2 x)(1 - \tan^2 y)} \quad (1.24)$$

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x \quad (1.25)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (1.26)$$

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x \quad (1.27)$$

$$\frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - \cos 2x \quad (1.28)$$

Posons $A = \frac{2(a-b)(1+ab)}{(1-a^2)(1+b^2)}$, $C = \frac{-\Phi \tau B[b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)}$, $D = 1 + \varepsilon d$ et $G = \tau(d + \frac{1}{\varepsilon})$.

$$A = \frac{2(\tan \frac{\Phi}{2} - \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2})(1 + \tan \frac{\Phi}{2} \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2})}{(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2})(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon \Phi}{2})}$$

$$A = \frac{2(\tan \frac{\Phi}{2} - \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2})(1 + \tan \frac{\Phi}{2} \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2})}{(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2})(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon \Phi}{2})} \times \frac{1 - \tan^2 \frac{\varepsilon \Phi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\varepsilon \Phi}{2}}$$

D'après 1.24 et 1.25, on a

$$A = (\tan \Phi - \tan \varepsilon \Phi) \cos \varepsilon \Phi$$

$$A = \tan \Phi \cos \varepsilon \Phi - \sin \varepsilon \Phi$$

$$A = \tan \Phi (\cos \Phi \cos \alpha \Phi + \sin \Phi \sin \alpha \Phi) - \sin \Phi \cos \alpha \Phi + \cos \Phi \sin \alpha \Phi$$

$$A = \sin \Phi \cos \alpha \Phi + \frac{\sin^2 \Phi \sin \alpha \Phi}{\cos \Phi} - \sin \Phi \cos \alpha \Phi + \frac{\cos^2 \Phi \sin \alpha \Phi}{\cos \Phi}$$

$$A = \frac{\sin \alpha \Phi}{\cos \Phi}$$

De plus,

$$C = \frac{-\Phi(-\varepsilon \tan(\alpha \phi_0)) \frac{\tan \frac{\varepsilon \Phi}{2}}{\frac{\varepsilon \Phi}{2}} [\tan \frac{\varepsilon \Phi}{2} (1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2}) - 2 \tan \frac{\Phi}{2}]}{(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2})(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon \Phi}{2})}$$

$$C = -\tan(\alpha \phi_0) \frac{2 - \tan(\alpha \phi_0) [-\tan \frac{\varepsilon \Phi}{2} (1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2}) + 2 \tan \frac{\Phi}{2}]}{(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2})(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon \Phi}{2})}$$

$$C = -\tan(\alpha \phi_0) \frac{[-2 \tan^2 \frac{\varepsilon \Phi}{2} (1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2}) + 4 \tan \frac{\Phi}{2} \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2}]}{(1 - \tan^2 \frac{\Phi}{2})(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon \Phi}{2})}$$

D'après 1.26, 1.27 et 1.28 on a

$$\begin{aligned} C &= -\tan(\alpha\phi_0)(-1 + \cos \varepsilon\Phi + \tan \Phi \sin \varepsilon\Phi) \\ C &= -\tan(\alpha\phi_0)\left(-1 + \frac{\cos \Phi \cos \varepsilon\Phi}{\cos \Phi} + \frac{\sin \Phi \sin \varepsilon\Phi}{\cos \Phi}\right) \\ C &= -\tan(\alpha\phi_0)\left(\frac{\cos \alpha\Phi}{\cos \Phi} - 1\right) \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} D &= 1 + \varepsilon\left(\frac{z^{\varepsilon/1-\varepsilon} - 1}{\varepsilon}\right) = z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ G &= -\varepsilon \tan(\alpha\phi_0)\left(\left(\frac{z^{\varepsilon/1-\varepsilon} - 1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\tan(\alpha\phi_0)z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \{(A + C).D + G\} \\ Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\frac{\sin \alpha\Phi}{\cos \Phi} - \tan(\alpha\phi_0)\left(\frac{\cos \alpha\Phi}{\cos \Phi} - 1\right)\right)z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tan(\alpha\phi_0)\right] \\ Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{\sin \alpha\Phi}{\cos \Phi} - \tan(\alpha\phi_0)\frac{\cos \alpha\Phi}{\cos \Phi}\right) \\ Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{1}{\cos \Phi \cos \alpha\phi_0} (\sin \Phi \cos \alpha\phi_0 - \sin \alpha\phi_0 \cos \alpha\Phi) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} Y &= (\cos(\alpha\phi_0))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{\cos \varepsilon\Phi \cos(\alpha\phi_0) - \sin \alpha\phi_0 \sin \varepsilon\Phi}{W \cos \Phi \cos(\alpha\phi_0)}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{1}{\cos \Phi} (\sin(\Phi - \phi_0)) \\ Y &= \frac{\sin \alpha(\Phi - \phi_0)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \left(\frac{\cos(\varepsilon\Phi + \alpha\phi_0)}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ Y &= \frac{\sin \alpha(\Phi - \phi_0)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \phi_0))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Zolovarev (1966) a démontré que la fonction de répartition d'une loi $S_\alpha(1, \beta, 0)$ peut s'écrire pour $y > 0$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \beta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp[-V_\alpha(y, \theta)] d\theta & \text{si } \alpha < 1 \\ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta^{\frac{1-|1-\alpha|}{\alpha}}}^{\frac{\pi}{2}} \exp[-V_\alpha(y, \theta)] d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} V_\alpha(y, \theta) &= y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\sin(\alpha\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|))}{\cos \theta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\cos[(\alpha-1)\theta + \frac{\pi}{2}\beta(1-|1-\alpha|)]}{\cos \theta} \\ &= y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta) \end{aligned}$$

La densité se déduit de la fonction de répartition et s'écrit de la façon suivante

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\alpha}{\alpha-1} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} a(\theta) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)\right] d\theta & \text{si } \alpha < 1 \\ -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}\beta \frac{1-|\alpha|}{\alpha}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\alpha}{\alpha-1} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} a(\theta) \exp\left[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)\right] d\theta & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

qui peut s'écrire plus simplement en rappelant que $\phi_0 = -\frac{\pi\beta}{2} \cdot \frac{1-|\alpha|}{\alpha}$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{|\alpha-1|} y^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} a(\theta) \exp[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\theta)] d\theta, \quad \forall \alpha \neq 1.$$

Il ne reste plus qu'à monter que $Y \left(= h(\Phi, W) = \left(\frac{a(\Phi)}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right)$ a bien comme densité celle qui précède. Pour cela, posons le changement de variables suivant

$$\begin{aligned} (\Phi, W) &\xrightarrow{T} (\Phi, Y) = \left(\Phi, \left(\frac{a(\Phi)}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) \\ (\Phi, Y) &\xrightarrow{T^{-1}} (\Phi, W) = \left(\Phi, \frac{a(\Phi)}{Y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\right) \end{aligned}$$

Le calcul du déterminant de la matrice jacobienne donne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \bullet & a(\theta) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right) Y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1} \end{vmatrix} = a(\theta) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right) Y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1}. \quad (1.29)$$

Rappelons enfin que Φ suit une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, que W suit une loi exponentielle de paramètre 1, que Φ et W sont indépendantes et donc que

$$f_{\Phi, W}(\phi, \omega) = f_{\Phi}(\phi) f_W(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}(\phi) e^{-\omega} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(\omega). \quad (1.30)$$

1.29 et 1.30 entraînent que

$$f_{\Phi, Y}(\phi, y) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}(\phi) \exp(-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\phi)) \mathbf{1}_{]0, +\infty[(a(\phi) y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}})} \left| a(\phi) \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right) y^{\frac{1}{\alpha-1}} \right|.$$

On obtiens donc pour $y > 0$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{|1-\alpha|} y^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} a(\phi) \exp[-y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\phi)] \mathbf{1}_{]0, +\infty[(a(\phi)) d\phi.$$

Or $a(\phi) > 0 \iff \phi > \phi_0$, ceci démontre le résultat voulu car $\phi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ■

Remarque 1.8.1 *Le cas $\alpha = 1$ se résout de manière similaire.*

1.8.2 L'algorithme de Weron et Weron

L'algorithme que on va présenter est l'algorithme de Chambers, Mallows et Stuck légèrement modifié (cf, Janicki et Weron et wron et woron). Cet algorithme permet de simuler des variables aléatoires X de loi stable $S_\alpha(1, \beta, 0)$ avec $\alpha \in]0; 2]$ et $\beta \in [-1, 1]$. On a choisi cet algorithme parmi d'autre (voir aussi [55]) pour deux raisons :

1. Le temps de calcul est quasiment nul.il faut moins d'une minute pour simuler un échantillon de taille 60000.
2. Les paramètres α et σ pour ce générateur sont très bien estimés par la méthode de McCulloch (voir chapitre suivant). Les paramètres μ et β sont correctement estimés par la méthode par la méthode de McCulloch pour des petites valeurs de β , ce qui est souvent le cas pour des chroniques boursiers.

Soit V une variable aléatoire uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Soit W une variable aléatoire de paramètre 1

$$\text{Pose } C = \frac{\arctan\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha} \text{ et } D = [1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)] \frac{1}{2\alpha}$$

$$\text{Alors } X = D \times \frac{\sin[\alpha(V + C)]}{(\cos(V))^{\frac{1}{\alpha}}} \times \left(\frac{\cos[V - \alpha(V + C)]}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \text{ suit une loi stable}$$

$S_\alpha(1, \beta, 0), \alpha \neq 1.$

$$\text{Et } X = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right) \tan V - \beta \ln\left(\frac{W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V}\right) \right] \text{ suit une loi stable } S_\alpha(1, \beta, 0), (\alpha = 1).$$

De plus, si X suit une loi stable $S_\alpha(1, \beta, 0).$

$$\text{alors } Y = \begin{cases} \sigma X + \mu & , \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi} \beta \ln \sigma + \mu & , \alpha = 1 \end{cases} \text{ suit une loi stable } S_\alpha(\sigma, \beta, \mu).$$

On peut ainsi simuler des variables Y de loi stable $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu).$

On peut constater que le générateur de variables aléatoires stables choisi approche correctement la loi théorique. la distribution empirique a été construite à partir de N variable aléatoire simulées avec l'algorithme de Weron et Weron.

Exemple 1.8.2 *On a simulé 5000 réalisations de lois $S_\alpha S$ pour différentes valeurs de α , Le tableau 1.1suivant représente la moyenne et la variance empirique des 5000 réalisations. Ces résultat confirment l'équation sur le calcul des moments. En effet, lorsque α décroît vers 1, la variance explose et lorsque α devient plus petit que 1, c'est la moyenne qui commence à exploser.*

1.9 Statistique sur les Loïs Stables

On a attarder sur différents manières de tester les lois stables, on pourra tester si la distribution des données est à queue lourde en utilisant l'histogramme de la loi normale.

α	2	1,7	1,5	1,2	1	0,9
moyenne	0,02	0,02	0,03	0,01	-0,33	27,58
variance	2,02	6,70	36,96	150,97	2071,94	3214.206,71

TAB. 1.1 – Moyenne et variance empirique calculées sur 5000 réalisations pour différentes valeurs de α

Si l'hypothèse de normalité est violée, on testera si la variance des données est infinie en utilisant le test de convergence des variances [1].

Tests de la variance

On a présenter deux méthodes graphiques pour tester si la distribution de nos observations est à variance finie ou infinie.

[A]-Test graphique de la convergence de la variance empirique

La stratégie qui semble la plus simple pour tester si la variance est finie ou pas c'est de faire augmenter la taille de l'échantillon et calculer la moyenne et la variance empirique correspondant

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2,$$

pour différentes valeurs de n et trace le graphique (n, s_n^2) . Si les observations ont une loi à variance finie, lorsqu'on fait augmenter la taille n des observations la variance doit converger vers une valeur finie. Dans le cas contraire, si les observations proviennent d'une loi à variance infinie, un comportement de divergence doit être observé.

[B]-Test graphique de la queue

L'idée principale de ce deuxième test est basée sur le comportement asymptotique "queue lourde" des lois α -stable $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X > t) = C_\alpha((1 + \beta)/2)\sigma^\alpha$ alors, cela implique

$$\frac{d \log \bar{F}(x)}{d \log x} \sim -\alpha; \quad x \rightarrow +\infty,$$

où $\bar{F}(x) = P(X > x)$ est le complémentaire de la fonction de répartition F . Là aussi, 2 étapes sont nécessaires

- Calcul du logarithme de la queue

$$q(x) = \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{|X_i > x|}\right)$$

- tracer le graphique $(\log x, q(x))$ pour des x assez grands.

Si la variance de la loi de distributions des données est finie la pente de la courbe doit converger vers une valeur finie [1].

Chapitre 2

Estimation des paramètres stables

Le problème d'estimer les paramètres stables en général est serrement entravé par le manque d'expression explicite de la densité. De nombreuses méthodes ont été proposées dans ce chapitre : maximum de vraisemblance DuMouchel(1971), utilisation des quantiles de la distribution Fama et Roll(1968) (cas symétrique) et McCulloch(1986) cas général, utilisation de la fonction caractéristique Prees(1972), Koutrouvelis(1980). La différence entre ces méthodes est dans la précession et la vitesse.

D'une autre part, à l'aide de la théorie des valeurs extrêmes les paramètres stables ont été estimé, pour l'exposant caractéristique α , on a proposé l'estimateur de Hill, le paramètre de localisation μ est traité par Peng [48] et pour le paramètre d'échelle σ le professeur Necir et le docteur meraghi ont proposé un estimateur consistant [36].

On suppose que l'on dispose d'un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d, avec $X_i \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$

On pose $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ et $\Theta =]0, 2] \times [-1, 1] \times]0; +\infty[\times \mathbb{R}$.

2.1 Estimation du maximum de vraisemblance

L'estimation par maximum de vraisemblance pour les distributions α -stable ne diffère pas de celle des autres lois. Le problème principal pour appliquer cette méthode à une suite de variables aléatoires est qu'il est très coûteux d'évaluer la fonction de vraisemblance de l'échantillon

$$l(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i, \alpha, \beta, \sigma, \mu).$$

En général, nous ne savons pas la forme explicite de la densité et on la rapproche numériquement. Holt et Grow [20] ont fourni des tables de valeurs de la densité pour différentes valeurs de α et β , Worsdale [60] et Panton [45] ont fourni des tables des fonctions de répartition des lois stables symétriques, Brothers, DuMouchel et Paulson [7] et Paulson et Delahanty [46] ont donné les quantiles des lois stables dans le cas général, McCulloch et Panton [35] ont donné des tables des densités et des quantiles pour

les lois stables totalement asymétriques. Pour les lois stables symétriques McCulloch [34] a développé des algorithmes efficaces pour approcher la densité et la fonction de répartition pour $\alpha > 0,85$. Les techniques modernes d'estimation de maximum de vraisemblance soit utiliser l'approche de transformé de Fourier rapide (Mittinik et al 1999, [38]), ou utiliser la méthode d'intégration directe (voir la sous-section 1.6.1). Les deux approches sont comparables en termes d'efficacité, la différences dans performances sont les résultats de différentes algorithmes d'approximation.

DuMouchel [10] a montré les propriétés convergence, normalité asymptotique et l'efficacité. Dans le cas général $\hat{\theta}$ est l'estimateur de θ puis pour des grands échantillons $\hat{\theta} \sim N(\theta, n^{-1}B)$ où $B = (b_{ij})$ est l'inverse de la matrice de l'information de Fricher I avec :

$$I_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \theta_i}(x) \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x) \frac{1}{f}(x) dx.$$

Nolan a écrit un programme pour calculer numériquement ces intégrales.

Ainsi l'intervalles de confiance des grands d'échantillons pour chacun des paramètres sont donnés par

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma_{\theta_i}}{\sqrt{n}},$$

où $\sigma_{\theta_1}, \sigma_{\theta_2}, \sigma_{\theta_3}$ et σ_{θ_4} sont des racines carrées entiers diagonales de B .

Dans une étude comparative Ojeda [44] constate que les méthodes de (MV) sont les plus précises mais les plus lentes de tous les autres.

2.2 Méthode de recuit simulée par chaine de Markov de Monte Carlo

C'est une alternative à (MV).

L'idée principale est de construire une grille sur l'espace paramétrique et de trouver le maximum par le déplacement par les points voisins dans la grille. Un voisin est choisi au hasard avec une certaine probabilité.

Soit $l(\theta)$ est la log -vraisemblance et $l^* = \max_{\theta \in G} l(\theta)$, où $G \subset \Theta$ est l'ensemble de points dans l'espace paramétrique appartenant à la grille. Le cardinal de G est très grand, puis essayer de trouver les points maximum par l'évaluation directe de tous ses points est un problème insurmontable.

Soit $M = \{x \in G / l(x) = l^*\}$ est l'ensemble de tous les points optimaux .

Pour $\lambda > 0$ une loi de probabilité sur G est choisi comme :

$$p_{\lambda}(x) = \frac{\exp \lambda(l(x) - l^*)}{|M| + \sum_{y \notin M} \exp(l(y) - l^*)},$$

où $|M|$ est le cardinal de M .

Dans les conditions régulières habituelles $|M| = 1$ et aussi :

$$p_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\delta_x(M)}{|M|},$$

où $\delta_x(\cdot)$ est la mesure de Dirac au point x .

Par conséquent, pour λ grand, la loi de probabilité $\{p_\lambda(x), x \in G\}$ se concentre sur des points dans M . Si à un moment donné le système est au point θ , alors un voisin θ' est choisi avec la même probabilité, et le système se déplacera au point θ' si $l(\theta') \geq l(\theta)$ autrement les changements de système au θ' avec la probabilité

$$\exp \{ \lambda(l(\theta') - l(\theta)) \},$$

ou il reste dans θ .

À l'étape n , λ est donné par :

$$\lambda_n = C \log(1 + n), \tag{2.1}$$

où C est constante.

Les points choisis $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une chaîne de markov stationnaire avec des probabilités transition

$$p_{\theta, \theta'} = \frac{1}{8} \min \{ 1, \exp \lambda(l(\theta') - l(\theta)) \}.$$

La chaîne est réversible, satisfaisant

$$p_\lambda(\theta)p_{\theta, \theta'} = p_\lambda(\theta')p_{\theta', \theta}.$$

Alors ceux-ci remplissent les conditions stationnaires pour une chaîne de Markov irréductible, par conséquent la loi $p_\lambda(\theta)_{\theta \in G}$ est la distribution de limite.

Avec une légère modification l'argument est valide pour la variable λ de manière signalée dans 2.1.

Algorithme

1 Partie d'initialisation

a Prendre $\theta_0 = (\alpha_0, \beta_0, \sigma_0, \mu_0)$ et λ_0 .

b Définir h et prendre un grille G sur Θ avec la distance h entre les voisins.

2 La partie itérative

l'étape n le système est au point θ puis :

3 Générer un nombre aléatoire discret uniforme sur $[1, 8]$ le choix de point θ_{n+1} parmi des voisins (des voisins devraient être commandé précédement).

4 Evaluer $l(\theta_{n+1})$.

5 Si $l(\theta_{n+1}) \geq l(\theta_n)$ puis $W = 0$ et se déplacer θ_{n+1} sinon :

6 Avec la probabilité

$$\exp \lambda(l(\theta_{n+1}) - l(\theta_n)).$$

Se déplacer au θ_{n+1} , fixer $W = 0$ sinon $W = W + 1$ et répéter le processus de θ_n .

7 La partie finale

Si $W > \varepsilon$ arrête le processus et l'ensemble $l^* = l(\theta_n)$ et $\theta^* = \theta_n$.

L'avantage principal est que des points obtenus sont optimaux globaux par contre dans la méthode de maximum de vraisemblance les points obtenus sont optimaux locaux.

En dépit de la durée de calcul plus grande, la méthode ne semble pas supérieure aux autres, est dans certains cas plus mauvais. Il y a un problème numérique pour évaluée la fonction de vraisemblance pour une échantillon de grandes valeurs.

2.3 Méthode basées sur les quantiles

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire stable $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ et soit x_p le quantile d'ordre p , c'est-à-dire, $F(x_p) = p$ et \hat{x}_p est le quantile empirique correspondant. Pour éviter une fausse asymétrie des petits échantillons, une correction est nécessaire : si les x_i sont ordonnées de façon croissante cette correction se fait en posant $\hat{x}_{q(i)} = x_i$ où $q(i) = \frac{2i-1}{2n}$. Puis, on effectue une interpolation linéaire pour obtenir \hat{x}_p à partir de $\hat{x}_{q(i)}, \hat{x}_{q(i+1)}$ où $q(i) \leq p \leq q(i+1)$. L'estimateur \hat{x}_p est un estimateur consistant de x_p .

2.3.1 Méthode de Fama et Roll

Fama et Roll [13] (1968, 1971) ont fourni des estimateurs pour les paramètres de loi symétrique stable ($\beta = 0, \mu = 0$) avec $1 < \alpha \leq 2$, ils proposent d'estimer σ par

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0,72} - \hat{x}_{0,28}}{1,654}. \quad (2.2)$$

McCulloch (1986) constate que cette estimation de σ basée sur l'observation fortuite que $((x_{0,72} - x_{0,28})/\sigma)$ se trouve en dessous de 0,4% de 1,654 pour tout $1 < \alpha \leq 2$, quand $\beta = 0$, il permet d'estimer σ par 2.2 avec moins de 0,4% biais asymptotique.

L'exposant caractéristique α peut être estimée à partir du comportement des queues de la distribution, Fama et Roll prend $\hat{\alpha}$ satisfait

$$S_{\hat{\alpha}}\left(\frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{1-p}}{2\hat{\sigma}}\right) = p. \quad (2.3)$$

Il constatent que $p = 0.95, 0.96, 0.97$ fonctionne le mieux pour l'estimation. Inutilement cette méthode compose un petit biais asymptotique dans l'estimateur de σ à l'estimateur de α . Les valeurs tabulées de $S_{\hat{\alpha}}$ peuvent être trouvées dans Brothers et al (1983) [7], où dans samorodnitsky et Taqqu (1994) [55], Fama et Roll notent que depuis x_j suivent une loi stable, pour chaque n , $\sum_{i=1}^n x_i \sim S_\alpha(\sigma_1, 0, 0)$ où $\sigma_1 = n^{\frac{1}{\alpha}}\sigma$.

La résolution pour α et remplaçant les paramètres par leurs estimateurs donne

$$\hat{\alpha} = \frac{\log n}{\log \hat{\sigma}_1 - \log \hat{\sigma}}. \quad (2.4)$$

Pour $1 < \alpha \leq 2$, la distribution stable a une moyenne finit, alors la moyenne empirique est un estimateur consistant de le paramètre μ .

La méthode de Fama et Roll est simple à implémenter, mais elle a le désavantage que les estimateurs obtenus sont asymptotiquement biaisés, de plus les conditions imposées aux paramètres sont très restrictives .

2.3.2 Méthode de McCulloch

McCulloch (1986) [32] a généralisé et amélioré la méthode de Fama et Roll en utilisant les quantiles empiriques, il a fourni des estimateurs consistants pour les quatre paramètres avec la restriction $\alpha > 0.6$. L'idée de McCulloch (1986) est défini quatre fonctions spécifiques des quantiles empiriques ($v_\alpha, v_\beta, v_\sigma$ et v_ζ). Il a proposé de définir v_α comme une mesure des tailles relatives des queues et milieu de la distribution

$$v_\alpha = \frac{x_{0,95} - x_{0,05}}{x_{0,75} - x_{0,25}}, \quad (2.5)$$

qui est indépendant de deux σ et μ . De plus, il est une fonction décroissante en α pour chaque β , l'estimation de v_α sera nous donner une solution forte sur α .

Et il a défini v_β comme une mesure de la diffusion entre la partie droite et la partie gauche de la distribution.

$$\begin{aligned} v_\beta &= \frac{(x_{0,95} - x_{0,5}) - (x_{0,5} - x_{0,05})}{x_{0,95} - x_{0,05}} \\ &= \frac{x_{0,95} - 2x_{0,5} + x_{0,05}}{x_{0,95} - x_{0,05}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

v_β est également indépendante de σ et μ , il est une fonction strictement croissante en α , pour chaque β , l'estimation de v_β sera très informatif au β et leur estimateur est consistant.

On peut pose

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = v_\alpha \text{ et } \varphi_2(\alpha, \beta) = v_\beta. \quad (2.7)$$

ces fonctions ont été tabulées par DuMouchel [9] les tableaux 2.1 et 2.2.

On note que $\varphi_1(\alpha, -\beta) = \varphi_1(\alpha, \beta)$.

On note que $\varphi_2(\alpha, -\beta) = -\varphi_2(\alpha, \beta)$.

Par conséquent, la stratégie d'estimation proposée peut être de remplacer les quantiles x_p par leur estimateur consistant \hat{x}_p . Les relations précédentes 2.7 peuvent être inversées donc, les paramètres α et β peuvent être vus comme fonctions de v_α et v_β

$$\alpha = \phi_1(v_\alpha, v_\beta) \quad , \quad \beta = \phi_2(v_\alpha, v_\beta). \quad (2.8)$$

α	β				
	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
2.0	2.439	2.439	2.439	2.439	2.439
1.9	2.512	2.512	2.513	2.513	2.515
1.8	2.608	2.609	2.610	2.613	2.617
1.7	2.737	2.738	2.739	2.742	2.746
1.6	2.912	2.909	2.904	2.900	2.902
1.5	3.148	3.136	3.112	3.092	3.089
1.4	3.464	3.436	3.378	3.331	3.316
1.3	3.882	3.834	3.720	3.626	3.600
1.2	4.447	4.365	4.171	4.005	3.963
1.1	5.217	5.084	4.778	4.512	4.451
1.0	6.314	6.089	5.624	5.220	5.126
0.9	7.910	7.509	6.861	6.260	6.124
0.8	10.448	9.934	8.779	7.900	7.687
0.7	14.838	13.954	12.042	10.722	10.370
0.6	23.483	21.768	18.332	16.216	15.584
0.5	44.281	40.137	33.002	29.140	27.782

TAB. 2.1 – Table de DuMouchel pour $\nu(\alpha)$.

On note que $\phi_1(v_\alpha, -v_\beta) = \phi_1(v_\alpha, v_\beta)$.

On note que $\phi_2(v_\alpha, -v_\beta) = -\phi_2(v_\alpha, v_\beta)$.

On utilise les tables 2.3 et 2.4 pour estimer α et β .

McCulloch construit ensuite un nouveau indice $v_\sigma = (x_{0,75} - x_{0,25})/\sigma$ ne dépend ni de μ , ni de σ , le tableau de DuMouchel 2.5 montre le comportement de v_σ comme une fonction de α et β : $v_\sigma = \varphi_3(\alpha, \beta)$.

Notez que $\varphi_3(\alpha, -\beta) = \varphi_3(\alpha, \beta)$.

Pour connaître la valeur estimée du paramètre d'échelle σ , on calcule sur l'échantillon étudié $\hat{x}_{0,75}$ et $\hat{x}_{0,25}$, en déduisant que

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0,75} - \hat{x}_{0,25}}{v_\sigma}. \quad (2.9)$$

Puisque $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{x}_{0,75}$ et $\hat{x}_{0,25}$ sont des estimateurs consistants, l'estimateur de σ est consistant.

Enfin, pour faire ressortir de paramètre de localisation μ , il est naturel de le localiser à l'égard de la médiane $x_{0,5}$ a travers une diffusion standardisée $(\mu - x_{0,5})/\sigma$ qui est une fonction de (α, β) indépendante de μ et σ , cette fonction est bien défini quand $\alpha = 1$, mais elle tend vers $(-\infty)$ (resp $+\infty$) pour tout β , quand α tend vers 1 pour plus petit (resp plus grand) valeurs

Pour éviter la discontinuité de cette fonction à $\alpha = 1$ on va modifier la définition par

α	β				
	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.9	0.0	0.018	0.036	0.053	0.071
1.8	0.0	0.039	0.077	0.113	0.148
1.7	0.0	0.063	0.123	0.178	0.228
1.6	0.0	0.089	0.174	0.248	0.309
1.5	0.0	0.118	0.228	0.320	0.390
1.4	0.0	0.148	0.285	0.394	0.469
1.3	0.0	0.177	0.342	0.470	0.546
1.2	0.0	0.206	0.399	0.547	0.621
1.1	0.0	0.236	0.456	0.624	0.693
1.0	0.0	0.268	0.513	0.699	0.762
0.9	0.0	0.303	0.573	0.770	0.825
0.8	0.0	0.341	0.634	0.834	0.881
0.7	0.0	0.387	0.699	0.890	0.927
0.6	0.0	0.441	0.768	0.936	0.962
0.5	0.0	0.510	0.838	0.970	0.985

TAB. 2.2 – Table DuMouchel pour $\nu(\beta)$.

définir l'indice

$$v_\zeta = \frac{\zeta - x_{0.5}}{\sigma},$$

où

$$\zeta = \begin{cases} \mu + \beta\sigma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ \mu & \text{pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

On pose $v_\zeta = \varphi_4(\alpha, \beta)$ le tableau 2.6 des valeurs de $\varphi_4(\alpha, \beta)$ montre la comportement de cette fonction .

Notez que $\varphi_4(\alpha, -\beta) = -\varphi_4(\alpha, \beta)$.

L'estimateur de ζ est donné par

$$\hat{\zeta} = \hat{x}_{0.5} + \hat{\sigma}\varphi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta}),$$

où $\varphi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ est obtenu à partir le tableau 2.6.

L'estimateur de paramètre μ est donné par

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \hat{\zeta} - \hat{\beta}\hat{\sigma} \tan \frac{\pi\hat{\alpha}}{2} & , \alpha \neq 1, \\ \hat{\zeta} & , \alpha = 1. \end{cases}$$

Comme \hat{x}_p est un estimateur consistant de x_p , et que les fonctions φ_i sont continues, alors les estimateurs des paramètres sont consistants. Cette méthode est facile à implémenter.

v_α	v_β						
	0.0	0.1	2.0	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	2.0	2.0	1.924	2.0	2.0	2.0	2.0
2.5	1.916	1.924	1.829	1.924	1.924	1.924	1.924
2.6	1.808	1.813	1.745	1.829	1.829	1.298	1.829
2.7	1.729	1.713	1.737	1.745	1.745	1.745	1.745
2.8	1.664	1.663	1.663	1.668	1.676	1.676	1.676
3.0	1.563	1.560	1.553	1.548	1.547	1.547	1.547
3.2	1.484	1.480	1.471	1.460	1.448	1.438	1.438
3.5	1.391	1.386	1.378	1.364	1.337	1.318	1.318
4.0	1.279	1.273	1.266	1.250	1.210	1.184	1.150
5.0	1.128	1.121	1.114	1.101	1.067	1.027	0.973
6.0	1.029	1.021	0.014	1.004	0.974	0.935	0.874
8.0	0.896	0.892	0.887	0.883	0.855	0.823	0.769
10.0	0.818	0.806	0.806	0.801	0.780	0.756	0.691
15.0	0.698	0.695	0.692	0.689	0.676	0.656	0.595
25.0	0.593	0.590	0.588	0.586	0.586	0.563	0.513

TAB. 2.3 – Table de DuMouchel pour estimer α .

Exemple 2.3.1 Dans cet exemple, on simule 5000 observations des distributions stables avec différentes paramètres, on calcule v_α, v_β , on répète ce procédé 100 fois pour chaque ensemble des paramètres et on prend les moyennes de v_α, v_β , puis on calcule les estimateur des ces paramètres, les résultats sont données dans le tableau 2.7.

2.3.3 Méthode de L-Moments

Les L-moments sont des statistiques pour des lois ou pour des échantillons. Greenwood et al (1979, [18]) ont défini les moments pondérés, notés PWM en anglais [*probability weighted moments*], les moments pondérés sont précurseurs des L-moments, qui sont exactement des combinaisons linéaires des moments pondérés, qui ont, comme les moments ordinaires, une interprétation comme mesures de position, dispersion, asymétrie, Kurtosis et des autres aspects sur la forme des lois de distribution ou des échantillons. La particularité pour des distributions stables est que de L-moments exacte ne peut pas calculer, néanmoins il est possible de suivre une approche numérique pour trouver la racine des équations correspondantes comme résultat d'égalisent les L-moments empiriques et les L-moments théoriques.

Les L-moments ont plusieurs avantages sur les moments ordinaires comme :

- Les L-moments d'une loi de distribution ont un sens dès que le moment d'ordre 1 existe, sans avoir besoin de l'existence des autres moments (voir [21]).
- L'approximation asymptotique des distributions empiriques est meilleure pour les L-moments que pour les moments ordinaires (voir [21]).

v_α	v_β						
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	0.0	2.160	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2.5	0.0	1.592	3.390	1.0	1.0	1.0	1.0
2.6	0.0	0.759	1.800	1.0	1.0	1.0	1.0
2.7	0.0	0.482	1.048	1.694	1.0	1.0	1.0
2.8	0.0	0.360	0.760	1.232	2.229	1.0	1.0
3.0	0.0	0.253	0.518	0.823	1.575	1.0	1.0
3.2	0.0	0.203	0.410	0.632	1.244	1.906	1.0
3.5	0.0	0.165	0.332	0.499	0.943	1.360	1.0
4.0	0.0	0.136	0.271	0.404	0.689	1.230	2.195
5.0	0.0	0.109	0.216	0.323	0.539	0.827	1.917
6.0	0.0	0.096	0.190	0.284	0.472	0.693	1.759
8.0	0.0	0.082	0.163	0.243	0.412	0.601	1.596
10.0	0.0	0.074	0.147	0.220	0.377	0.546	1.482
15.0	0.0	0.064	0.128	0.191	0.330	0.478	1.362
25.0	0.0	0.056	0.112	0.167	0.285	0.428	1.274

TAB. 2.4 – Table de DuMouchel pour estimer β .

- Les L-moments sont moins sensibles aux données aberrantes (voir [51] et [57]).

Les moments pondérés pour une variable aléatoire X de fonction de répartition F se définissent par :

$$M_{p,r,s} = E\{X^p[F(X)]^r[1 - F(X)]^s\}.$$

et en particulier on peut écrire les cas $\alpha_r = M_{1,0,r}$ et $\beta_r = M_{1,r,0}$ comme suit

$$\alpha_r = \int_0^1 Q(u)(1-u)^r du, \quad \beta_r = \int_0^1 Q(u)u^r du,$$

où Q est la fonction de quantile.

D'après la dernière expression, L-moments peut être vue comme des moments conventionnels pondérés par les polynômes u ou $1 - u$.

Les L-moments sont des combinaisons linéaires de α_r et β_r . Ces combinaisons linéaire introduites initialement par Silito (1969) et reprise plus tard par Hosking (1990), sont définies selon la relation suivante

$$\lambda_r = (-1)^r \sum_{k=0}^{r-1} p_{r-1,k}^* \alpha_k = \sum_{k=0}^{r-1} p_{r-1,k}^* \beta_r,$$

où

$$p_{r-1,k}^* = \frac{(-1)^{r-k}(r+k)!}{(k!)^2(r-k)!}. \tag{2.10}$$

α	β				
	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	1.908	1.908	1.908	1.908	1.908
1.90	1.914	1.915	1.916	1.918	1.921
1.80	1.921	1.922	1.927	1.936	1.947
1.70	1.927	1.930	1.943	1.961	1.987
1.60	1.933	1.940	1.962	1.997	2.043
1.50	1.939	1.952	1.988	2.045	2.116
1.40	1.946	1.967	2.022	2.106	2.211
1.30	1.955	1.984	2.067	2.188	2.333
1.20	1.965	2.007	2.125	2.294	2.491
1.10	1.980	2.040	2.205	2.435	2.696
1.00	2.000	2.085	2.311	2.624	2.973
0.90	2.040	2.149	2.461	2.886	3.356
0.80	2.098	2.244	2.676	3.265	3.912
0.70	2.189	2.392	3.004	3.844	4.775
0.60	2.337	2.635	3.542	4.808	6.247
0.50	2.588	3.073	4.534	6.636	9.144

TAB. 2.5 – Table de DuMouchel pour $\nu(\sigma)$.

Les quatres premiers L-moments sont données par

$$\lambda_1 = \beta_0,$$

$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0,$$

$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0,$$

$$\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0.$$

Une justification intuitive pour ces paramètres peut être obtenu par les statistiques d'ordre

$$\lambda_1 = E(X_{1,1}),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}E(X_{2,2} - X_{1,2}),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}E(X_{3,3} - 2X_{2,3} + X_{1,3}),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4}E(X_{4,4} - 3X_{3,4} + 3X_{2,4} - X_{1,4}).$$

Les moments empiriques pondérés pour un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n ordonné en ordre croissant sont :

α	β				
	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.90	0.0	-0.017	-0.032	-0.049	-0.064
1.80	0.0	-0.030	-0.061	-0.092	-0.123
1.70	0.0	-0.043	-0.088	-0.132	-0.179
1.60	0.0	-0.056	-0.111	-0.170	-0.232
1.50	0.0	-0.066	-0.134	-0.206	-0.283
1.40	0.0	-0.075	-0.154	-0.241	-0.335
1.30	0.0	-0.084	-0.173	-0.276	-0.390
1.20	0.0	-0.090	-0.192	-0.310	-0.447
1.10	0.0	-0.095	-0.208	-0.346	-0.508
1.00	0.0	-0.098	-0.223	-0.383	-0.576
0.90	0.0	-0.099	-0.237	-0.424	-0.652
0.80	0.0	-0.096	-0.250	-0.469	-0.742
0.70	0.0	-0.089	-0.262	-0.520	-0.853
0.60	0.0	-0.078	-0.272	-0.581	-0.997
0.50	0.0	-0.061	-0.279	-0.659	-1.198

TABLE 2.6 – Table de DuMouchel pour $\nu(\zeta)$.

$$b_0 = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j,$$

$$b_r = n^{-1} \sum_{j=r+1}^n \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} X_j.$$

Les premiers L-moments d'un échantillon sont définis comme pour une variable aléatoire :

$$l_1 = b_0,$$

$$l_2 = 2b_1 - b_0,$$

$$l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0,$$

$$l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0.$$

En général

$$l_r = \sum_{k=0}^{r-1} p_{r-1,k}^* b_k,$$

où $p_{r,k}^*$ est donnée dans 2.10.

paramètres	α	β	σ	μ
valeurs théoriques	1.9	0	1	0
estimateurs	1.932	0.025	0.972	-0.085
valeurs théoriques	1.2	0.2	1	0.5
estimateurs	1.198	0.210	1.009	0.502
valeurs théoriques	0.9	-0.5	0.5	0
estimateurs	0.913	-0.511	0.511	0.003

TAB. 2.7 – L’estimation de McCulloch pour des ensembles de paramètres stables basé sur 100 échantillons de taille 5000.

Remarquons que b_r est un estimateur sans biais de β_r , donc l_r est un estimateur sans biais de λ_r .

Cependant il est difficile d’obtenir distribution exacte pour les estimateurs, par conséquent les intervalles de confiance ne sont pas disponible, ils peuvent être obtenus à partir d’approximation de grand échantillon utilisant la théorie asymptotique. Pour la plupart des distribution standard, les estimateurs de L-moments des paramètres et les quantiles sont asymptotiquement normale, puis on peut trouver l’écart-type et les intervalles de confiance pour les détails voir [21].

Algorithme pour l’estimation de L-moment

I Calcul les moments pondérés empiriques :

a Commander l’échantillon pour obtenir $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$.

b Calculer

1. $b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{j,n}$,
2. $b_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} X_{j,n}$
3. $b_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=3}^n \frac{(j-1)(j-2)}{(n-1)} X_{j,n}$,
4. $b_3 = \frac{1}{n} \sum_{j=4}^n \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{(n-1)} X_{j,n}$

II Calcul les L-moments empiriques

Calculer

a $l_1 = b_0$,

b $l_2 = 2b_1 - b_0$,

c $l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0$,

d $l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0$.

III Calcul des moments pondérés théoriques :

Pour un ensemble de paramètres $(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ donné calculer :

- a** La fonction de densité rapprochée par inversion dans un grille approprié des points.
- b** La fonction de répartition cumulative correspondante.
- c** La fonction de quantile correspondante Q (inverse de F)

IV Calculer numériquement par la méthode de trapèze les valeurs $E(X_{r,k})$ comme

$$e_{r,k}(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \frac{k}{(r-1)!(k-r)!} \int_0^1 Q(u)u^{r-1}(1-u)^{k-r} du,$$

pour $r = 1, 2, 3, 4$ et $k = 1, 2, 3, 4$.

V Calcul les L-moments théoriques

Calculer :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = e_{1,1}, \\ \lambda_2 &= \lambda_2(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \frac{1}{2}(e_{2,2} - e_{1,2}), \\ \lambda_3 &= \lambda_3(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \frac{1}{3}(e_{3,3} - 2e_{2,3} + e_{1,3}), \\ \lambda_4 &= \lambda_4(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \frac{1}{4}(e_{4,4} - 3e_{3,4} + 3e_{2,4} - e_{1,4}), \end{aligned}$$

VI Résoudre

$$\lambda_k(\alpha, \beta, \sigma, \mu) - l_k = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, 4. \quad (2.11)$$

La solution des équations 2.11 par des méthodes numériques standard implique plusieurs des erreurs d'approximation. Pour éviter des inexactitudes numériques, au moins partiellement, une table est calculée liant les paramètres (α, β) avec les L-moments théoriques $\lambda_k(\alpha, \beta, 0, 1)$, alors une relation est établi pour calculer $\lambda_k(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$.

Cette méthode est très générale qui a les avantages de la méthode classique des moments comme : consistence, normalité asymptotique, mais elle est aussi plus robuste et moins exigeante et dans certains cas on obtient des estimateurs plus efficaces que les estimateurs de maximum de vraisemblance, (pour les détails voir [21]).

Dans le cas des variables aléatoires stables elle s'applique au cas où $\alpha > 1$, mais ceci n'est pas très restrictif quand on s'intéresse aux données financières qui semblent avoir un coefficient de stabilité beaucoup plus grand que 1 (voir [31]).

La principale difficulté de la méthode est qu'il n'existe pas d'expressions fermées pour les L-moments théoriques donc résoudre le système d'équations peut être très complexe, mais aussi conduire à des erreurs d'approximation. pour le moment on n'a pas une méthode efficace pour résoudre le système.

2.4 Méthode basées sur la fonction caractéristique

Etant donné un échantillon X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, la fonction caractéristique empirique est

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp \{itX_j\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

où $i^2 = -1$.

depuis $|\varphi(t)|$ est borné par l'unité tous les moments de $\hat{\varphi}(t)$ sont finis pour tout t fixé. En effet $\hat{\varphi}(t)$ est la moyenne empirique de variables aléatoires i.i.d $\exp(itX_1), \dots, \exp(itX_n)$. À partir de la loi des grands nombres, $\hat{\varphi}(t)$ est un estimateur consistant de la fonction caractéristique.

Les méthodes d'estimation dans cette section sont des méthodes basées sur cette expression. Chacune des méthodes essaye d'obtenir la fonction caractéristique d'une variable aléatoire stable plus « proche » de la fonction caractéristique empirique en un certain sens.

Un autre avantage de ces méthodes est qu'elles peuvent être étendues à des cas qui ne sont pas i.i.d., en particulier des modèles dynamiques hétéroscédastiques : on peut considérer des fonctions caractéristiques multivariées ou conditionnelles. Les propriétés asymptotiques (convergence et normalité) sont préservées [16] et [24].

2.4.1 Méthodes de minimum de distance

Deux distributions sont égales si et seulement si leurs fonctions caractéristiques coïncident sur la ligne réelle. Basant sur ce fait, Press 1972 a proposé deux méthodes d'estimations, ces méthodes consistent de maximiser la distance entre la fonction caractéristique théorique et la fonction caractéristique empirique.

Soit

$$D(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \|\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)\|,$$

ces méthodes calculent

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} D(\theta), \quad (2.13)$$

où $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ est un point de l'espace paramétrique Θ et $\|\cdot\|$ est une norme habituellement on considère la norme L^∞ dans la première méthode et la norme pondérée L^r dans la deuxième méthode. Dans la première, il définit

$$g(\theta) = \sup_t |\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)|. \quad (2.14)$$

Les estimateurs de minimum de distance sont les valeurs qui minimisent 2.14, le problème de cette méthode est que g n'est pas différentiable, donc la minimisation de g est

très complexe. C'est pourquoi on considère plutôt les normes pondérées L^r

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)|^r W(t) dt, \quad (2.15)$$

où $W(t)$ est une fonction de poids pour garantir la convergence d'intégrale, l'estimateurs de cette méthode sont les valeurs qui minimisent 2.15 pour r a fixé. Selon Press [50], l'estimateurs par les deux méthodes sont consistants et asymptotiquement normale dans le cas symétrique, mais il n'analyse pas leurs efficacité.

Leitch et Paulson [26], et Paulson et al [47] (1975) ont été les premiers a construire des estimations basés sur la dernière méthode. Ils sont choisi $r = 2$ et $W(t) = \exp(t^2)$ pour bénéficier des facilités de calcul associés à la quadratures Hermitienne pour les détails voir [47], l'algorithme peut se décliner de la façon suivante :

1. D'un paramètre de démarrage réglée θ_0 résoudre la quadrature Hermitienne 2.15 pour θ_k pour obtenir $D(\theta_k)$ ou $D(\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \|\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)\|$,
2. Calculer le gradient estimé $\nabla D(\theta_k)$ et chercher une direction d tels que $\nabla D(\theta_k)d > 0$,
3. Calculer $\theta_{k+1} = \theta_k + d$ et répéter l'étape 1 et 2,
4. Arrêter si le nombre donné d'itération est atteint ou $D(\theta_{k+1}) - D(\theta_k) < R$ pour d donné.

Cette méthode a l'avantage à maximum de vraisemblance qui réduisent au minimum directement des FC évitant le procédé d'inversion.

2.4.2 Méthode des moments

Press (1972) dans [49] et [50] a proposé une autre méthode simple d'estimation basée sur la transformation de la fonction caractéristique.

Cette transformation donne une relation entre le logarithme de FC, son argument de puissance de α et σ , la solution de cette équation pour deux valeurs, et remplaçant FC par la FC empirique à deux points produit les estimateurs de α et σ , d'une manière assimilée on peut obtenu les estimateurs de β et μ .

On a pour tout α

$$|\varphi(t)| = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha). \quad (2.16)$$

Alors

$$-\log |\varphi(t)| = \sigma^\alpha |t|^\alpha.$$

Dans le cas $\alpha \neq 1$, on prend les valeurs non nulles de t , $t_1 \neq t_2$ puis

$$-\log |\varphi(t_k)| = \sigma^\alpha |t_k|^\alpha. \quad (2.17)$$

Pour $k = 1, 2$, la résolution de ces deux équations simultanément pour α et σ et remplaçant $\varphi(t)$ par $\hat{\varphi}(t)$ donne

$$\hat{\alpha} = \frac{\log \frac{\log |\hat{\varphi}(t_1)|}{\log |\hat{\varphi}(t_2)|}}{\log \left| \frac{t_1}{t_2} \right|}, \quad (2.18)$$

et

$$\log \hat{\sigma} = \frac{\log |t_1| \log(-\log |\hat{\varphi}(t_2)|) - \log |t_2| \log(-\log |\hat{\varphi}(t_1)|)}{\log \frac{\log |\hat{\varphi}(t_1)|}{\log |\hat{\varphi}(t_2)|}}. \quad (2.19)$$

Pour l'estimation de β et μ , on va définir $u(t) \equiv \text{Im}(\log(\varphi(t)))$, alors

$$u(t) = \mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (2.20)$$

On prend deux valeurs non nulles de t , $t_3 \neq t_4$ il vient

$$\frac{u(t_k)}{t_k} = \mu + [\sigma^\alpha |t_k|^{\alpha-1} \tan \frac{\alpha\pi}{2}] \beta, \quad (2.21)$$

pour $k = 3, 4$. Comme

$$\hat{\varphi}(t) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(tx_i) \right) + i \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(tx_i) \right), \quad (2.22)$$

alors

$$\tan \hat{u}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \cos(tx_i)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(tx_i)}. \quad (2.23)$$

Remplaçant $u(t)$ dans 2.21 par la valeur $\hat{u}(t)$ à partir 2.23 et remplaçant les paramètres par leurs estimateurs, puis résoudre les deux équations linéaires simultanément pour β et μ donne les estimateurs

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_4)}{t_4} - \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3}}{[|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}] \hat{\sigma}^{\hat{\alpha}} \tan \frac{\hat{\alpha}\pi}{2}}, \quad (2.24)$$

et

$$\hat{\mu} = \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}}. \quad (2.25)$$

Le cas $\alpha = 1$ et plus simple, en suivant le même raisonnement, on arrive aux résultats suivants

$$\hat{\sigma} = -\frac{\log |\hat{\varphi}(t_1)|}{|t_1|}, \quad (2.26)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\frac{2}{\pi} \hat{\sigma} \log \left| \frac{t_4}{t_3} \right|}, \quad (2.27)$$

et

$$\hat{\mu} = \frac{\log |t_4| \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \log |t_3| \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\log |t_4| - \log |t_3|}. \quad (2.28)$$

Procédure concrète de l'algorithme

1. Choisir deux points t_1 et t_2 et calculer $\hat{\varphi}(t_1)$ et $\hat{\varphi}(t_2)$.
2. Calculer $\hat{\alpha}$ et $\hat{\sigma}$ d'après les expressions 2.18 et 2.19.
3. Choisir deux points t_3 et t_4 et calculer $\hat{\beta}$ et $\hat{\mu}$ des expressions 2.24 et 2.25.

Le point clé est le choix optimal des points t_1, t_2, t_3, t_4 , les distributions symétrique stable sont rapportées $t_1 = 0.2, t_2 = 0.8$, les estimateurs de paramètres sont consistant puisque ils sont basés sur les estimateurs de $\varphi(t)$, $\text{Im } \varphi(t)$ et $\text{Re } \varphi(t)$ qui sont consistants, cette méthode est très facile à implémenter et elle très efficace en temps de calcul.

2.4.3 Méthode basée sur la régression

Au lieu d'extraire des informations sur les paramètres de quantiles, on peut utiliser d'autres implications de la fonction caractéristique, Koutrouvelis (1980) propose une méthode de type régression qui estime les paramètres de loi stable à partir de l'habituel expression de la fonction caractéristiques 1.3, on peut en déduire ensemble d'équations

$$\log(-\log |\varphi(t)|^2) = \log(2\sigma^\alpha) + \alpha \log |t|. \quad (2.29)$$

Pour $\alpha \neq 1$ les parties réelles et imaginaires de $\varphi(t)$ sont données par

$$\text{Re } \varphi(t) = \exp(-|\sigma t|^\alpha) \cos[\mu t + |\sigma t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}],$$

et

$$\text{Im } \varphi(t) = \exp(-|\sigma t|^\alpha) \sin[\mu t + |\sigma t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}].$$

D'après les deux dernières équations, on peut déduire sans considération sur la valeur principale de la fonction arctan.

$$\arctan\left(\frac{\text{Im } \varphi(t)}{\text{Re } \varphi(t)}\right) = \mu t + \beta \sigma^\alpha \tan \frac{\pi\alpha}{2} \text{sign}(t) |t|^\alpha. \quad (2.30)$$

L'équation 2.29 ne dépend que α et σ et suggère que on estime ces paramètres par régression $y = \log(-\log |\varphi(t)|^2)$ sur $w = \log |t|$ dans le modèle

$$y_k = m + \alpha w_k + \epsilon_k \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2.31)$$

où $(t_k; k = 1, 2, \dots, K)$ est un ensemble approprié de nombres réels, et ϵ_k désigne un terme d'erreur. Koutrouvelis (1980) propose d'utiliser $t_k = \frac{\pi k}{25} \pi$, $t = 1, 2, \dots, K$, K entre 9 et 134 pour les différentes estimations du paramètre α et les tailles d'échantillon, sans perte significative d'efficacité, nous avons simplifié sa méthode de choisir K (voir tableau 2.8).

l'indice α	K
1.5 – 2.0	10
0.6 – 1.5	20
0.4 – 0.6	60
inférieur à 0.4	120

TAB. 2.8 – Valeurs optimales de K pour différentes valeurs de α .

Une fois $\hat{\alpha}$ et $\hat{\sigma}$ ont été obtenus, alors les estimations de β et μ peuvent s'obtenir à partir 2.30. Soit $g_n(u) = \arctan(\text{Im}(\varphi(t))/\text{Re}(\varphi(t)))$, on peut estimer β et μ en régressant $z = g_n(u) + \pi k_n(u)$ à u et $\text{sign}(u) |u|^\alpha$ dans le modèle suivant

$$z_l = \mu u_l + \beta \sigma^\alpha \tan \frac{\pi \alpha}{2} \text{sign}(u_l) |u_l|^\alpha + \eta_l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (2.32)$$

où (u_l) est un ensemble approprié de nombres réels et η_l désigne un terme d'erreur et le nombre $k_n(u)$ représente les branches possible de la fonction arctan. Koutrouvelis (1980) propose d'utiliser $u_l = \frac{\pi l}{50}$, $l = 1, 2, \dots, L$, L entre 9 et 70 pour des différentes estimations de paramètre α et les tailles d'échantillon.

L'algorithme peut décliner de la façon suivante

1. Fixer un K approprié et, pour les points $t_k = \frac{\pi k}{25} \pi$, $t = 1, 2, \dots, K$ calculer la fonction caractéristique empirique $\hat{\varphi}(t)$.
2. Calculer $y_k = \log(-\log |\varphi(t_k)|^2)$.
3. Ajuster la régression linéaire $y_k = m + \alpha w_k + \epsilon_k$, pour obtenir des estimateurs $\hat{\alpha}$ et \hat{m} .
4. Obtenir l'estimateur $\hat{\sigma}$ à partir de $m = \log(2\hat{\sigma})^{\hat{\alpha}}$.
5. Calculer, pour un L approprié, $z_l(u)$ pour $u_l = \frac{\pi l}{50}$, $l = 1, 2, \dots, L$.
6. Ajuster la régression

$$z_l = \mu u_l + \beta \hat{\sigma}^\alpha \tan \frac{\pi \hat{\alpha}}{2} \text{sign}(u_l) |u_l|^{\hat{\alpha}} + \eta_l, \quad l = 1, 2, \dots, L,$$

pour obtenir les estimateurs de μ et β .

Dans le cas symétrique, il y a seulement deux paramètres à fixer α et σ , pour le paramètre α l'estimateur est obtenu par la première régression linéaire

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{k=1}^K \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2 - \left(\sum_{k=1}^K w_k \right)^2}.$$

Si on prend $\sum_{k=1}^K w_k$ l'estimation précédente est égale à

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{k=1}^K w_k \hat{y}_k}{K \sum_{k=1}^K w_k^2}.$$

Et pour l'estimateur de σ est obtenu par la deuxième régression linéaire

$$\hat{\sigma} = \exp\left\{\frac{1}{\hat{\alpha}} \log(e^{\hat{m}}/2)\right\},$$

où

$$m = \sum_{k=1}^K y_k.$$

2.4.4 Méthode de Régression Itérative

Au pas k de l'algorithme on utilise les estimateurs $\hat{\sigma}_{k-1}$ et $\hat{\mu}_{k-1}$ pour normaliser l'échantillon selon ces valeurs, c'est à dire, pour chaque X de l'échantillon on fait la transformation $(X - \hat{\mu}_{k-1}) / \hat{\sigma}_{k-1}$. Le nouvel échantillon est presque normalisé et l'on estime ses paramètres par la méthode de régression. Si les estimateurs obtenus pour l'échantillon normalisé sont $(\hat{\alpha}_k, \hat{\sigma}_k, \hat{\beta}_k, \hat{\mu}_k)$, alors on actualise les paramètres d'échelle et de position de l'échantillon original de la façon suivante :

$$\hat{\sigma}_k = \hat{\sigma}_{k-1} \hat{\sigma}_k^*,$$

et

$$\hat{\mu}_k = \hat{\sigma}_{k-1} \hat{\mu}_k^* + \hat{\mu}_{k-1}.$$

Les valeurs $\hat{\sigma}_0$ et $\hat{\mu}_0$ pour initialiser l'algorithme doivent être des estimateurs proches des valeurs réelles des paramètres. Dans nos simulations on utilise l'estimateur de McCulloch pour les obtenir.

2.5 Méthode de Régression de Queue

Cet estimateur se fonde sur le résultat connu suivant : les queues des lois stables se comportent en puissance α . Pour x assez grand, on prend les logarithmes de chaque membre de cette expression et on obtient

$$\log P(X > x) \sim \log(C_\alpha(1 + \beta)\sigma^\alpha] - \alpha \log x.$$

Alors, on considère une régression linéaire à partir de cette dernière expression pour différentes valeurs de la variable x . La pente de la droite obtenue sera un estimateur de $-\alpha$.

Procédure concrète de l'algorithme

1. Choisir les points x_1, x_2, \dots, x_k dans la queue de la fonction cumulative de distribution empirique.
2. Calculer la fréquence relative des données sur les points choisis, i.e.

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^k 1_{[X_j > x_i]}}{n} \simeq P(X > x_i).$$

3. Ajuster la régression linéaire

$$\log y_i = k - \alpha \log x_i.$$

On arrive à l'expression de l'estimateur

$$\hat{\alpha} = - \frac{\sum_{i=1}^k (\log y_i - \overline{\log y_i})}{\sum_{i=1}^k (\log x_i - \overline{\log x_i})}.$$

Cette méthode est très facile à implémenter.

2.6 Méthodes basées sur la théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes est l'équivalent du théorème de la limite centrale pour la queue de distribution

Théorème 2.6.1 (*Tippet et Frechét 1928*)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. Soit $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, S'il existe deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ réelles et $(b_n)_{n \geq 1}$ telle que $b_n > 0$ telles que la suite $(M_n - a_n)/b_n$ converge en distribution vers une loi non dégénérée. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n}\right) = H(x),$$

où $H(x)$ prend une des trois lois suivantes :

- *Loi de Weibull* $\Psi_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\xi} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ et $\xi > 0$.
- *Loi de Gumbel* $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- *Loi de Fréchet* $\Phi_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-x^{-\xi}} & x > 0 \end{cases}$ et $\xi > 0$.

Ces trois distributions limites sont appelées les distributions de valeurs extrêmes standard, il est possible de rassembler les trois familles de lois en une seule famille paramétrique ($H(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$) dite famille des lois des valeurs extrêmes généralisées.

$$\begin{aligned} H(\gamma)(x) &= e^{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}} \quad \text{si } 1 + \gamma x > 0 \\ H(0)(x) &= e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La valeur de γ détermine le comportement de la queue de distribution. Une distribution tronquée sera du type de Weibull ($\gamma < 0$), tandis qu'une distribution ayant un comportement en loi de puissance sera dans la classe de Fréchet ($\gamma > 0$), avec une exposant de queue $\xi = 1/\gamma$. Les autres distributions appartiennent à la classe de Gumbel, donc des exposants de queues infinis.

Définition 2.6.1 (*Domaine d'attraction*)

On dit qu'une distribution F appartient au domaine d'attraction de H , et on note $F \in D(H_\gamma)$ si la distribution du maximum renormalisée converge vers H . Autrement dit, s'il existe des constantes réelles $a_n > 0$ et b_n tels que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_\gamma(x) = \exp\left(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\right),$$

pour tout x avec $1 + \gamma x > 0$.

Définition 2.6.2 (*Fonctions de quantile et fonction queue*)

La fonction des quantiles associée à F est l'inverse généralisé de F définie par

$$Q(s) = F^{\leftarrow}(s) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq s\}, \quad 0 < s < 1.$$

La fonction queue est définie par

$$U(t) = Q(1 - 1/t), \quad 1 < t < \infty.$$

Définition 2.6.3 (*Fonction à variation régulière du second ordre*)

On dit que la queue de $F \in D(\Phi_{1/\gamma})$, $\gamma > 0$ est à variation régulière du second ordre à l'infinie, s'il existe un certain paramètre $p \leq 0$, et une fonction A^* satisfont $\lim_{t \rightarrow \infty} A^*(t) = 0$ et ne changeant pas son signe près de ∞ , telles que pour tout $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - F(tx))/(1 - F(t)) - x^{-1/\gamma}}{A^*(t)} = x^{-1/\gamma} \frac{x^p - 1}{p}. \quad (2.33)$$

Fonctions de Distribution de Classe Hall

Une classe entière de fonctions de distribution dont l'indice γ est de valeur positive, et qui est fréquemment utilisée lorsque l'on étudie les distributions des valeurs extrêmes. Les fonctions de distribution de cette classe sont définies

$$F(x) = 1 - cx^{-1/\gamma}(1 + dx^{p/\gamma} + o(x^{p/\gamma})) \quad \text{quand } x \longrightarrow \infty, \quad (2.34)$$

où $\gamma > 0$, $p \leq 0$, $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}/\{0\}$. Les fonctions de quantile et de queue satisfaits (resp.)

$$Q(1 - s) = c^\gamma s^{-\gamma}(1 + \gamma dc^p s^{-\gamma} + o(s^{-\gamma})) \quad \text{quand } x \longrightarrow \infty,$$

et

$$U(t) = c^\gamma t^\gamma(1 + \gamma dc^p t^\gamma + o(t^{-\gamma})) \quad \text{quand } x \longrightarrow \infty.$$

La théorème de limite centrale joue un rôle très important pour estimer les paramètres stables, car les distributions stables possèdent la propriété de queue lourde c-à-d la queue de la distribution décroît plus lentement que la queue d'une distribution gaussienne. Il y a des avantages de cet approche, qu'elle se concentre seulement sur le comportement de queue, les estimateurs sont des formes explicites, le calcul d'estimation est plus facile et plus directe, elle permet de calcul des limites d'intervalle de confiance.

Soit $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ et $Z = |X|$, dénote que F et G sont des fonctions de distribution de X et Z respectivement telle que F et G sont relie par :

$$G(x) = F(x) - F(-x), \quad x > 0.$$

Soit $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ et $Z_{1,n} \leq \dots \leq Z_{n,n}$ les statistiques d'ordre associées les deux échantillon X_1, \dots, X_n et Z_1, \dots, Z_n respectivement et soit $k = k_n \longrightarrow \infty$, et $k/n \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow \infty$.

2.6.1 Estimateur de Hill

L'estimation la plus populaire pour α est l'estimateur de Hill (Hill 1975) qui est un estimateur semi paramétrique simple basé sur les différences entre les logarithmes des statistiques d'ordre. L'expression de l'estimateur de Hill est :

$$\hat{\alpha} = \left\{ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log(Z_{n+1-j,n}) - \log(Z_{k-n,n}) \right\}^{-1}, \quad (2.35)$$

où k est une fonction de n , qui est choisi pour satisfaire les conditions suivantes

$$k(n) \longrightarrow \infty, \quad k(n)/n \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

Son écart-type est

$$\widehat{MSE}(\alpha) = \frac{k\hat{\alpha}}{(k-1)(k-2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{pour } k > 2. \quad (2.36)$$

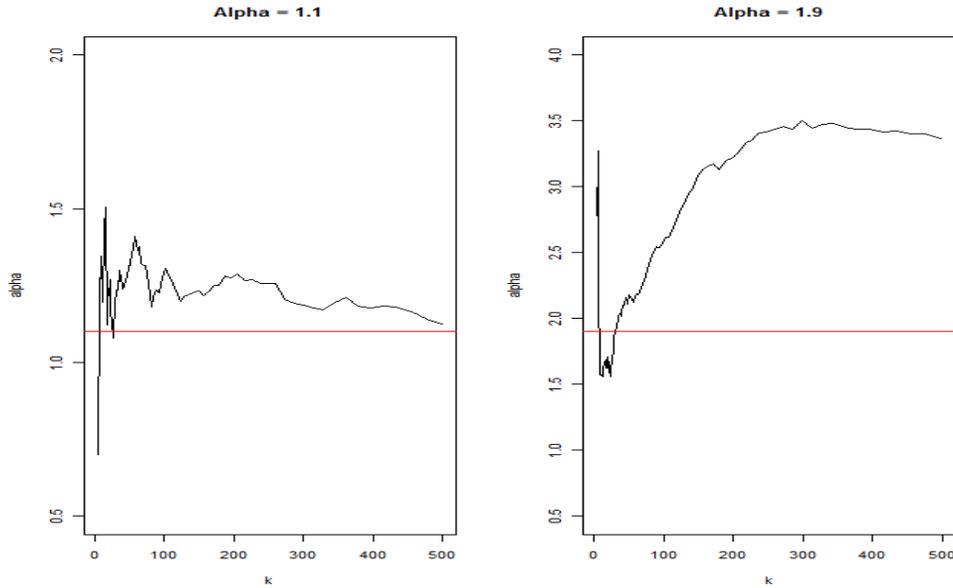


FIG. 2.1 – estimateur de hill de l'indice de stabilité $\alpha = 1.1$ (à droite), $\alpha = 1.9$ (à gauche) avec $\beta = 0$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$, la taille d'échantillon est 5000.

Les propriétés asymptotiques sont étudiées par beaucoup d'auteurs. Mason (1982) et Hsing (1992) considèrent la consistance faible de l'estimateur de Hill pour le cas indépendant et dépendant respectivement, la consistance forte est prouvée par Deheuvels et al (1988), goldie et Smith (1987) ont fourni la normalité asymptotique, i. e ; $\sqrt{k}(\hat{\alpha}_n^{-1} - \alpha^{-1}) \sim N(0, \alpha^{-2})$ pour certain choix de $k(n)$.

Théorème 2.6.2 (*Propriétés asymptotique*)

Supposons que $F \in D(\Phi_\alpha)$, $k = k_n \rightarrow \infty$, et $k/n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$.

- *Consistance faible* :

$$\hat{\alpha}_n^{-1} \xrightarrow{p} \alpha^{-1} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- *Consistance forte* : Si $k \log \log n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

$$\hat{\alpha}_n^{-1} \xrightarrow{p.s} \alpha^{-1} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Dans la figure 2.1, la simulation est faite sur deux échantillons suivent la loi stable symétrique $\alpha = 1.1$ pour le premier et $\alpha = 1.9$ pour le deuxième dont la taille 5000 (avec 100 répliques), on note que dans le cas extrême $\alpha = 1.9$ il n'y a aucune valeur de k donne la bonne estimation pour α , et pour $\alpha = 1.1$ des bonnes estimations peuvent être obtenues pour $k \in \{200, \dots, 500\}$. ça confirme la simulation de Weron[59] faite sur des différentes tailles des échantillons pour illustrer les performances de l'estimateur de hill, il a remarqué que pour $\alpha < 1.5$ l'estimation est raisonnable, mais comme α

approche de 2 , les indices de queue sont sensiblement surestimées dans les échantillons de taille typique. Seulement les ensembles de données très grands (10^6 observations ou plus)est nécessaire d'obtenir des estimateurs acceptables et éviter l'inférence parce que le véritable comportement est pour des ensembles de données extrêmement grand.

Cette méthode est facile a implémenter, mais elle a le désavantage qu'il utilise seulement une partie des observations pour estimer le paramètre inconnu.

Le choix optimale de k

Le choix de $k(n)$ est d'une grande importance en pratique. Pour un échantillon de taille n donné, si k est très grand (autrement dit, si on prend beaucoup de valeurs pour l'estimation), un biais apparaît. En revanche, si k est trop petit la variance d'estimation devient trop importante. Il s'agit donc d'effectuer d'un compromis entre biais et variance. On appelle k_{opt} la valeur de k optimale. Il ya beaucoup des approches pour le choix de k parmi ces approches on a choisi l'approche de Hall et Welsh.

Approche de Hall et Welsh Hall et Welsh [19] ont montré que MSE de l'estimateur de Hill $\hat{\alpha}_n$ est minimal pour

$$k_{opt} \sim \left(\frac{p^{-3}(1-p)^2}{-2d^2c^{2p}} \right)^{1/(1-2p)} n^{-2P/(1-2P)} \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty, \quad (2.37)$$

si la fonction de distribution satisfait la condition de Hall 2.34. Cependant, ce résultat ne peut pas être utilisé directement pour déterminer le nombre optimal de statistiques d'ordre car les paramètres p , c et d sont inconnus. Hall et Welsh [19] ont construit un estimateur consistant pour k_{opt}

$$\hat{k}_{opt} = \left[\hat{\delta} n^{-2\hat{p}/(1-2\hat{p})} \right],$$

où

$$\hat{p} = \left| \log \left| \frac{(\hat{\alpha}_n^{-1}(t_1))^{-1} - (\hat{\alpha}_n^{-1}(t_3))^{-1}}{(\hat{\alpha}_n^{-1}(t_2))^{-1} - (\hat{\alpha}_n^{-1}(t_3))^{-1}} \right| / \log \frac{t_1}{t_2} \right|,$$

et

$$\hat{\delta} = \left| (-2\hat{p})^{-1/2} \left(\frac{t_1}{n} \right)^{\hat{p}} \frac{(\hat{\alpha}_n^{-1}(t_1))^{-1} - (\hat{\alpha}_n^{-1}(t_3))^{-1}}{(\hat{\alpha}_n^{-1}(t_3))} \right|^{2/(1-2\hat{p})},$$

dans le sens où $\frac{\hat{k}_{opt}}{k_{opt}} \xrightarrow{P} 1$, quand $n \longrightarrow \infty$ avec $t_i = [n^{\tau_i}]$ pour $0 < -2p(1 - \tau_1) < \tau_3 < -2p/(1 - 2p) < \tau_1 < \tau_2 < 1$; $[x]$ dénote ici le nombre entier le plus grand inférieur ou égale à x .

2.6.2 L'estimation de μ

Lorsque $1 < \alpha < 2$, $E(X) = \mu$, alors un estimateur naturel de μ est la moyenne empirique $\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ mais et la variance est infinie on peut pas appliquer la théorème de centrale limite et la normalité asymptotique de X n'ait pas pu être établie. Peng [48] a proposé un estimateur $\hat{\mu}_n$ basé sur TVE

$$\hat{\mu}_n = \hat{\mu}_n(k) = \hat{\mu}_n^{(1)} + \hat{\mu}_n^{(2)} + \hat{\mu}_n^{(3)}.$$

Où

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_n^{(1)} &= \hat{\mu}_n^{(1)}(k) = \frac{k}{n} X_{k,n} \frac{\hat{\alpha}_n^{(1)}}{\hat{\alpha}_n^{(1)} - 1}, \\ \hat{\mu}_n^{(2)} &= \hat{\mu}_n^{(2)}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n-k} X_{i,n}, \\ \hat{\mu}_n^{(3)} &= \hat{\mu}_n^{(3)}(k) = \frac{k}{n} X_{n-k+1,n} \frac{\hat{\alpha}_n^{(3)}}{\hat{\alpha}_n^{(3)} - 1}, \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n^{(1)} &= \hat{\alpha}_n^{(1)}(k) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log(-X_{i,n}) - \log(-X_{k,n}) \right)^{-1}, \\ \hat{\alpha}_n^{(3)} &= \hat{\alpha}_n^{(3)}(k) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k,n} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dans la proposition suivante on donne des resultats pour une description complète de la dérivation de $\hat{\mu}_n$.

Proposition 2.6.1 *Soit $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $1 < \alpha < 2$*

- $\mu_n^{(1)} \rightarrow 0$, $\mu_n^{(3)} \rightarrow 0$, $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n^{(1)} + \hat{\mu}_n^{(3)})/\sigma(k/n) \rightarrow \infty$, $\mu_n^{(2)} \xrightarrow{p} E(X)$, et la limite de $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n^{(2)} - E(X))/\sigma(k/n)$ n'existe pas avec

$$\sigma^2(s) = \int_s^{1-s} \int_s^{1-s} (u \wedge v - uv) dF^{\leftarrow}(u) dF^{\leftarrow}(v) \quad , 0 < s < 1.$$

- Si $-1 < \beta < 0$, $\hat{\alpha}_n^{(1)}$ est un estimateur consistant de α et $\hat{\alpha}_n^{(3)}$ est un estimateur consistant de α si $0 < \beta < 1$.
- Pour x est grand $(k/n)(X_{n,n-k+1})^{\hat{\alpha}_n^{(3)}} x^{-\hat{\alpha}_n^{(3)}}$ est un estimateur de $1 - F(x)$ et $(k/n)(-X_{n,k})^{\hat{\alpha}_n^{(1)}} x^{-\hat{\alpha}_n^{(1)}}$ est un estimateur de $F(-x)$.

Théorème 2.6.3 *(la normalité asymptotique)*

Supposer que FD G statisfait 2.33 avec $\gamma = 1/\alpha$ et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - F(t))/(1 - G(t)) - p}{A^*(t)} = r \in \mathbb{R},$$

où p est défini dans 1.21 $k = o(n^{-2p(\alpha-2p)})$, alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(k/n)}(\hat{\mu}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \delta^2(\alpha)),$$

avec

$$\delta^2(\alpha) = 1 + \left(\frac{(2-\alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{2(\alpha-1)^4} + \frac{2-\alpha}{\alpha-1} \right), \quad 1 < \alpha < 2.$$

Pour la démonstration voir [48]

2.6.3 L'estimation de σ

Par la théorie des valeurs extrêmes, l'estimateur du paramètre d'échelle σ est un estimateur consistant, et la propriété de normalité asymptotique est bien établie. Soit R et V les fonctions de quantile et de quantile de queue (voir la définition 2.6.2) respectivement de G . qui appartient à la classe de Hall 2.34 avec $\gamma = 1/\alpha$.

Combinaison les relations implique

$$\sigma \sim x \left\{ P(Z > x) \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)} \right\}^{1/\alpha} \quad \text{Quand } x \rightarrow \infty$$

On pose $s = P(Z > x)$ alors

$$\sigma \sim R(1-s) \left(s \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)} \right)^{1/\alpha}, \quad s \rightarrow 0.$$

La dernière relation implique

$$\sigma \sim R\left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n} \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)} \right)^{1/\alpha}, \quad n \rightarrow \infty.$$

En substituant α par $\hat{\alpha}_n$ et $R(1 - k/n)$ par $Z_{n-k,n}$, on obtenu la forme suivante

$$\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma}_n(k) = Z_{n-k,n} \left(\frac{k}{n} \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2)} \right)^{1/\hat{\alpha}_n}.$$

Pour établir la consistance et la normalité asymptotique de cet estimateur, on utilise la séquence (k_n) qui satisfait 2.37

Théorème 2.6.4 (la convergence et la normalité asymptotique)

soit X est v.a Lévy-stable et $Z = |X|$ avec la fonction de distribution G qui satisfait 2.34 et on suppose que $k = k_n$ est un séquence satisfait 2.37 alors :

- $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma$ comme $n \rightarrow \infty$.
- $\frac{\sqrt{k}}{\log(k/n)} (\log \hat{\sigma}_n - \log \sigma) \xrightarrow{d} N(\lambda/(1-p), \alpha^{-2})$ comme $n \rightarrow \infty$.

Où p et $\alpha = 1/\gamma$ sont les paramètre de modèle de Hall et λ est asymptotique à sign (d) $\gamma(p-1)/\sqrt{-2p}$.

Pour la démonstration voir [37].

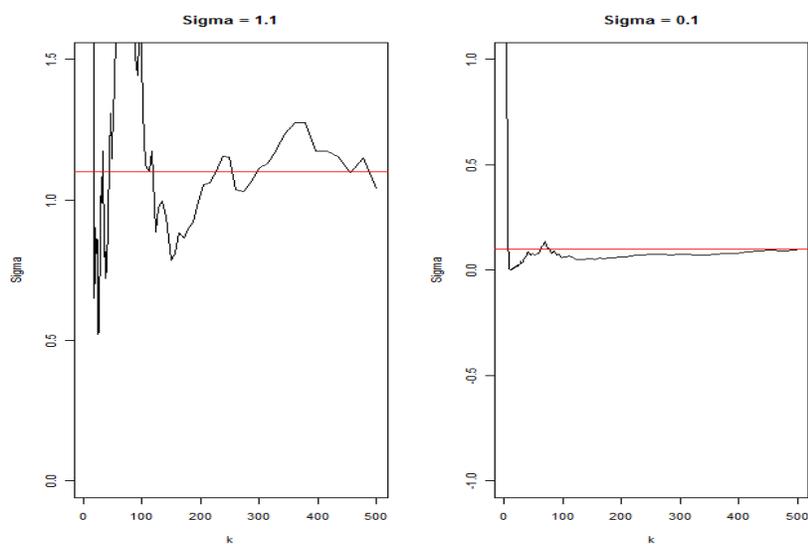


FIG. 2.2 – estimateur de paramètre d'échelle $\sigma = 1.1$ (à droite), $\sigma = 0.1$ (à gauche) avec $\alpha = 1.1$, $\beta = 0$, $\mu = 0$, la taille d'échantillon est 5000.

Chapitre 3

Modélisation des données financières

La modélisation fiable des données financières peut apparaître utile pour des applications au gestion différentielles des positions, la compréhension de la nature de risque pris sur ces positions, ou pour l'évaluation des options. Ce sujet avait déjà suscité la curiosité des mathématiciens, à commencer par Bachelier [2], dans sa thèse en 1900.

Les modèles gaussiens étaient les premier à appliquer, mais on l'a noté qu'ils décrivent insuffisamment le comportement des séries financières et ils ont été pris avec plus en plus la critique et par suite ont perdu leurs positions. Dans les années 60 Mandelbort [30] a proposé de remplacer le modèle gaussien par le modèle stable qui a examiné la variation des prix du coton (1816 – 1940) du blé (1883 – 1936), des actions de chemin de fer (1857 – 1936) et des taux de change (périodes assimilées), et il a trouvé un plus grand nombre des valeurs extrêmes dans les séries observées.

Les données financières sont souvent caractérisées par skwenees, kurtosis et queue lourde. En effet, on l'observé que dans divers marchés, le kurtosis des données financières dépasse 3 en plus le skweness est différente de zéro dans le cas normal kurtosis et skweness sont égaux à 3 et à 0 respectivement.

Dans ce chapitre on va analyser les données financières réelles comme les indices boursiers et les taux de changes, c'est très complexe à cause de l'influence de plusieurs facteurs. Beaucoup des séries ne présentent pas clairement une tendance, semblent hétéroscédastiques, elles ne sont pas stationnaires. Les données financières ont été obtenues à partir le site web : www.finance.yahoo.fr. Afin d'illustrer le comportement de la série financières, on fait un aperçu entier à l'aide du logiciel de R obtenu à travers le site web : <http://cran.r-projet.org>. On a voir si les lois des séries financières sont mieux modélisées par la loi stable non-gaussienne ou par la loi normale.

Définition 3.0.4 (*Rendement d'un actif financier*)

définit les séries des rendements d'un actif financières comme suit :

$$R_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

où P_t indique le cours financier à l'instant t .

3.1 Les indices boursiers

L'étude portera sur les rendements logarithmiques quotidiennes des indices qui sont des indicateurs des marchés financières. Dans ce travail on analyse les trois indices, les plus connus, le CAC 40, le DJIA et le NIKKEI.

L'étude concerne la période de Janvier 2002 a Décembre 2011, soit 2519 observation quotidienne pour DJIA, 2562 observations pour CAC 40 et 2451 observations pour NIKKEI.

Dans les tableaux 3.1 et 3.2 et la figure 3.1 on a présenté les statistique descriptives des rendements, ces statistiques sont le minimum et le maximum, le premier et le troisième quantile, la moyenne et la médiane, et on calcule le skewness qui caractérise l'asymétrie de la distribution et le kurtosis qui caractérise la forme du pic ou l'aplatissement relatif d'une distribution comparée à une distribution normale. Un kurtosis positif indique une distribution relativement pointue, tandis qu'un kurtosis négatif signale une distribution relativement aplatie.

indice	min	1er quantile	médiane	3ème quantile	max
CAC 40	-0.0947	-0.0074	0.0002	0.0076	0.1059
DJIA	-0.0820	-0.0053	0.0004	0.0058	0.1051
NIKKEI	-0.1211	-0.0079	0.0003	0.0088	10.6412

TAB. 3.1 – Quartiles empiriques des rendements des indices boursiers.

indice	moyenne	variance	skwenees	kurtosis
CAC 40	-0.0001	0.0002	0.0866	8.2237
DJIA	0.0001	0.0002	0.0418	10.9437
NIKKEI	-0.0001	0.0003	-0.4738	10.6413

TAB. 3.2 – Statistiques élémentaires des rendements des indices boursiers.

3.2 Taux de change

Le taux de change est le prix relatif d'une monnaie par rapport à une autre, dans ce partie on analyse le taux de change de dollar canadien, du yen et d'euro contre le dollar american de février 2002 à décembre 2011.

On calcule la série de rendements comme on l'a dit, les tableaux 3.3, 3.4 et la figure 3.5 présentent les statistiques descriptives de ces rendements.

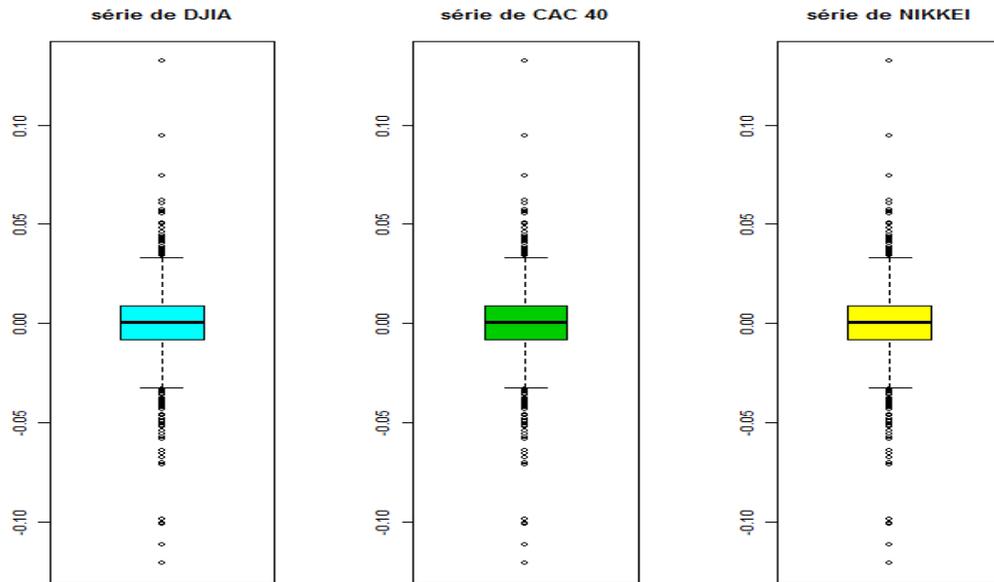


FIG. 3.1 – Boite à moustaches relative des indices

Monnaie	min	1er quantile	médiane	3ème quantile	max
Dollar Canadien	-0.0503	-0.0039	-0.0002	0.0033	0.0385
Euro	-0.0303	-0.0034	0.0001	0.0039	0.0461
Yen Japonais	-0.0304	-0.0038	0.0000	0.0039	0.0439

TAB. 3.3 – Quartiles empiriques des rendements des taux de change.

On note, dans les tableaux 3.2 et 3.4 que le skewness dans l'indice de NIKKEI et le monnaie de dollar canadien est inférieur à 0 signifie que la distribution de densité des rendements s'est écartée vers la gauche, on peut dire que la distribution des rendements a une asymétrie négative on note aussi que le kurtosis est supérieur à 3. La distribution de ces séries est donc plus pointue et des queues de distribution plus lourdes qu'une distribution normale.

3.3 Ajustement stable contre ajustement normal

Les QQ-plot dans les graphiques 3.2, 3.3, 3.4, 3.6, 3.7, et 3.8 montre un écart clair de la droite particulièrement aux extrémités, ainsi que les dernières colonnes des tableaux 3.2 et 3.4, indique que le modèle gaussien est inadéquat pour les ensembles des données et le tableau 3.5 confirme le rejet de la prétention normale.

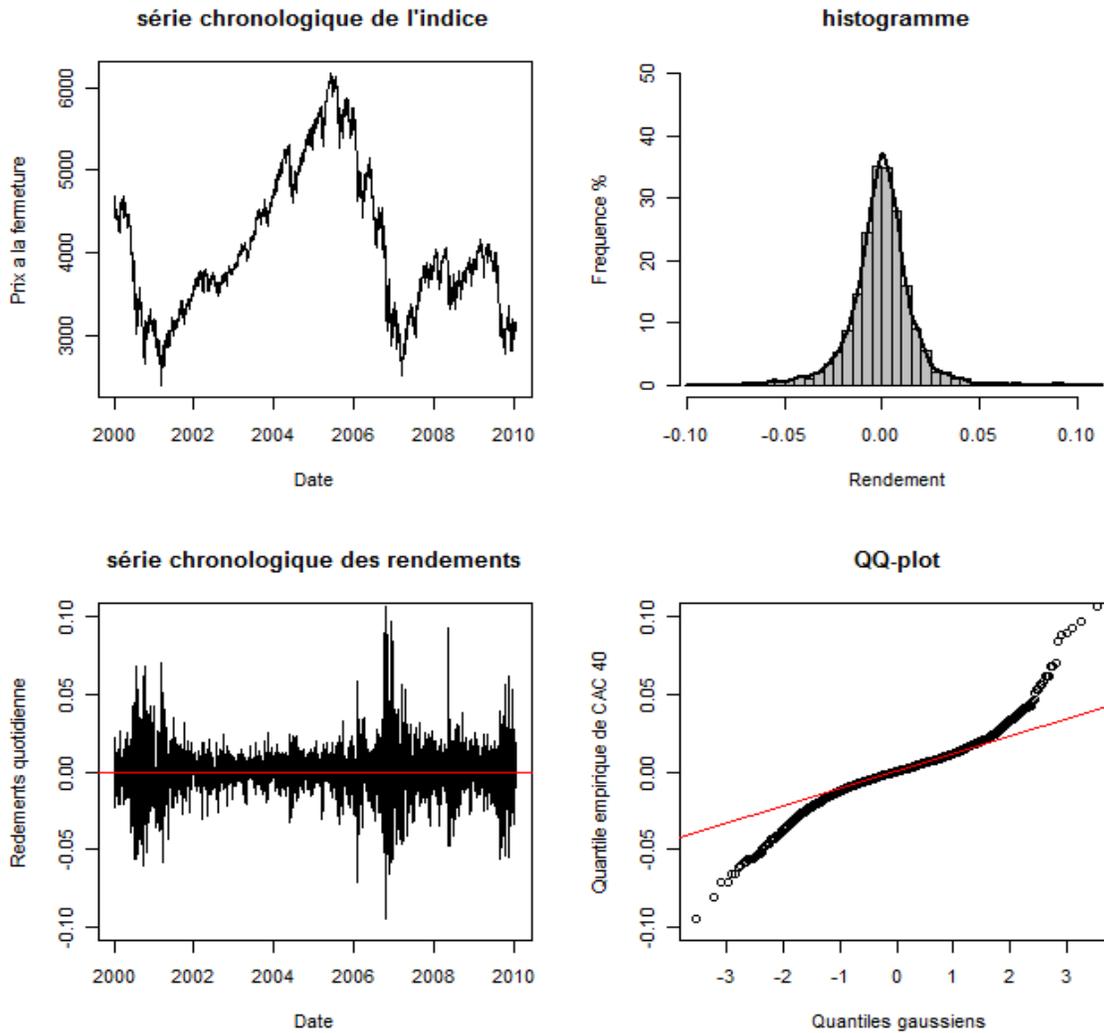


FIG. 3.2 – Graphes de série de CAC 40 de la période 02/01/2002 – 30/12/2011 (2562 observations)

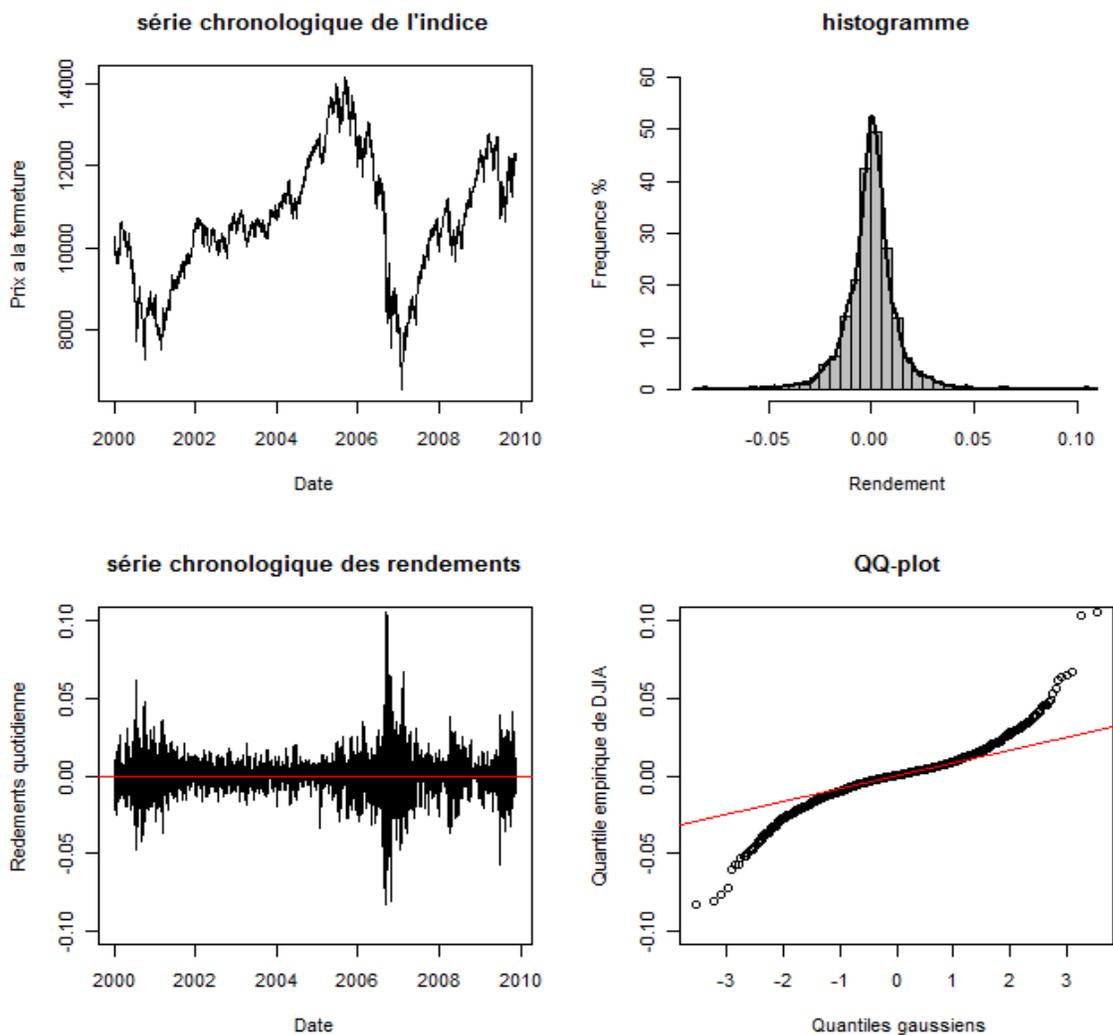


FIG. 3.3 – Graphes de série de DJIA de la période 02/01/2002 – 30/12/2011 (2519 observations).

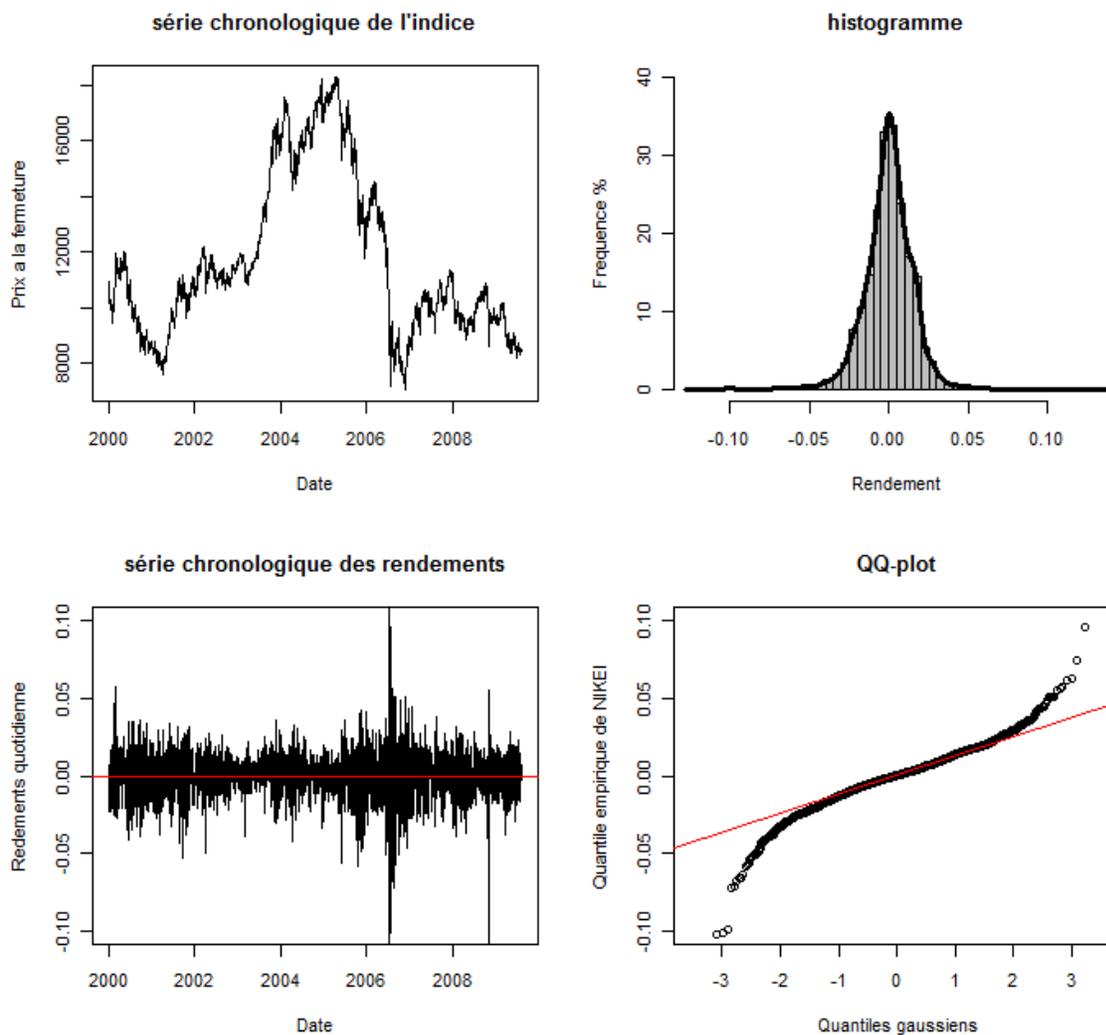


FIG. 3.4 – Graphes de série de NIKKEI de la période 02/01/2002 – 30/12/2011 (2451 observations).

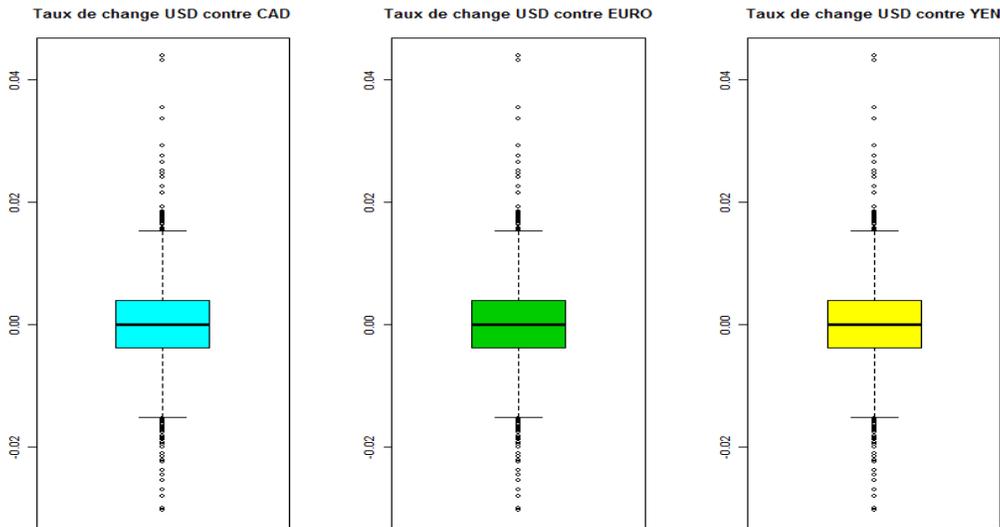


FIG. 3.5 – Boîte à moustaches relative des taux de change.

Monnaie	moyenne	variance	skwenees	kurtosis
Dollar Canadien	-0.00019	0.00004	-0.02417	8.01925
Euro	0.00016	0.00004	0.10867	5.44803
Yen Japonais	0.00022	0.00005	0.29606	6.40055

TAB. 3.4 – Statistiques élémentaires des rendements des taux de change.

Pour les séries financières (les indices et taux de change), on suppose que la loi de distribution est une loi stable dont nous estimons les paramètres par la méthode de McCulloch. On obtient les résultats suivants

Dans les tableaux 3.6 et 3.7 on note que le paramètre α est inférieure à 2. Il semble donc préférable d’approcher les lois des séries financières par des lois stables non gaussiennes dans l’hypothèse d’une distribution stable. on remarque que la valeur α est entre 1.48 et 1.75.

Dans la suite, on va dessiner les histogrammes des rendements, la courbe de loi stable, avec les paramètres estimés situés dans les tableaux 3.6 et 3.7 et la courbe de la loi gaussienne avec la moyenne empirique et la variance empirique des données.

Les histogrammes sont paraît symétrique. La distribution des données et plus pointue que la loi normale. Les graphiques 3.9, 3.10, 3.11, 3.13, 3.12 et 3.14 sont montrés que les queues de distribution des données est plus épaisses et plus longues que les queues de distribution de la loi normale.

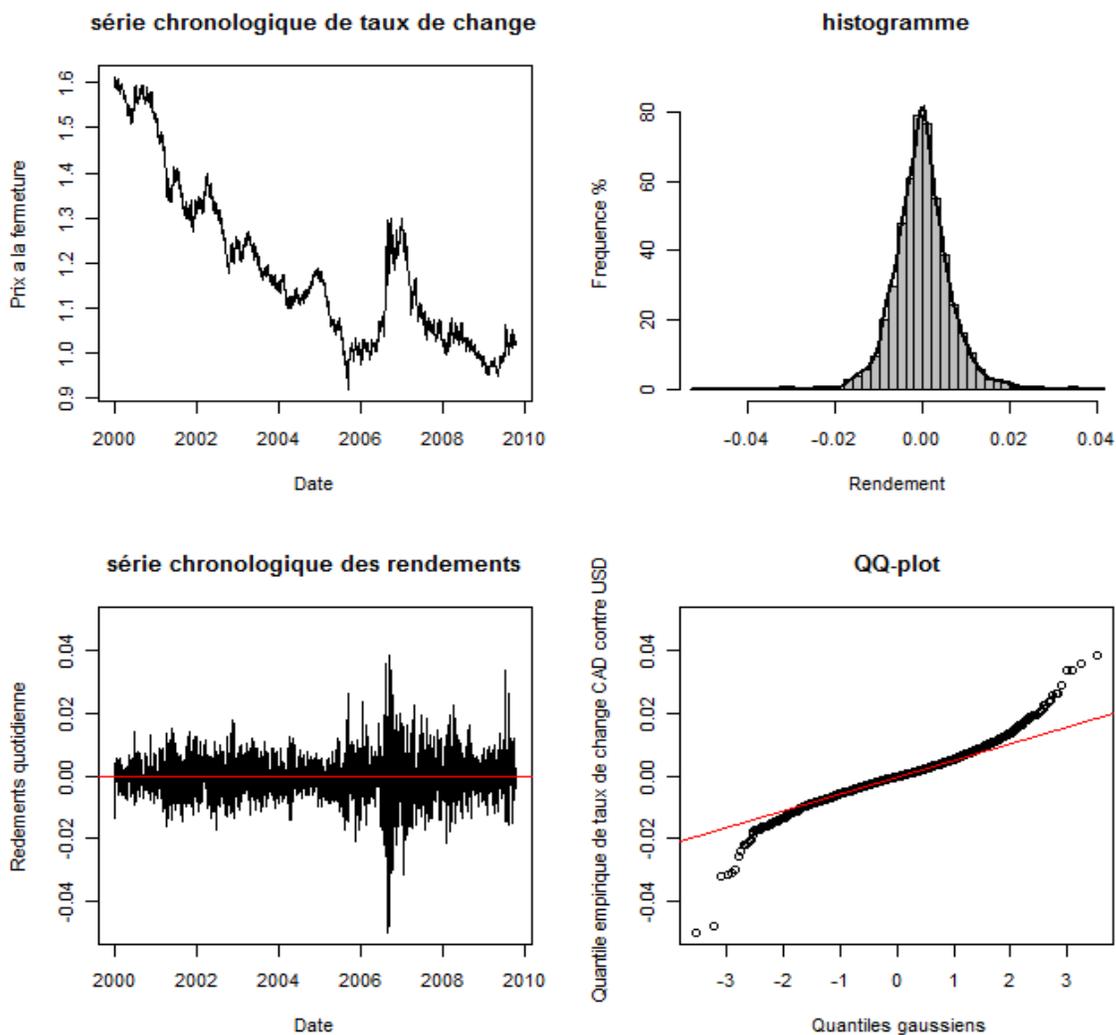


FIG. 3.6 – Graphes de taux de change CAD contre USD de la période 28/01/2002 – 30/12/2011 (2491 observations).

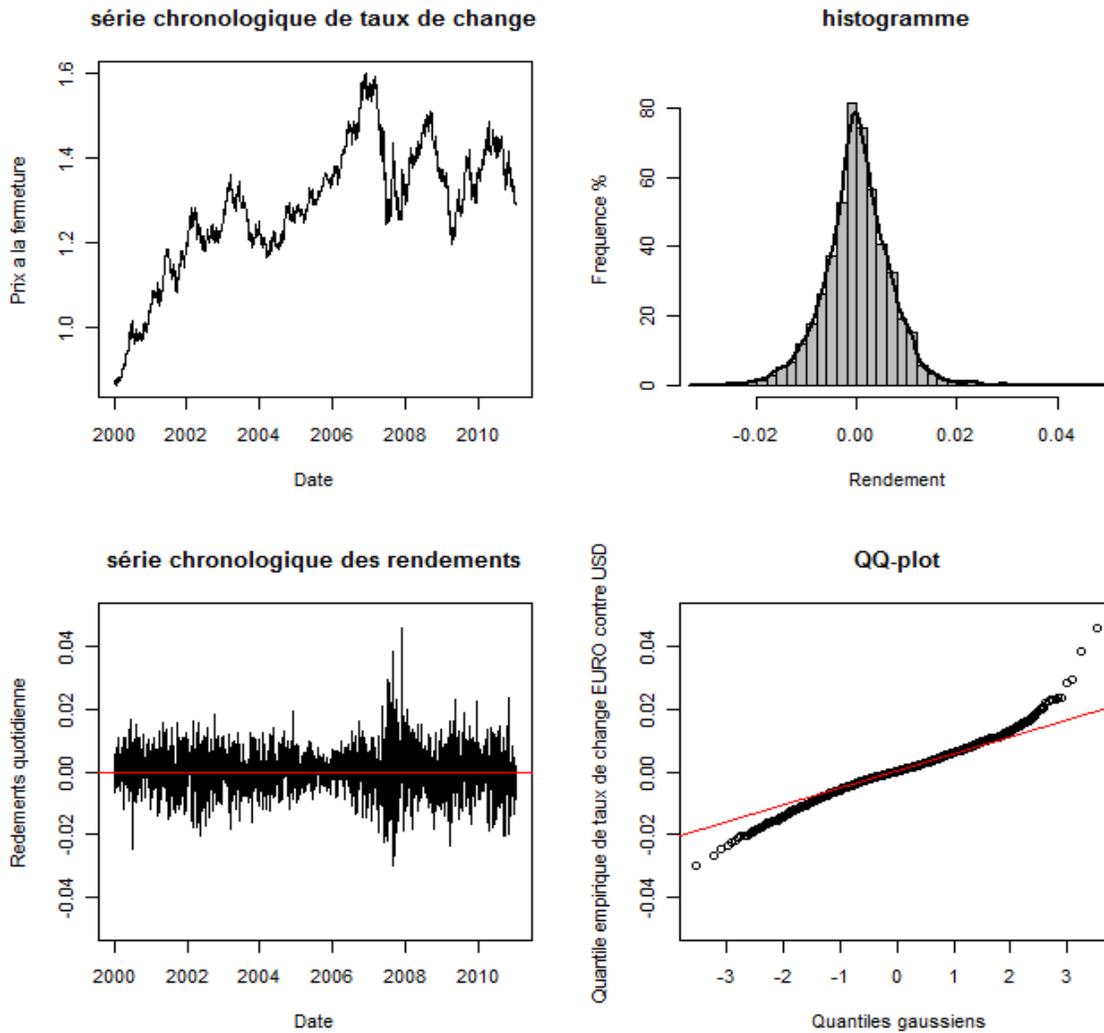


FIG. 3.7 – Graphes de taux de change EURO contre USD de la période 13/02/2002 – 30/12/2011 (2479 observations).

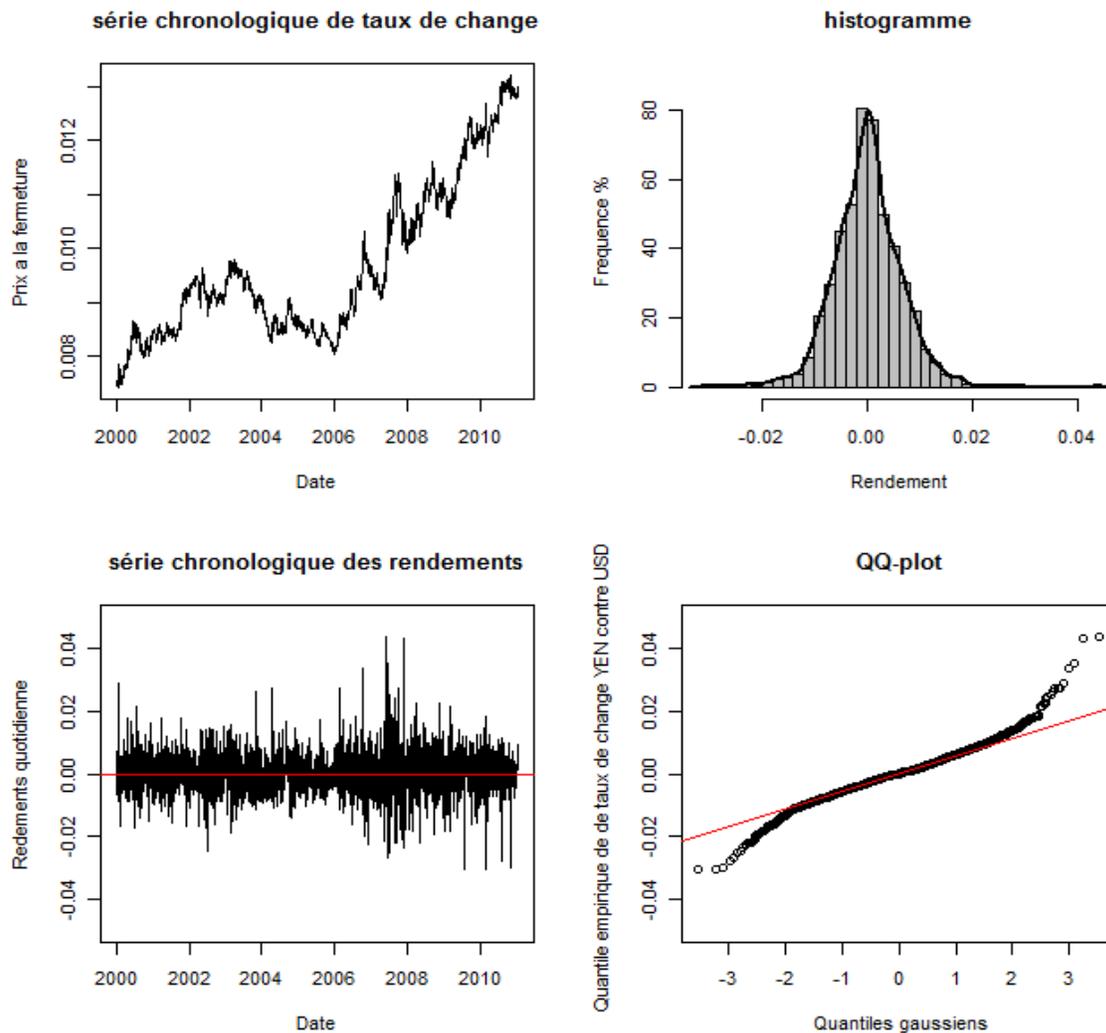


FIG. 3.8 – Graphes de taux de change YEN contre USD de la période 13/02/2002 – 30/12/2011 (2478 observations).

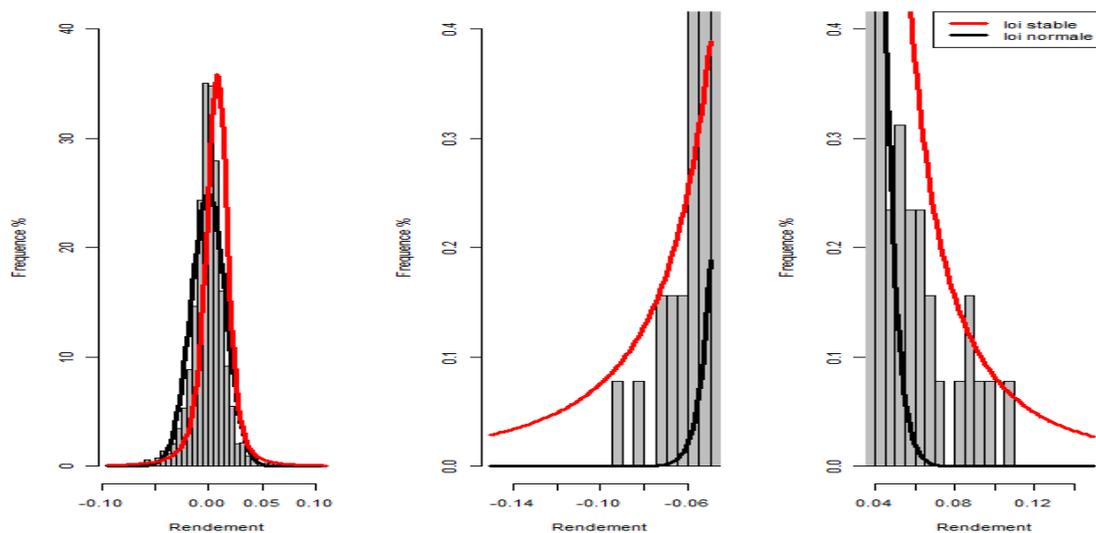


FIG. 3.9 – Rendements de l'indice CAC 40 : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).

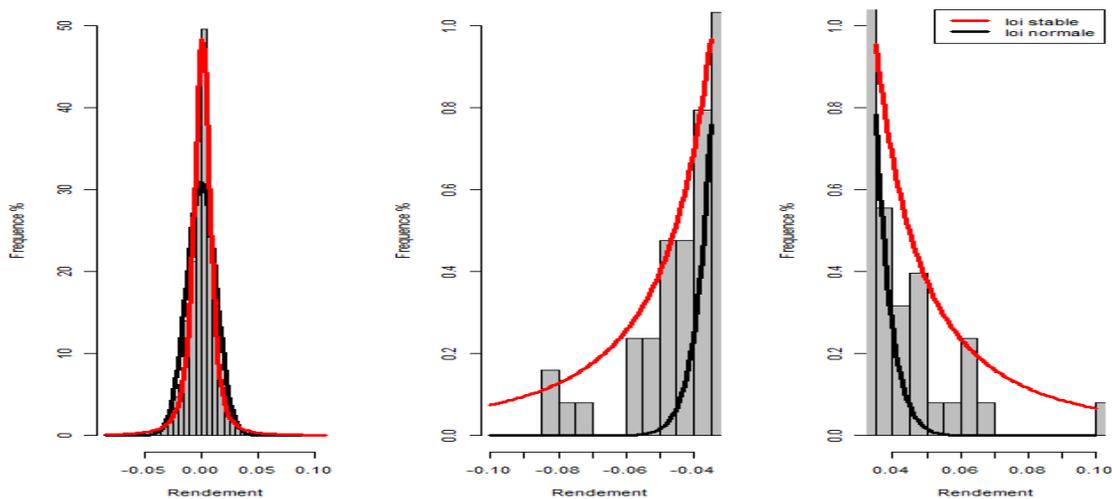


FIG. 3.10 – Rendements de l'indice DJIA : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).

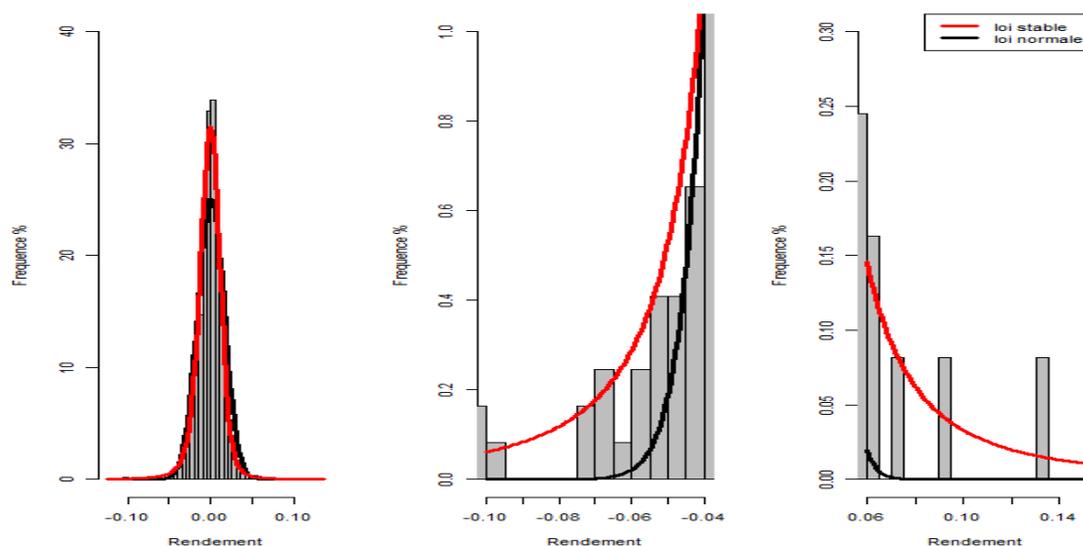


FIG. 3.11 – Rendements de l'indice NIKKEI : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).

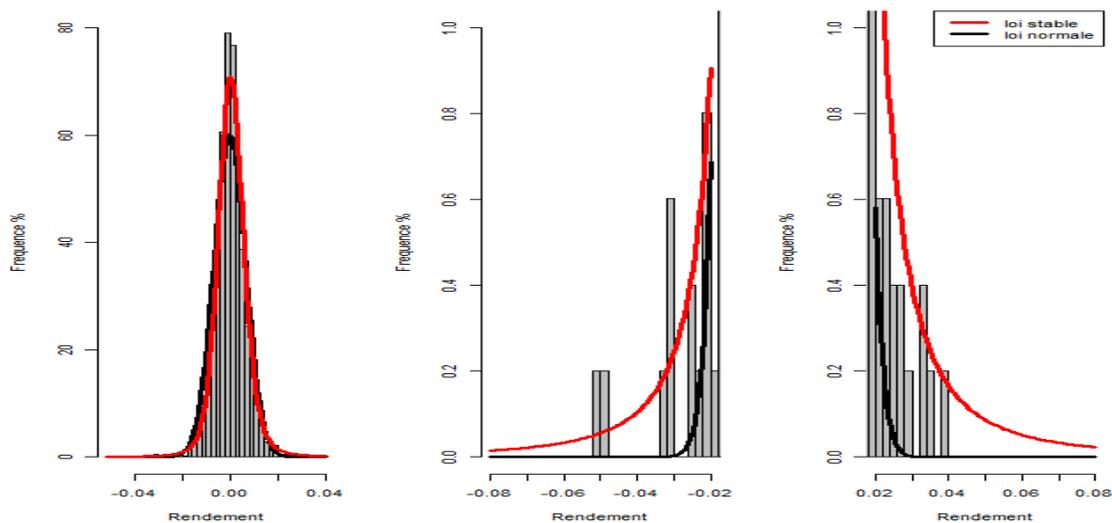


FIG. 3.12 – Rendements de taux de change USD contre CAD : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).

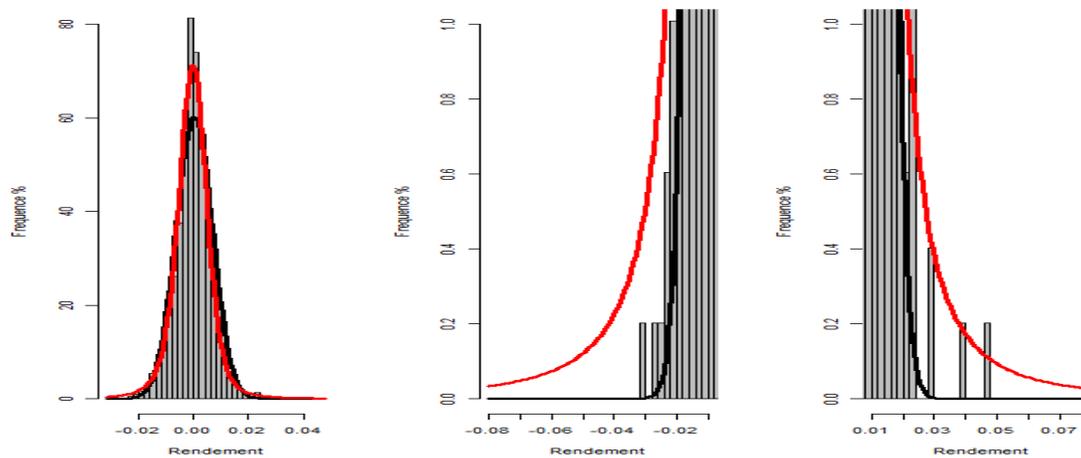


FIG. 3.13 – Rendements de taux de change USD contre EURO : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).

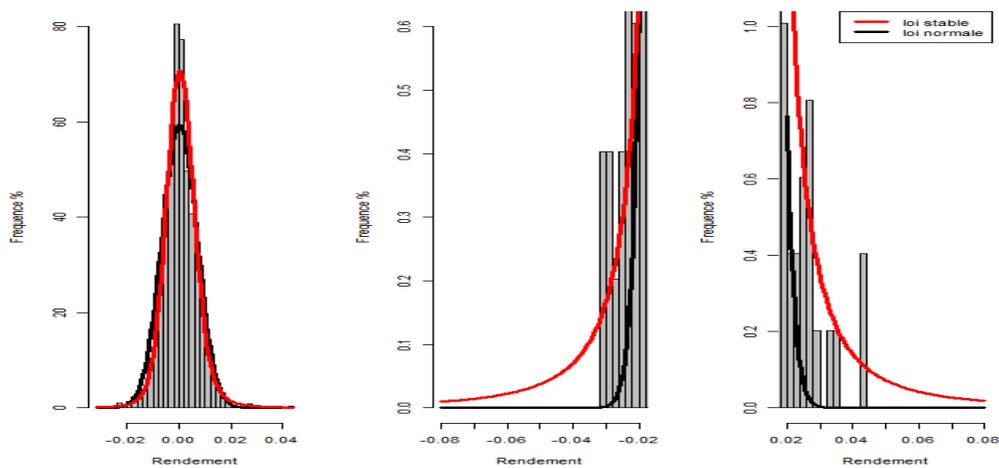


FIG. 3.14 – Rendements de taux de change USD contre YEN : distribution globale (à gauche), queues de distribution (à droite).

Indice	Statistique	Monnaie	Statistique
CAC 40	0.933	CAD	0.954
DJIA	0.911	Euro	0.979
NIKKEI	0.933	Yen	0.965

TAB. 3.5 – Statistiques du test de normalité de Shapiro-Wilk avec des p-valeurs $< 2.2 \cdot 10^{-16}$.

indice	α	β	σ	μ
CAC 40	1.476	-0.146	0.008	-0.007
DJIA	1.375	-0.069	0.006	0.001
NIKKEI	1.674	-0.246	0.009	-0.001

TAB. 3.6 – Paramètres des indices boursiers estimés par la méthode de McCulloch.

La loi normale représente mal la loi des données et que la loi stable non gaussienne apporte une nette amélioration. Les distributions empiriques des rendements sont plus conformes aux distributions stables qu'à la distribution normale.

Grandes fluctuations négligées par la distribution normale, elles sont alors améliorées par la distribution α -stable. Par conséquent, l'ajustement normal peut être dangereux pour l'investisseur dans le sens qu'il pourrait l'inciter à sous-estimer le risque de grandes pertes possibles.

Monnaie	α	β	σ	μ
Dollar Canadien	1.6856	0.1932	0.0037	0.0002
Euro	1.5869	-0.0911	0.0038	-0.0004
Yen Japonais	1.7411	0.2817	0.0039	0.0004

TAB. 3.7 – Paramètres des taux de change estimés par la méthode de McCulloch.

Conclusion

Les lois stables, généralisation de la loi gaussienne, constituent une classe très riche de distributions de probabilité, très intéressante pour la modélisation de nombreux phénomènes physiques et financiers qui présentent une grande variabilité. Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Dans le premier on a présenté les différentes définitions de la loi stable et ses diverses propriétés. Au deuxième on a passé en revue les différentes méthodes d'estimation des paramètres stables, avec discussion sur les méthodes classiques et celles basées sur la théorie des valeurs extrêmes. Le troisième et dernier est consacré à la modélisation par les lois stables des données financières (indices boursiers et taux change).

Dans ce mémoire on a noté que les lois stables possèdent des propriétés intéressantes :

1. Elles permettent de prendre en compte les queues de distribution épaisses observées en pratique sur la loi des rendements et intègrent les discontinuités observées sur le marché. Dans le cas où le paramètre de stabilité α est inférieur à 2, leur variance est infinie.
2. Elles sont stables par combinaison linéaire et sont les seules qui s'obtiennent comme limites des sommes linéairement normées de variables i.i.d.
3. Ce sont des distributions fractales du fait de leur propriété de stabilité par addition. En effet, la somme de deux variables α -stables i.i.d. est une variable stable de même exposant caractéristique α . Les variables stables possèdent ainsi des propriétés d'invariance d'échelle. (On peut généraliser cette proposition à n variables α -stables i.i.d)
4. Elles sont définies par seulement quatre paramètres, ce qui les rend maniables à utiliser en pratique.
5. Elles représentent une généralisation de la loi normale. Nous n'avons donc pas à réfuter les modèles existants basés sur la loi de Gauss mais seulement à les généraliser.

Les lois stables ont été généralisées aussi au cas multivarié où elles peuvent être utiles pour exprimer des dépendances très complexes. Les processus stables, qui sont une généralisation des processus gaussiens avec des seconds moments pas toujours existants, ont joué un rôle important en modélisation financière.

De façon générale, il existe assez bien de modèles différents pour les distributions des rendements. Certains pensent que les données financières ont des rendements assez

proches des distributions stables, d'autres, des distributions de Student (qui ne font pas partie de la classe des distributions stables). Il y a également la classe des modèles conditionnels hétéroscédastiques (ARCH-GARCH) et beaucoup d'auteurs pensent que ces modèles décrivent mieux les données que les modèles non conditionnels.

Bibliographie

- [1] Adler, R., Feldman, R. E., et Taqqu, M. (1998). A Practical Guide to Heavy Tails : Statistical Techniques and Applications. Birkhauser, Boston.
- [2] Bachelier, L. (1900). Théorie de la Spéculation. *Annales Scientifiques Ecole Normale Supérieure* III-17, 21-86. Translated in : Cootner, P.H.(Ed.) (1964). The Random Character of Stock Market Prices, pp. 17-78. MIT Press, Cambridge, Mass.
- [3] Bassi, F., Embrechts, P., et Kafetzaki, M. (1998). Risk management and quantile estimation. In R. E. F. R. Adler et M. Taqqu, editors, A practical guide to heavy tails, pages 111-130. Birkhauser, Boston.
- [4] Besag, J. Markov Chain Monte Carlo for Statistical Inference. Working Paper, Center for Statistics and the Social Sciences.
- [5] Bestavros, A., Crovella, M., et Taqqu, M. (1998). Heavy-tailed distributions in the world wide web. In R. E. F. R. Adler et M. Taqqu, editors, A practical guide to heavy tails, pages 3-25. Birkhauser, Boston.
- [6] Borak, Sz., Hardle, W. and Weron, R. (2004). Stable Distributions in Finance. In P. Cizek, W. Hardle, R. Weron (eds.) Statistical Tools for Finance and Insurance, Springer.
- [7] Brothers K. M., DuMouchel W. H. and Paulson A. S. (1983). Fractiles of the stable laws. Technical report, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY.
- [8] Chambers, J. M., Mallows, C. L., et Stuck, B. W. (1976). A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71(354), 340-344.
- [9] DuMouchel W.H. (1971). Stable Distributions in Statistical Inference. PhD. thesis, Dept. of Statistics, Yale University.
- [10] DuMouchel W.H. (1973). On the Asymptotic Normality of the Maximum Likelihood Estimate when Sampling from a Stable Distribution. *Annals of Statistics*, 1, 948-957.
- [11] Fama, E. F. (1965). the behavior of stock market price-*Journal of Business*, 38, 34-195.
- [12] Fama,E . F et Roll, R. (1968). Fama,E . F et Roll, R. (1968). Some properties of symmetric stable distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66 ,817-836

- [13] Fama, E. F. et Roll, R. (1971). Parameter estimates for symmetric stable distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66, 817-836
- [14] Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. II. John Wiley & Sons Inc., 2^{éd.}
- [15] Ferguson, T. and M. Klass. (1972). A representation theorem of independent increment processes without gaussian component, *Annals of Mathematical Statistics*, 43, pp. 1634–1643.
- [16] Feuerverger A. (1990). An efficient result for the empirical characteristic function in stationary time-series models. *The Canadian Journal of Statistics*, 18, 155-161.
- [17] Gauss, C. F. (1963). *Theory of Motion of the Heavenly Bodies*. Dover, New York.
- [18] Greenwood J.A., Landwehr J. M., Matalas N.C. and Wallis J.R. (1979). Probability weighted moments : definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resources Research*, 15, 1049-1054.
- [19] Hall, P. and Welsh, A.H. (1985). Adaptive Estimates of Parameters of Regular Variation. *Annals of Statistics* 13, 331-341.
- [20] Holt D. and Crow E. (1973). Tables and graphs of the stable probability functions, *J. Res. Nat. Bureau Standards, B. Math. Sci.*, 77b, 143-198.
- [21] Hosking J.R.M. (1990). L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *J.R. Statist. Soc. B*, 52, 105-124.
- [22] Janicki, A. et Weron, A. (1994). *Simulation and Chaotic Behavior of α -stable Stochastic Processes*. Marcel Dekker, New York.
- [23] Kanter M. (1975). Stable densities under change of scale and total variations inequality. *Annals of Probability* 3, 697-707.
- [24] Knight J.L., YU J. (2002). Empirical Characteristic Function in Time Series Estimation. *Econometric Theory*, 18, 691-721.
- [25] Koutrouvelis, I. A. (1980). Regression-type estimation of the parameters of stable laws. *Journal of the American Statistical Association*, 75 (372), 918-928.
- [26] Leitch R.A. and Paulson A.S. (1975). Estimation of stable law parameters : stock price behavior application. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 70, 690-697.
- [27] LePage, R. (1990). *Multidimensional infinitely divisible variables and processes. part i : Stable case*, Springer Lecture Notes in Math, 1391, pp. 153–163.
- [28] Lévy, P. (1925) *Calcul de Probabilités*. Gauthier-Villars, Paris.
- [29] Ma, X. et Nikias, C. L. (1995a). On blind channel identification for impulsive signal environments. In *Proc. of the Conference ICASSP'1995*.
- [30] Mandelbrot, B. (1963). the variation of certain speculative prices. *Journal of business*, 36, 394-419.
- [31] Marinelli C., Rachev S.T., Roll R. (2001). Subordinated exchange rate models : evidence for heavy tailed distributions and long-range dependence. *Stable non-Gaussian models in finance and econometrics. Math. Comp. Modelling*, 34, no. 9-11, 955-1001.

- [32] McCulloch J.H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics. Simulation and Computation*, 15, 1109-1136.
- [33] McCulloch, J.H. (1996). Financial Applications of Stable Distributions. In G.S. Maddala, C.R.Rao (eds.), *Handbook of Statistics*, Vol. 14, Elsevier, pp. 393-425.
- [34] McCulloch J.H. (1997). Measuring tail thickness in order to estimate the stable index α : a critique. *Business and Economic Statistics*, 15, 74-81.
- [35] McCulloch J. H. and Panton D.(1998). Tables of the maximally-skewed stable distributions. In R. Adler, R. Feldman, and M. Taqqu (Eds.), *A Practical Guide to Heavy Tails : Statistical Techniques for Analyzing Heavy Tailed Distributions*, 501-508.
- [36] Meraghni, D. and Necir, A. (2007). Estimating the Scale Parameter of a Lévy-Stable Distribution via the Extreme Value Approach. *Methodology and Computing in Applied Probability* 9, 557-572.
- [37] Meraghni, D., 2008. Modelling distribution tails. A Thesis Presented For The Degree of Doctor of Sciences, University of Mohamed Kheider, Biskra, Algeria.
- [38] Mittnik, S., Doganoglu, T. and Chenyao, D. (1999). Computing the Probability Density Function of the Stable Paretian Distribution. *Mathematical and Computer Modelling* 29, 235-240
- [39] Nikias, C. L. et Shao, M. (1995). *Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- [40] Nolan J. (1996). An algorithm for evaluating stable densities in Zolotarev's (M) parametrization. Preprint American University Washington.
- [41] Nolan J. (1996.) Numerical approximation of stable densities and distribution functions. Preprint American University Washington.
- [42] Nolan, J.P. (2001). Maximum Likelihood Estimation and Diagnostics for Stable Distributions. In O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S.Resnick (eds.), *Lévy Processes*, Birkhäuser, Boston.
- [43] Nolan, J. P. (2004). *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhauser, Boston.
- [44] Ojeda, D. (2001). Comparison of Stable Estimators. Ph.D. Thesis, Department of Mathematics and Statistics, American University.
- [45] Panton D. (1992). Cumulative distribution function values for symmetric standardized stable distributions. *Statist. Simula.* 21, 458-492.
- [46] Paulson A.S. and Delehanty T. A. (1993). Tables of the fractiles of the stable law. Technical Report, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY.
- [47] Paulson A.S., Holcomb E.W. and leitch R. (1975). The estimation of the parameters of the stable laws. *Biometrika*, 62, 163-170.
- [48] Peng, L. (2001). Estimating the Mean of a Heavy Tailed Distribution. *Statistics and Probability Letters* 52, 255-264.

- [49] Press S.J. (1972). *Applied Multivariate Analysis*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.
- [50] Press S.J. (1972). Estimation in univariate and multivariate stable distributions. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 67, 842-846.
- [51] Rachev, S. and Mittnik, S. (2000). *Stable Paretian Models in Finance*. Wiley.
- [52] Rachev, S. T. (2003). *Handbook of Heavy Tailed Distributions Finance*. Elsevier, amsterdam.
- [53] Rosinski. J. (1990). On series representations of infinitely divisible random vectors, *The Annals of Probability*, 18 (1990), pp. 405–430.
- [54] Royston P. (1992). Which measures of skewness and kurtosis are best ? *Statistics in Medicine*, 11, 333-343.
- [55] Samorodnitsky, G. et Taqqu, M. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, New York.
- [56] Shiriyayev A. N. (1984). *Probability*, volume 95 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag.
- [57] Vogel R.M. and Fennessey N.M. (1993). L-moment diagrams should replace product-moment diagrams. *Water Resources Research*, 29, 1745-1752.
- [58] Weron R. (1996). On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables. *Statistics and Probability Letters*, 28, 165-171.
- [59] Weron, R. (2001). Levy-stable distributions revisited : tail index > 2 does not exclude the Lévy-stable regime. *International Journal of Modern Physics C* 12(2), 209-223.
- [60] Worsdale G. (1975). Tables of cumulative distribution function for symmetric stable distributions. *Appl. Statistics*, 24, 123-131.
- [61] Zolotarev, V. M (1966). One representation of stable laws by integrals. In *Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability*, volume 6, pages 84-8. American Mathematical Society.
- [62] Zolotarev, V. M. (1986). One-dimensional stable distribution. In *Translations of Mathematical Monographs*, volume 65. American Mathematical Society.

Annexe : Abréviations et Notations

Abréviations ou Notations	Signification
CAD	Dollar canadien
$E(X)$	l'espérance de X
F	fonction de distribution de la variable aléatoire X
\bar{F}	complémentaire de la fonction de répartition
F^-	l'inverse généralisé de F
FC	la fonction caractéristique
FD	la fonction de distribution
1_A	fonction indicatrice de l'ensemble A
i.e	en d'autres termes
i.i.d	indépendantes et identiquement distribuées
$M_{p,r,s}$	moments pondérés pour une variable aléatoire X
MV	maximum de vraisemblance
n	nombre entier plus grand que 1
\mathbb{N}	nombre naturelle
$N(0, 1)$	loi normale standard, ou distribution gaussienne standard
$N(\mu, \sigma^2)$	distribution de la loi normale avec moyenne μ et variance σ^2
PDF	densité de probabilité
PWM	Probability-Weighted Moment
Q	fonction des quantiles
Q_n	fonction des quantiles empirique
\mathbb{R}	ensemble des nombres réelles
resp	respectivement
$sign(x)$	1 si $x > 0$, 0 si $x = 0$, -1 si $x < 0$
$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$	Loi stable de paramètre α, β, σ et μ
$S_\alpha S$	loi stable symétrique
TF	transformée de Fourier
TVE	théorie des valeurs extrêmes
USD	Dollar américain

v.a	variable aléatoire
v.a.r	variable aléatoire réelle
X	v.a définie sur
(X_1, X_2, \dots, X_n)	échantillon de taille n de X
$(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$	statistiques d'ordre associée à (X_1, X_2, \dots, X_n)
$X_{i,n}$	La $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre ($i = 1, \dots, n$)
x_p	quantile d'ordre p
$\stackrel{d}{=}$	égalité en distribution
\xrightarrow{d}	convergence en distribution
\xrightarrow{P}	convergence en probabilité
$\xrightarrow{p.s}$	convergence presque.sûre
\wedge	$a \wedge b = \min(a, b)$
$ \cdot $	valeur absolue
$X^{<k>} = X ^k \text{sign}(X)$	puissance signée de X
$f(x)$	fonction de densité de X
$\varphi(x)$	Fonction caractéristique de X

Résumé

Le modèle gaussien est souvent utilisé dans de nombreuses applications. Cependant l'hypothèse de normalité est réductrice. Par exemple, les données peuvent présenter des propriétés d'asymétrie et/ou des queues lourdes. La distribution Lévy-stable, introduite par Paul Lévy dans les années 20, est proposée par Mandelbrot puis Fama comme alternative possible, dans les années 60. Cette loi est caractérisée par quatre paramètres dont l'estimation est faite selon plusieurs méthodes.

Dans ce mémoire, on applique la méthode de McCulloch pour modéliser des séries financières réelles, couvrant les rendements de quelques indices boursiers les plus populaires et les taux de change du Dollar américain contre trois devise parmi les plus connues.

Mots Clés : Données financières ; Estimation des paramètres ; Loi Lévy-stable ; Modélisation ; Simulation.

Abstract

The Gaussian model is often used in many applications. However the assumption of normality is reducing. For example, the data can present properties of asymmetry and/or heavy tails. The Lévy-stable distribution, introduced by Paul Lévy into the Twenties, is proposed by Mandelbrot then Fama like possible alternative, in the Sixties. This law is characterized by four parameters whose estimation is made according to several methods.

In this dissertation, one applies the method of McCulloch to model real financial series, covering the outputs of some of the most popular market indices and foreign exchange rates of the American dollar against three currency among the most known.

Key words : Estimate of the parameters ; Financial data ; Levy-stable law ; Modeling ; Simulation.