

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	vi
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE 1. MODÈLES STATISTIQUES MULTIVARIÉS ET COPULES	4
1.1. Définitions et propriétés des copules multivariées	5
1.1.1. Fonction de répartition multivariée et copules multivariées	5
1.1.2. Théorème de Sklar	8
1.1.3. Propriétés des copules	10
1.1.4. La densité de la copule	12
1.2. Les copules usuelles	13
1.2.1. Copule d'indépendance	13
1.2.2. Copules gaussiennes	13
1.2.3. Copules de Student	15
1.2.4. Copules archimédiennes	17
1.2.5. Copules de valeurs extrêmes	23
1.2.6. Copules empiriques	26
1.3. Les mesures de dépendance et les copules	27
1.3.1. Les mesures de concordance	27
1.3.2. Autres concepts de dépendance	35
1.3.3. Dépendance des queues	37
CHAPITRE 2. DISTRIBUTIONS DE PARETO MULTIVARIÉES	41
2.1. La distribution de Pareto univariée	41
2.1.1. Loi de Pareto standard	42
2.1.2. Loi de Pareto de type I	42
2.1.3. Loi de Pareto de type II	42
2.1.4. Loi de Pareto de type III	43
2.1.5. Loi de Pareto de type IV	43
2.1.6. Loi de Feller-Pareto	46

2.1.7.	Loi de Pareto généralisée	47
2.2.	La distribution de Pareto bivariée	48
2.2.1.	Loi de Pareto bivariée de type I	48
2.2.2.	Loi de Pareto bivariée de type II	50
2.2.3.	Loi de Pareto bivariée de type IV	51
2.3.	La distribution de Pareto multivariée	53
2.3.1.	Loi de Pareto multivariée de type I	53
2.3.2.	Loi de Pareto multivariée de type II	53
2.3.3.	Loi de Pareto multivariée de type III	55
2.3.4.	Loi de Pareto multivariée de type IV	56
2.4.	Quelques propriétés de la distribution de Pareto multivariée générale	57
2.4.1.	Propriétés du mélange des distributions de Pareto multivariées	58
2.4.2.	Valeurs extrêmes des distributions de Pareto multivariées .	59
2.4.3.	Caractérisation de la loi de $MP^{(d)}(IV)$ homogène	60
2.4.4.	Propriété de troncature de la distribution de $MP^{(d)}(II)$. .	61
2.4.5.	La structure de fragilité et la structure archimédienne de la distribution de $MP^{(d)}$	63
2.5.	Estimation des paramètres de loi de Pareto bivariée	69
2.5.1.	Méthode du Maximum de Vraisemblance (MV)	70
2.5.2.	Méthode des Moments	71
2.5.3.	Méthodes basées sur les copules	72
CHAPITRE 3. SIMULATION		76
3.1.	Simulation des données de loi $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$	76
3.2.	Simulation des données de loi $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$ à partir la copule de Clayton	77
3.3.	Résultats de la simulation	82
CONCLUSION GÉNÉRALE		91
ANNEXES		93
A.	Démonstrations de quelques propriétés	93
B.	Logiciels statistiques	95
C.	Abréviations et notations	96
BIBLIOGRAPHIE		99

Introduction générale

En 1897, Vilfredo Pareto (1848-1923), un suisse d'origine italienne professeur d'économie, a formulé une loi empirique qui porte son nom. La loi de Pareto était basée sur son étude de la distribution des revenus dans plusieurs pays européens au cours du XIXe siècle. Les résultats mathématiques de l'étude ont été résumés comme suit

$$N = Ax^{-\alpha},$$

où N est le nombre de personnes ayant des revenus égaux ou supérieur à un niveau de revenu x , A et α sont des paramètres où α est parfois appelé la constante de Pareto ou le paramètre de forme. Pigou (1948) a résumé les résultats de Pareto dans la déclaration suivante

Il est montré que, si x signifie un revenu donné et N est le nombre de personnes ayant des revenus supérieurs à x , et si une courbe est tirée, dont les coordonnées sont les logarithmes des x et les abscisses sont les logarithmes de N , cette courbe, pour tous les pays examinés, est approximativement une droite.

La distribution de Pareto a eu plusieurs versions depuis cette forme et une variété d'utilisations. Johnson et Kotz ont identifié plusieurs domaines d'application de cette distribution, y compris la distribution de la population des villes, distribution des entreprises par taille en nombre d'employés, entreprises par taille de revenu annuel, distribution des centraux téléphoniques privés par taille en nombre de postes téléphoniques installés, distributions des ordinateurs par taille de prix, par capacité de la mémoire, fluctuation du cours des actions, et l'emplacement du champ de pétrole, le temps de défaut de composantes d'équipement, les temps de service de maintenance et les erreurs dans les communications circuits. En somme, la distribution de Pareto se révèle être une bonne distribution pour d'autres recherches.

Compte tenu de la grande popularité des distributions de Pareto univariées, il est tout naturel de demander une extension multivariée, d'où notre but dans ce mémoire, est l'étude de ce cas.

Les modèles statistiques multivariés sont importants sur le plan théorique et appliquée. Leurs utilisations dans l'analyse multivariée qui ont été appliquées à une variété de disciplines sont nombreuses. L'analyse des données provenant d'enquêtes complexes catégorielle a été largement utilisée, les distributions normales multivariées ont probablement été étudiées plus que toute autre distribution multivariée. Cependant, les distributions multivariées non normales ne sont pas moins importantes, car elles peuvent être nécessaires dans les situations où une distribution normale multivariée n'est probablement pas le modèle approprié à utiliser.

Il est bien connu que les distributions multivariées avec des marginales données ne sont pas uniques. Certaines méthodes de construction des distributions bivariées et multivariées sont la généralisation du système de Pearson multivariée, les distributions de Sarmanov et Linnik multivariées, systèmes de Fréchet, Plackett et de Mardia et les distributions multivariées de Farlie-Gumbel-Morgenstern, un outil très puissant permet aussi de construire des distributions multivariées possédant des lois marginales arbitraires est les copules. Pour plus de détails sur ces méthodes de construction et d'autres distributions bivariées et multivariées, voir Kotz Balakrishnan et Johnson, (2000), Hutchinson et Lai (1990), Joe (1997), Arnold Castillo et Sarabia (1999), Nelsen (2006).

En effet, la notion de dépendance, injustement négligé dans la science actuarielle classique, a reçu son attention méritée dans les dernières années, conduisant ainsi à de nombreux documents touchant à divers aspects de la théorie de la distribution multivariée.

Les distributions de Pareto multivariées sont des modèles populaires dans de nombreux domaines appliqués. Elles sont très versatiles et une variété d'incertitudes peut être utilement modélisée par ces lois. Nous mentionnons : la modélisation du rayonnement cancérogène (Rachev et al., 1995), mesures de performance pour quelques systèmes généraux (Nadarajah et Kotz, 2006), la fiabilité (Hanagal, 1997 ; Navarro et al., 2008), la modélisation de la sécheresse (Nadarajah, 2009), la modélisation des risques dépendants à queue lourde avec une probabilité non nulle de perte simultanée (Asimit et al., 2010) et inférence et applications financières (Papadakis et Tsionas, 2010).

Par conséquent, nous nous sommes intéressés à la notion de dépendance, dont nous présentons un modèle de dépendance potentiellement adapté à de telles modélisations : les copules. La notion de copule apparue au début du siècle par le biais de Fréchet puis reprise en 1959 par Sklar s'est vue grandement popularisée dans différents domaines sous la poussée de champs d'application tels que la finance ou l'assurance, et dont l'objet central est l'étude de lois Pareto multivariées et l'estimation de ses paramètres on appliquant quelques techniques d'estimation.

Dans ce mémoire, plusieurs propriétés des distributions de Pareto multivariées générales sont étudiées. Il est constaté que les distributions de Pareto multivariée ont de nombreuses propriétés de mélange. Elles sont mélangées soit par des variables de loi géométriques, Weibull, ou de loi exponentielle. Les valeurs extrêmes de lois Pareto multivariées sont aussi étudiées, dont on a montré que le minimum construit d'échantillon finie des minima d'une n copies indépendantes d'un vecteur aléatoire de loi $MP^{(d)}(I)$ est de loi $MP^{(d)}(I)$ et la même chose pour les lois de $MP^{(d)}(II)$, et de $MP^{(d)}(IV)$. De plus, un théorème de caractérisation pour la distribution de $MP^{(d)}(IV)$ homogène via la pondération des minima des coordonnées ordonnées

d'un v.a. de cette distribution est développé. En outre, la famille de $MP^{(d)}(II)$ est démontrée qu'elle a la propriété de troncature. Aussi, la structure fragile et archimédienne de la distribution de Pareto multivariée générale a été étudiée basant sur une méthode de construction des distributions multivariées.

La discussion sur les méthodes d'inférence pour les différentes formes des distributions de Pareto multivariées est limitée. Le premier travail de Mardia (1962) sur un type de ces lois qui est la distribution de premier type a été suivi par des procédures d'estimation par Arnold (1983), Tajvidi et Hanagal (1996), Yeh (2000), Chako (2007) pour quelques types, d'où, nous finissons notre travail par une estimation d'un modèle de loi Pareto bivariée, dont en appliquant deux méthodes d'estimation classiques : moments et maximum de vraisemblance, nous envisageons des nouvelles méthodes basées sur les copules.

Ce mémoire s'organise en trois chapitres.

Le premier chapitre s'attachera à mettre en avant l'intérêt de la prise en compte de dépendance entre les variables aléatoires. Notamment cette partie s'attachera à présenter la notion de copule. Nous présentons dans ce chapitre, des définitions et des propriétés importantes de copules pour mener à comprendre bien cette notion, quelques modèles de copules bivariés et multivariés et les mesures de dépendance comme le tau de Kendall, le rho de Spearman et les mesures de dépendance des queues.

Le deuxième chapitre est consacré au modèle des lois Pareto multivariées dont nous étudions dans un premier temps les propriétés théoriques de quelques versions de ces lois dans le cas univarié et bivarié et, dans un second temps, celles des lois Pareto multivariées, puis nous présentons plusieurs méthodes d'estimation des paramètres de cette loi dans le cas bivarié.

Le troisième chapitre introduit d'abord les méthodes de simulation d'une distribution de Pareto bivariée. Il expose également une étude numérique pour comparer entre les différentes techniques d'estimation proposées dans le chapitre précédent, c'est-à-dire, on teste la performance des estimateurs sur des échantillons de tailles différentes et de différentes valeurs des paramètres.

Chapitre 1

MODÈLES STATISTIQUES MULTIVARIÉS ET COPULES

Si les distributions de probabilité sur \mathbb{R} sont toutes définies sans ambiguïté, il n'en n'est pas de même pour les distributions multivariées. En effet, mis à part le cas des lois normales multivariées, qui sont clairement codifiées, il n'existe pas de caractérisation unique des autres lois multivariées. En général, les auteurs s'accordent sur le point suivant : étant donné une famille de loi " X " définie sur \mathbb{R} , une loi multivariée est qualifiée de loi multivariée de type X si ses lois marginales (univariées) sont toutes du type X . Le problème est alors qu'il existe un très grand nombre de modèles statistiques vérifiant cette condition. Ces différents modèles peuvent cependant tous être obtenus à partir des lois marginales et de copules.

L'introduction des copules, en vue d'applications statistiques, est un phénomène relativement récent qui date de la fin des années 50. Il y a encore trente ans, il était difficile de trouver des traces de la notion de copule dans la littérature statistique. Cette fonction était parfois mentionnée sous d'autres appellations comme celles, notamment, de fonction de dépendance ou la forme standard. Alors, de quoi s'agit-il ?

En statistique mathématique, et sous d'autres appellations, la notion de "copule" apparaît, entre autres, dans les travaux fondateurs de Fréchet (1951), Féron (1956) et Dall'Aglio (1956). Pour la première fois, le mot "copule" a été utilisé, dans un sens mathématique, par Sklar (1959) dans la théorie des lois multivariées.

Les copules sont des fonctions qui lient les fonctions de répartition multivariées de lois de probabilité dans \mathbb{R}^d , pour $d \geq 2$, aux fonctions de répartition marginales. Alternativement, les copules sont des fonctions de distribution multivariées (théorème de Sklar) dont les marginales unidimensionnelles sont uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$.

Le théorème de Sklar montre la manière avec laquelle la fonction copule associe la loi de répartition jointe aux lois marginales univariées. Ceci est un premier atout pour les statisticiens, puisque les copules leur autorisent une sélection plus étendue des fonctions de répartition jointes et ce indépendamment des différentes lois marginales considérées. De plus, les copules permettent de résumer la structure de dépendance interne d'un vecteur aléatoire.

Par ailleurs, l'approche par les copules a beaucoup contribué dans la modélisation statistique multivariée. En effet, la théorie des copules permet une décomposition de la loi multidimensionnelle en ses marginales univariées et en une fonction de dépendance, rendant possible des extensions naturelles de certains résultats obte-

nus dans le cas univarié au cas multivarié.

1.1 Définitions et propriétés des copules multivariées

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques définitions de base qui nous permettent de mieux décrire le concept de copule. Nous présentons les propriétés les plus importantes de la fonction de copule et son rôle dans la construction des modèles statistiques multivariés, ainsi dans l'étude de l'indépendance des variables aléatoires.

1.1.1 Fonction de répartition multivariée et copules multivariées

Soit le vecteur $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \bar{\mathbb{R}}^d$. Soient $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \leq \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d)$ (resp. $\mathbf{a} < \mathbf{b}$) si $a_k \leq b_k$ (resp. $a_k < b_k$) pour tout $k = 1, \dots, d$. Un pavé de dimension d noté par $B := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ est de la forme

$$B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d], \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{b},$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bar{\mathbb{R}}^d$. Les sommets d'un pavé B sont les points de l'ensemble $\{\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d) : c_i \in [a_i, b_i], 1 \leq i \leq d\}$.

Définition 1.1. (*Fonction de répartition multivariée*)

Une fonction $F : [-\infty, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction de répartition d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$, si F vérifie les conditions suivantes

- (i) F est continue à droite relativement à chaque composante ;
- (ii) pour tout (a_1, \dots, a_d) et (b_1, \dots, b_d) dans $\bar{\mathbb{R}}^d$ tels que $a_i \leq b_i, i = 1, \dots, d$

$$\Delta_{a_d}^{b_d} \Delta_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} F(\mathbf{x}) \geq 0,$$

$$\text{où } \Delta_{a_k}^{b_k} F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_d) - F(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_d);$$

- (iii) $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, -\infty, x_{k+1}, \dots, x_d) = 0$ pour $i = 1, \dots, d$,

$$\text{et } F(\infty, \dots, \infty) = 1.$$

Nous pouvons dériver la fonction de répartition marginale de chaque composante du vecteur aléatoire à partir de la fonction de répartition d -dimensionnelle. Ceci est illustré dans la définition suivante.

Définition 1.2. (*Fonction de répartition marginale*)

La $k^{\text{ème}}$ fonction de répartition marginale d'une fonction de répartition F multivariée est une fonction $F_k : [-\infty, \infty] \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$F_k(x_k) = F(\infty, \dots, \infty, \underbrace{x_k}_{k^{\text{ème}}\text{-composante}}, \infty, \dots, \infty), \quad \forall k = 1, \dots, d.$$

Définition 1.3. (*Volume d'un pavé*)

Soient S_1, \dots, S_d des parties mesurables non vides de $\bar{\mathbb{R}}$ et H une fonction d -dimensionnelle dont le domaine de définition est $\text{Dom } H = S_1 \times \dots \times S_d$. Soit $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ un d -pavé dont les sommets sont dans $\text{Dom } H$. Le H -volume de B est alors défini par

$$V_H(B) := \sum_{\mathbf{c} \in B} \text{sgn}(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}),$$

où la somme s'effectue sur tous les sommets \mathbf{c} de B et le $\text{sgn}(\mathbf{c})$ est donné par

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & c_k = a_k & \text{pour un nombre pair de } k, \\ -1 & c_k = a_k & \text{pour un nombre impair de } k. \end{cases}$$

Si nous définissons les d -différences d'ordre 1 de H par

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_d) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_d),$$

alors, le H -volume du pavé B pourra s'exprimer en fonction des d -différences de H sur B comme suit

$$V_H(B) = \Delta_a^b H(\mathbf{t}) = \Delta_{a_d}^{b_d} \Delta_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} H(\mathbf{t}).$$

Définition 1.4. (*Fonction d -croissante*)

Une fonction réelle d -dimensionnelle H est dite d -croissante, si $V_H(B) \geq 0$ pour tout d -pavé B dont les sommets sont dans $\text{Dom } H$.

Ainsi, toute fonction de répartition multivariée est d -croissante. En particulier, les marginales sont non décroissantes.

Définition 1.5. (*Fonction attachée*)

Soit $H : S_1, \dots, S_d \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que, pour tout k , chacun des sous-ensembles S_k ayant le plus petit élément $a_k \in \mathbb{R}$. On dit que H est attachée si $H(\mathbf{t}) = 0$ pour tout \mathbf{t} dans $\text{Dom } H$ tel que $t_k = a_k$ pour au moins un indice k .

Nous constatons que toute fonction de répartition multivariée est attachée.

Lemme 1.1. Soient S_1, \dots, S_d des sous-ensembles non vides de \mathbb{R} et H une fonction attachée (ou grounded), d -croissante et dont le domaine est $S_1 \times \dots \times S_d$. Si pour tout choix de $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_d)$ et $(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_d)$ dont le domaine de définition est $\text{Dom } H$ de H , et pour tout $x < y$, nous avons

$$H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_d) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_d),$$

alors H est croissante relativement à chaque coordonnée.

Nous pouvons reprendre la définition d'une fonction de répartition multivariée et de la fonction de répartition marginale en utilisant les définitions précédentes.

Définition 1.6. La fonction F définie sur son domaine $Dom F = [-\infty, \infty]^d$ est une fonction de répartition d -dimensionnelle si

(i) F est d -croissante; ce qui signifie que, pour tout \mathbf{a} et \mathbf{b} dans $[-\infty, \infty]^d$ tel que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$

$$V_F([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0;$$

(ii) F est attachée; ce qui signifie que pour tout \mathbf{t} dans $[-\infty, \infty]^d$

$$F(\mathbf{t}) = 0 \text{ si au moins l'une des composantes de } \mathbf{t} \text{ est } -\infty;$$

(iii) $F(\infty, \dots, \infty) = 1$.

Nous définissons ainsi les fonctions marginales (unidimensionnelles) de F comme les fonctions F_k de domaine de définition $Dom F_k = [-\infty, \infty]$ exprimés par

$$F_k(x) = F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty). \quad (1.1)$$

Maintenant, nous sommes dans la position de définir la copule d -dimensionnelle comme fonction de répartition multivariée dont les marginales sont uniformes.

Définition 1.7. Une copule d -dimensionnelle (d -copule) C est une fonction de $I^d = [0, 1]^d$ dans $I = [0, 1]$ possédant les propriétés

(i) Pour tout $\mathbf{u} \in I^d$, on a

$$C(\mathbf{u}) = 0 \text{ si au moins une coordonnée de } \mathbf{u} \text{ est égale à } 0;$$

(ii) Pour tout $u_i \in [0, 1]$, pour $i = 1, \dots, d$, on a $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$;

(iii) C est d -croissante; c'est-à-dire, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ dans $[0, 1]^d$ tels que $u_i \leq v_i$, pour $i = 1, \dots, d$, on a

$$V_C([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) \geq 0,$$

équivalent à

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} \times C(x_{1i_1}, \dots, x_{di_d}) \geq 0,$$

où $x_{1j} = u_j$ $x_{2j} = v_j$ et pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$.

Remarque 1.1.

1. Dans le cas bivarié, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$, la propriété (iii) s'exprime par

$$(iii) \Leftrightarrow \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{i_1+i_2} \times C(x_{1i_1}, x_{2i_2}) \geq 0, \quad (1.2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i_1=1}^2 [(-1)^{i_1+1} \times C(x_{1i_1}, x_{21}) + (-1)^{i_1+2} \times C(x_{1i_1}, x_{22})] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-1)^2 C(x_{11}, x_{21}) + (-1)^{1+2} C(x_{11}, x_{22}) + (-1)^{2+1} C(x_{12}, x_{21}) \\ + (-1)^4 C(x_{12}, x_{22}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow C(x_{11}, x_{21}) - C(x_{11}, x_{22}) - C(x_{12}, x_{21}) + C(x_{12}, x_{22}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

où $x_{1j} = u_j$ $x_{2j} = v_j$ et pour tout $j \in \{1, 2\}$.

2. Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$, tels que $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ et $u_1 \leq u_2 \leq 1$. D'après (1.2), on a

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \geq C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1).$$

Ce qui prouve que les applications $y \mapsto C(u_2, y) - C(u_1, y)$ et $C(x, v_2) - C(x, v_1)$ sont croissantes sur $I = [0, 1]$.

1.1.2 Théorème de Sklar

Ce théorème, dû à Sklar (1959), est fondamental dans la théorie des copules et elle est la base de beaucoup, si non toutes, les applications de cette théorie en statistique. Le théorème de Sklar montre le rôle joué par les copules dans la relation entre les fonctions de répartition multivariées et ses fonctions de répartition marginales.

Théorème 1.1. Soit F une fonction de répartition d -dimensionnelle de fonctions de répartition marginales F_1, \dots, F_d . Alors il existe une d -copule C telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^d$,

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (1.3)$$

Si les fonctions F_1, \dots, F_d sont continues, alors C est unique.

Inversement, si C est une d -copule et si F_1, \dots, F_d sont des fonctions de répartition univariées, alors la fonction F définie par (1.3) est une fonction de répartition d -dimensionnelle de marginales F_1, \dots, F_d .

De ce fameux résultat, on déduit que nous pouvons associer une copule à chaque fonction de répartition multidimensionnelle. Nous pouvons donc décomposer une fonction de répartition multivariée en deux parties : d'une part les fonctions de répartition marginales, et d'autre part la copule qui mesure la dépendance entre les variables aléatoires.

Dans la majorité des applications, les v.a. d'intérêt représentent la vie des individus, ou des objets dans certain population, la probabilité que l'individu vive ou survive au delà du temps x est définie par

$$\bar{H}(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - H(x),$$

telle que H est la fonction de répartition de la v.a. X .

Dans le cas multivarié, la fonction de répartition multivariée de survie et les fonctions de répartition marginales de survie d'un v.a. \mathbf{X} de fonctions de répartition multivariée F et de marginales F_i ($i = 1, \dots, d$) sont données par

$$\bar{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \geq x_1, \dots, X_d \geq x_d),$$

$$\bar{F}_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i \geq x_i), i = 1, \dots, d,$$

d'où, on peut écrire la fonction de survie jointe \bar{F} en fonction d'une copule \hat{C} et de ses marginales, nous obtenons

$$\bar{F}(\mathbf{x}) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)), \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^d.$$

La copule \hat{C} est appelée copule de survie, elle est donnée en fonction de la copule C par

$$\hat{C}(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^d \left[(-1)^i \sum_{\mathbf{w}(\mathbf{u}) \in Z(d-i, d, 1)} C(\mathbf{1} - \mathbf{w}) \right] \text{ pour tout } \mathbf{u} \in [0, 1]^d,$$

où $Z(d-i, d, 1)$ est l'ensemble de $\binom{d}{i}$ vecteurs possibles de $(d-i)$ composantes égales à 1, i égales à u_i , et

$$\mathbf{1} - \mathbf{w} = (1 - w_1, \dots, 1 - w_d).$$

En particulier, pour le cas bivarié nous obtenons $\hat{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2)$.

Définition 1.8. Soit F une fonction de répartition univariée. Le quantile de F est une fonction, notée $F^{(-1)}$, de domaine de définition $I = [0, 1]$, telle que

1. Si t est dans l'image $\text{Ran } F$ de F , alors $F^{(-1)}(t)$ est un nombre x tel que $F(x) = t$, c'est-à-dire, vérifie

$$F(F^{(-1)}(t)) = t \quad \text{pour tout } t \in \text{Ran } F; \quad (1.4)$$

2. Dans tous les cas, et en particulier si t n'est pas dans l'image $\text{Ran } F$ de F , alors

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\} = \sup\{x : F(x) \leq t\}. \quad (1.5)$$

Si F est strictement croissante, alors sa fonction de quantiles $F^{(-1)}$ coïncide avec l'inverse habituelle de F (F^{-1}).

Par cette définition, nous montrons une méthode de construction des copules selon le corollaire suivant.

Corollaire 1.1. Soit F une fonction de répartition d -dimensionnelle de fonction de répartition marginales continues F_1, \dots, F_d . Alors, la copule C associée à F est donnée par

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad \text{pour tout } \mathbf{u} \in I^d. \quad (1.6)$$

1.1.3 Propriétés des copules

Théorème 1.2. (Continuité uniforme)

Une copule C est uniformément continue sur son domaine. En particulier, pour tout \mathbf{u} et \mathbf{v} dans $[0, 1]^d$, nous avons

$$|C(\mathbf{v}) - C(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^d |v_k - u_k|. \quad (1.7)$$

Théorème 1.3. (Invariance)

Soient (X_1, \dots, X_d) un vecteur de variables aléatoires continues, de fonction de répartition F associée à une copule C , et (T_1, \dots, T_d) est une suite de fonctions strictement croissantes. Alors, la fonction de répartition jointe du vecteur aléatoire $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ est aussi associée à la même copule C .

Ainsi, la copule est invariante par les transformations strictement croissantes de variables aléatoires.

Démonstration. Notons par F_i et G_i les fonctions de répartition univariées, respectives, des variables aléatoires X_i et $T_i(X_i)$. Soient C et C_T les copules associées, respectivement, aux vecteurs aléatoires \mathbf{X} et $\mathbf{T}(\mathbf{X})$.

Comme les transformations T_i sont croissantes, alors pour tout $x_i \in \bar{\mathbb{R}}$, $i = 1, \dots, d$, on a

$$G_i(x_i) = \mathbb{P}(T_i(X_i) \leq x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq T_i^{-1}(x_i)) = F_i(T_i^{-1}(x_i)).$$

Compte tenu de (1.6), nous avons, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in I^d$,

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= \mathbb{P}(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_d \leq F_d^{-1}(u_d)) \\ &= \mathbb{P}(T_1(X_1) \leq T_1(F_1^{-1}(u_1)), \dots, T_d(X_d) \leq T_d(F_d^{-1}(u_d))) \\ &= \mathbb{P}(T_1(X_1) \leq G_1^{-1}(u_1), \dots, T_d(X_d) \leq G_d^{-1}(u_d)) \\ &= C_T(u_1, \dots, u_d). \end{aligned}$$

Donc $C = C_T$ sur I^d .

□

Théorème 1.4. Soit $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ une copule. Les dérivées partielles de C existent presque sûrement, pour tout $i = 1, \dots, d$, et pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$, on a

$$0 \leq \frac{\partial C(\mathbf{u})}{\partial u_i} \leq 1.$$

Théorème 1.5. (Bornes multivariées de Fréchet-Hoeffding)

Soit F une fonction de répartition d -dimensionnelle d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ et de fonctions de répartition marginales F_1, \dots, F_d . Pour toute d -copule C associée à F et pour tout $\mathbf{u} \in [0, 1]^d$, on a

$$W^d(\mathbf{u}) := \max\left(\sum_{i=1}^d u_i - d + 1, 0\right) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^d(\mathbf{u}) := \min(u_1, \dots, u_d).$$

Démonstration.

Posons $U_i = F_i(X_i)$ pour tout $i = 1, \dots, d$; on a alors $\mathbb{P}(U_i \leq u_i) = u_i$, pour tout $i = 1, \dots, d$.

- La première inégalité provient du fait que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq d} (U_i \leq u_i)\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq d} (U_i \geq u_i)\right) \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(U_i > u_i) \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^d (1 - u_i) \\
&\geq 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i.
\end{aligned}$$

Et comme C est définie sur $[0, 1]^d$, alors

$$C(\mathbf{u}) \geq \max(0, 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i).$$

- La seconde inégalité provient du fait que

$$\bigcap_{1 \leq i \leq d} (U_i \leq u_i) \subset (U_i \leq u_i), \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, d,$$

ainsi

$$C(\mathbf{u}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq d} (U_i \leq u_i)\right) \leq \mathbb{P}(U_i \leq u_i) = u_i, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, d.$$

Par conséquent

$$C(\mathbf{u}) \leq \min(u_1, \dots, u_d).$$

□

Remarque 1.2.

1. La fonction M^d est une d -copule pour $d > 2$.
2. La fonction W^d n'est pas une d -copule pour $d > 2$.

1.1.4 La densité de la copule

La densité c associée à la copule C est définie par

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_d}.$$

Si la fonction de répartition multivariée F est absolument continue et en utilisant le théorème de Sklar, nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) en fonction de la densité de sa copule et de ses fonctions de répartition marginales F_1, \dots, F_d par

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i). \quad (1.8)$$

À partir de cette relation, nous obtenons l'expression suivante de la densité c

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_i(F_i^{-1}(u_i))}.$$

Ce résultat est important pour l'estimation des paramètres de la loi de probabilité d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) par la méthode du maximum de vraisemblance. Observons que la d -croissance de la copule C (voir la définition 1.7) correspond à la positivité de la densité

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\partial^d C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_d} \geq 0.$$

1.2 Les copules usuelles

Comme nous l'avons mentionné auparavant, le théorème de Sklar nous permet de construire des fonctions de répartition multivariées à partir des marges données. Nous présentons dans cette partie les principaux types de copules fréquemment utilisées dans la pratique, ainsi que leurs propriétés.

1.2.1 Copule d'indépendance

Il est bien connu que les composantes du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ sont indépendantes si et seulement si $F(x_1, \dots, x_d) = F_1(x_1) \times \dots \times F_d(x_d)$. Nous définissons donc la copule d'indépendance par

$$\Pi^d(\mathbf{u}) = u_1 \times \dots \times u_d.$$

1.2.2 Copules gaussiennes

Soit Φ_R la distribution normale standard multivariée de matrice de corrélation R . La copule gaussienne est alors définie de la façon suivante

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)),$$

où

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{1d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{d1} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)}\sqrt{\text{Var}(X_j)}},$$

$$\Phi(x) = P(X_i \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

est la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$ et $\Phi^{-1}(t)$ sa fonction de quantiles, telle que

$$\Phi(\Phi^{-1}(t)) = t \quad \text{pour } 0 < t < 1.$$

À partir cette définition de la copule gaussienne, on peut facilement déterminer la densité correspondante en utilisant la représentation canonique, donc

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t R^{-1} \mathbf{x}\right) = c_R^{Ga}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_d)) \times \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)\right),$$

où $|R|$ est le déterminant de R . On déduit que

$$c_R^{Ga}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_d)) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t R^{-1} \mathbf{x}\right)}{\prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)\right)}.$$

En posant $u_i = \Phi(x_i)$, donc $x_i = \Phi^{-1}(u_i)$. La densité peut être ré écrite comme suit

$$c_R^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^t (R^{-1} - I) \boldsymbol{\zeta}\right),$$

où $\boldsymbol{\zeta} = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))^t$, I est la matrice identité de dimension $(d \times d)$.

Dans le cas bivarié, on note ρ_{12} défini précédemment par ρ , nous obtenons donc

$$c_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\rho\zeta_1\zeta_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right),$$

nous en déduisons que

$$C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\rho\zeta_1\zeta_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right) ds dt,$$

avec $\zeta_1 = \Phi^{-1}(s)$, $\zeta_2 = \Phi^{-1}(t)$. Si nous utilisons la décomposition canonique d'une distribution bivariée, une autre expression de C_ρ^{Ga} est

$$C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{s^2 + 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt.$$

Aussi, on a

- $C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) \longrightarrow W(u_1, u_2)$, quand $\rho \longrightarrow -1$,
- $C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) \longrightarrow M(u_1, u_2)$, quand $\rho \longrightarrow 1$.

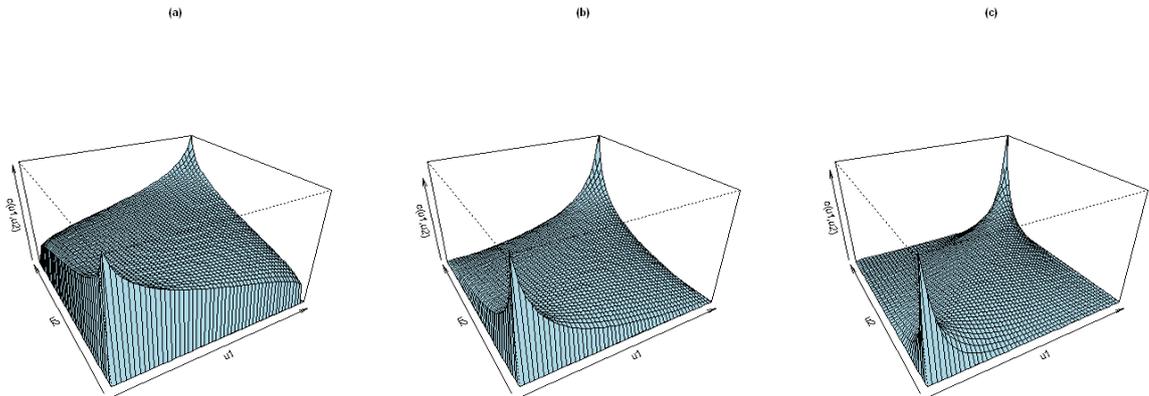


FIG. 1.1. Densités de copules gaussienne pour $\rho = 0.2$ (a), $\rho = 0.5$ (b) et $\rho = 0.8$ (c).

1.2.3 Copules de Student

Comme pour la copule gaussienne, la copule t (ou la copule de Student) est la fonction de dépendance associée à la distribution de Student multidimensionnelle. Soit $t_{R,\nu}$ la distribution de Student multivariée standard à ν degrés de liberté et de matrice de corrélation R , définie par

$$t_{R,\nu} = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(1 + \frac{\mathbf{y}^t R^{-1} \mathbf{y}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dy_1 \dots dy_d.$$

La copule de Student est alors paramétrée par la matrice de corrélation R et le degrés de liberté ν , elle est définie comme suit

$$C_{R,\nu}(u_1, \dots, u_d) = t_{R,\nu}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d)),$$

$$C_{R,\nu}(u_1, \dots, u_d) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^t R^{-1} \mathbf{x}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dx_1 \dots dx_d,$$

où

$$t_\nu(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma(\nu+2) \sqrt{\nu\pi}} \left(1 + \frac{s^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} ds$$

est la fonction de répartition univariée de Student et t_ν^{-1} est sa inverse généralisée.

La densité de $C_{R,\nu}$ est donnée par

$$c_{R,\nu}(u_1, \dots, u_d) = |R|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\right)^d \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{\nu} \zeta^t R^{-1} \zeta\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}}{\prod_{i=1}^d \left(1 + \frac{\zeta_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}\right),$$

où $\zeta_i = t_\nu^{-1}(u_i)$.

Dans le cas bivarié, la copule de Student est paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire ρ et le degré de liberté ν . Nous en déduisons les expressions de la copule et de la densité suivantes

$$C_{\rho,\nu}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt,$$

$$c_{\rho,\nu}(u_1, u_2) = \rho^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2} \frac{\left(1 + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\rho\zeta_1\zeta_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{\zeta_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}},$$

où $\zeta_1 = t_\nu^{-1}(u_1)$, $\zeta_2 = t_\nu^{-1}(u_2)$.

Notons que si le degré de liberté $\nu \rightarrow \infty$, alors la copule de Student converge vers la copule gaussienne.

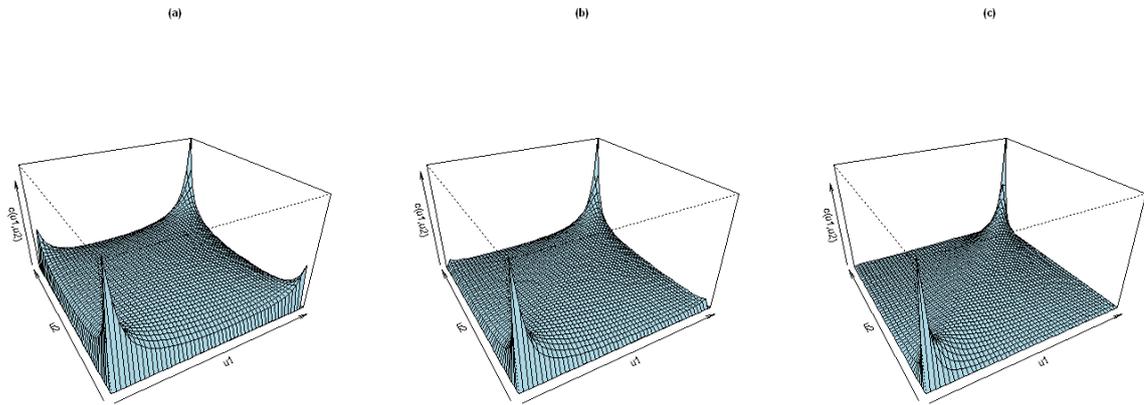


FIG. 1.2. Densités de copules de Student pour $\nu = 3$ et pour $\rho = 0.2$ (a), $\rho = 0.5$ (b) et $\rho = 0.8$ (c).

1.2.4 Copules archimédiennes

Cette famille de copules a été nommée par Ling (1965) [13], dont un grand nombre de copules qui possèdent de nombreuses propriétés intéressantes appartiennent à cette classe dite archimédienne. La modélisation statistique à l'aide de copules archimédiennes a fait l'objet de nombreux travaux, depuis les résultats de Genest et MacKay (1986) [20].

Définition 1.9. Soit φ une fonction strictement décroissante, continue et convexe définie sur $\text{Dom } \varphi = [0, 1]$ et à valeurs dans $[0, \infty]$, telle que $\varphi(1) = 0$, alors φ est dite générateur. Son pseudo-inverse $\varphi^{[-1]}$ est donnée par

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Remarque 1.3.

Si $\varphi(0) = \infty$, alors le générateur est dit strict, et on peut remplacer le pseudo-inverse $\varphi^{[-1]}$ par l'inverse ordinaire φ^{-1} .

Théorème 1.6. *Soit φ un générateur et $\varphi^{[-1]}$ son pseudo-inverse. Alors, la copule archimédienne bivariée est définie par*

$$C^A(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)), \quad (1.9)$$

La copule archimédienne bivariée a les propriétés [44] suivantes

- Symétrique dans le sens

$$C^A(u_1, u_2) = C^A(u_2, u_1).$$

- Associative, dont

$$C^A(C^A(u_1, u_2), u_3) = C^A(u_1, C^A(u_2, u_3)).$$

- La densité est donnée par

$$c^A(u_1, u_2) = \frac{\varphi''(C^A(u_1, u_2)) \varphi'(u_1) \varphi'(u_2)}{[\varphi'(C^A(u_1, u_2))]} \quad (1.10)$$

Remarque 1.4.

(a) *La copule d'indépendance $\Pi(u_1, u_2)$ est une copule archimédienne, dont le générateur est $\varphi(t) = -\ln(t)$ et son pseudo-inverse $\varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$. En effet, de l'expression de la copule (1.9), on a*

$$C^A(u_1, u_2) = \exp[-((-\log(u_1)) + (-\log(u_2)))] = u_1 \times u_2 = \Pi(u_1, u_2).$$

(b) *La copule $W(u_1, u_2)$ est aussi une copule archimédienne, dont $\varphi(t) = 1 - t$ pour $t \in [0, 1]$ et 0 pour $t > 1$, $\varphi^{-1}(t) = \max(1 - t, 0)$ c'est-à-dire, de (1.9) on obtient*

$$C^A(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0) = W(u_1, u_2).$$

Exemples de copules archimédienne bivariées d'un seul paramètre

Un grand nombre de copules appartiennent à la classe archimédienne sont données dans [41]. Dans cette section, nous présentons quelques exemples de copules archimédienne bivariées d'un seul paramètre dite paramètre de dépendance.

Copule de Gumbel (1960)

Elle est définie par

$$C_\alpha^{Gu}(u_1, u_2) = \exp \left\{ - \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha \right)^{-1/\alpha} \right\}, \quad 1 \leq \alpha < \infty,$$

où le générateur est

$$\varphi_\alpha(t) = (-\ln t)^\alpha.$$

Cette copule prend quelques cas limites qui sont

- Si le paramètre $\alpha \rightarrow 1$, on obtient la copule d'indépendance Π , donc l'indépendance des marginales est obtenu quand α tend vers 1.
- Si $\alpha \rightarrow +\infty$, on obtient la copule de borne supérieur de Fréchet-Hoffding M , donc la structure de dépendance approche à sa maximum quand α croît vers $+\infty$.

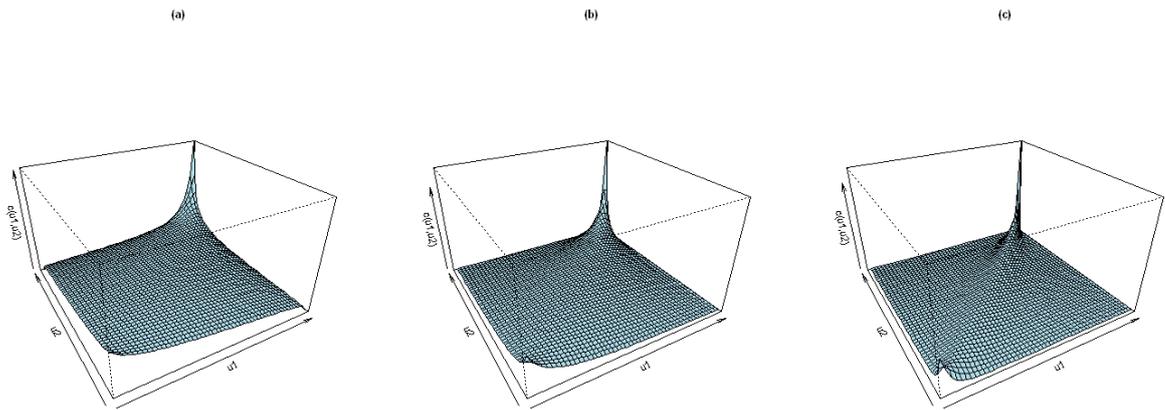


FIG. 1.3. Densités de copules de Gumbel pour $\alpha = 1.25$ (a), $\alpha = 2$ (b) et $\alpha = 5$ (c).

Copule de Clayton

Cette copules a été introduite par Clayton (1978) et étudiée par Oakes (1982), nomée aussi la copule de Cook et Johnson (1982) et copule de Pareto. Elle est définie par

$$C_{\alpha}^{Cl}(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha},$$

de paramètre de dépendance $\alpha \in [-1, 0[\cup]0, \infty[$,
et de générateur et pseudo-inverse

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}(t) &= \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1), \\ \varphi_{\alpha}^{-1}(t) &= (t + 1)^{-1/\alpha}. \end{aligned}$$

Nous avons

- $C_{\alpha}^{Cl} \rightarrow \Pi$ quand $\alpha \rightarrow 0$.

- $C_\alpha^{Cl} \rightarrow W$ quand $\alpha \rightarrow -1$.
- $C_\alpha^{Cl} \rightarrow M$ quand $\alpha \rightarrow +\infty$.

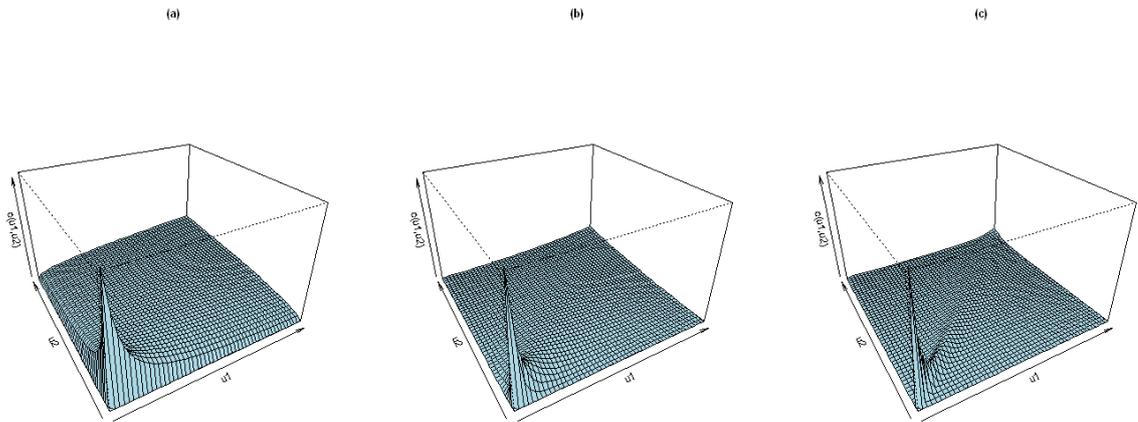


FIG. 1.4. Densités de copules de Clayton pour $\alpha = 0.5$ (a), $\alpha = 2$ (b) et $\alpha = 8$ (c).

Copule de Frank (1979)

Cette copule est apparue dans les travaux de Frank (1979), elle a été étudiée par Genest (1987). La copule de Frank de paramètre de dépendance $\alpha \in]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ est donnée par

$$C_\alpha^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\alpha u_1) - 1)(\exp(-\alpha u_2) - 1)}{\exp(-\alpha) - 1} \right),$$

où le générateur est

$$\varphi_\alpha(t) = -\ln \frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1}.$$

On peut vérifier que

- $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} C_\alpha^{Fr} = W$,
- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_\alpha^{Fr} = \Pi$,
- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} C_\alpha^{Fr} = M$.

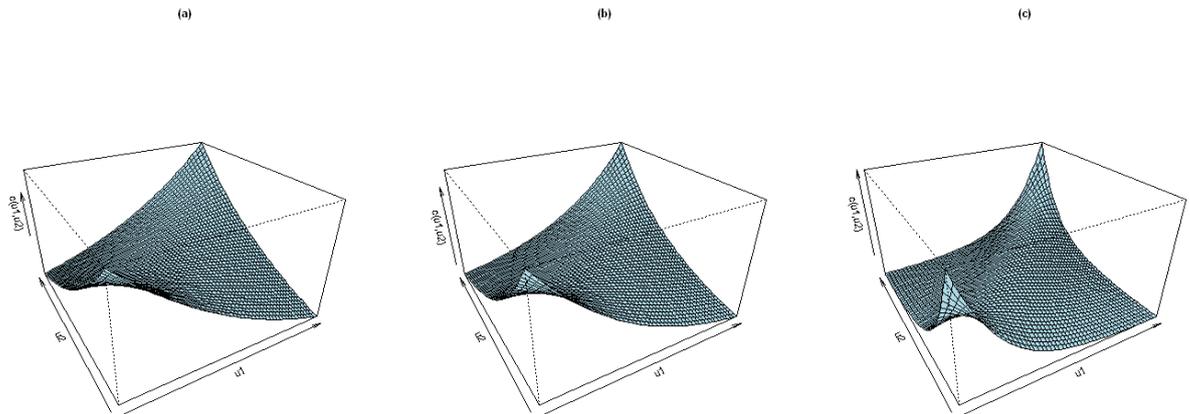


FIG. 1.5. Densités de copules de Frank pour $\alpha = 1.25$ (a), $\alpha = 2$ (b) et $\alpha = 5$ (c).

Maintenant on s'intéresse à la construction des copules archimédiennes à d dimension. Rappelant la remarque 1.4. (a), dont on a écrit la copule produit sous la forme $\Pi(u_1, u_2) = u_1 u_2 = \exp[-((-\log(u_1)) + (-\log(u_2)))]$. L'extension de cette idée à d dimension, avec $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$, résulte à l'écriture de la copule produit Π^d sous la forme

$$\Pi^d(\mathbf{u}) = u_1 \times \dots \times u_d = \exp[-((-\log(u_1)) + \dots + (-\log(u_d)))].$$

Cette formulation peut être généralisée pour toute copule C et toute fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ par

$$C(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)), \quad (1.11)$$

où $\varphi^{[-1]}$ est la pseudo inverse définie précédemment.

Les copules de la forme (1.11) sont dites copules archimédiennes et la fonction φ est le générateur de la copule. Or, l'expression (1.11) ne définit pas une copule pour n'importe quelle fonction φ . Par exemple, en prenant $\varphi(t) = 1 - t$ dans (1.11), on trouve que $C = W$ qui n'est pas une copule pour $d \geq 3$. On doit se demander pour quelles conditions la formule (1.11) donne une copule pour toute dimension d : des propriétés supplémentaires devront donc être imposées à φ et φ^{-1} . Pour répondre à cette question nous utilisons la notion de fonction complètement monotone selon la définition suivante.

Définition 1.10. (*Widder 1941*). Une fonction g est dite complètement monotone sur un intervalle J si elle est continue sur J et à ses dérivées de tout ordres qui alternent en signe sur J , de telle sorte que

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0, \quad (1.12)$$

pour tout point t intérieur à J , et $k = 0, 2, \dots$

Donc, le théorème de Kimberling (1974), énoncé ci-dessous, donne une condition nécessaire et suffisante sur la fonction φ pour qu'elle engendre une copule archimédienne pour toute dimension $d \geq 2$. Voir aussi (Schweizer et Sklar 1983, Alsina et al. 2005).

Théorème 1.7. Soit φ une fonction continue strictement décroissante, définie sur $I = [0, 1]$ à valeurs dans $[0, \infty)$, telle que $\varphi(0) = \infty$ et $\varphi(1) = 0$. Alors, pour $d \geq 2$, C définie par (1.11) est une copule si et seulement si φ^{-1} est complètement monotone sur $[0, \infty)$.

Remarque 1.5.

- Si l'inverse φ^{-1} d'un générateur strict φ d'une copule archimédienne C est complètement monotone, alors $C \succ \Pi$.
- Les copules archimédienne peuvent être également définies via un conditionnement par une v.a. positive (voir chapitre 2).
- Une source importante de générateurs de copules archimédiennes est l'inversion de la transformée de Laplace des fonctions de répartition. Il est donc simple de construire des copules archimédiennes de dimension d .

Dans ce qui suit, on donne quelques exemples de celles ci.

Copule de Gumbel

Le générateur est donné par $\varphi(t) = (-\ln(t))^\alpha$, donc $\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\alpha})$, il est complètement monotone si $\alpha > 1$. La copule de Gumbel multivariée est

$$C_\alpha^{Gu}(\mathbf{u}) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^d (-\ln(u_i))^\alpha \right]^{1/\alpha} \right\}, \quad \alpha > 1.$$

Copule de Frank

Le générateur est donné par

$$\varphi(t) = -\ln \left(\frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \right),$$

Copules	$\varphi(t)$	$C(\mathbf{u})$
Indépendance	$-\ln(t)$	$\prod_{i=1}^d u_i$
Gumbel	$(-\ln(t))^\alpha, \alpha > 1$	$\exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^d (-\ln(u_i))^\alpha \right]^{1/\alpha} \right\}$
Frank	$-\ln \left(\frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \right), \alpha > 0$	$-\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^d (\exp(-\alpha u_i) - 1)}{(\exp(-\alpha) - 1)^{d-1}} \right)$
Clayton	$t^{-\alpha} - 1, \alpha > 0$	$\left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\alpha} - d + 1 \right)^{-1/\alpha}$

TAB. 1.1. Exemples de copules archimédiennes.

donc

$$\varphi^{-1}(t) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 + e^t(e^{-\alpha} - 1)),$$

qui est complètement monotone si $\alpha > 0$. D'où, la copule de Frank multivariées est définie par

$$C_\alpha^{Fr}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^d (\exp(-\alpha u_i) - 1)}{(\exp(-\alpha) - 1)^{d-1}} \right).$$

Copule de Clayton

Soit $\varphi(t) = t^{-\alpha} - 1$, l'inverse $\varphi^{-1}(t) = (t + 1)^{-1/\alpha}$ est complètement monotone si $\alpha > 0$. La copule de Clayton à d dimension est donnée par

$$C_\alpha^{Cl}(\mathbf{u}) = \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\alpha} - d + 1 \right)^{-1/\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Dans le cas où $\alpha = 0$, on obtient la copule d'indépendance.

Le tableau (1.1) regroupe ces types de copules archimédiennes multivariées.

1.2.5 Copules de valeurs extrêmes

Le nom copule de valeurs extrêmes "extreme value copula" suggère un lien entre la théorie des extrêmes et les copules. La théorie des valeurs extrêmes a pour objet la modélisation et l'étude de problèmes où les observations sont des valeurs maximums ou minimums d'un certain échantillon. Il existe dans le cas univarié une vaste littérature sur le sujet. On peut citer Fisher et Tippett (1928) qui établirent les trois lois limites des valeurs extrêmes. Contrairement au cas univarié, les travaux effectués dans le cas multivariés sont nettement moins nombreux. Parmi les auteurs

qui se sont intéressés au cas multivariée, on peut citer Deheuvels (1979), Tiago de Oliveira (1984), Pickands (1981), Resnick (1987) et Galambos (1987).

Dans un premier temps, nous présenterons la loi de valeurs extrêmes dans le cas univarié pour ensuite étendre ces définitions au cas multivarié.

Considérons un échantillon de v.a. i.i.d. X_1, \dots, X_n définie sur \mathbb{R} d'une loi F , et posons $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Nous avons le théorème de Fisher et Tippet suivant

Théorème 1.8. *S'il existe deux constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = G(x),$$

où G est une distribution non dégénérée, qui appartient à l'un des trois types suivants de distribution

- (1) Loi de Fréchet $\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha})$, pour $x > 0$, $\alpha > 0$,
- (2) Loi de Weibull $\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x^\alpha))$, pour $x \leq 0$, $\alpha < 0$,
- (3) Loi de Gumbel $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.11. *Une copule C dite de valeurs extrêmes (extreme value copula), si elle satisfait la condition suivante*

$$C(u_1^t, \dots, u_d^t) = C^t(u_1, \dots, u_d), \quad \text{pour tout } t > 0, \quad (1.13)$$

Soit $\{\mathbf{X}_i = 1, \dots, n\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants de \mathbb{R}^d , de fonction de répartition multivariée F . On définit le maximum d'ordre $n \geq 1$, noté $\mathbf{M}_n = (M_{1,n}, \dots, M_{d,n})$, dont les coordonnées sont définies comme suit. On pose

$$M_{j,n} = \max(X_{1,j}, \dots, X_{n,j}), \quad j = 1, \dots, d.$$

La théorie multidimensionnelle des valeurs extrêmes s'intéresse à la loi limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_{1,n} - b_{1,n}}{a_{1,n}} \leq x_1, \dots, \frac{M_{d,n} - b_{d,n}}{a_{d,n}} \leq x_d \right) := F(x_1, \dots, x_d),$$

pour les suites de réels $a_{1,n}, \dots, a_{d,n} > 0$ et $b_{1,n}, \dots, b_{d,n}$.

D'après la représentation canonique (1.2) de la répartition de F , il existe une copule C^* dite de valeurs extrêmes telle que

$$F(x_1, \dots, x_d) := C^*(F_1^*(x_1), \dots, F_d^*(x_d)).$$

Il est évident que les marginales univariées de F vérifient le théorème de Fréchet-Tippet, c'est-à-dire que les marginales appartiennent à l'un des trois types précédents.

Théorème 1.9. (*Représentation de Pickands*)

Pour toute copule de valeurs extrêmes C^* , il existe une fonction convexe A définie de $\Delta_{d-1} = (w_1, \dots, w_d) \in [0, \infty[^d$: $\sum_{j=1}^d w_j = 1$ dans $[1/d, 1]$, tel que

$$C^*(\mathbf{u}) = \exp \left\{ \left(\sum_{j=1}^d \ln(u_j) \right) A \left(\frac{\ln(u_1)}{\sum_{j=1}^d \ln(u_j)}, \dots, \frac{\ln(u_d)}{\sum_{j=1}^d \ln(u_j)} \right) \right\}.$$

De plus A vérifie

$$\max(w_1, \dots, w_d) \leq A(w_1, \dots, w_d) \leq 1.$$

Dans le cas bivarié, la copule de valeurs extrêmes $C^*(u_1, u_2)$ associée à la loi de valeurs extrêmes bivariées a la forme suivante

$$C^*(u_1, u_2) = \exp \left\{ (\ln(u_1) + \ln(u_2)) A \left(\frac{\ln(u_1)}{\ln(u_1) + \ln(u_2)} \right) \right\},$$

Bien sûr, la fonction de dépendance A définie de $[0, 1]$ dans $[1/2, 1]$ est convexe et vérifie

$$\max(w, 1 - w) \leq A(w) \leq 1.$$

Le tableau suivant contient les copules de valeurs extrêmes bivariées les plus connues.

Copule	$C^*(u_1, u_2)$	$A(w)$
Indépendance	$u_1 u_2$	1
Gumbel 1	$\exp \left\{ - (\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta} \right\}, \theta \geq 1$	$[w^\theta + (1-w)^\theta]^{1/\theta}$
Gumbel 2	$u_1 u_2 \exp \left\{ \theta \frac{\tilde{u}_1 \tilde{u}_2}{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2} \right\}, 0 \leq \theta \leq 1$	$\theta w^2 - \theta w + 1$
Galambos	$u_1 u_2 \exp \left\{ - (\tilde{u}_1^{-\theta} + \tilde{u}_2^{-\theta})^{-1/\theta} \right\}, \theta \geq 0$	$1 - [w^{-\theta} + (1-w)^{-\theta}]^{-1/\theta}$
Hursler-Reiss	$\exp \left\{ \begin{array}{l} -\tilde{u}_2 \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \ln \left(\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1} \right) \right] - \\ \tilde{u}_1 \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \ln \left(\frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2} \right) \right] \end{array} \right\}, \theta \geq 0$	$w \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \ln \left(\frac{w}{1-w} \right) \right] +$ $(1-w) \Phi \left[\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2} \theta \ln \left(\frac{w}{1-w} \right) \right]$
Marshall-Olkin	$u_1^{1-\theta_1} u_2^{1-\theta_2} \min(u_1^{\theta_1}, u_2^{\theta_2}), (\theta_1, \theta_2) \in [0, 1]^2$	$\max[1 - \theta_1 w, 1 - \theta_2(1-w)]$

TAB. 1.2. Quelques copules de valeurs extrêmes.

avec $\tilde{u}_1 = -\ln u_1$, $\tilde{u}_2 = -\ln u_2$ et Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1.2.6 Copules empiriques

Dans cette section, on présente la notion d'une copule empirique qui a été introduite par Deheuvels (1979, 1981). La copule empirique est une version empirique d'une copule associée à une loi multivariée définie à partir d'un échantillon d'observations issues de cette loi.

Soit $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})$, ($i = 1, \dots, n$), une suite de vecteurs aléatoires i.i.d., de fonction de répartition jointe F et de marginales F_1, \dots, F_d continues.

La fonction de répartition empirique de cet échantillon et les fonctions de répartition empiriques marginales sont données par

$$F_n(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d \mathbf{1}(X_{ij} \leq x_j),$$

$$F_{j,n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_{ij} \leq x), \quad \text{pour } j = 1, \dots, d.$$

Les rangs des observations sont donnés par

$$nF_{j,n}(X_{ij}) = R_{ij}.$$

Définition 1.12. Toute copule \tilde{C}_n définie sur le treillis

$$l = \left\{ \left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_d}{n} \right) : 1 \leq j \leq d, k_j = 0, \dots, n \right\},$$

par la fonction suivante

$$\tilde{C}_n \left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_d}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d \mathbf{1}(R_{ij} \leq k_j) \quad (1.14)$$

est une copule empirique.

En fonction des marginales empiriques, on peut définir l'estimateur empirique C_n d'une copule C par

$$C_n(\mathbf{u}) = F_n(F_{1,n}^{-1}(u_1), \dots, F_{d,n}^{-1}(u_d)), \quad \text{pour } \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d.$$

Dans le cas où $d = 2$, la fréquence de la copule empirique est donnée par

$$c_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (X_{i,n}, Y_{j,n}) \in \{(X_k, Y_k) : 1 \leq k \leq n\}, \\ 0 & \text{si non,} \end{cases} \quad (1.15)$$

où $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ et $Y_{1,n} \leq \dots \leq Y_{n,n}$ sont les statistiques d'ordre de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) et l'échantillon (Y_1, \dots, Y_n) .

Dans l'article de Deheuvels (1979), la relation entre les fonctions \tilde{C}_n et c_n est donnée par

$$\tilde{C}_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right). \quad (1.16)$$

1.3 Les mesures de dépendance et les copules

1.3.1 Les mesures de concordance

Une copule C du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ résume la structure de dépendance des composantes de \mathbf{X} . D'où plusieurs mesures de dépendance peuvent être exprimées à partir de C . Parmi ces mesures, nous pouvons considérer de façon générale les mesures de concordance.

Définition 1.13. (*Notion de concordance*)

La notion de concordance/discordance est essentielle à la compréhension de la définition de ces mesures. De façon intuitive, une paire (X, Y) de variables aléatoires est concordante si une grande valeur de X est souvent associée à une grande valeur de Y , et si une petite valeur de X a de fortes chances d'être liée à une petite valeur de Y . En termes mathématiques, la nature des paires (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est dite

- Concordantes si : $\begin{cases} (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 > y_2) \\ (\text{ie } (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0. \end{cases}$

- Discordantes si : $\begin{cases} (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 > y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \\ (\text{ie } (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0. \end{cases}$

Plus généralement, soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ un échantillon de n observations d'un couple (X, Y) : Il existe C_n^2 paires distinctes de couples (x_i, y_i) et (x_j, y_j) qui sont soit concordantes, soit discordantes.

Définition 1.14. (*Mesure de concordance*)

Une mesure numérique k d'association entre deux variables aléatoires continues X_1 et X_2 , dont la copule est C , est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes

1. k est définie pour toute paire (X_1, X_2) de variables aléatoires continues ;
2. $-1 \leq k_{X,-X} \leq k_C \leq k_{X,X} = 1$;
3. $k_{X_1, X_2} = k_{X_2, X_1}$;
4. Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $k_{X_1, X_2} = 0$;
5. $k_{-X_1, X_2} = k_{X_1, -X_2} = -k_{X_1, X_2}$;
6. Si C_1, C_2 sont deux copules telles que $C_1 < C_2$ alors on a : $k_{C_1} \leq k_{C_2}$;
7. Si $(X_{1,m}, X_{2,m})$ est une suite de variables aléatoires continues de copule C_m et si C_m converge vers C alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k_{C_m} = k_C.$$

À partir de la propriété (6) de la définition 1.14, on constate que l'ordre de concordance implique l'ordre sur k . De plus, l'une des propriétés importantes de $k_{X,Y}$ est que si $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ sont des fonctions strictement monotones, alors $k_{\alpha(X), \beta(Y)} = k_{X,Y}$.

Plus classiquement, les mesures d'association couramment utilisées (Agostino & Stephens, 1986 ; Joe, 1997 ; Genest & Favre, 2007) pour la caractérisation de la dépendance sont : le coefficient de corrélation linéaire de Pearson, le coefficient de corrélation de rang Spearman ρ et le coefficient de corrélation de rang Kendall τ .

Le coefficient de corrélation de Pearson mesure la dépendance linéaire entre deux v.a. Pour l'étude d'une dépendance non linéaire, les deux autres coefficients sont plus adaptés puisqu'ils ne dépendent que du rang de chaque observation par opposition au coefficient de corrélation de Pearson qui utilise les réalisations des variables. En outre, ρ et τ sont invariants par transformation strictement croissante des v.a., X et Y . Alors, dans cette partie on parle sur ces deux dernières mesures de concordance (le tau de Kendall et le rho de Spearman) qui jouent un rôle important en statistique non-paramétrique. Ces mesures s'expriment en fonction de copule.

Théorème 1.10. Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs indépendants de variables aléatoires continues de fonctions de répartition jointes, respectives, H_1 et H_2 . Soient F et G les marginales associées, respectivement, à X_1, X_2 et à Y_1, Y_2 . Soient C_1 et C_2 les copules associées, respectivement, à H_1 et à H_2 données par $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ et $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Si Q est la mesure de concordance et de discordance de (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ; c'est à dire,

$$Q = \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\},$$

alors

$$Q := Q(C_1, C_2) = 4 \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (1.17)$$

Démonstration.

Puisque toutes les variables aléatoires sont continues, alors

$$\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} = 1 - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \geq 0\},$$

ainsi

$$Q = 2\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \geq 0\} - 1.$$

Étudions le premier terme

$$\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} = \mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} + \mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\},$$

par intégration de ces quantités

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} &= \mathbb{P}\{X_2 < X_1, Y_2 < Y_1\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\{X_2 < x, Y_2 < y\} dH_1(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\{X_2 < x, Y_2 < y\} dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Par changement de variables $u = F(x)$ et $v = G(y)$, on obtient alors

$$\mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} = \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

D'une façon similaire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} &= \mathbb{P}\{X_2 > X_1, Y_2 > Y_1\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\{X_2 > x, Y_2 > y\} dH_1(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \{1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))\} dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{[0,1]^2} \{1 - u - v + C_2(u, v)\} dC_1(u, v), \end{aligned}$$

où U et V sont des variables aléatoires uniformes, donc $E(U) = E(V) = 1/2$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= \int \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q &= 2\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - 1 \\ &= 2(\mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} + \mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\}), \\ &= 2(\int \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) + \int \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)) - 1 \\ &= 4 \int \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.\end{aligned}$$

$$Q = 4 \int \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad \square$$

Remarque 1.6.

- Pour les copules Π , M et W , on peut calculer la mesure de concordance Q .

$$\begin{aligned}Q(M, M) &= 1; \\ Q(M, \Pi) &= 1/3; \\ Q(M, W) &= 0; \\ Q(W, \Pi) &= -1/3; \\ Q(W, W) &= -1; \\ Q(\Pi, \Pi) &= 0.\end{aligned}$$

- Pour tout copule C on a

$$\begin{aligned}-1 &\leq Q(C, M) \leq 1; \\ -1 &\leq Q(C, W) \leq 1/3; \\ 0 &\leq Q(C, \Pi) \leq 1/3.\end{aligned}$$

Démonstration.

- $Q(M, M) = 4 \int \int_{[0,1]^2} \min(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_{[0,1]^2} v dv - 1 = 1;$
- $Q(M, \Pi) = 4 \int \int_{[0,1]^2} uv dM(u, v) - 1 = 4 \int_{[0,1]^2} v^2 dv - 1 = 1/3;$
- $Q(M, W) = 4 \int \int_{[0,1]^2} W(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_{[0,1]^2} W(u, v) dv - 1 = 0;$
- $Q(W, \Pi) = 4 \int \int_{[0,1]^2} uv dW(u, v) - 1 = 4 \int_{[0,1]^2} (1 - v) dv - 1 = -1/3;$
- $Q(W, W) = 4 \int \int_{[0,1]^2} \max(u + v - 1, 0) dW(u, v) - 1 = 4 \int_{[0,1]^2} 0 dv - 1 = -1;$

$$\bullet Q(\Pi, \Pi) = 4 \int_{[0,1]^2} uvduv - 1 = 0$$

- Pour toute copule quelconque C on a

$$\begin{aligned} W \leq C \leq M &\implies Q(W, M) \leq Q(C, M) \leq Q(M, M) \\ &\implies -1 \leq Q(C, M) \leq 1. \end{aligned}$$

De la même manière, on établit que :
$$\begin{cases} W \leq C \leq \Pi &\implies -1 \leq Q(C, W) \leq 1/3; \\ \Pi \leq C \leq M &\implies 0 \leq Q(C, \Pi) \leq 1/3. \end{cases}$$

Définition 1.15. (*Tau de Kendall*)

Tau de Kendall (version théorique)

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux observations d'un couple aléatoire (X, Y) : Si (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont i.i.d. de loi H , on obtient le tau de Kendall par

$$\tau(X, Y) := \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}. \quad (1.18)$$

Tau de Kendall (version empirique)

L'expression de τ donnée dans la définition 1.15, représente la valeur théorique du tau de Kendall que l'on peut définir, aussi, d'une manière empirique. Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. Définissons les nombres c et d comme étant respectivement le nombre de paires concordantes et discordantes dans cet échantillon. On définit la version empirique du tau de Kendall par

$$\begin{aligned} \tau_n &:= \frac{\text{Nombre de paires concordantes} - \text{Nombre de paires discordantes}}{\text{Nombre total de paires}} \\ &= \frac{c - d}{c + d} \\ &= \frac{c - d}{C_2^n}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } C_2^n = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues de copule C : Le tau de Kendall pour X et Y est donnée par

$$\tau(X, Y) = Q(C, C) = 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1, \quad (1.19)$$

l'équation (1.19) est donnée aussi par

$$\tau(X, Y) = 4E\{C(U, V)\} - 1.$$

Exemples.

1. Pour toute copule de la famille de Fréchet : $C_{\alpha\beta} = \alpha M + (1 - \alpha - \beta)\Pi + \beta W$,

on a

$$\begin{aligned} dC_{\alpha\beta} &= \alpha dM + (1 - \alpha - \beta)d\Pi + \beta dW \\ C_{\alpha\beta}(dC_{\alpha\beta}) &= \alpha^2 M dM + \alpha(1 - \alpha - \beta) M d\Pi + \alpha\beta M dW \\ &\quad + \alpha(1 - \alpha - \beta)\Pi dM + (1 - \alpha - \beta)^2 \Pi d\Pi \\ &\quad + \beta(1 - \alpha - \beta)\Pi dW + \alpha\beta W dM \\ &\quad + \beta(1 - \alpha - \beta)W d\Pi + \beta^2 W dW. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \int_{I^d} C_{\alpha\beta}(u, v) dC_{\alpha\beta}(u, v) &= \alpha^2 \int \int_{I^d} M dM + \alpha(1 - \alpha - \beta) \int \int_{I^d} M d\Pi \\ &\quad + \alpha\beta \int \int_{I^d} M dW + \alpha(1 - \alpha - \beta) \int \int_{I^d} \Pi dM \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta)^2 \int \int_{I^d} \Pi d\Pi + \beta(1 - \alpha - \beta) \int \int_{I^d} \Pi dW \\ &\quad + \alpha\beta \int \int_{I^d} W dM + \beta(1 - \alpha - \beta) \int \int_{I^d} W d\Pi \\ &\quad + \beta^2 \int \int_{I^d} W dW. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \int \int_{I^d} C_{\alpha\beta}(u, v) dC_{\alpha\beta}(u, v) &= \alpha^2 (4 \int \int_{I^d} M dM) + \alpha(1 - \alpha - \beta) (4 \int \int_{I^d} M d\Pi) \\ &\quad + \alpha\beta (4 \int \int_{I^d} M dW) + \alpha(1 - \alpha - \beta) (4 \int \int_{I^d} \Pi dM) \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta)^2 (4 \int \int_{I^d} \Pi d\Pi) + \beta(1 - \alpha - \beta) \times \\ &\quad (4 \int \int_{I^d} \Pi dW) + \alpha\beta (4 \int \int_{I^d} W dM) \\ &\quad + \beta(1 - \alpha - \beta) (4 \int \int_{I^d} W d\Pi) + \beta^2 (4 \int \int_{I^d} W dW). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \int \int_{I^d} C_{\alpha\beta}(u, v) dC_{\alpha\beta}(u, v) - 1 &= \alpha^2 Q(M, M) + (1 - \alpha - \beta)^2 Q(\Pi, \Pi) \\ &\quad + \beta^2 Q(W, W) + 2[\alpha(1 - \alpha - \beta)Q(M, \Pi) \\ &\quad + \alpha\beta Q(M, W) + \beta(1 - \alpha - \beta)Q(\Pi, W)]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \alpha^2 \times 1 + (1 - \alpha - \beta)^2 \times 0 + \beta^2 \times (-1) \\ &\quad + 2 \left[\alpha(1 - \alpha - \beta) \times \frac{1}{3} + \alpha\beta \times 0 + \beta(1 - \alpha - \beta) \times \frac{1}{3} \right] \\ &= \alpha^2 - \beta^2 + 2 \left[\frac{1}{3}\alpha(1 - \alpha - \beta) + \frac{1}{3}\beta(1 - \alpha - \beta) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta} &= \alpha^2 + \frac{2}{3} [\alpha(1 - \alpha - \beta) + \beta(1 - \alpha - \beta)] - \beta^2 \\ &= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 2)}{3}.\end{aligned}$$

2. Dans le cas bivarié, si C est une copule archimédienne de générateur φ alors

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} du.$$

Le tau de Kendall pour d'autres copules est donné dans le tableau suivant

Copule	tau de Kendall
Gaussienne	$\frac{2}{\pi} \arcsin \rho$
Gumbel	$1 - \frac{1}{\alpha}$
Clayton	$\frac{\alpha}{\alpha + 2}$
Frank	$1 + 4 [D_1(\alpha) - 1] / \alpha$

TAB. 1.3. Tau de Kendall de quelques copules.

tel que $D_k(\alpha)$ est la fonction de Debye définie par

$$D_k(\alpha) = \frac{k}{\alpha^k} \int_0^\alpha \frac{t^k}{e^t - 1} dt, \quad k = 1, 2.$$

Une extension de l'expression du tau de Kendall dans le cas multivarié est possible. Elle est donnée par

$$\tau = \frac{1}{2^{d-1} - 1} \left(2^d \int_{[0,1]^d} C(u_1, \dots, u_d) dC(u_1, \dots, u_d) - 1 \right).$$

Tout comme le tau de Kendall, le rho de Spearman est basé sur la concordance et la discordance de couples de variables aléatoires.

Définition 1.17. Soient (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) des copies indépendantes de vecteurs aléatoires (X, Y) . Le rho de Spearman, noté ρ_s , est défini par

$$\rho_s(X, Y) = 3 (\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - \mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\}).$$

Théorème 1.12. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues dont la copule est C . Alors le rho de Spearman de (X, Y) est donné par

$$\begin{aligned}\rho_s(X, Y) &= 3Q(C, \Pi), \\ &= 3 \left[4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) d\Pi(u, v) - 1 \right], \\ \rho_s(X, Y) &= 12 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 3.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Exemples.

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoire gaussienne de corrélation ρ , alors

$$\rho_s = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{6}\right).$$

2. Soit C_θ la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern, définie par

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad \theta \in [-1, 1],$$

alors

$$\rho_s = \frac{\theta}{3}.$$

Rho de Spearman (version empirique)

Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. La version empirique de rho de Spearman est définie par

$$\rho_n = 1 - 6 \frac{\sum_{k=1}^n (R_k - S_k)^2}{n(n^2 - 1)},$$

où R_k est le rang de X_k , S_k est le rang de Y_k .

Remarque 1.7.

1. Si $X \sim F$, $Y \sim G$, soit $U = F(X)$ et $V = G(Y)$, donc on peut écrire le rho de Spearman pour la paire (X, Y) de la façon suivante

$$\begin{aligned}\rho_s(X, Y) &= 12 \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12E(UV) - 3 \\ &= \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} \\ &= \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}} \\ &= \rho(F(X), G(Y)),\end{aligned}$$

où ρ est le coefficient de corrélation usuel de Pearson.

2. On peut considérer que ρ_s est une mesure de distance moyenne entre la copule C et la copule d'indépendance car

$$\rho_s(C) = 12 \int \int_{[0,1]^2} \{C(u, v) - uv\} dudv.$$

3. Le tau de Kendall et le rho de Spearman ne dépendent pas du comportement des lois marginales, mais uniquement de la structure de dépendance.
4. Pour toutes fonctions croissantes f et g , on a $\tau(f(X), g(Y)) = \tau(X, Y)$ et $\rho_s(f(X), g(Y)) = \rho_s(X, Y)$.

1.3.2 Autres concepts de dépendance

Il existe de nombreux concepts de dépendance, nous pouvons citer dans le cas bivarié la dépendance positive par quadrant (Positively Quadrant Dependence ou PQD).

Définition 1.18. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires. On dit que X_1, X_2 sont PQD si et seulement si nous vérifions la propriété suivante

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \geq \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \mathbb{P}(X_2 \leq x_2), \quad (1.21)$$

pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dans le cas où X_1 et X_2 ont des fonctions de répartition continues et C est la copule associée, la propriété (1.21) est équivalente à

$$C(u_1, u_2) \geq u_1 u_2.$$

De même, la dépendance négative par quadrant (Negatively Quadrant Dependence ou NQD) correspond à

$$C(u_1, u_2) \leq u_1 u_2.$$

Dans le cas multivarié, une généralisation de la notion de dépendance par quadrant est connue sous le nom de la dépendance par orthant (orthant dependence), dont on a la définition suivante

Définition 1.19. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un v.a. d - dimensionnel, pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

1. \mathbf{X} est à dépendance positive par orthant inférieur (Positive Lower Orthant Dependence (PLOD)) si

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \geq \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(X_i \leq x_i). \quad (1.22)$$

2. \mathbf{X} est à dépendance positive par orthant supérieur (Positive Upper Orthant Dependence (PUOD)) si

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}) \geq \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(X_i > x_i). \quad (1.23)$$

3. \mathbf{X} est à dépendance positive par orthant (POD) s'il est PLOD et PUOD, c'est-à-dire, si les deux inégalités (1.22) et (1.23) sont vérifiées.
4. \mathbf{X} a dépendance négative par orthant inférieur (Negative Lower Orthant Dependence (NLOD)) si

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \leq \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(X_i \leq x_i). \quad (1.24)$$

5. \mathbf{X} est à dépendance négative par orthant supérieur (Negative Upper Orthant Dependence (NUOD)) si

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}) \leq \prod_{i=1}^d \mathbb{P}(X_i > x_i). \quad (1.25)$$

6. \mathbf{X} est à dépendance négative par orthant (NOD) s'il est NLOD et NUOD.

Remarque 1.8.

- (a) En terme de fonctions de répartition, si le vecteur aléatoire \mathbf{X} est de fonction de répartition d -dimensionnelle F , de marginales continues $F_i, i = 1, \dots, d$ et de copule C , alors (1.22) est équivalent à

$$F(x_1, \dots, x_d) \geq \prod_{i=1}^d F_i(x_i),$$

ou encore, à

$$C(u_1, \dots, u_d) \geq u_1 \dots u_d, \quad \text{pour tout } (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d.$$

De même, (1.23) est équivalent à

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_d) \geq \prod_{i=1}^d \bar{F}_i(x_i),$$

ceci est équivalent aussi à

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_d) \geq (1 - u_1) \dots (1 - u_d), \quad \text{pour tout } (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d.$$

- (b) Dans le cas $d = 2$, les propriétés PUOD et PLOD sont identiques.

1.3.3 Dépendance des queues

La dépendance de queue est une mesure locale qui renseigne sur la "quantité" de dépendance au niveau des queues de distribution. C'est un outil très pertinent pour l'étude de la dépendance de valeurs extrêmes.

Définition 1.20. Soient F une fonction de répartition d -dimensionnelle, I et J deux sous-ensembles disjoints de $\{1, \dots, d\}$. Le coefficient de queue inférieure de la copule (respectivement le coefficient de queue supérieure de la copule) d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$, de marginales $F_i, i = 1, \dots, d$ sont définis par

$$\Lambda_U^{I,J} := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(X_i \leq F_i^{-1}\left(\frac{x_i}{t}\right), \forall i \in I \setminus X_j \leq F_j^{-1}\left(\frac{x_j}{t}\right), \forall j \in J \right),$$

$$\Lambda_L^{I,J} := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(X_i > F_i^{-1}\left(1 - \frac{x_i}{t}\right), \forall i \in I \setminus X_j > F_j^{-1}\left(1 - \frac{x_j}{t}\right), \forall j \in J \right).$$

Définition 1.21. Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition continues F et G respectivement.

Le coefficient de dépendance de queue supérieure (upper tail) de X et Y est défini par

$$\lambda_U := \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P} (X > F^{-1}(t) \setminus Y > G^{-1}(t)). \quad (1.26)$$

Le coefficient de dépendance de queue inférieure (lower tail) est défini par

$$\lambda_L := \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P} (X \leq F^{-1}(t) \setminus Y \leq G^{-1}(t)). \quad (1.27)$$

Ces mesures dépendent du copule comme nous montrons dans le théorème suivant

Proposition 1.1. Soient X, Y, F, G, λ_U et λ_L données dans la définition (1.21), C est la copule associée. Si les limites dans (1.26), (1.27) existent, alors

$$\lambda_U := \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2t + C(t, t)}{1 - t},$$

et

$$\lambda_L := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{1 - t}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \lambda_U &:= \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P} (X > F^{-1}(t) \setminus Y > G^{-1}(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\mathbb{P} (X > F^{-1}(t), Y > G^{-1}(t))}{\mathbb{P} (Y > G^{-1}(t))} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2t + C(t, t)}{1 - t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_L &:= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(t) \setminus Y \leq G^{-1}(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(X \leq F^{-1}(t), Y \leq G^{-1}(t))}{\mathbb{P}(Y \leq G^{-1}(t))} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.9.

- Si $\lambda_U \in]0, 1]$ (resp. $\lambda_L \in]0, 1]$), on dit que C a une dépendance de queue supérieure (resp. inférieure).
- Si $\lambda_U = 0$ (resp. $\lambda_L = 0$), on dit que C n'a pas de dépendance de queue supérieure (resp. inférieure).

Nous donnons dans le tableau suivant les expressions des coefficients de dépendance de queues pour quelques copules

Copule	λ_L	λ_U
Gumbel ($\alpha \geq 1$)	0	$2 - 2^{1/\alpha}$
Clayton ($\alpha > 0$)	$2^{-1/\alpha}$	0
Frank ($\alpha \neq 0$)	0	0

TAB. 1.4. Dépendance de queues de quelques copules.

La copule de Gumbel n'appréhende que des dépendances positives et possède la caractéristique de pouvoir représenter des risques dont la structure de dépendance est plus accentuée sur la queue supérieure. Elle est à ce titre particulièrement adaptée en assurance et en finance pour étudier l'impact de la survenance d'événements de forte intensité sur la dépendance entre branches d'assurance.

La copule de Frank permet de modéliser les dépendances aussi bien positives que négatives. On note qu'il n'existe pas de dépendance de queue pour cette copule.

Comme la copule de Gumbel, la copule de Clayton ne permet de modéliser que les dépendances positives. A l'inverse de la copule de Gumbel, elle vise à rendre compte d'une dépendance forte sur la queue inférieure.

La dépendance de queue entre les variables peut être observé graphiquement, comme on montre dans les graphes suivants

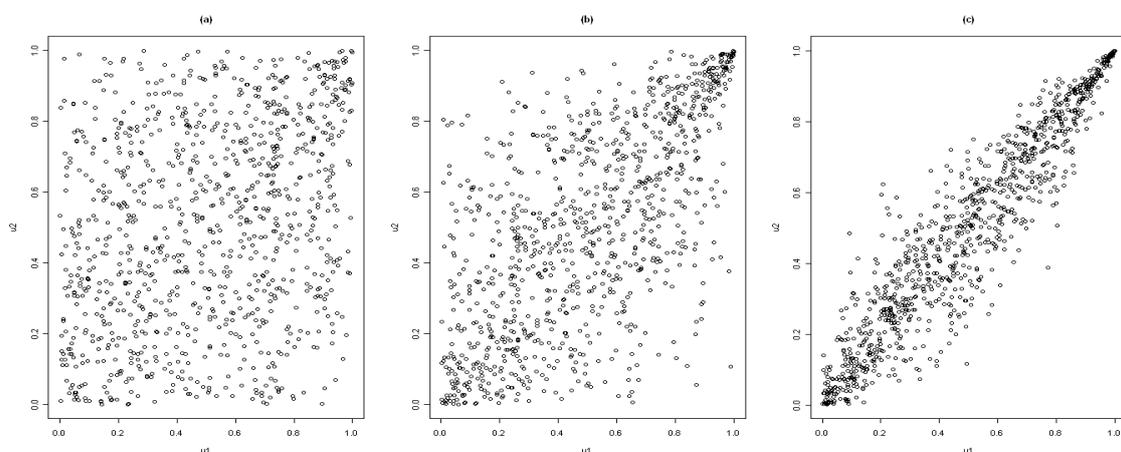


FIG. 1.6. Echantillons de taille 1000 de la copule de Gumbel pour $\alpha = 1.25$ (a), $\alpha = 2$ (b) et $\alpha = 5$ (c).

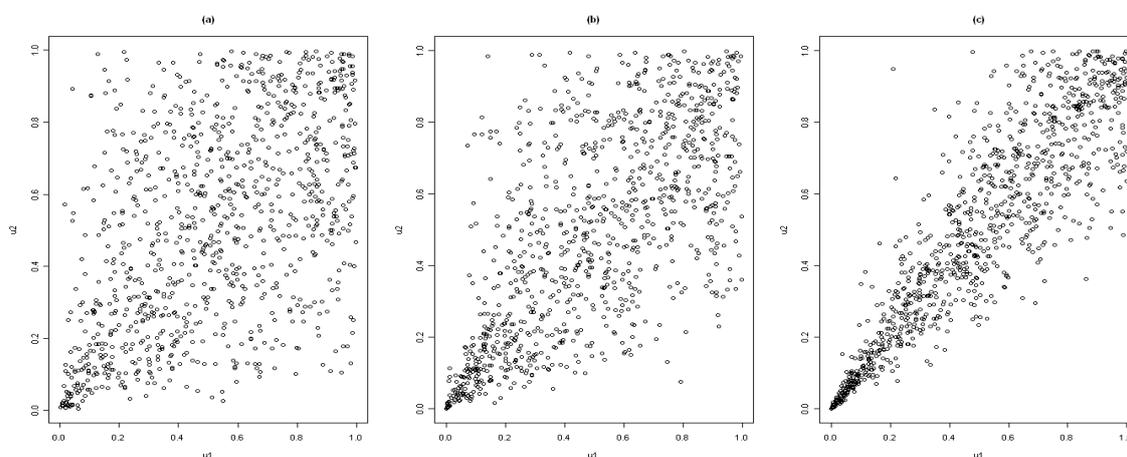


FIG. 1.7. Echantillons de taille 1000 de la copule de Clayton pour $\alpha = 1.25$ (a), $\alpha = 2$ (b) et $\alpha = 5$ (c).

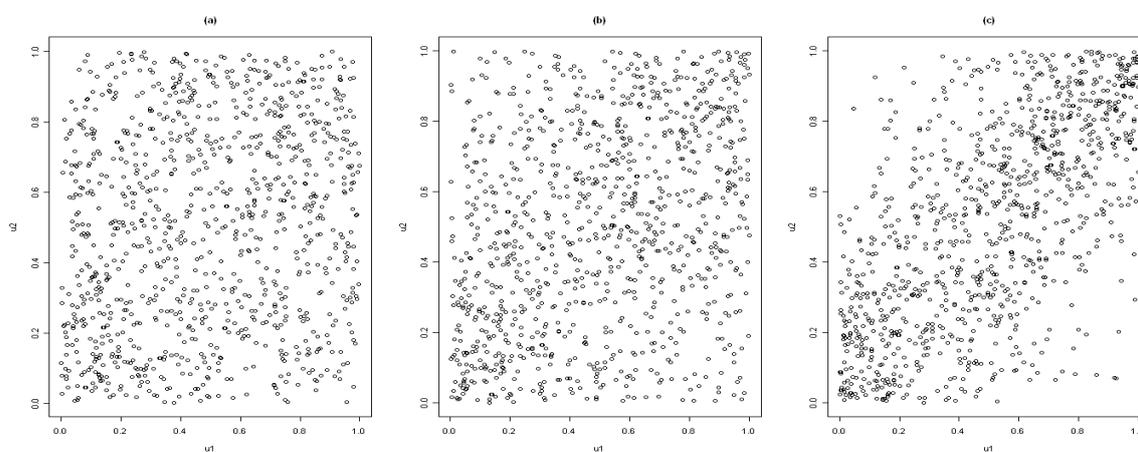


FIG. 1.8. Echantillons de taille 1000 de la copule de Frank pour $\alpha = 1.25$ (a), $\alpha = 2$ (b) et $\alpha = 5$ (c).

Chapitre 2

DISTRIBUTIONS DE PARETO MULTIVARIÉES

La distribution de Pareto a été initialement introduite par Vilfredo Pareto pour décrire la distribution des revenus des familles en Suisse. Elle a été par la suite largement appliquée dans des domaines comme l'assurance pour modéliser les déclarations de sinistres (Benktander, 1970), en climatologie ou en hydrologie pour décrire des événements extrêmes (Katz et al., 2002), ainsi qu'en économie (Fisk, 1961), en finance (Danielsson et de Vries, 1991), en l'analyse de fiabilité et de l'électronique ou encore en hydrogéologie (Gustafson et Fransson, 2005). Pour plus de détails sur les différentes applications possibles de la distribution de Pareto, nous renvoyons le lecteur à ([34], chap.52). Une autre raison justifiant l'intérêt porté à cette distribution est que, moyennant une paramétrisation adéquate, cette distribution peut être considérée comme un cas particulier de la distribution de Pareto généralisée, qui joue un rôle essentiel dans l'étude des excès au-delà d'un seuil en théorie des valeurs extrêmes.

Les distributions de Pareto multivariées ont aussi des applications importantes dans la modélisation des problèmes extrêmes dans les distributions des revenus dont les revenus excèdent un certain seuil. Par exemple, revenu obtenu à travers différents sources, il n'est pas du tout évident que nous serons en mesure de visualiser en toute confiance les caractéristiques marginales de la distribution. Plutôt que nous pourrions être en mesure de spéculer que pour des niveaux donnés de sources de revenus $2, \dots, k$ le revenu de la source 1 aura une distribution de Pareto avec des paramètres peut être en fonction du niveau de revenu provenant d'autres sources, voir (Arnold, 1993 ; El-Gohary, 2005). Ces lois multivariées sont fréquemment utilisées dans le cadre d'assurance (voir, par exemple, Pfeifer et Neslehova, 2004 ; Chiragiev et Landsman, 2007 ; Furman et Landsman, 2008 ; Vernic, 2009 ; Asmit et Furman, 2009).

2.1 La distribution de Pareto univariée

Plusieurs familles de distributions de Pareto basées sur le nombre de paramètres inclus dans la fonction de distribution sont disponible dans la littérature (voir le livre d'Arnold (1983)). Dans cette section, on expose quelques formes les plus utilisés de ces lois univariées, et on décrit quelques-unes de ses propriétés qu'elles seront utilisées dans la suite [32], [33].

2.1.1 Loi de Pareto standard

C'est la loi d'une variable aléatoire positive X , de fonction de répartition de survie définie par

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x > 0. \quad (2.1)$$

Notons que si X a la distribution de Pareto standard, alors X^{-1} a aussi la même distribution.

2.1.2 Loi de Pareto de type I

Une variable aléatoire X suit une distribution de Pareto de type I si sa fonction de répartition de survie est donnée par

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}, \quad \text{pour } x \geq \sigma, \quad \sigma > 0, \alpha > 0. \quad (2.2)$$

Cette distribution est connue sous le nom de la distribution de Pareto classique, elle est un des types de lois Pearson (VI), et on la note par

$$X \sim P(I)(\sigma, \alpha).$$

Une loi de Pareto de type I résulte de l'exponentiation d'une exponentielle. En effet, soit Y une v.a. distribuée selon une loi exponentielle standard (de paramètre 1). Alors la v.a.

$$X = \sigma \exp \{Y/\alpha\}$$

est distribuée selon une loi de $P(I)(\sigma, \alpha)$ (voir [33], chap.19).

2.1.3 Loi de Pareto de type II

La variable aléatoire X suit une loi de Pareto de type II (nommée aussi loi de Lomax) si

$$\bar{F}(x) = \left\{1 + \frac{x - \mu}{\sigma}\right\}^{-\alpha} \quad \text{pour } x \geq \mu, \quad \sigma > 0, \alpha > 0, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

qui est notée par

$$X \sim P(II)(\mu, \sigma, \alpha).$$

Cette loi est apparaît comme un mélange de lois exponentielle dont le paramètre suit une loi Gamma [18].

Si on suppose une v.a. X (qui présente par exemple un risque d'assurance), telle que sa distribution conditionnelle sachant une v.a. Θ est de loi exponentielle de paramètre θ , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \leq x \mid \Theta = \theta) = 1 - e^{-\theta x},$$

si Θ suit une loi Gamma de paramètre d'échelle et de forme σ et α respectivement, alors la distribution de X est de Pareto II et elle est donnée par

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= \int_{\theta \in \mathbb{R}^+} \mathbb{P}(X > x \mid \Theta = \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \\
&= \int_{\theta \in \mathbb{R}^+} e^{-\theta x} \frac{\sigma^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\theta \sigma}}{\Gamma(\alpha)} d\theta \\
&= \frac{\sigma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{\theta \in \mathbb{R}^+} \theta^{\alpha-1} e^{-\theta(x+\sigma)} d\theta \\
&= \frac{\sigma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(x+\sigma)^\alpha} \underbrace{\int_{\xi \in \mathbb{R}^+} e^{-\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi}_{=\Gamma(\alpha)}, \quad \xi = \theta(x+\sigma) \\
&= \frac{\sigma^\alpha}{(x+\sigma)^\alpha} \\
&= \left(1 + \frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

2.1.4 Loi de Pareto de type III

La variable aléatoire X suit une loi de Pareto de type *III* de paramètres μ, σ et γ , notée $P(III)(\mu, \sigma, \gamma)$, de fonction de survie définie par

$$\bar{F}(x) = \left\{ 1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}^{-1} \quad \text{pour } x \geq \mu, \quad \sigma > 0, \gamma > 0, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Si la variable aléatoire Z suit une loi de Pareto standard alors

$$X = \mu + \sigma Z^\gamma \stackrel{d}{=} P(III)(\mu, \sigma, \gamma).$$

2.1.5 Loi de Pareto de type IV

D'après Arnold (1983), une hiérarchie des distributions de Pareto est établie en commençant par la distribution de Pareto classique, et par la suite en introduisant des paramètres supplémentaires, qui dépends de position, d'échelle, de forme et d'inégalité. Une telle approche conduit à une famille très générale, nommée la famille de Pareto de type IV, donc une v.a. X tirée de cette famille a une fonction de distribution de survie donnée par

$$\bar{F}(x) = \left\{ 1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}^{-\alpha} \quad \text{pour } x \geq \mu, \quad (2.5)$$

où $-\infty < \mu < +\infty$ est le paramètre de position, $\sigma > 0$ est le paramètre d'échelle, $\gamma > 0$ est le paramètre d'inégalité, et α est le paramètre de forme qui caractérise la queue de la distribution. Cette distribution est notée par

$$X \sim P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha).$$

Le paramètre γ est nommé le paramètre d'inégalité pour son interprétation dans le contexte économique. Sachant que, si on choisit $\alpha = 1$ et $\mu = 0$ dans l'équation (2.5), le paramètre $\gamma (\gamma \leq 1)$ est exactement l'indice de Gini d'inégalité.

Remarque 2.1.

- De l'équation (2.5), on peut directement obtenir la fonction des quantiles suivante

$$F^{-1}(u) = \mu + \sigma \left[(1 - u)^{-1/\alpha} - 1 \right]^\gamma, \quad \text{pour } 0 < u < 1,$$

donc, on peut facilement simuler des v.a. suivants la distribution de $P(IV)$ à partir cette fonction.

- Clairement, les trois types précédents de la distribution de Pareto peut être définis comme des cas particuliers de la famille de $P(IV)$, par un choix approprié des paramètres dans (2.5)

$$P(I)(\sigma, \alpha) \equiv P(IV)(\sigma, \sigma, 1, \alpha),$$

$$P(II)(\mu, \sigma, \alpha) \equiv P(IV)(\mu, \sigma, 1, \alpha),$$

$$P(III)(\mu, \sigma, \gamma) \equiv P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, 1).$$

- La famille des distributions de Burr est également suffisamment flexible et bénéficie une long popularité dans la littérature de la science actuarielle (voir, par exemple, Daykin et al. (1994) et Klugman et al. (1998)). Cependant, même cette famille peut être considérée comme un cas particulier de lois $P(IV)$

$$Burr(\sigma, \gamma, \alpha) = P(IV)\left(0, \sigma, \frac{1}{\gamma}, \alpha\right).$$

- Une relation importante de la famille de loi $P(IV)$ avec la loi exponentielle permette d'extraire beaucoup de propriétés de $P(IV)$ de cette dernière, dont on a si la variable aléatoire X est de loi $P(IV)(0, \sigma, \gamma, \alpha)$ alors la v.a.

$$\log \left(1 + \left(\frac{X}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right) \sim Exp(\alpha).$$

- En économie, la distribution de $P(IV)(0, \sigma, \frac{1}{\gamma}, \alpha)$ est nommée aussi la distribution de Sing Maddala (1976), elle est incluse dans la distribution de beta généralisée de type II (notée : $GB2(\gamma, \sigma, p, \alpha)$) de densité

$$f(x) = \frac{\gamma x^{\gamma p - 1}}{b^{\gamma p} B(p, \alpha) [1 + (X/\sigma)^\gamma]^{p + \alpha}}, \quad x > 0, \gamma, \sigma, p, \alpha > 0,$$

où $B(p, \alpha) = \int_0^x u^{p-1}(1-u)^{\alpha-1} du$, $0 \leq x \leq 1$. Donc, Sing Maddala est la distribution de GB2 avec un paramètre de forme $p = 1$ ($GB2(\gamma, \sigma, 1, \alpha)$), voir [32].

Cette distribution ($P(IV)(0, \sigma, \frac{1}{\gamma}, \alpha)$) appartient au domaine d'attraction de Fréchet ($F \in D(\Phi_{\alpha/\gamma})$), dont les lois appartenant à ce domaine d'attraction sont caractérisées par une queue à décroissance lente (polynomiale) à l'infini. Elles sont dites aussi distributions à queues lourdes qui ont considérées comme des modèles statistiques appropriés dans le domaine d'assurance pour les coûts des grands risques par exemple, les rendements financiers journaliers, Une caractérisation de ce domaine d'attraction est donnée par la définition et le théorème suivants

Définition 2.1. (*Fonction à variations régulières*)

- Une fonction positive, mesurable h définie sur $]0, \infty[$ est dite à variations régulières (*regularly varying function*) à l'infini avec indice $\rho \in \mathbb{R}$, notée $h \in \mathcal{R}_\rho$, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho, \quad x > 0, \quad (2.6)$$

ou de manière équivalente si $h(x) = x^\rho l(x)$, où l est une fonction à variations lentes à l'infini (*slowly varying function*), notée $l \in \mathcal{R}_0$, c'est-à-dire, une fonction satisfaisant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = 1, \quad x > 0,$$

- h est à variations régulières à 0 avec indice $\rho \in \mathbb{R}$, notée $h \in \mathcal{R}_\rho^0$, si la fonction $h(1/x)$ est à variations régulières à l'infini avec indice $-\rho$. Par une autre façon, la variation régulière à 0 est définie par remplacer $t \rightarrow \infty$ par $t \rightarrow 0$ dans (2.6).
- La variation régulière de h à tout point $a > 0$, notée $h \in \mathcal{R}_\rho^a$, est définie par la variation régulière à l'infini de la fonction $h(1 - 1/x)$.

Comme exemples des fonctions à variations lentes à l'infini, on peut citer : les constants positives, logarithmes. d'une autre côté, les fonctions : $x^\rho, x^\rho \ln(1+x)$, et $(x \ln(1+x))^\rho$ sont des exemples des fonction à variations régulières à l'infini avec indice ρ .

Théorème 2.1. Soit $\xi > 0$, une fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction de Fréchet $D(\Phi_\xi)$ si et seulement si

$$\bar{F}(x) = x^{-\xi} l(x), \quad x > 0, \text{ avec } l \in \mathcal{R}_0,$$

c'est-à-dire, $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\xi}$.

D'autres exemples de distributions incluses dans la classe de Fréchet sont : Pareto généralisée, Fréchet, loggamma, t-student et la distribution α -stable ($0 < \alpha < 2$). Alors toutes ces distributions sont de type Pareto dans le sens que ses queues (droites) sont de la forme $\bar{F}(x) = Cx^{-\xi}$, quand $x \rightarrow \infty$, pour quelques $C, \xi > 0$.

Moments

Les moments d'ordre 1 et 2 de la distribution de Pareto $P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha)$ sont écrits en fonction de paramètres μ, σ, γ et α comme suit

$$E(X) = \mu + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} [\Gamma(\alpha - \gamma)\Gamma(\gamma + 1)], \quad \alpha > \gamma,$$

$$E(X^2) = \mu^2 + \frac{2\mu\sigma}{\Gamma(\alpha)} [\Gamma(\alpha - \gamma)\Gamma(\gamma + 1)] + \frac{\sigma^2}{\Gamma(\alpha)} [\Gamma(\alpha - 2\gamma)\Gamma(2\gamma + 1)], \quad \alpha > 2\gamma.$$

On obtient alors, l'expression suivante de la variance

$$Var(X) = \frac{\sigma^2}{\Gamma^2(\alpha)} [\Gamma(\alpha - 2\gamma)\Gamma(2\gamma + 1)\Gamma(\alpha) - \Gamma^2(\alpha - \gamma)\Gamma^2(\gamma + 1)], \quad \alpha > 2\gamma.$$

où Γ est la fonction Gamma $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

La loi de Pareto unidimensionnelle de type (IV) est donc déterminée par quatre paramètres : $\mu \in \mathbb{R}, \sigma, \gamma$ et α sont positives. Cette loi est biaisée vers la droite. La figure (2.1) présente l'influence de ces paramètres dans le cas où μ est positive sur la forme de la densité d'une loi Pareto de type (IV).

2.1.6 Loi de Feller-Pareto

La famille de distributions de Feller-Pareto peut être introduite comme suit

Soit la variable aléatoire Y de loi bêta de densité

$$F(y) = \frac{1}{B(\gamma_1, \gamma_2)} y^{\gamma_1-1} (1-y)^{\gamma_2-1}, \quad 0 < y < 1, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0,$$

donc, la variable aléatoire $W = \mu + \sigma(\frac{1}{Y} - 1)^\gamma$ a une distribution de Feller-Pareto et elle est notée par $FP(\mu, \sigma, \gamma, \gamma_1, \gamma_2)$.

Si $\gamma_2 = 1$, donc

$$\bar{F}(w) = \left\{ 1 + \left(\frac{w - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}^{-\gamma_1},$$

d'où $W \sim P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \gamma_1)$.

Si $\gamma_1 = 1$, donc

$$\bar{F}(w) = 1 - \left\{ 1 - \left(\frac{w - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \right\}^{-\gamma_2},$$

Si $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, donc $W \sim P(III)(\mu, \sigma, \gamma)$.

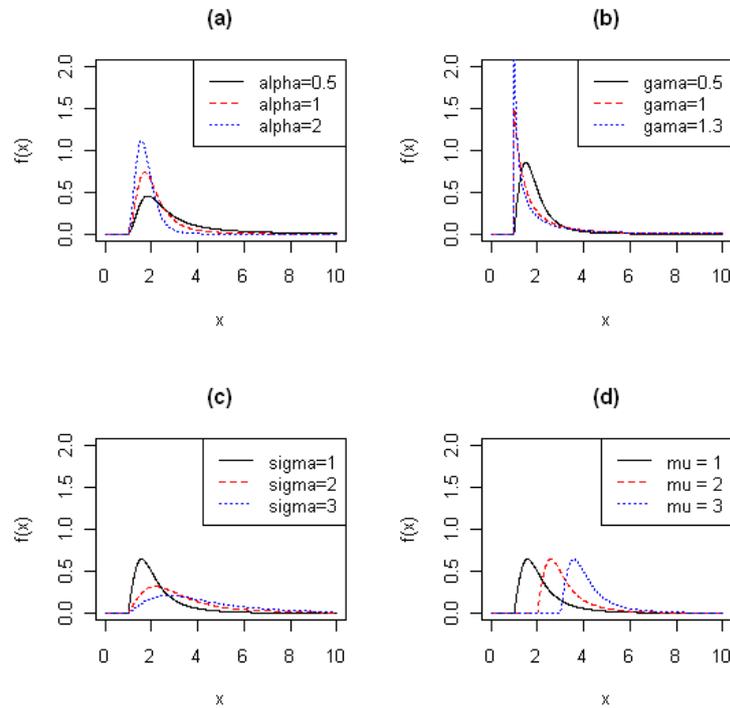


FIG. 2.1. Influence des paramètres sur la forme de la loi Pareto de type (IV). Les densités de la loi $P(IV)(1, 1, 0.4, \alpha)$ $\alpha = 0.5, 1, 2$ (a), $P(IV)(1, 1, \gamma, 1.5)$ $\gamma = 0.5, 1, 1.3$ (b), $P(IV)(1, \sigma, 0.5, 1)$ $\sigma = 1, 2, 3$ (c), $P(IV)(\mu, 1, 0.5, 1)$ $\mu = 1, 2, 3$ (d).

2.1.7 Loi de Pareto généralisée

Une variable aléatoire X suit une distribution de Pareto généralisée standard de paramètre de forme ξ (*GPD*), si sa fonction de répartition de survie est donnée par

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \{1 + \xi x\}^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\{-x\} & \text{si } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où

$$\begin{aligned} x &\geq 0 && \text{si } \xi \geq 0, \\ 0 \leq x &< -1/\xi && \text{si } \xi < 0. \end{aligned}$$

Cette fonction peut être généralisée en trois paramètres μ, σ et ξ en remplaçant x par $(x - \mu)/\sigma$, où $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sont les paramètres de position et d'échelle respectivement.

Dans le cas où $\mu = 0$, on obtient la loi, notée $GPD(\xi, \sigma)$, définie par

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \left\{1 + \xi \frac{x}{\sigma}\right\}^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp\{-x/\sigma\} & \text{si } \xi = 0 \end{cases}, x \in \mathbf{S}(\xi, \sigma), \quad (2.8)$$

où

$$\mathbf{S}(\xi, \sigma) := \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } \xi \geq 0, \\ [0, -\sigma/\xi] \leq x < -\sigma/\xi & \text{si } \xi < 0. \end{cases}$$

est le support de $GPD(\xi, \sigma)$.

Cette loi est particulièrement intéressante en théorie des valeurs extrêmes, puisqu'elle correspond à la loi limite des excès au delà d'un seuil (théorème de Pickands-Belkama-de Hann). Cette famille de distributions contient les distributions uniforme, exponentielle comme des cas particuliers. Dans le cas où $\xi > 0$, la distribution de Pareto généralisée est un cas de la distribution de Pareto de deuxième type.

Aussi, la loi de Pareto généralisée ($\xi > 0$) est apparaît comme un mélange de lois exponentielles dont le paramètre suit une loi Gamma.

2.2 La distribution de Pareto bivariée

Un nombre important de lois Pareto Bivariées a été recensé, notamment dans (Arnold, 1983). L'application de ces différents modèles de lois Pareto Bivariée à plusieurs domaines a été étudiée. Les propriétés de la somme $X + Y$ et le rapport $X/(X + Y)$ de couple de v.a. (X, Y) distribués selon quelques modèles classiques de lois Pareto bivariées ont été faites. Dans cette section, nous limiterons notre étude sur quelques-uns de ces modèles. Pour une revue plus complète, le lecteur peut se référer à [34].

2.2.1 Loi de Pareto bivariée de type I

Cette distribution a été proposée par Mardia en 1962, elle est définie par la densité du couple de v.a. (X_1, X_2) suivante

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = (\alpha + 1)\alpha(\sigma_1\sigma_2)^{\alpha+1}(\sigma_2x_1 + \sigma_1x_2 - \sigma_1\sigma_2)^{-(\alpha+2)}, \quad (2.9)$$

$$x_1 \geq \sigma_1 > 0, x_2 \geq \sigma_2 > 0, \alpha > 0,$$

Les distributions marginales ont des fonctions de densités

$$f_{X_i}(x_i) = \alpha\sigma_i^\alpha x_i^{-(\alpha+1)}, \quad x_i \geq \sigma_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.10)$$

Alors, les lois marginales sont des lois Pareto de type I de même paramètre de forme α et de paramètres d'échelles respectifs σ_1 et σ_2 , notée $X_i \stackrel{d}{=} P(I)(\sigma_i, \alpha)$.

À partir ces marginales, on obtient directement grâce à les expressions des moments dans les équations (20.11a) et (20.11b) (voir, [33, chap 20]) que

$$E(X_i) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \sigma_i \quad \text{pour } \alpha > 1, i = 1, 2, \quad (2.11)$$

$$Var(X_i) = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \sigma_i^2 \quad \text{pour } \alpha > 2, i = 1, 2. \quad (2.12)$$

La densité conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est donnée par

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = (\alpha + 1) \sigma_1 (\sigma_2 x_1)^{\alpha+1} (\sigma_2 x_1 + \sigma_1 x_2 - \sigma_1 \sigma_2)^{-(\alpha+2)}, \quad (2.13)$$

$$x_2 \geq \sigma_2 > 0, \sigma_1 > 0, \alpha > 0,$$

cette densité est aussi de la forme de loi Pareto.

On retrouve également les expressions suivantes d'esperance et de la variance conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$, ainsi de la covariance et du coefficient de corrélation d'une loi de Pareto bivariée de type I.

$$E[X_2/(X_1 = x_1)] = \sigma_2 \left(1 + \frac{x_1}{\alpha \sigma_1} \right), \quad (2.14)$$

et

$$Var[X_2/(X_1 = x_1)] = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 \frac{(\alpha + 1)}{\alpha^2(\alpha - 1)} x_1^2, \quad (2.15)$$

et pour $\alpha > 2$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= \sigma_2 E(X_1) + \frac{\sigma_2}{\alpha \sigma_1} E(X_1^2) - \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

et par conséquent, le coefficient de corrélation entre les marges est

$$r(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.17)$$

Les contraintes sur les paramètres pour que la loi de Pareto bivariée existe imposent que $r(X_1, X_2) \geq 0$, donc les lois Pareto bivariée de type I sont à dépendance positive.

Remarque 2.2.

Revankar, Hartly et Pagano (1974) ont démontré que si X une v.a. positive avec une espérance finie, alors X est distribuée selon la loi de Pareto si et seulement si

$$E[X \setminus X > x] = h + gx, \quad \text{avec } g > 1.$$

De cette remarque, Arnold, Castillo, et Sarabia (1992) ont étendu le théorème suivant.

Théorème 2.2. (Arnold, Castillo, et Sarabia (1992))

Soient X_1, X_2 deux v.a. positives vérifiant les conditions suivantes

$$X_1 \setminus (X_2 = x_2) \stackrel{d}{=} P(I)(\sigma_1, \alpha + 1),$$

$$X_2 \setminus (X_1 = x_1) \stackrel{d}{=} P(I)(\sigma_2, \alpha + 1),$$

et $E[X_1 \setminus (X_2 = x_2)], E[X_2 \setminus (X_1 = x_1)]$ sont linéaires,

alors le v.a. (X_1, X_2) suit une loi de Pareto bivariée de premier type de densité

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\sigma_1 \sigma_2} \left(1 + \frac{x_1}{\sigma_1} + \frac{x_2}{\sigma_2} \right)^{-(\alpha+2)}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0. \quad (2.18)$$

Remarque 2.3. Pour que le couple (X_1, X_2) soit de loi Pareto bivariée de type I, Il suffit de supposer que les lois conditionnelles sont de Pareto et une des fonctions de régression est linéaire (n'est pas constante), d'une manière analogue, si les lois conditionnelles sont de Pareto et les marginales aussi, alors la densité jointe de (X_1, X_2) est la précédente (2.18).

2.2.2 Loi de Pareto bivariée de type II

Cette distribution a été introduite en (1962) par Mardia de la manière suivante.

Soit le couple de v.a. (Y_1, Y_2) admet une loi exponentielle bivariée de Wickse-Kibble de fonction de densité jointe

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{1 - \rho^2} I_0 \left(\frac{2\rho\sqrt{y_1 y_2}}{1 - \rho^2} \right) \exp \left\{ \frac{-(y_1 + y_2)}{1 - \rho^2} \right\}, \quad (2.19)$$

où $I_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel de premier type d'ordre 0.

Posons la transformation

$$X_1 = \sigma_1 e^{Y_1/\alpha_1},$$

$$X_2 = \sigma_2 e^{Y_2/\alpha_2},$$

cette loi bivariée est celle du couple (X_1, X_2) , dont les marges X_i ($i = 1, 2$) sont de lois Pareto de type I de paramètres de forme et d'échelle respectifs α_i, σ_i . La

fonction de densité jointe de (X_1, X_2) est alors obtenue à partir l'équation (2.19), donc

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(1 - \rho^2) x_1 x_2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1}{x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\sigma_2}{x_2} \right)^{\alpha_2} \right\}^{1/(1-\rho^2)} \\ \times I_0 \left(\frac{2\rho \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \log\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right) \log\left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)}}{1 - \rho^2} \right), \quad x_1 \geq \sigma_1, \quad x_2 \geq \sigma_2. \quad (2.20)$$

Dans ce cas, on a

$$E[X_2/(X_1 = x_1)] = \frac{\alpha_2 \sigma_2}{\alpha_2 - 1 + \rho^2} \left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right)^{\alpha_1 \rho^2 / (\alpha_1 - 1 + \rho^2)}, \quad (2.21)$$

$$Var[X_2/(X_1 = x_1)] = \alpha_2 \sigma_2^2 \left\{ \frac{\left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right)^{2\alpha_1 \rho^2 / (\alpha_1 - 2 + 2\rho^2)}}{\alpha_1 - 2 + 2\rho^2} - \frac{\left(\frac{x_1}{\sigma_1} \right)^{2\alpha_1 \rho^2 / (\alpha_1 - 1 + \rho^2)}}{\alpha_1 - 1 + \rho^2} \right\}, \quad (2.22)$$

$$r(X_1, X_2) = \frac{\rho^2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - 2)(\alpha_2 - 2)}}{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) - \rho^2} \quad \text{pour } \alpha_1 > 2, \alpha_2 > 2, \rho^2 < 1. \quad (2.23)$$

Comme dans le cas de la famille de Mardia de premier type, la corrélation entre X_1 et X_2 est positive.

2.2.3 Loi de Pareto bivariée de type IV

Arnold (1983) a présenté trois méthodes principales pour générer une distribution de Pareto bivariée de quatrième type.

Mixture d'une loi de Weibull et une loi Gamma

Supposons qu'une v.a. Z a une distribution Gamma standard avec une paramètre de forme α , et soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un couple de v.a., telle que la loi de X_i ($i = 1, 2$) sachant $Z = z$ est de Weibull de fonction de survie conditionnelle suivante

$$P(X_i > x_i | Z = z) = \exp\left\{-z \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i}\right\}, \quad \forall x_i > \mu_i,$$

alors

$$\mathbf{X} \sim P(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha).$$

Transformation de l'exponentielle

Si la v.a. U suit une loi exponentielle standard, alors $X = \mu + \sigma(\exp\{U/\alpha\} - 1)^\gamma$ est de loi $P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha)$.

Dans ce contexte, si on prend le couple de v.a. (U_1, U_2) dont les marginales suivent des lois exponentielles standard, et on définit X_1 et X_2 par la transformation ci-dessus ; alors (X_1, X_2) aura une loi de Pareto bivariée de quatrième type.

- Les deux distributions marginales sont de loi $P(IV)$.
- Il y a beaucoup de choix de la distribution bivariée pour le couple (U_1, U_2) avec des marges de lois exponentielles standard.

Reduction trivarié

Etant donnée trois variables aléatoires indépendantes U_i ($i = 1, 2, 3$) de lois $P(IV)$ $(\mu, \sigma, \gamma, \alpha_i)$ respectivement.

La loi de Pareto bivariée de type IV est construite comme la loi du couple (X_1, X_2) pour lequel

$$\begin{aligned} X_1 &= \min(U_1, U_3), \\ X_2 &= \min(U_2, U_3), \end{aligned}$$

dont la fonction de répartition de survie est donnée par

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ &= \left\{ 1 + \left(\frac{\max(x_1, x_2) - \mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha_3} \left\{ 1 + \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha_1} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha_2}, \quad x_1, x_2 \geq \mu, \end{aligned} \tag{2.24}$$

Remarque 2.4.

- Les deux marges sont de loi Pareto bivariée de type IV .
- La v.a. $\text{Min}(X_1, X_2)$ est distribuée selon la loi de $P(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.
- Cette famille de distributions bivariées ayant une propriété restrictive que les deux distributions marginales doivent porter des valeurs communes pour μ , σ et γ , puisque $\text{Min}(X_1, X_2)$ est de loi Pareto sauf que si les distributions marginales ont des valeurs communes pour ces paramètres.

2.3 La distribution de Pareto multivariée

2.3.1 Loi de Pareto multivariée de type I

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire de dimension d , \mathbf{X} est dite de loi Pareto multivariées de Mardia (1962) de type I [36], si sa fonction de densité jointe est donnée par

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= f_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d) \\ &= \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + d - 1) \left(\prod_{i=1}^d \sigma_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i}{\sigma_i} - d + 1 \right)^{-(\alpha+d)}, \\ &\quad x_i > \sigma_i > 0, \alpha > 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

on l'a notée par

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} MP^{(d)}(I)(\boldsymbol{\sigma}, \alpha),$$

tel que $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$.

Tous les sous-vecteurs issus de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ sont de densité jointe de la même forme que l'équation (2.25).

Arnold (1983) a observé que la fonction de répartition de survie d'un v.a. \mathbf{X} de loi $MP^{(d)}(I)(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ est de la forme

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i}{\sigma_i} - d + 1 \right)^{-\alpha}, \quad x_i > \sigma_i > 0, \alpha > 0, \tag{2.26}$$

cette dernière, elle cache le double rôle joué par le vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ comme un paramètre d'échelle au même temps un paramètre de position; et pour ce raison, il a recommandé cette représentation

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left(1 + \sum_{i=1}^d \frac{x_i - \sigma_i}{\sigma_i} \right)^{-\alpha}, \quad x_i > \sigma_i > 0, \alpha > 0. \tag{2.27}$$

2.3.2 Loi de Pareto multivariée de type II

Mardia (1962) a définie la distribution de Pareto multivariée de 2^{ème} type selon les étapes suivantes.

Premièrement, on note que si

$$f_X(x) = \alpha \sigma^\alpha x^{-\alpha-1}, \quad x > \sigma > 0, \alpha > 0,$$

alors $\log(X/\sigma)$ suit une loi exponentielle standard.

Si X_1, \dots, X_d d v.a. distribuées suivant des lois de Pareto avec densités

$$f_{X_i}(x_i) = \alpha_i \sigma_i^{\alpha_i} x_i^{-\alpha_i-1}, \quad x_i > \sigma_i > 0, \quad \alpha_i > 0,$$

donc les variables

$$Y_i = \alpha_i \log(X_i/\sigma_i), \quad i = 1, \dots, d$$

auront un certain forme des distributions exponentielles multivariées standard. Pour chaque forme de la distribution jointe sera correspond à une distribution de Pareto multivariée. Dans le cas générale, Mardia a supposé que le v.a. (Y_1, \dots, Y_d) est de loi exponentielle multivariée de Krishnamoorthy Parthasarathy (1951) (voir [34], chap.47).

Notons que les paramètres α_i ne doivent pas être les mêmes pour la distribution de Pareto multivariée de type *II*.

Il est utile de déterminer la distribution exponentielle multivariée correspondante à des variables aléatoires $Y_i = \alpha \log(X_i/\sigma_i)$, lorsque $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ suit une loi de $MP^{(d)}(I)$. De l'équation (2.25), on trouve facilement que

$$f_{Y_1, \dots, Y_d}(y_1, \dots, y_d) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+d-1)}{\alpha^d} \left(\sum_{i=1}^d e^{y_i/\alpha} - d + 1 \right)^{-(\alpha+d)} e^{\sum_{i=1}^d y_i/\alpha},$$

(2.28)

De la forme de la fonction de survie jointe donnée à l'équation (2.27), Arnold a considéré comme une généralisation naturelle par (introduisant un paramètre de position μ)

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left(1 + \sum_{i=1}^d \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{-\alpha}, \quad x_i \geq \mu_i, \quad \sigma_i > 0, \quad \alpha > 0. \quad (2.29)$$

qui est notée par

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} MP^{(d)}(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha),$$

où $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$.

Cette distribution a les propriétés suivantes

$$E(X_i) = \mu_i + \frac{\sigma_i}{\alpha - 1},$$

tandis que les variances et les covariances sont exactement les mêmes que ceux de la distribution de $MP^{(d)}(I)(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$.

La régression reste linéaire avec

$$E[X_i \setminus (X_j = x_j)] = \mu_i + \frac{\sigma_i}{\alpha} \left(1 + \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right),$$

$$Var[X_i \setminus (X_j = x_j)] = \sigma_i^2 \frac{(\alpha + 1)}{\alpha^2(\alpha - 1)} \left(1 + \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2.$$

Pour la distribution $MP^{(d)}(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ dans l'équation (2.29), nous avons la représentation suivante

$$X_i = \mu_i + \sigma_i(W_i/Z), \quad i = 1, \dots, d,$$

où les v.a W_i sont i.i.d. selon une loi exponentielle standard, et la v.a. Z suit une loi $Gamma(\alpha, 1)$ telle que Z et W_i sont indépendantes.

Pour le cas particulier où $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ dans (2.29), nous obtenons la distribution de $MP^{(d)}(II)(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ avec une fonction de survie jointe

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left(1 + \sum_{i=1}^d \frac{x_i}{\sigma_i} \right)^{-\alpha}, \quad x_i > 0, \sigma_i > 0, \alpha > 0. \quad (2.30)$$

Dans ce cas, on peut voir que la loi de X_i conditionnellement à $X_j = x_j$ est de $P(II)(0, \frac{\sigma_i}{\sigma_j}, 1)$ et que les v.a. $X_i \setminus X_j$ et X_j sont indépendantes.

Evidemment, les marges X_i sont de lois $P(II)(0, \sigma_i, \alpha)$.

Arnold, Castillo, et Sarabia (1994b) ont montré que si le v.a. \mathbf{X} est de loi $MP^{(d)}(II)(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ et si on le partitionne en deux sous vecteurs \mathbf{X}^* et \mathbf{X}^{**} à $d_1, d - d_1$ dimensions respectivement, alors $\mathbf{X}^* \stackrel{d}{=} MP^{(d_1)}(II)(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}^*, \alpha)$, dont $\boldsymbol{\sigma}^*$ est les d_1 premières composantes de $\boldsymbol{\sigma}$. En outre, $MP^{(d)}(II)(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ a des marges de loi $MP(II)$. Ainsi, $\mathbf{X}^* \setminus (\mathbf{X}^{**} = \mathbf{x}^{**})$ est distribuée selon une loi de $MP^{(d_1)}(II)(\mathbf{0}, c(\mathbf{x}^{**})\boldsymbol{\sigma}, \alpha + d - d_1)$, où $c(\mathbf{x}^{**}) = \left(1 + \sum_{i=d_1+1}^d x_i/\sigma_i \right)$.

2.3.3 Loi de Pareto multivariée de type III

Arnold a proposé une nouvelle extension de l'équation (2.29) qui résulte la distribution de Pareto multivariée de type III avec une fonction de survie jointe définie par

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right\}^{-1}, \quad (2.31)$$

$$x_i \geq \mu_i, \mu_i \in \mathbb{R}, \sigma_i > 0, \gamma_i > 0, 1 \leq i \leq d;$$

notée par

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} MP^{(d)}(III)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \text{où } \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d), \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d), \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d).$$

Les marginales sont de lois Pareto de type III.

2.3.4 Loi de Pareto multivariée de type IV

À partir l'équation (2.31), une simple extension multivariée conduit à la distribution de Pareto du quatrième type avec une fonction de survie jointe

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right\}^{-\alpha}, \quad (2.32)$$

et une fonction de densité jointe donnée par

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right\}^{(-\alpha+d)} \times \prod_{j=1}^d \frac{\alpha + j - 1}{\sigma_j \gamma_j} \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right)^{(1/\gamma_j)-1}. \quad (2.33)$$

on la note par

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha),$$

dont $x_i \geq \mu_i$, $\alpha > 0$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ et chaque $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i > 0$, $\gamma_i > 0$ pour $i = 1, \dots, d$.

Les termes de la matrice de variances-covariances d'un vecteur aléatoire \mathbf{X} de loi $MP^{(d)}(IV)(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} E(X_l) &= \frac{\sigma_l}{\Gamma(\alpha)} [\Gamma(\alpha - \gamma_l) \Gamma(\gamma_l + 1)], \quad \alpha > \gamma_l, l = 1, \dots, d; \\ E(X_l X_k) &= \frac{\sigma_l \sigma_k}{\Gamma(\alpha)} [\Gamma(\alpha - \gamma_l - \gamma_k) \Gamma(\gamma_l + 1) \Gamma(\gamma_k + 1)], \quad \alpha > \gamma_l + \gamma_k, \\ &\quad l, k = 1, \dots, d; \\ E(X_l^m) &= \frac{\sigma_l^m}{\Gamma(\alpha)} [\Gamma(\alpha - m\gamma_l) \Gamma(m\gamma_l + 1)], \quad \alpha > m\gamma_l; \\ Var(X_l) &= \frac{\sigma_l^2}{\Gamma^2(\alpha)} [\Gamma(\alpha - 2\gamma_l) \Gamma(2\gamma_l + 1) \Gamma(\alpha) - \Gamma^2(\alpha - \gamma_l) \Gamma^2(\gamma_l + 1)], \\ &\quad \alpha > 2\gamma_l; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_l, X_k) &= \frac{\sigma_l \sigma_k \Gamma(\gamma_l + 1) \Gamma(\gamma_k + 1)}{\Gamma^2(\alpha)} [\Gamma(\alpha - \gamma_l - \gamma_k) \Gamma(\alpha) \\
&\quad - \Gamma(\alpha - \gamma_k) \Gamma(\alpha - \gamma_l)]; \\
&1 \leq l \leq k \leq d, k = 2, \dots, d, \alpha > \gamma_l + \gamma_k, \alpha > \gamma_l, \alpha > \gamma_k.
\end{aligned}$$

2.4 Quelques propriétés de la distribution de Pareto multivariée générale

Les distributions de Pareto multivariées générales ($MP^{(d)}(I)$, $MP^{(d)}(II)$, $MP^{(d)}(III)$ et $MP^{(d)}(IV)$) ont une structure hiérarchique, dont les trois premières distributions sont identifiées comme des cas particulières de la quatrième comme nous montrons ci-dessous.

$$MP^{(d)}(I)(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{1}, \alpha),$$

$$MP^{(d)}(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha) = MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{1}, \alpha),$$

$$MP^{(d)}(III)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}) = MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, 1).$$

Il est facilement discerné que ces quatre distributions sont qualifiées comme des distributions de Pareto multivariées du fait qu'elles ont des marginales de Pareto. En outre, on peut vérifier que les distributions conditionnelles de lois $MP^{(d)}(I)$, (II) et (IV) sont aussi de Pareto. Yeh (1994, 2000) a étudié certaines propriétés et inférences pour ces quatre distributions. De nombreux articles traitent les distributions de Pareto bivariées et multivariées sont ensuite parues dans la littérature après Arnold 1983 (voir [34] et les références citées). Dans cette section, nous présentons d'autres propriétés de lois $MP^{(d)}(I)$, $MP^{(d)}(II)$, $MP^{(d)}(III)$ et $MP^{(d)}(IV)$ qui sont étudiées par Yeh ([51], [52]), dont quelques démonstrations de celles ci sont données dans l'annexe. Le théorème de caractéristiques de $MP^{(d)}(IV)$ est également prouvé. Il est démontré que la distribution de $MP^{(d)}(II)$ a la propriété de troncature. Ces quatre distributions de Pareto multivariées sont attendues pour répondre au queue supérieure de certaines données multivariées des revenus continus et certains autres variables multivariées socio- économiques. Dans la hiérarchie des quatre distributions, la famille de $MP^{(d)}(II)$ est la plus adaptée dans le contexte de fiabilité en raison de sa propriété de troncature. Aussi la structure fragile et la structure archimédienne de ces distributions sont étudiées. Yeh (2007) a montré que la copule de survie associée à la distribution de $MP^{(d)}(IV)$ est de Clayton d'un seul paramètre.

2.4.1 Propriétés du mélange des distributions de Pareto multivariées

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire de loi Pareto multivariée, si certains paramètres de la distribution $MP^{(d)}(IV)$ sont eux-mêmes des variables aléatoires, alors quelques résultats sont retenus, qui sont présentés dans cette section.

Propriété 2.1. *Soit α une v.a. de loi géométrique¹ de paramètre p , si la loi de v.a. \mathbf{X} conditionnellement à α est de $MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$ ($\mathbf{X} \setminus \alpha \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$), alors $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(III)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}p^\gamma, \boldsymbol{\gamma})$, où $\boldsymbol{\sigma}p^\gamma = (\sigma_1 p^{\gamma_1}, \dots, \sigma_d p^{\gamma_d})$ est le vecteur d'échelle.*

Dans la propriété 2.1., si le paramètre α est supposé de loi exponentielle de paramètre λ , alors la fonction de survie de \mathbf{X} est donnée dans la propriété suivante.

Propriété 2.2. *Soit $\alpha \sim Exp(\lambda)$, et $\mathbf{X} \setminus \alpha \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$. Ainsi la fonction de survie de \mathbf{X} est donnée par*

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} \right) \right\}^{-1}, \quad \forall \mathbf{x} \geq \boldsymbol{\mu}.$$

Il existe deux représentations d'un vecteur aléatoire de loi $MP^{(d)}(IV)$, elles sont précisées dans les deux propriétés suivantes.

Propriété 2.3. *Supposons qu'une v.a. $Z \sim Gamma(\alpha, 1)$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un v.a. tel que les variables aléatoires $X_i \setminus Z = z$ ($i = 1, \dots, d$) sont indépendantes et de loi Weibull avec une fonction de survie conditionnelle $P(X_i > x_i \setminus Z = z) = e^{-z \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}}}$, $\forall x_i > \mu_i$, alors $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$.*

Propriété 2.4. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$, alors pour tout $i = 1, \dots, d$, il existe d variables aléatoires W_i i.i.d. de loi exponentielle standard et une variable aléatoire Z de loi $Gamma(\alpha, 1)$ indépendant de W_i , tel que les v.a. X_i ont la représentation $X_i = \mu_i + \sigma_i (W_i / Z)^{\gamma_i}$.*

Puisque la loi de $MP^{(d)}(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ est une sous classe de la famille de lois $MP^{(d)}(IV)$ par égalant tous les paramètres γ_i à 1, donc il existe une représentation importante de la distribution de loi $MP^{(d)}(II)$, elle est donnée dans les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.1. *Supposons que la v.a. $Z \sim Gamma(\alpha, 1)$ et que les variables aléatoires $(X_i \setminus Z)_{i=1, \dots, d}$ sont i.i.d. de loi exponentielle avec une fonction de survie conditionnelle $P(X_i > x_i \setminus Z = z) = e^{-z \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)}$, $\forall x_i > \mu_i$. Alors $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(II)(\boldsymbol{\mu},$*

¹Dans la littérature, la loi géométrique de paramètre p correspond au rang du premier succès lors de la répétition d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p .

σ, α), où μ, σ et α sont les mêmes que ceux définis dans l'équation (2.32).

Corollaire 2.2. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim MP^{(d)}(II)(\mu, \sigma, \alpha)$, alors pour tout $i = 1, \dots, d$, les v.a X_i ont la représentation $X_i = \mu_i + \sigma_i(W_i/Z)$, où $W_i \stackrel{i.i.d}{\sim} Exp(1)$ et $Z \sim Gamma(\alpha, 1)$, W_i et Z sont indépendantes.

2.4.2 Valeurs extrêmes des distributions de Pareto multivariées

Par analogie aux résultats de Yeh [50], les échantillons des minima dans les familles de lois $MP^{(d)}(I)$, (II) et (IV) sont aussi de Pareto.

Soit $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,d})$, ($i = 1, \dots, n$) un échantillon tiré de l'un des populations de lois $MP^{(d)}(I)$, (II) et (IV) , alors on a la propriété suivante.

Propriété 2.5. Pour n échantillons indépendants $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ avec

- (1) $\mathbf{X}_i \sim MP^{(d)}(I)(\sigma, \alpha_i)$, alors $\min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{X}_i \sim MP^{(d)}(I)(\sigma, \sum_{i=1}^n \alpha_i)$;
- (2) $\mathbf{X}_i \sim MP^{(d)}(II)(\mu, \sigma, \alpha_i)$, alors $\min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{X}_i \sim MP^{(d)}(II)(\mu, \sigma, \sum_{i=1}^n \alpha_i)$;
- (3) $\mathbf{X}_i \sim MP^{(d)}(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \alpha_i)$, alors $\min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{X}_i \sim MP^{(d)}(IV)(\mu, \sigma, \gamma, \sum_{i=1}^n \alpha_i)$.

Dans la propriété 2.5., l'échantillon des minima $\min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{X}_i$ est un vecteur aléatoire de dimension d , ses coordonnées sont les échantillons des minima de $\{\mathbf{X}_i\}_1^n$, c'est-à-dire $\min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{X}_i := (X_{(1)}, \dots, X_{(d)})$, où $X_{(j)} = \min\{X_{1,j}, \dots, X_{n,j}\}$ pour $j = 1, \dots, d$. Il est facile de vérifier pour un échantillon tiré d'une population de loi $MP^{(d)}(III)$, que le v.a. de minima n'est pas de même loi que la population, pour raison que la loi $MP^{(d)}(III)$ est un cas particulier de loi $MP^{(d)}(IV)$ par mettre $\alpha_i = 1$. Ainsi par la propriété 2.5.(3), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.3. Supposons que $\{\mathbf{X}_i\}_1^n$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants de loi $MP^{(d)}(III)(\mu, \sigma, \gamma)$, alors $\min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{X}_i \sim MP^{(d)}(IV)(\mu, \sigma, \gamma, n)$.

Enfinement, il est noté qu'il existe une propriété intéressante sur la valeur extrême (le minimum) d'un v.a. de loi $MP^{(d)}(IV)$ qui est montrée dans la suite.

Propriété 2.6. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim MP^{(d)}(IV)(\mu \mathbf{1}, \sigma, \gamma \mathbf{1}, \alpha)$, soit $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq d} X_i$, alors $X_{(1)}$ est distribuée selon Pareto (IV) univariée de paramètres $\mu, \left(1 / \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{1/\gamma}\right)^\gamma, \gamma$ et α respectivement, c'est-à-dire

$$X_{(1)} \sim P(IV)(\mu, \left(1 / \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{1/\gamma}\right)^\gamma, \gamma, \alpha),$$

où $\mu \in \mathbb{R}, \gamma > 0$ et $\mu \mathbf{1} = (\mu, \dots, \mu), \gamma \mathbf{1} = (\gamma, \dots, \gamma)$ sont d -dimensionnels.

2.4.3 Caractérisation de la loi de $MP^{(d)}(IV)$ homogène

Yeh (1994) a étudié la loi de $MP^{(d)}(IV)$ homogène. Elle est définie par l'égalité de tous les γ_i , c'est-à-dire, $\gamma_i \equiv \gamma$ pour $i = 1, \dots, d$ dans la distribution de $MP^{(d)}(IV)(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$, alors la fonction de survie de cette loi est

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha}, \mathbf{x} > \mathbf{0}.$$

Selon Yeh (1994) et la propriété 2.6, il est constaté que le minimum d'un v.a. de loi $MP^{(d)}(IV)$ homogène est une v.a. de loi Pareto (IV). Actuellement, cette propriété conduit à une caractéristique de loi $MP^{(d)}(IV)$ homogène, dont elle est étendue pour la plus générale famille de loi $MP^{(d)}(IV)$ homogène ($MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$).

Théorème 2.3. Soit \mathbf{X} un v.a. de dimension d avec $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $\boldsymbol{\sigma} > \mathbf{0}$, tel que pour tout $\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\mu}$, les deux expressions suivantes sont équivalentes.

(1) Pour tout $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) > \mathbf{0}$ tel que $\|\mathbf{a}\| := \left(\sum_{i=1}^d a_i^{1/\gamma} \right)^\gamma = 1$, le minimum pondéré entre les composantes ordonnées de \mathbf{X} est défini par

$$m = \min_{1 \leq i \leq d} \left\{ \frac{X_i - \mu_i}{a_i \sigma_i} \right\}$$

est une v.a. de Pareto (IV), c'est-à-dire, $m \sim P(IV)(0, 1, \gamma, \alpha)$ pour $\alpha > 0$.

(2) La fonction de répartition de survie de \mathbf{X} est

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha}, \text{ pour } \mathbf{x} \geq \boldsymbol{\mu},$$

c'est-à-dire, $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$.

Démonstration.

(1) \implies (2) :

$\forall \mathbf{x} \geq \boldsymbol{\mu}$, soit $t = \left\| \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right\| := \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma} \right)^\gamma$, alors

$t^{1/\gamma} = \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma}$, on prend $a_i := \frac{(x_i - \mu_i)/\sigma_i}{t}$, $i = 1, \dots, d$, pour ce choix on a

$$\|\mathbf{a}\| = \left(\sum_{i=1}^d a_i^{1/\gamma} \right)^\gamma = \left(\frac{\sum_{i=1}^d ((x_i - \mu_i)/\sigma_i)^{1/\gamma}}{t^{1/\gamma}} \right)^\gamma = 1.$$

$\forall \mathbf{x} \geq \boldsymbol{\mu}$, la fonction de répartition de survie de \mathbf{X} est

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} > \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{X_d - \mu_d}{\sigma_d} > \frac{x_d - \mu_d}{\sigma_d}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - \mu_1}{a_1 \sigma_1} > t, \dots, \frac{X_d - \mu_d}{a_d \sigma_d} > t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\min_{i \leq 1 \leq d} \left\{ \frac{X_i - \mu_i}{a_i \sigma_i} \right\} > t\right) \\
&= (1 + t^{1/\gamma})^{-\alpha} \\
&= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \gamma \mathbf{1}, \alpha)$.

(2) \implies (1) :

Supposons que $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \gamma \mathbf{1}, \alpha)$. Dans ce cas, la fonction de survie de m est définie précédemment,

$$\begin{aligned}
\bar{F}_m(t) &= \mathbb{P}\left(\min_{i \leq 1 \leq d} \left\{ \frac{X_i - \mu_i}{a_i \sigma_i} \right\} > t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - \mu_1}{a_1 \sigma_1} > t, \dots, \frac{X_d - \mu_d}{a_d \sigma_d} > t\right) \\
&= P(X_1 > \mu_1 + a_1 \sigma_1 t, \dots, X_d > \mu_d + a_d \sigma_d t) \\
&= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{\mu_i + a_i \sigma_i t - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha} \\
&= \left\{ 1 + t^{1/\gamma} \sum_{i=1}^d (a_i)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha} \\
&= (1 + t^{1/\gamma})^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où, le minimum pondéré m est une v.a. de Pareto, dont $m \sim P(IV)(0, 1, \gamma, \alpha)$.

□

2.4.4 Propriété de troncature de la distribution de $MP^{(d)}(II)$

Arnold (1983) a mentionné que la distribution univariée de $P(II)$ tronquée est aussi une distribution univariée de $P(II)$. Cette propriété de troncature reste valable en parallèle à la distribution de $MP^{(d)}(II)$ multivariée.

Propriété 2.7. Si le v.a. $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$, alors la distribution de \mathbf{X} tronqué à gauche à \mathbf{x}_0 est $MP^{(d)}(II)$, tel que

$$\mathbf{X} \setminus \mathbf{x} > \mathbf{x}_0 \sim MP^{(d)}(II)(\mathbf{x}_0, \left(1 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{x_j^0 - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right) \boldsymbol{\sigma}, \alpha), \quad (2.34)$$

ou de façon équivalente

$$\mathbf{X} - \mathbf{x}_0 \setminus \mathbf{x} > \mathbf{x}_0 \sim MP^{(d)}(II)(\mathbf{0}, \left(1 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{x_j^0 - \mu_j}{\sigma_j}\right)\right) \boldsymbol{\sigma}, \alpha), \quad \text{pour tout } \mathbf{x}_0 > \boldsymbol{\mu}. \quad (2.35)$$

Il est observé de la propriété 2.7 que la famille de $MP^{(d)}(II)$ a la propriété de troncature, donc avec la hiérarchie du quatre distributions de Pareto multivariées, $MP^{(d)}(I)$, (II) , (III) , (IV) , la famille de $MP^{(d)}(II)$ est la plus adaptée dans les deux contextes d'économie et de fiabilité.

Dans le domaine de fiabilité, le concept de durée de vie résiduelle est toujours intéressant pour les chercheurs. Ainsi, on défini

Définition 2.2. Pour une fonction de répartition multivariée $F_{\mathbf{X}}(\cdot)$, la fonction de répartition conditionnelle $F^{\mathbf{x}}(\cdot)$ définie par

$$F^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbb{P}(\mathbf{x} < \mathbf{X} \leq \mathbf{x} + \mathbf{y} \setminus \mathbf{X} > \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{y} > \mathbf{0},$$

est nommée la fonction des durées de vie résiduelles de v.a. \mathbf{X} .

À partir les quatre distributions de Pareto, seule la famille de lois $MP^{(d)}(II)$ et donc la famille de $MP^{(d)}(I)$ ont des fonctions des durées de vie résiduelles multivariées explicites et traitables. Pour tout $\mathbf{x} > \boldsymbol{\mu}$, la fonction de survie des durées de vie résiduelles de v.a. \mathbf{X} de loi $MP^{(d)}(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ est la suivante

$$\begin{aligned} F^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x} + \mathbf{y} \setminus \mathbf{X} > \mathbf{x}) \\ &= \frac{\left\{1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i + y_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right\}^{-\alpha}}{\left\{1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right\}^{-\alpha}} \\ &= \left\{1 + \sum_{i=1}^d \frac{y_i}{\left(1 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j}\right)\right) \sigma_i}\right\}^{-\alpha}, \quad \forall \mathbf{y} > \mathbf{0}. \end{aligned}$$

L'expression résultat ci-dessus est aussi une fonction de répartition de survie de $MP^{(d)}(II)(\mathbf{0}, \left(1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right) \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$, pour tout $\mathbf{x} > \boldsymbol{\mu}$. Cette remarque est équivalente à le fait que la famille de $MP^{(d)}(II)$ à la propriété de troncature, qui est démontrée dans la propriété précédente.

2.4.5 La structure de fragilité et la structure archimédienne de la distribution de $MP^{(d)}$

Arnold en 1996, a mentionné que tout mélange des distributions avec support $[0, \infty)$ peut être utilisé pour construire un modèle de fragilité, ce résultat peut être étendu en dimension d ($d \geq 2$) en supposant l'existence d'une contrainte commune sur l'indépendance conditionnelle des composantes. Ce fait a conduit Yeh [52] à étudier la structure de fragilité des quatre distributions de Pareto multivariées. En raison de la hiérarchie de ces distributions, il suffit d'étudier la distribution de $MP^{(d)}(IV)$.

Oakes (1989) a montré que toutes les distributions bivariées générées par les modèles de fragilité sont des sous classes des distributions archimédienne. Dans cette section, la structure de fragilité et la structure archimédienne de la distribution de $MP^{(d)}$ ont été étudiées.

La structure de fragilité de la distribution de $MP^{(d)}$

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire de l'une de lois Pareto multivariées générales. Selon la définition de Oakes, la distribution de $MP^{(d)}(IV)$ est un modèle de survie multivariée induit par fragilité. Les d composantes de \mathbf{X} , $\{X_i\}_1^d$, peut être considérées comme d temps de survie observés dépendants à travers un modèle de hazard proportionnel sur la même variable, cette dépendance commune induite une association entre les temps observés.

En générale, un modèle de fragilité est défini comme suit.

Définition 2.3. Soit $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$, une représentation de fragilité de la distribution du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ avec support $\prod_{i=1}^d [\mu_i, \infty)$ est de la forme

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}) = \int_0^\infty \left[\prod_{i=1}^d \bar{F}_0(x_i) \right]^z dM(z), \quad (2.36)$$

où $\bar{F}_0(\cdot)$ est une fonction de survie univariée avec support $[\mu_i, \infty)$ et $M(\cdot)$ est une distribution de mélange reflétant un stress environnemental. Le modèle de fragilité (équation. (2.36)) suppose l'existence d'une contrainte commune sur l'indépendance conditionnelle des composantes.

La fonction $\bar{F}_0(\cdot)$ est une fonction de survie continue, c'est la fonction de survie de X_i sachant $Z = z$ pour tout $i = 1, \dots, d$, c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}(X_i > x_i \setminus Z = z) = \{\bar{F}_0(x_i)\}^z,$$

et la v.a. Z est appelée une fragilité.

Soit $\Psi_Z(\cdot)$ la transformée de Laplace de Z , c'est à dire

$$\Psi_Z(t) = E(e^{-tz}) = \int_0^\infty e^{-tz} dM(z).$$

Le résultat de Oakes peut être étendu au cas multivariée ($d \geq 3$), le modèle de fragilité prend la forme

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}) = \int_0^\infty e^{-z\{-\sum_{i=1}^d \ln(\bar{F}_0(x_i))\}} dM(z) = \Psi_Z\left(-\sum_{i=1}^d \ln(\bar{F}_0(x_i))\right). \quad (2.37)$$

Arnold (1996) a remarqué que toute distribution de mélange $M(\cdot)$ peut être utilisée dans tel modèle de fragilité. Ce qui a motivé Yeh (2007) à étudier la propriété de fragilité de loi Pareto multivariée générale.

Propriété 2.8. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$, la v.a. de fragilité Z est de loi $\text{Gamma}(\alpha, 1)$. Supposons que les v.a. $(X_i \setminus Z)_{i=1, \dots, d}$ sont indépendantes et distribuées selon une loi de Weibull, avec une fonction de survie conditionnelle

$$\mathbb{P}(X_i > x_i \setminus Z = z) = \{\bar{F}_0(x_i)\}^z = \begin{cases} e^{-z\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^{1/\gamma_i}}, & \forall x_i > \mu_i, \\ 1, & \text{si non.} \end{cases}$$

Alors, la fonction de répartition de survie jointe de \mathbf{X} peut être calculée par les deux représentations suivantes

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}) = \Psi_Z\left(-\sum_{i=1}^d \ln(\bar{F}_0(x_i))\right) = \Psi_Z\left(\sum_{i=1}^d \Psi_Z^{-1}(\bar{F}_{X_i}(x_i))\right), \quad (2.38)$$

où $\Psi_Z(\cdot)$ est la transformée de Laplace de Z , $\Psi_Z^{-1}(\cdot)$ est sa fonction inverse,

$$\bar{F}_0(x_i) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^{1/\gamma_i}}, & \forall x_i > \mu_i \\ 1, & \text{si non,} \end{cases}$$

et $\bar{F}_{X_i}(x_i)$ est la fonction de survie marginale de chaque v.a. $X_i \sim P(IV)$ $(\mu_i, \sigma_i, \gamma_i, \alpha)$.

Démonstration. La transformée de Laplace de la v.a. $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ est

$$\Psi_Z(t) = E(e^{-tz}) = (1+t)^{-\alpha}, \quad \forall t > 0,$$

sa fonction inverse est $\Psi_Z^{-1}(u) = u^{-1/\alpha} - 1$, $0 \leq u \leq 1$, alors la première représentation est

$$\begin{aligned}
\Psi_Z \left(- \sum_{i=1}^d \ln(\bar{F}_0(x_i)) \right) &= \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right) \\
&= \left(1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right)^{-\alpha} \\
&= \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}).
\end{aligned}$$

La deuxième représentation est

$$\begin{aligned}
\Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \Psi_Z^{-1}(\bar{F}_{X_i}(x_i)) \right) &= \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \{ (\bar{F}_{X_i}(x_i))^{-1/\alpha} - 1 \} \right) \\
&= \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \left\{ \left[\left(1 + \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right)^{-\alpha} \right]^{-1/\alpha} - 1 \right\} \right) \\
&= \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \left\{ \left[1 + \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right] - 1 \right\} \right) \\
&= \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right) \\
&= \left(1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right)^{-\alpha} = \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}). \quad \square
\end{aligned}$$

Oakes a indiqué que les distributions bivariées générées par les modèles de fragilité sont une sous classe des distributions archimédiennes étudiées par Genest et Mackay (1986). La définition de la distribution archimédienne générale est donnée ci-dessous.

Définition 2.4. Soit $\bar{F}_{\mathbf{X}}(\cdot)$ la fonction de survie de \mathbf{X} avec support $\prod_{i=1}^d [\mu_i, \infty)$ et il existe une fonction positive décroissante $\varphi(\cdot)$ avec $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(\cdot) < 0$, $\varphi''(\cdot) \geq 0$ telle que $\bar{F}_{\mathbf{X}}(\cdot)$ peut être écrite comme suit

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}) = \varphi \left(\sum_{i=1}^d \varphi^{-1}(\bar{F}_{X_i}(x_i)) \right). \quad (2.39)$$

Pour tout $\mathbf{x} > \boldsymbol{\mu}$, où $\varphi^{-1}(\cdot)$ est la fonction inverse de $\varphi(\cdot)$ et $\bar{F}_{X_i}(x_i)$ est la fonction de survie marginale de X_i pour $1 \leq i \leq d$. Alors, on dit que \mathbf{X} a une distribution archimédienne.

Copule de survie de la distribution de $MP^{(d)}$

Certain plus générales distributions bivariées et multivariées de Pareto sont données par Arnold (1983) et Yeh (2004a, b). La copule de survie de dimension d ($d \geq 2$) peut être définie par

$$\hat{C}_\alpha(\mathbf{u}) = \bar{F}_{\mathbf{X}}(\bar{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, \bar{F}_{X_d}^{-1}(u_d)), \quad (2.40)$$

où $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$ et $\bar{F}_{X_i}^{-1}(\cdot)$ est l'inverse généralisé de $\bar{F}_{X_i}(\cdot)$, la fonction de survie marginale de X_i , pour $1 \leq i \leq d$. Notons que chaque v.a. X_i est distribuée selon une loi de $MP^{(d)}(IV)(\mu_i, \sigma_i, \gamma_i, \alpha)$, donc les X_i ne sont pas i.i.d. et elles peuvent avoir des ensembles des supports différents $[\mu_i, \infty)$ pour tout $i = 1, \dots, d$.

Comme on a dit au premier chapitre, Sklar s'est avéré un théorème qui met en lumière le rôle de copule joué dans la relation entre les fonctions de répartition multivariées et leurs marginales univariées. Leur résultat peut être étendu par analogie à la d -copule de survie et est indiqué dans le théorème suivant

Théorème 2.4. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire de dimension d et $\bar{F}_{\mathbf{X}}(\cdot)$ sa fonction de répartition multivariée de survie avec fonctions de répartition marginales de survie $\bar{F}_{X_1}(\cdot), \dots, \bar{F}_{X_d}(\cdot)$. Alors il existe une d -copule de survie tel que, pour toute $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \prod_{i=1}^d [\mu_i, \infty)$,*

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \hat{C}(\bar{F}_{X_1}(x_1), \dots, \bar{F}_{X_d}(x_d)). \quad (2.41)$$

Si les fonctions $\bar{F}_{X_i}(\cdot)$ sont continues, alors $\hat{C}(\cdot)$ est unique.

Inversement, si $\hat{C}(\cdot)$ est une d -copule de survie et si $\bar{F}_{X_i}(\cdot)$ sont des fonctions de répartition univariées de survie, alors la fonction $\bar{F}_{\mathbf{X}}(\cdot)$ définie par (2.41) est une fonction de répartition d -dimensionnelle de survie de marginales $\bar{F}_{X_i}(\cdot)$, $i = 1, \dots, d$.

Corollaire 2.4. *Soit $\bar{F}_{\mathbf{X}}(\cdot), \hat{C}(\cdot), \bar{F}_{X_i}(\cdot), 1 \leq i \leq d$ être définies comme dans le théorème 2.4; $\bar{F}_{X_i}^{-1}(\cdot)$ est l'inverse généralisé de $\bar{F}_{X_i}(\cdot)$. Alors la copule $\hat{C}(\cdot)$ associée à $\bar{F}_{\mathbf{X}}(\cdot)$ est donnée par*

$$\hat{C}(\mathbf{u}) = \bar{F}_{\mathbf{X}}(\bar{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, \bar{F}_{X_d}^{-1}(u_d)). \quad (2.42)$$

On reviendra à la distribution de Pareto multivariée générale; les v.a. X_i dans \mathbf{X} sont de lois $P(IV)(\mu_i, \sigma_i, \gamma_i, \alpha)$, donc $\bar{F}_{X_i}(x_i) = \left\{ 1 + \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right\}^{-\alpha}$, l'inverse généralisé de $\bar{F}_{X_i}(\cdot)$ est dérivé de la relation

$$u_i = \bar{F}_{X_i}(\bar{F}_{X_i}^{-1}(u_i)) = \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{F}_{X_i}^{-1}(u_i) - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right\}^{-\alpha} \quad \text{pour tout } u_i \in [0, 1],$$

d'où $\bar{F}_{X_i}^{-1}(u_i)$ est résolu comme $\bar{F}_{X_i}^{-1}(u_i) = \mu_i + \sigma_i \left(u_i^{-1/\alpha} - 1\right)^{\gamma_i}$, $1 \leq i \leq d$.

Selon le corollaire 2.4, la copule de survie d'une loi $MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$ est

$$\begin{aligned} \hat{C}(\mathbf{u}) &= \bar{F}_{\mathbf{X}} \left(\mu_1 + \sigma_1 \left(u_1^{-1/\alpha} - 1\right)^{\gamma_1}, \dots, \mu_d + \sigma_d \left(u_d^{-1/\alpha} - 1\right)^{\gamma_d} \right) \\ &= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(u_i^{-1/\alpha} - 1\right) \right\}^{-\alpha} \\ \hat{C}(\mathbf{u}) &= \left\{ \sum_{i=1}^d u_i^{-1/\alpha} - (d-1) \right\}^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

pour $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$.

De l'équation (2.43), il est discerné que la copule de survie de loi $MP^{(d)}(IV)$ ne dépend que de paramètre α et elle est indépendante des trois autres paramètres $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}$. Pour toute d -copule, on a le théorème suivant.

Théorème 2.5. *Soient X_1, \dots, X_d des variables aléatoires des fonctions de répartition de survie continues $\bar{F}_1(\cdot), \dots, \bar{F}_d(\cdot)$, et $\bar{F}_{\mathbf{X}}(\cdot)$ la fonction de répartition de survie jointe du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ associée à une copule de survie $\hat{C}(\cdot)$. Soit $(g_1(\cdot), \dots, g_d(\cdot))$ une suite de fonctions strictement croissantes. Alors, la fonction de répartition jointe du vecteur aléatoire $(g_1(X_1), \dots, g_d(X_d))$ est aussi associée à la même copule de survie $\hat{C}(\cdot)$.*

Ainsi, la copule $\hat{C}(\cdot)$ est invariante par les transformations strictement croissantes de variables aléatoires.

Dans le cas de loi de $MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$, pour toutes les v.a. X_i ($1 \leq i \leq d$) la fonction strictement croissante $g_i(X_i)$ est choisie comme $g_i(X_i) = \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^{1/\gamma_i} := Z_i$ avec le paramètre de position $\mu_i \in \mathbb{R}$, le paramètre d'échelle $\sigma_i > 0$ et le paramètre d'inégalité $\gamma_i > 0$.

Si le théorème 2.5 est appliquée sur le vecteur aléatoire $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$, alors la d -copule de survie de \mathbf{Z} est la même que l'équation (2.43). Elle est déterminée dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.5. *Soit $\mathbf{Z} \sim MP^{(d)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \alpha)$ et $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$, alors les d -copules de survie de \mathbf{Z} et \mathbf{X} sont les mêmes, c'est-à-dire*

$$\hat{C}(\mathbf{u}) = \left\{ \sum_{i=1}^d u_i^{-1/\alpha} - (d-1) \right\}^{-\alpha}, \quad \text{pour tout } \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d.$$

Démonstration. On peut facilement de vérifier que $Z_i \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^{1/\gamma_i}$ $1 \leq i \leq d$, donc toute v.a. Z_i est seulement une fonction strictement croissante de v.a X_i .

□

De équations (2.33) et (2.38), il est discerné qu'il y a une autre expression de la copule de survie de la distribution de $MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$ avec la propriété suivante.

Propriété 2.9. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$, alors la copule de survie de \mathbf{X} donnée dans l'équation (2.38) est une copule archimédienne, c'est-à-dire, il existe une fonction positive décroissante $\varphi(\cdot)$ avec $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(\cdot) < 0$, $\varphi''(\cdot) \geq 0$ tel que

$$\hat{C}(\mathbf{u}) = \varphi \left(\sum_{i=1}^d \varphi^{-1}(u_i) \right), \quad (2.44)$$

avec $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$.

Démonstration. Selon l'équation (2.43), si la fonction $\varphi(\cdot)$ est choisie pour être la transformée de Laplace d'une v.a Z de loi $Gamma(\alpha, 1)$, c'est-à-dire $\varphi(t) = \Psi_Z(t) = E(e^{-tz}) = (1+t)^{-\alpha}$, $\forall t > 0$, son inverse est $\Psi_Z^{-1}(t) = t^{-1/\alpha} - 1$, $0 \leq t \leq 1$. De (2.43), la copule de survie de \mathbf{X} est

$$\begin{aligned} \hat{C}(\mathbf{u}) &= \bar{F}_{\mathbf{X}} \left(\mu_1 + \sigma_1 \left(u_1^{-1/\alpha} - 1 \right)^{\gamma_1}, \dots, \mu_d + \sigma_d \left(u_d^{-1/\alpha} - 1 \right)^{\gamma_d} \right), \text{ par (2.39)} \\ &= \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \Psi_Z^{-1} \left(\bar{F}_{X_i} \left(\mu_i + \sigma_i \left(u_i^{-1/\alpha} - 1 \right)^{\gamma_i} \right) \right) \right) \\ &= \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \Psi_Z^{-1} (u_i) \right) \\ &= \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \left(u_i^{-1/\alpha} - 1 \right) \right) \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^d \left(u_i^{-1/\alpha} - 1 \right) \right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{u} \in [0, 1]^d$, où $\bar{F}_{X_i}(\cdot)$ est la fonction de répartition de survie de \mathbf{X} . Ainsi $\hat{C}(\mathbf{u})$ peut être exprimée comme

$$\hat{C}(\mathbf{u}) = \Psi_Z \left(\sum_{i=1}^d \Psi_Z^{-1} (u_i) \right), \quad (2.45)$$

selon le définition de Nelson (1998), $\hat{C}(\mathbf{u})$ est une copule archimédienne.

□

De ce qui précède, nous savons que la fonction de répartition de survie de $MP^{(d)}(IV)$ $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$ est dans la famille de Clayton (1978) d'une seule paramètre, dont on fait une nouvelle notation de la copule de survie associée : $\hat{C}_\alpha(\mathbf{u})$ pour le paramètre de forme $\alpha \geq 0$.

La fonction $\Psi_Z(\cdot)$ est le générateur archimédienne de la distribution de $MP^{(d)}(IV)$ $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$.

Remarque. 2.5.

- (1) *De l'équation (2.38) et (2.45), nous savons que la distribution de $MP^{(d)}(IV)$ est un modèle multivarié de marginales spécifiés et sa copule de survie a la caractéristique désirable que la structure de dépendance est modélisée séparément de distributions marginales. Le paramètre de forme $\alpha (> 0)$ mesure l'association deux-à-deux entre deux v.a. et il est lié par tau de Kendall par*

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \hat{C}_\alpha(u_i, u_j) d\hat{C}_\alpha(u_i, u_j) - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \frac{\Psi_\alpha^{-1}(t)}{(\Psi_\alpha^{-1}(t))'} dt + 1 \\ &= \frac{1}{1 + 2\alpha}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

pour toute paire (u_i, u_j) dans $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$, $i \neq j$, où $\Psi_\alpha^{-1}(t) = t^{-1/\alpha} - 1$, $0 < t < 1$.

- (2) De (2.46), il est clair que quand $\alpha \rightarrow 0^+$, $\tau \rightarrow 1$ et quand $\alpha \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$. En générale, $0 < \tau < 1$ c'est-à-dire, la distribution de $MP^{(d)}(IV)$ a une association positive.
- (3) La distribution de $MP^{(d)}(IV)$ a une copule archimédienne, quelques propriétés de cette classe des copules sont données dans le premier chapitre, et comme on a mentionné que cette classe a été étudiée intensivement par Genest et Mackay (1986) et Oakes (1989).

2.5 Estimation des paramètres de loi de Pareto bivariée

L'estimation des paramètres d'un modèle statistique est une technique importante sous-jacente dans l'analyse statistique. Bien que le statisticien peut effectuer certaines analyse intuitive, l'estimation nécessite une méthode spécifique. Dans cette section, on étudie différentes méthodes d'estimation des paramètres de loi de Pareto bivariée (IV) homogène, $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{\gamma}\mathbf{1}, \alpha)$, dont nous appliquons quelques méthodes classiques d'estimation qui sont la méthode du maximum de vraisemblance et celle de moments. Basant sur les copules, différentes méthodes

ont été développées : paramétrique comme la méthode des fonctions d'inférence par les marginales et deux méthodes semi paramétriques telle que la méthode de pseudo-maximum de vraisemblance et la méthode d'inversion du tau de Kendall et de rho de Spearman, et une autre méthode dite la méthode de la distance minimale, dont toutes ces méthode donnent des estimateurs asymptotiquement normale et parmi elles, nous présentons et appliquons seulement deux méthodes.

Pour les différentes méthodes d'estimation des paramètres de loi de Pareto bivariée (IV) homogène, les notations suivantes sont utilisées

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \boldsymbol{\theta} = (\gamma, \alpha)^t,$$

et par conséquent le vecteur des paramètres inconnus est $\boldsymbol{\theta}$. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'estimation du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ à partir de n vecteurs $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$, où $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2})$ suit une loi $MP^{(2)}(IV)$ de paramètre le vecteur $\boldsymbol{\theta}$, c'est-à-dire, à partir de n paires indépendantes de v.a. $(x_{i1}, x_{i2})^T$ dont la densité jointe est donnée par

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma^2} \alpha(\alpha + 1) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^2 x_j^{1/\gamma} \right\}^{-(\alpha+2)} \prod_{j=1}^2 x_j^{1/\gamma-1}, \quad (2.47)$$

$$x_j > 0, \alpha > 0, \gamma > 0.$$

2.5.1 Méthode du Maximum de Vraisemblance (MV)

La méthode du maximum de vraisemblance peut être appliquée à l'échantillon \mathbf{X} , une expression explicite de la densité étant disponible, alors la fonction de vraisemblance de \mathbf{X} s'écrit

$$L(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\gamma^{2n}} \alpha^n (\alpha + 1)^n \prod_{i=1}^n \left\{ 1 + \sum_{j=1}^2 x_{ij}^{1/\gamma} \right\}^{-(\alpha+2)} \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^2 x_{ij}^{1/\gamma-1} \right),$$

on prend le logarithme,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) &= \log L(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) \\ &= -2n \log(\gamma) + n \{ \log(\alpha + 1) + \log(\alpha) \} - (\alpha + 2) \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 + \sum_{j=1}^2 x_{ij}^{1/\gamma} \right\} \\ &\quad + (1/\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \log(x_{ij}). \end{aligned}$$

En dérivant la log-vraisemblance par rapport à $\boldsymbol{\theta}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) de $\boldsymbol{\theta}$ est obtenu comme la solution du système

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial l(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma}, \frac{\partial l(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} \right)^t = \mathbf{0}^t, \quad (2.48)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ est appelée la fonction de score. Les équations des dérivées obtenues sont

$$\frac{\partial l(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} = -\frac{2n}{\gamma} + \frac{(\alpha + 2)}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sum_{j=1}^2 x_{ij}^{1/\gamma} \log(x_{ij})}{1 + \sum_{j=1}^2 x_{ij}^{1/\gamma}} \right\} - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \log(x_{ij}) = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial l(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} = \frac{n(2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha + 1)} - \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 + \sum_{j=1}^2 x_{ij}^{1/\gamma} \right\} = 0, \quad (2.50)$$

on remarque que les équations (2.49) et (2.50) ne sont pas linéaires donc elles n'admettent pas des solutions explicites, dont on peut les résoudre par des algorithmes numériques.

2.5.2 Méthode des Moments

Un chemin alternative pour estimer γ et α est la méthode des moments (MM). Nous savons que chaque X_j ($j = 1, 2$) dans $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \sim MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma \mathbf{1}, \alpha)$ est une v.a. de loi $P(IV)(0, 1, \gamma, \alpha)$. Alors, les moments d'ordre k de X_j sont donnés par

$$E(X_j^k) = \Gamma(\alpha - \gamma k) \Gamma(1 + \gamma k) / \Gamma(\alpha), \quad -\frac{1}{\gamma} < k < \frac{\alpha}{\gamma}, \quad j = 1, 2.$$

Pour $j \in \{1, 2\}$, $\{X_{1j}, \dots, X_{nj}\}$ sont des v.a. i.i.d. selon $P(IV)(0, 1, \gamma, \alpha)$; l'estimation par la méthode des moments de γ et α consiste à égaliser le premier et le deuxième moments théoriques et les moments empiriques de façon à obtenir

$$\begin{cases} M_1 &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n X_{ij} &= \frac{\Gamma(\alpha - \gamma) \Gamma(1 + \gamma)}{\Gamma(\alpha)}, \\ M_2 &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n (X_{ij})^2 &= \frac{\Gamma(\alpha - \gamma) \Gamma(1 + \gamma)}{\Gamma(\alpha)}. \end{cases} \quad (2.51)$$

La résolution du système (2.51) faite par des procédures numériques dont il est possible qu'il n'admet pas de solution, mais ce problème peut être résolu par prendre des échantillons de grandes tailles.

2.5.3 Méthodes basées sur les copules

a- Méthode du Maximum de Vraisemblance exacte (MV)

Nous avons vu que, grâce au théorème de Sklar, il est possible d'exprimer la densité d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) en fonction de la densité de la copule associée c et de ses marginales, soit

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \cdot \prod_{j=1}^d f_j(x_j).$$

Ainsi, la fonction de log-vraisemblance associée au vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) , où $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ peut se réécrire sous la forme suivant

$$l(\mathbf{X}; \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^n \ln c(F_1(x_{i1}), \dots, F_d(x_{id})) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_{ij}),$$

où $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d, \alpha)$ est le vecteur représentant l'ensemble des paramètres (paramètre des marginales et paramètre de la copule).

Nous pouvons remarquer que l'estimation des paramètres peut être réalisée en deux étapes

- Estimation des paramètres des marginales γ_j .
- Estimation de paramètre de la copule α .

Les estimateurs des paramètres sont obtenus donc par maximisation de la log-vraisemblance, soit

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} := \arg \max_{\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma} l(\mathbf{X}; \boldsymbol{\gamma}),$$

dont Γ représente l'ensemble de définition de $\boldsymbol{\gamma}$.

Cette méthode permet donc de nous renseigner sur l'estimation de l'ensemble des paramètres ainsi que leur significativité. Néanmoins, en présence d'un grand nombre de paramètres, les temps de calcul peuvent s'avérer très longs car elle estime conjointement les paramètres de la copule et les marginales. Cette méthode est la méthode classique.

b- Méthode des fonctions d'inférence par les marginales (IFM)

Comme nous l'avons remarqué plus haut, la fonction de log-vraisemblance comporte deux termes bien distincts, un s'exprimant en fonction de la densité de la copule et l'autre en fonction des marginales de chacune des variables aléatoires. C'est sur cette constatation que s'appuie la méthode IFM.

Cette méthode d'estimation a été proposée par Shih et Louis (1995), avant d'être généralisée par Xu (1996).

La méthode d'estimation IFM se décompose donc en deux étapes dont les concepts principaux sont présentés par exemple par Joe [29]. La première étape consiste à estimer séparément les paramètres des lois marginales à partir des vraisemblances de ces lois univariées. Les paramètres de dépendance sont ensuite estimés à partir des estimateurs précédents et de la vraisemblance jointe de la loi multivariée.

D'où, l'estimation des paramètres est réalisée selon la procédure suivante

- Estimation des paramètres de chaque marginale γ_j par

$$\hat{\gamma}_j = \arg \max l_j(X_j; \gamma_j),$$

telle que

$$l_j(X_j; \gamma_j) = \sum_{i=1}^n \ln f_j(x_{ij}, \gamma_j).$$

- Estimation de paramètre de la copule α en utilisant les estimateurs $\hat{\gamma}_j$ obtenus dans la première étape de la méthode, donc

$$\hat{\alpha} = \arg \max l(\mathbf{X}; \alpha),$$

où

$$l(\mathbf{X}; \alpha) = \sum_{i=1}^n \ln c(F_1(x_{ij}, \hat{\gamma}_1), \dots, F_d(x_{ij}, \hat{\gamma}_d)).$$

Dans le cadre des lois $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$, on a démontré précédemment que la copule de survie associée à cette famille est la copule de Clayton, c'est-à-dire

$$\bar{F}(\mathbf{x}) = \hat{C}_\alpha(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)) \text{ tel que } \hat{C}_\alpha(u_1, u_2) = (u_1^{-\frac{1}{\alpha}} + u_2^{-\frac{1}{\alpha}} - 1)^{-\alpha},$$

la densité de cette copule est donnée par

$$c_\alpha(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \hat{C}_\alpha(u_1, u_2) = \frac{1}{\alpha} (\alpha + 1) u_1^{-\frac{1}{\alpha}-1} u_2^{-\frac{1}{\alpha}-1} \left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}} + u_2^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)^{-\alpha-2}.$$

D'où

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c_\alpha(\bar{F}_{X_1}(x_1), \bar{F}_{X_2}(x_2)) \cdot \prod_{j=1}^2 f_{X_j}(x_j), \text{ dont la fonction de survie d'une}$$

v.a. de loi $P(IV)(0, 1, \gamma, \alpha)$ est donnée par

$$\bar{F}_{X_j}(x_j) = \left\{ 1 + x_j^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha}, \quad j = 1, 2, \\ x_j > 0, \alpha > 0, \gamma > 0,$$

et la densité est

$$f_{X_j}(x_j) = \frac{1}{\gamma} \alpha \left\{ 1 + x_j^{1/\gamma} \right\}^{-(\alpha+1)} x_j^{1/\gamma-1}.$$

Alors l'estimation du vecteur θ est obtenu par maximisation des deux fonctions de log-vraisemblance précédentes selon ces deux étapes

- On estime le paramètre inconnu γ à partir les lois marginales de X_1 et X_2 . Cette estimation est effectuée en maximisant par rapport à γ la somme des log vraisemblances marginales $l_1(X_1; \gamma)$ et $l_2(X_2; \gamma)$ suivante

$$\begin{aligned} l_1(X_1; \gamma) + l_2(X_2; \gamma) &= -2n \log(\gamma) + 2n \log(\alpha) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \log \left\{ 1 + x_{ij}^{1/\gamma} \right\} \\ &\quad + (1/\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \log(x_{ij}). \end{aligned}$$

- Ensuite, on estime α en maximisant la fonction de log vraisemblance jointe $l(\mathbf{X}; \alpha)$ par rapport à α dont le paramètre γ est remplacé par son estimateur

$$\begin{aligned} l(\mathbf{X}; \alpha) &= -n \log(\alpha) + n \log(\alpha + 1) + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \log \left\{ 1 + x_{ij}^{1/\gamma} \right\} \\ &\quad - (\alpha + 2) \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 + \sum_{j=1}^2 x_{ij}^{1/\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

c- Méthode d'inversion de tau de Kendall et de rho de Spearman (méthode des moments)

Cette méthode est notamment utilisée pour les mesures de dépendance, l'estimateur des moments de la mesure de dépendance considérée est alors simplement obtenu en égalant l'expression paramétrique (analytique) de la mesure avec un estimateur non paramétrique de cette même mesure. C'est-à-dire, Soit

$$\begin{cases} \tau(\alpha) &= \hat{\tau}_n \\ \rho_s(\alpha) &= \hat{\rho}_n \end{cases},$$

alors les estimateurs basant sur l'inversion du tau de Kendall et l'inversion du rho de Spearman $\hat{\alpha}_\tau$ et $\hat{\alpha}_\rho$ sont obtenus par

$$\hat{\alpha}_\tau = \tau^{-1}(\hat{\tau}_n) \text{ et } \hat{\alpha}_\rho = \rho_s^{-1}(\hat{\rho}_n),$$

où $\hat{\tau}_n, \hat{\rho}_n$ sont les estimateurs empiriques de τ et ρ respectivement.

Pour les lois $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$, l'estimation par la méthode des moments de paramètre α de la copule de Clayton est obtenue à partir la relation que nous avons entre α et le τ de Kendall

$$\tau = \frac{1}{1 + 2\alpha},$$

nous en déduisons que l'estimation $\hat{\alpha}$ est égale à

$$\hat{\alpha}_\tau = \frac{1}{2\hat{\tau}_n} - 0.5.$$

Chapitre 3

SIMULATION

La génération des distributions multivariées a des applications très répandue pour la recherche et la pratique. Une application importante est l'évaluation par ordinateur de nouvelles méthodes statistiques d'analyse de données multivariées. Beaucoup, sinon la plupart, méthodes multivariées prennent une forme spécifique pour la distribution des données observées. Grâce à des études de simulation, le chercheur peut enquêter propriétés des méthodes, des estimateurs ou statistiques de test pour une variété de distributions multivariées qui peuvent être rencontrées dans la pratique.

Une distribution multivariée populaire est la distribution normale. Elle est facile de la simuler, et elle est peut-être la distribution la plus connue.

Les distributions statistiques rencontrées en pratique, sont souvent non-normale, par exemple, asymétrique ou relativement à queue lourde. Le développement des techniques de simulation convenable pour ces distributions peuvent aider à accroître leur connaissance et leur utilisation dans la pratique et la recherche. Pour les données qui sont non-normale, certaines approches générales ont été développées pour simuler des distributions multivariées, telles que l'approche des distributions conditionnelles et l'approche de transformation.

Dans ce chapitre, on décrit comment simuler des échantillons de distributions multivariées dont on utilise les copules et plus précisément, comment simuler des échantillons de loi Pareto bivariée.

Ce chapitre est concentré aussi d'une part sur l'estimation du maximum de vraisemblance et l'estimation des moments des paramètres d'un type de lois Pareto bivariées, qui est la loi de Pareto homogène $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$, et d'une autre part, sur l'estimation de ces lois par une autre méthode basée sur les copules, dont on connue la copule associé à cette familles de lois ($MP^{(2)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \gamma, \alpha)$).

Simulation des données bivariées, différentes méthodes d'estimation et des propriétés statistiques ont été étudiées.

3.1 Simulation des données de loi $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$

D'après la propriété 2.4, le couple (X_1, X_2) de loi $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$ peut être représenté par deux v.a. i.i.d. selon une loi exponentielle standard $\{U_i\}_{i=1}^2$, et une v.a. Z indépendante de $\{U_i\}$ de loi Gamma($\alpha, 1$) comme suit

- Simuler 2 v.a. $U_i, i = 1, 2$, i.i.d. de loi exponentielle standard.
- Simuler une v.a. Z de loi gamma de paramètre de forme α et un paramètre d'échelle égale à 1.
- Prendre

$$X_i = (U_i/Z)^\gamma, \quad i = 1, 2,$$

donc on obtient le couple désiré (X_1, X_2) .

3.2 Simulation des données de loi $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$ à partir la copule de Clayton

Beaucoup de procédures sont utilisées pour générer des observations (x_1, x_2) d'une couple de v.a. (X_1, X_2) avec une fonction de distribution jointe F . Dans cette section, nous sommes concentrés sur l'utilisation des copules, donc on a besoin de générer une paire (u_1, u_2) d'observations des v.a. uniformes (U_1, U_2) , sa fonction de distribution jointe est la copule C , en suite on appliquant la transformation

$$(X_1, X_2) = (F_1^{-1}(U_1), F_2^{-1}(U_2)).$$

Une méthode générale pour simuler les réalisations du vecteur aléatoire (U_1, U_2) est la méthode des distributions conditionnelles qui consiste à

1. Simuler 2 variables aléatoires uniformes u_1 et q .
2. Déterminer u_2 à l'aide de la distribution conditionnelle de la copule C sachant u_1 . Cette dernière se définit de la manière suivante

$$\begin{aligned} C_{2/1}(u_2/u_1) &= \mathbb{P}[U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1] \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[U_2 \leq u_2, u_1 \leq U_1 \leq u_1 + \Delta u_1]}{\mathbb{P}[u_1 \leq U_1 \leq u_1 + \Delta u_1]} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0^+} \frac{C(u_1 + \Delta u_1, u_2) - C(u_1, u_2)}{\Delta u_1} \\ &= \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\ &= \partial_1 C_1(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Pour déterminer u_2 , il nous reste à inverser la distribution conditionnelle. Ainsi, nous avons la forme générale de l'inverse de la distribution conditionnelle suivante

$$C_{2/1}^{-1}(q/u_1) = \{u_2 : C_{2/1}(u_2/u_1) = q\}.$$

Finalement, nous obtenons : $u_2 = C_{2/1}^{-1}(q/u_1)$.

Pour générer un échantillon des données bivariées $(X_{i1}, X_{i2}), i = 1, \dots, n$ de loi $MP^{(2)}(IV)(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$ comme elle est définie dans l'équation (2.38) c'est-à-dire, en fonction de la copule de survie (la copule de Clayton) et les fonctions de survie marginales, dont on rappelle que la copule C est la fonction de distribution du couple (U_1, U_2) , alors la copule de survie correspondante $\hat{C}_\alpha(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2)$. De plus, si la v.a. U est uniforme sur $[0, 1]$, alors la v.a. $1 - U$ est aussi uniforme. On suit le même algorithme mais avec un petit changement, comme nous montrons ci-dessous.

1. *Simuler 2 variables aléatoires uniformes u_1 et q .*
2. *Déterminer u_2 tel que : $u_2 = \hat{C}_{2/1}^{-1}(q/u_1)$.*
3. *Prendre $(X_1, X_2) = (\bar{F}_1^{-1}(U_1), \bar{F}_2^{-1}(U_2))$.*

C'est-à-dire

si : $\hat{C}_\alpha(u_1, u_2) = (u_1^{-1/\alpha} + u_2^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha}$, pour $\alpha > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \hat{C}_{2/1}(u_1, u_2) &= \frac{\partial \hat{C}_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\ &= -\alpha \left(u_1^{-1/\alpha} + u_2^{-1/\alpha} - 1 \right)^{-\alpha-1} \left(-\frac{1}{\alpha} u_1^{(-1/\alpha)-1} \right) \\ &= \left(u_1^{1/\alpha} \right)^{-\alpha-1} \left(u_1^{-1/\alpha} + u_2^{-1/\alpha} - 1 \right)^{-\alpha-1} \\ &= \left(1 + u_1^{1/\alpha} \left(u_2^{-1/\alpha} - 1 \right) \right)^{-\alpha-1}. \end{aligned}$$

La résolution de l'équation $q = \hat{C}_{2/1}(u_2/u_1)$ pour u_2 donne

$$\hat{C}_{2/1}^{-1}(q/u_1) = u_2 = \left(\left(q^{-\frac{1}{\alpha+1}} - 1 \right) u_1^{-\frac{1}{\alpha}} + 1 \right)^{-\alpha}.$$

Exemple.

Pour illustrer l'algorithme proposé, on génère 1000 couples avec les paramètres $(\alpha = 0.05, \gamma = 0.02, \tau = 0.9), (\alpha = 0.5, \gamma = 0.2, \tau = 0.5)$ et $(\alpha = 4.5, \gamma = 1, \tau = 0.1)$. Premièrement, on génère le v.a. (U_1, U_2) , puis le vecteur (X_1, X_2) de loi $MP^{(2)}(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma\mathbf{1}, \alpha)$.

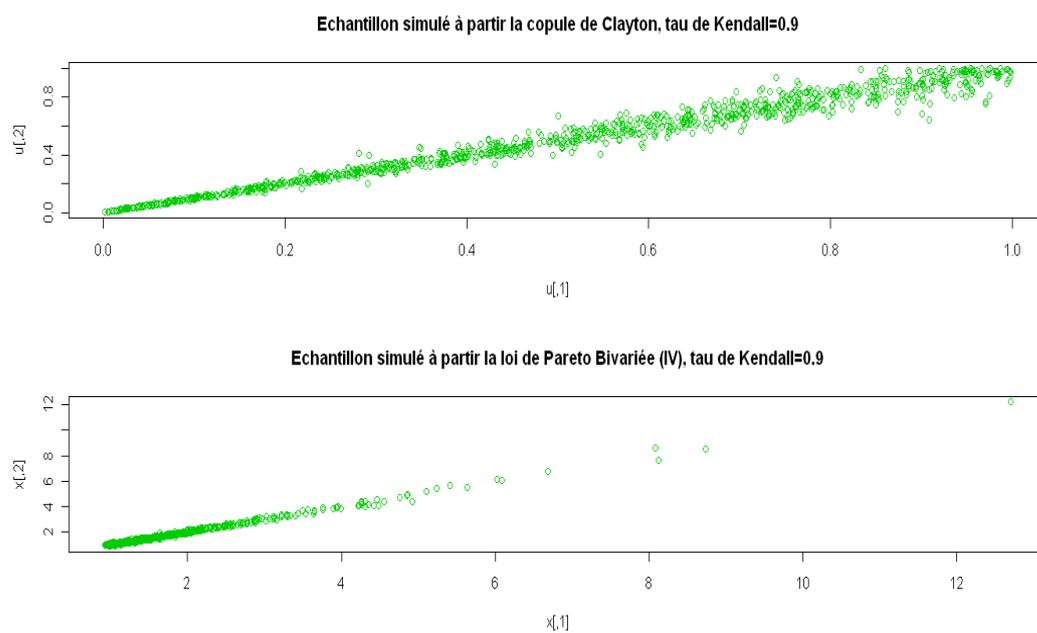


FIG. 3.1. Echantillons de taille 1000 de la copule de Clayton et de loi Pareto bivariée (IV) homogène avec les paramètres $\alpha = 0.05$, $\gamma = 0.02$ et $\tau = 0.9$.

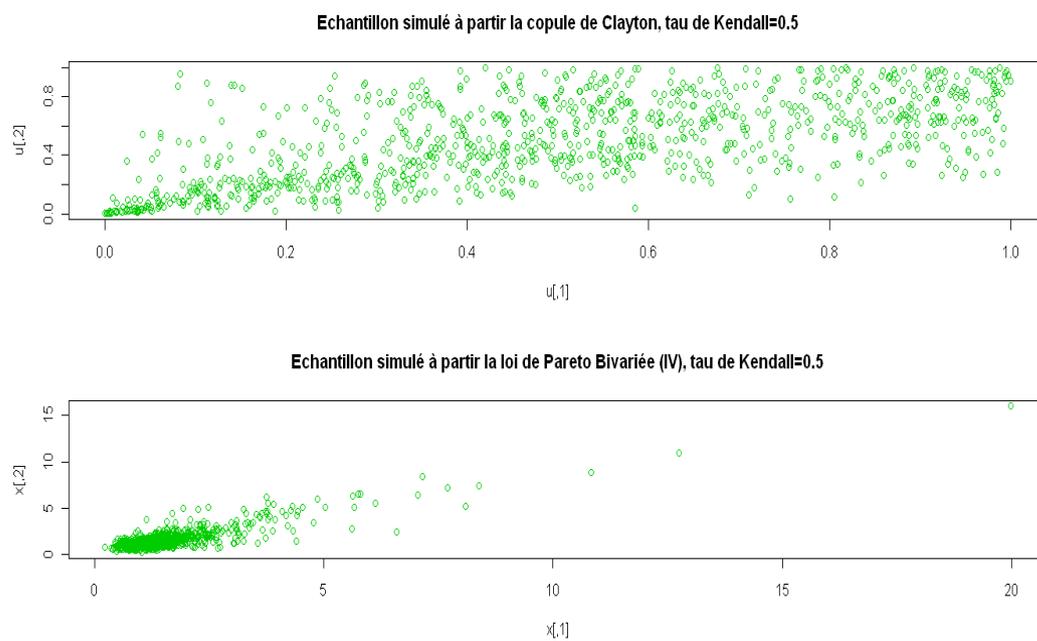


FIG. 3.2. Echantillons de taille 1000 de la copule de Clayton et de loi Pareto bivariée (IV) homogène avec les paramètres $\alpha = 0.5$, $\gamma = 0.2$ et $\tau = 0.5$.

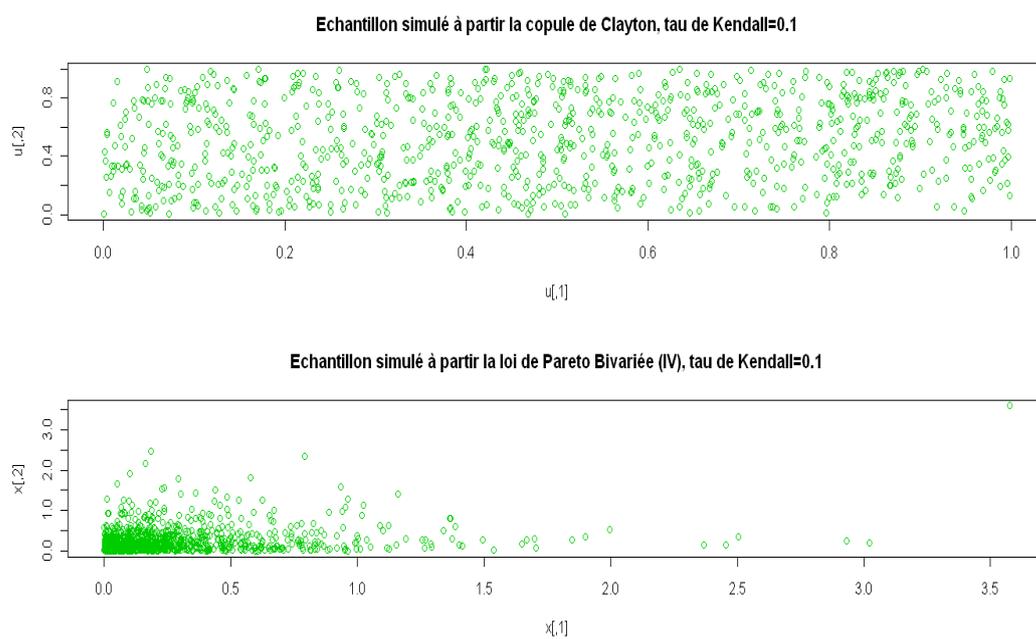


FIG. 3.3. Echantillons de taille 1000 de la copule de Clayton et de loi Pareto bivariée (IV) homogène avec les paramètres $\alpha = 4.5$, $\gamma = 1$ et $\tau = 0.1$.

3.3 Résultats de la simulation

La simulation est un outil très utilisé, avec la force d'ordinateur, pour expérimenter avec des modèles stochastiques compliqués. Elle peut être utilisée par exemple pour générer une séquence de données tirée à partir une distribution multivariée, dont le but est d'étudier les propriétés des fonctions de telles données. Dans cette section, pour évaluer et comparer les performances des estimateurs obtenus par les méthodes proposées, une simulation est faite. L'évaluation des performances est basée sur les biais et les erreurs quadratiques moyennes (MSE) définis par

$$\text{Biais} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta), \quad \text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta)^2,$$

où $\hat{\theta}_i$ est un estimateur obtenu par l'une des méthodes considérées de θ à partir le i ème échantillon de N échantillons simulés de loi $MP^{(2)}$ homogène. Donc, la procédure de simulation est répétée $N = 1000$ fois pour différents tailles d'échantillons n avec $n = 100, 200, 300, 500$ pour améliorer la précision des estimateurs avec la croissance des tailles des échantillons. En outre, la procédure de simulation est répétée pour quelques paramètres de loi correcte. Pour chaque échantillon, on applique les méthodes d'estimation proposées pour obtenir l'estimateur $\hat{\theta}_i = (\hat{\gamma}_i, \hat{\alpha}_i)$ de θ pour $i = 1, \dots, N$, les estimateurs $\hat{\gamma}$ et $\hat{\alpha}$ sont donnés par

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i, \quad \text{et} \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i.$$

Les valeurs correctes des paramètres sont choisies dans le sens qu'elles attribuent une valeur de l'une de dépendance, c'est-à-dire, faible, moyen, et une dépendance forte. D'une autre façon, si on considère le τ de Kendall comme un mesure de dépendance dont nous avons la relation entre le τ et le paramètre α ($\tau = \frac{1}{1+2\alpha}$). Donc, il faut prendre des valeurs pour α qui correspondent à des valeurs spécifiques pour τ . Pour le paramètre γ , on prend des valeurs qui vérifient $\alpha > 2\gamma$. Les valeurs des paramètres sont résumées dans le tableau (3.1).

τ	γ	α
0.9	0.02	0.05
0.7	0.09	0.2
0.5	0.2	0.5
0.3	0.5	1.1
0.1	1.0	4.5

TAB. 3.1. Les paramètres correctes de loi Pareto bivariée homogène qui sont utilisés dans la simulation.

Les estimations des paramètres inconnus γ et α sont calculées en appliquant le package BB de logiciel R.2.12.2 (2011), dont on minimise le $-\log$ vraisemblance données pour la méthode classique du MV, et celle basée sur les copules (IFM), et on résolvant le système d'équations non linéaires (2.51) pour la méthode des moments.

Ces deux algorithmes d'estimation ont besoin des points initiales, donc nous avons suggéré de prendre les valeurs estimées de α obtenues par la méthode d'inversion du tau de Kendall comme une valeur initiale pour le paramètre α et de prendre une valeur inférieure à la moitié de cette valeur (valeur initiale de α) pour le paramètre γ .

Les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux suivants

	$\alpha = 0.05$		$\gamma = 0.02$	
	Biais	MSE	Biais	MSE
n=100				
MM	0.00967	9.48e-05	0.00183	6.87e-06
MV	0.00045	4.38e-05	4.45e-05	2.74e-06
IFM	0.00200	0.00024	-0.00119	3.37e-05
inversion τ	-0.00050	7.14e-05		
n=200				
MM	0.00945	9.13e-05	0.00214	6.96e-06
MV	0.00035	2.18e-05	-3.16e-05	1.37e-06
IFM	-0.00116	0.00010	-0.00061	1.50e-05
inversion τ	0.00045	3.43e-05		
n=300				
MM	0.00935	8.92e-05	0.00234	7.30e-06
MV	0.00026	1.48e-05	2.37e-05	8.90e-07
IFM	-0.00076	7.29e-05	-0.00038	1.06e-05
inversion τ	0.00035	2.23e-05		
n=400				
MM	0.00931	8.82e-05	0.00248	7.33e-06
MV	0.00021	1.19e-05	-1.47e-05	6.99e-07
IFM	-0.00045	5.00e-05	-0.00018	7.32e-06
inversion τ	0.00028	1.65e-05		
n=500				
MM	0.00927	8.77e-05	0.00247	7.62e-06
MV	6.93e-05	8.10e-06	1.08e-05	5.15e-07
IFM	-0.00011	3.99e-05	-0.00010	6.01e-06
inversion τ	0.00010	1.24e-05		

TAB. 3.2. Biais et MSE des estimateurs des paramètres de loi Pareto bivariée homogène obtenus par les méthodes de MM, MV, IFM et d'inversion du tau dans le cas de dépendance forte ($\tau=0.9$).

	$\alpha = 0.2$		$\gamma = 0.09$	
	Biais	MSE	Biais	MSE
n=100				
MM	0.03275	0.00112	0.00263	4.80e-05
MV	0.00253	0.00064	0.00039	4.75e-05
IFM	0.00658	0.00158	-0.00157	0.00015
inversion τ	0.00327	0.00145		
n=200				
MM	0.03200	0.00106	0.00387	4.81e-05
MV	0.00069	0.00034	-0.00025	2.57e-05
IFM	0.00252	0.00048	-0.00063	7.86e-05
inversion τ	0.00098	0.00065		
n=300				
MM	0.03193	0.00106	0.00446	4.82e-05
MV	0.00039	0.00022	-3.43e-05	1.60e-05
IFM	-0.00125	0.00031	-0.00051	5.33e-05
inversion τ	0.00057	0.00044		
n=400				
MM	0.03147	0.00103	0.00506	4.82e-05
MV	0.00031	0.00018	2.89e-05	1.30e-05
IFM	-0.00062	0.00027	-0.00026	4.20e-05
inversion τ	0.00040	0.00031		
n=500				
MM	0.03127	0.00101	0.00554	4.83e-05
MV	0.00025	0.00012	1.20e-05	9.56e-06
IFM	-0.00044	0.00020	-0.00022	2.81e-05
inversion τ	0.00028	0.00025		

TAB. 3.3. Biais et MSE des estimateurs des paramètres de loi Pareto bivariée homogène obtenus par les méthodes de MM, MV, IFM et d'inversion du tau dans le cas de dépendance forte ($\tau=0.7$).

	$\alpha = 0.5$		$\gamma = 0.2$	
	Biais	MSE	Biais	MSE
n=100				
MM	0.09612	0.00953	0.01905	0.00070
MV	0.00447	0.00326	-0.00063	0.00019
IFM	0.00663	0.00336	-0.00093	0.00035
inversion τ	0.01689	0.01440		
n=200				
MM	0.09373	0.00902	0.02276	0.00075
MV	0.00305	0.00168	-0.00035	0.00010
IFM	0.00452	0.00175	-0.00075	0.00016
inversion τ	0.00660	0.00637		
n=300				
MM	0.09361	0.00894	0.02427	0.00076
MV	0.00141	0.00101	-0.00029	6.48e-05
IFM	0.00251	0.00112	-0.00052	0.00011
inversion τ	0.00553	0.00401		
n=400				
MM	0.09324	0.00886	0.02548	0.00081
MV	0.00053	0.00078	-0.00025	4.97e-05
IFM	0.00081	0.00089	-0.00040	8.88e-05
inversion τ	0.00189	0.00298		
n=500				
MM	0.09293	0.00879	0.02648	0.00083
MV	0.00032	0.00064	-0.00018	4.12e-05
IFM	0.00045	0.00067	0.00030	6.73e-05
inversion τ	0.00072	0.00228		

TAB. 3.4. Biais et MSE des estimateurs des paramètres de loi Pareto bivariée homogène obtenus par les méthodes de MM, MV, IFM et d'inversion du tau dans le cas de dépendance moyenne ($\tau=0.5$).

	$\alpha = 1.1$		$\gamma = 0.5$	
	Biais	MSE	Biais	MSE
n=100				
MM	0.11255	0.01429	-0.01531	0.00276
MV	0.01024	0.01066	-0.00227	0.00087
IFM	0.01416	0.01319	-0.00329	0.00112
inversion τ	0.07593	0.1612612		
n=200				
MM	0.11268	0.01436	-0.03055	0.00283
MV	0.00638	0.00557	-0.00052	0.00047
IFM	0.00933	0.00666	-0.00086	0.00054
inversion τ	0.03595	0.06980		
n=300				
MM	0.11269	0.01443	0.03224	0.00325
MV	0.00294	0.00336	-0.00048	0.00032
IFM	0.00444	0.00387	-0.00068	0.00038
inversion τ	0.02552	0.04396		
n=400				
MM	0.11294	0.01449	0.03887	0.00355
MV	0.00108	0.00266	-0.00037	0.00023
IFM	0.00158	0.00299	-0.00052	0.00026
inversion τ	0.01980	0.02742		
n=500				
MM	0.11425	0.01483	0.07815	0.00358
MV	0.00042	0.00213	-0.00030	0.00018
IFM	0.00061	0.00252	-0.00044	0.00022
inversion τ	0.01674	0.02416		

TAB. 3.5. Biais et MSE des estimateurs des paramètres de loi Pareto bivariée homogène obtenus par les méthodes de MM, MV, IFM et d'inversion du tau dans le cas de dépendance faible ($\tau=0.3$).

	$\alpha = 4.5$		$\gamma = 1$	
	Biais	MSE	Biais	MSE
	n=100			
MM	1.09306	1.20705	0.76550	0.60984
MV	0.07665	0.17966	-0.00524	0.00272
IFM	0.13778	0.26077	-0.00558	0.00286
inversion τ	5.66636	529.854		
	n=200			
MM	1.09587	1.21114	0.78879	0.63779
MV	0.03059	0.08090	-0.00279	0.00133
IFM	0.04823	0.11508	-0.00265	0.00149
inversion τ	2.46807	224.48630		
	n=300			
MM	1.09598	1.21390	0.79592	0.64654
MV	0.02244	0.05295	-0.00069	0.00084
IFM	0.03390	0.07408	-0.00071	0.00087
inversion τ	1.85386	207.92580		
	n=400			
MM	1.0978946	1.214508	0.80248	0.65615
MV	0.01668336	0.04062	-0.00046	0.00066
IFM	0.02029338	0.05749	-0.00049	0.00067
inversion τ	1.069798	26.42627		
	n=500			
MM	1.09865	1.21503	0.80535	0.65896
MV	0.01215	0.03159	-0.00043	0.00050
IFM	0.01855696	0.04777	-0.00043	0.00054
inversion τ	0.67966	8.69873		

TAB. 3.6. Biais et MSE des estimateurs des paramètres de loi Pareto bivariée homogène obtenus par les méthodes de MM, MV, IFM et d'inversion du tau dans le cas de dépendance faible ($\tau=0.1$).

Tout d'abord, en examinant attentivement ces tableaux, nous remarquons que

- Les biais et les erreurs quadratiques moyennes des estimateurs des deux paramètres obtenus par toutes les méthodes d'estimation proposées tendent à augmenter lorsque la dépendance est diminuée.

- L'estimation du paramètre γ est mieux en terme de biais et MSE que l'estimation du paramètre α pour toutes les méthodes d'estimation et dans tous les cas de dépendance.

- En comparant les résultats obtenus pour les échantillons de différentes tailles, nous remarquons que

- Pour l'estimation du paramètre α et dans le cas où la dépendance est supérieure ou égale à 0.5, les biais et les erreurs quadratiques moyennes obtenus par les quatre méthodes (MV, MM, IFM et inversion τ) ont tendance à diminuer quand la taille d'échantillon est à agrandir. De plus, le taux de décroissance de biais et de MSE obtenu par la méthode des moments est très faible.

Dans le cas où $\tau < 0.5$, on remarque que les biais et les MSE obtenus par les méthodes de MV, IFM et inversion τ sont à diminuer quand n augmente, sauf que ceux évalués à partir la méthode des moments qui sont agrandis (taux de croissance est faible).

- Pour l'estimation du paramètre γ et pour toutes les valeurs de dépendance, les biais et les erreurs quadratiques moyennes obtenus par les méthodes du MV et IFM tendent à diminuer lorsque la taille d'échantillon à agrandir au contraire aux ceux qui sont obtenus par la méthode des MM.

- Quelle que soit la dépendance, la méthode de MV pour estimer les deux paramètres est mieux que les autres méthodes (MM, IFM et inversion τ) en terme de biais et MSE.

- De plus, pour $\tau \leq 0.5$, les MSE obtenus par IFM et MV sont très proches (pour $\tau = 0.5$ sont égales), la même remarque pour l'estimation du γ et pour $\tau < 0.5$.

- Pour la dépendance forte ($\tau = 0.9$), la méthode de IFM pour estimer les paramètres α et γ est mieux que la méthode des MM en biais et pour $n \geq 400$, elle est mieux que celle-ci en MSE (dans le cas $\tau = 0.7$, même remarque pour l'estimation du γ et pour α , IFM est mieux que la méthode des MM en terme de biais et pour $n > 100$, elle est mieux que celle-ci en MSE).

- Pour ($\tau = 0.9, 0.7$ et 0.5), la méthode d'inversion du τ est mieux que la méthode des MM en terme de biais et MSE à l'exception du cas où $n=100$ pour les MSE obtenues dans les deux dernières valeurs de dépendance.

- Pour $\tau = 0.3$, inversion τ est mieux que la méthode des MM en biais, même chose pour $\tau = 0.1$ et pour $n \geq 400$.

- Pour $\tau = 0.9$, la méthode d'inversion τ est mieux que la méthode de IFM en terme de biais et MSE, pour $\tau = 0.7$, elle est mieux que la méthode de IFM en terme de biais.
- Lorsque τ est diminué, la méthode IFM devienne mieux que la méthode d'inversion du τ en biais et MSE.

Conclusion : Dans ce chapitre, plusieurs méthodes de simulation d'un type de lois Pareto bivariées ont été présentées, plusieurs simulations numériques ont été mises en œuvre afin de distinguer la pertinence des méthodes d'estimation proposées dans le chapitre précédent.

Conclusion générale

Les méthodes classiques d'analyse des données supposent l'indépendance des variables aléatoires or cette hypothèse ne peut plus être raisonnablement posée. Nous avons souhaité donc, dans un premier temps, réunir toutes les informations relatives au modèle de dépendance dit "copule" qui nous permet de coupler les lois marginales des variables afin d'obtenir la loi jointe, mesurer et modéliser la dépendance.

Nous avons ensuite présenté les modèles de lois Pareto multivariées dont plusieurs de ses propriétés sont étudiées. De plus, on a décrit un ensemble de méthodes d'estimation des paramètres de ces lois dans le cas bivarié. Nous avons présenté les méthodes classiques et d'autres méthodes basées sur les copules dont une étude de simulation a permis de faire une comparaison entre ces méthodes.

Les méthodes d'estimation utilisées dans ces deux approches (classique et celle basée sur les copules) sont la méthode du maximum de vraisemblance MV et la méthode des moments MM pour la première approche et la méthode d'inférence pour les marginales IFM et celle d'inversion du tau de Kendall pour la deuxième. Dans un premier temps, on a trouvé que les estimateurs obtenus par les quatre méthodes étant légèrement plus performant pour les valeurs élevées de τ . Pour les deux approches, la méthode MV présente de meilleurs qualités en terme de biais et d'erreurs quadratiques moyennes pour toutes les valeurs de dépendance. De plus, dans le cas de la dépendance forte, la méthode d'inversion du tau de Kendall peut être une bonne méthode d'estimation en terme de biais et MSE, aussi la méthode des moments donne des bons estimateurs en terme de MSE et pour les tailles d'échantillons ne sont pas assez grandes. La méthode d'inférence pour les marginales donne une bonne estimation en terme de biais et en terme d'erreurs quadratiques moyennes pour des tailles d'échantillons suffisantes. Pour une dépendance inférieure ou égale à 0.5, les performances des méthodes d'inversion du tau de Kendall et des moments se perdent, alors cela conduit à privilégier la méthode IFM.

Cette étude est consacrée à quelques familles de lois Pareto multivariées, dont on a vu qu'elles portent aussi les propriétés suivantes

- Les lois marginales ont le même paramètre de forme.
- Le cas d'indépendance des marginales n'appartient pas à ces modèles.
- Le paramètre d'association ou de dépendance se retrouve souvent dans les lois marginales.

La famille de lois Pareto peut être utilisée dans de nombreux domaines d'application en assurance, en finance, en hydrologie, en économie, ou en fiabilité, . . . , ce qui nécessite d'étudier les propriétés des autres formes de ces lois et de proposer et améliorer d'autres méthodes d'estimation de ses paramètres.

Annexes

A. Démonstrations de quelques propriétés

Démonstration de la propriété 2.1. Dans ce cas, la loi de probabilité de la v.a. α est donnée par $P_\alpha(j) = P(\alpha = j) = p(1-p)^{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$. Soit $\mathbf{X} \setminus \alpha \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$, la fonction de survie de \mathbf{X} est

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{\infty} P(\mathbf{X} > \mathbf{x} \setminus \alpha = j) P(\alpha = j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} \right\}^{-j} p(1-p)^{j-1} \\ &= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{p^{\gamma_i} \sigma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}} \right\}^{-1}, \quad \forall \mathbf{x} \geq \boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Alors $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(III)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma} p^\gamma, \boldsymbol{\gamma})$.

Démonstration de la propriété 2.2. La fonction de densité de la v.a. α est $f_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\alpha}, & \alpha > 0, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$. Pour $\alpha > 0$, $\mathbf{X} \setminus \alpha \sim MP^{(d)}(IV)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \alpha)$.

Alors

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \int_0^\infty \left(1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right)^{-\alpha} \lambda e^{-\lambda\alpha} d\alpha \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\alpha \ln \left(1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right)} e^{-\lambda\alpha} d\alpha \\ &= \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma_i} \right) \right\}^{-1}, \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \geq \boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Démonstration de la propriété 2.6. $\forall x \geq \boldsymbol{\mu}$, la fonction de répartition de survie de la valeur extrême du minimum est

$$\begin{aligned} P(X_{(1)} \geq x) &= P(X_1 > x, \dots, X_d > x) \\ &= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x - \mu}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha} \\ &= \left\{ 1 + (x - \mu)^{1/\gamma} \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha} \end{aligned}$$

$$P(X_{(1)} \geq x) = \left\{ 1 + \left(\frac{x - \mu}{\left(1 / \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{1/\gamma}\right)^\gamma} \right)^{1/\gamma} \right\}^{-\alpha}.$$

Donc, $X_{(1)} \sim P(IV)(\mu, \left(1 / \sum_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{1/\gamma}\right)^\gamma, \gamma, \alpha)$.

Démonstration de la propriété 2.7. Supposons que $\mathbf{X} \sim MP^{(d)}(II)(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$, soit $\mathbf{x}_0 > \boldsymbol{\mu}$, alors, $\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{x}_0$, la fonction de survie de \mathbf{X} , tronqué à \mathbf{x}_0 est

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} > \mathbf{x} \setminus \mathbf{x} > \mathbf{x}_0) &= \frac{P(\mathbf{X} > \mathbf{x})}{P(\mathbf{X} > \mathbf{x}_0)} \\ &= \frac{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \right\}^{-\alpha}}{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i^0 - \mu_i}{\sigma_i} \right) \right\}^{-\alpha}} \\ &= \frac{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i^0 - \mu_i}{\sigma_i} \right) + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i - x_i^0}{\sigma_i} \right) \right\}^{-\alpha}}{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i^0 - \mu_i}{\sigma_i} \right) \right\}^{-\alpha}} \\ &= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^d \left(\frac{(x_i - x_i^0)}{\left(1 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{x_j^0 - \mu_j}{\sigma_j}\right)\right) \sigma_i} \right) \right\}^{-\alpha}, \end{aligned}$$

alors, $\mathbf{X} \setminus \mathbf{x} > \mathbf{x}_0 \sim MP^{(d)}(II)(\mathbf{x}_0, \left(1 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{x_j^0 - \mu_j}{\sigma_j}\right)\right) \boldsymbol{\sigma}, \alpha)$.

B. Logiciel statistique

Le logiciel R est un logiciel de statistique créé par Ross Ihaka & Robert Gentleman. Il est à la fois un langage informatique et un environnement de travail : les commandes sont exécutées grâce à des instructions codées dans un langage relativement simple, les résultats sont affichés sous forme de texte et les graphiques sont visualisés directement dans une fenêtre propre.

C'est un clone du logiciel S-plus qui est fondée sur le langage de programmation S, développée par les laboratoires Bell en 1988. Ce logiciel sert à manipuler des données, à tracer des graphiques et à faire des analyses statistiques sur ces données. Le logiciel R constitue aujourd'hui un langage de programmation intégré d'analyse statistique. Le site Internet <http://www.r-project.org>, est la meilleure source d'informations sur ce logiciel.

Le langage R est un logiciel dans lequel de nombreuses techniques statistiques modernes et classiques ont été implémentées. Notez également que la plupart des méthodes avancées de statistique sont aussi disponibles au travers de modules externes appelés packages. Ceux-ci sont faciles à installer directement à partir d'un menu du logiciel. Ils sont tous regroupés sur le site internet précédent. Il permet aussi de programmer des boucles qui vont analyser successivement divers jeux de données. Il est aussi possible de combiner dans le même programme différentes fonctions statistiques pour réaliser des analyses plus complexes.

Dans ce mémoire, on a utilisé deux packages principales de logiciel R.2.12.2 (2011) qui ont besoin des autres packages, ces packages et les packages correspondants sont

- Package Copula : les packages associés sont : mnorm, mvtnorm, pspline, sn, scatterplot3d.
- Package VGAM : il a besoin des packages : stats, spline, stats4.
- Package BB : le package correspondant est : quadrprog.

C. Abréviations et notations

al	autre
C	copule
\hat{C}	copule de survie
c	densité de la copule
\tilde{C}_n	copule empirique
c_n	copule de fréquence empirique
C_R^{Ga}	copule gaussienne
$C_{R,\nu}$	copule de Student
C^A	copule archimédienne
C_α^{Gum}	copule de Gumbel
C_α^{Cl}	copule de Clayton
$Cov(\cdot)$	covariance
Dom	domaine de définition
$E(\cdot)$	espérance
$Exp(\lambda)$	loi exponentielle de paramètre λ
F	fonction de répartition
\bar{F}	fonction de survie
F_n	fonction de répartition empirique
f	fonction de densité
$F^{(-1)}$	inverse généralisé de la fonction F
FP	loi de Feller Pareto
Φ_R	distribution normale multivariée
Φ	distribution normale univariée
$Gamma(\alpha, 1)$	loi Gamma standard de paramètre de forme α
γ	le vecteur $(\gamma_1, \dots, \gamma_d)$
$\gamma\mathbf{1}$	le vecteur (γ, \dots, γ) d dimensionnel
$\Gamma(\cdot)$	fonction gamma

$GB2$	loi beta généralisée de type II
GPD	loi de Pareto généralisée
IFM	fonctions d'inférence par les marginales
i.i.d.	indépendantes identiquement distribuées
$l(\mathbf{X}, \theta)$	fonction de log vraisemblance de \mathbf{X}
MM	méthode de moments
$MP^{(d)}(I)$	loi de Pareto multivariée de premier type
$MP^{(d)}(II)$	loi de Pareto multivariée de deuxième type
$MP^{(d)}(III)$	loi de Pareto multivariée de troisième type
$MP^{(d)}(IV)$	loi de Pareto multivariée de quatrième type
MSE	moyenne carrée des erreurs
$\boldsymbol{\mu}$	le vecteur (μ_1, \dots, μ_d)
$\boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$	le vecteur (μ, \dots, μ) d dimensionnel
MV	méthode du maximum de vraisemblance
$N(0, 1)$	loi normale standard
$P(I)$	loi de Pareto univariée de premier type
$P(II)$	loi de Pareto univariée de deuxième type
$P(III)$	loi de Pareto univariée de troisième type
$P(IV)$	loi de Pareto univariée de quatrième type
$\mathbb{P}(A)$	probabilité associée à l'évènement A
Π^d	copule produit
$\Psi_Z(\cdot)$	transformée de Laplace de Z
\mathbb{R}	l'ensemble des réels
$r(X_1, X_2)$	coefficient de corrélation du couple (X_1, X_2)
\mathcal{R}_ρ	variation régulière à ∞ avec indice ρ
\mathcal{R}_0	variation lente à ∞
ρ_n	rho de Spearman empirique
ρ_s	rho de Spearman
$\boldsymbol{\sigma}$	le vecteur $(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$
$t_{R,\nu}$	distribution de Student multivariée

$t\nu$	distribution de Student univariée
$\tau(X, Y), \tau$	tau de Kendall
τ_n	tau de Kendall empirique
$\hat{\theta}$	estimateur de θ
X	variable aléatoire
x	scalaire
$\mathbf{1}$	vecteur $(1, \dots, 1)$
\mathbf{x}	vecteur aléatoire
\mathbf{X}	vecteur aléatoire
v.a.	variable ou vecteur aléatoire
$Var(\cdot)$	variance
$\mathbf{0}$	vecteur nul $(0, \dots, 0)$ d dimensionnel
$:=$	égalité par une définition

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Asimit, A. , Furman, E. and Vernic, R. (2009). On a Multivariate Pareto Distribution. Actuarial Research Group (ARG), Technical Report Series, Report 2, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada.
- [2] Balakrishnan, N. and Chin-Diew, L., (2008). Continuous Bivariate Distributions, Springer, London.
- [3] Belguise, O. et Lévi, C. (2001–2002). Etude des dépendances entre les branches automobile et incendie à l'aide de la théorie des copulas. Bulletin français d'actuariat 5, 135–174.
- [4] Brazauskas, V. and Serfling, R. (2000). Robust and efficient estimation of the tail index of a single-parameter Pareto distribution. North American Actuarial Journal, 4, 4, 12–27.
- [5] Brazauskas, V. and Serfling, R. (2000). Robust estimation of tail parameters for two-parameter Pareto and exponential models via generalized quantile statistics. Extremes, 3, 3, 231–249.
- [6] Brazauskas, V. and Serfling, R. (2001). Small sample performance of robust estimators of tail parameters for Pareto and exponential models. Journal of Statistical Computation and Simulation, 70, 1, 1-19.
- [7] Brazauskas, V. (2002). Fisher information matrix for the Feller-Pareto distribution. Statistics and Probability Letters, 59, 2, 159-167.
- [8] Brazauskas, V. (2003). Information matrix for Pareto (IV), Burr, and related distributions. Communications in Statistics : Theory and Methods, 32, 2, 315–325.
- [9] Brazauskas, V. and Serfling, R. (2003). Favorable estimators for fitting Pareto models : a study using goodness-of-fit measures with actual data. ASTIN Bulletin : The Journal of the International Actuarial Association, 33, 2, 365-381.
- [10] Cadoux, D. et Loiseau, J. (2004). Copules et dépendance : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie. Institut des Actuaires, Paris.
- [11] Capéraà, P., Fougères, A. and Genest, C. (1997). A nonparametric estimation procedure for bivariate extreme value copulas. Biometrika, 84, 3, 567-577.
- [12] Chacko, M. and Thomas, P. (2007). Estimation of a parameter of bivariate Pareto distribution by ranked set sampling. Journal of Applied Statistics, 34, 703-714.

- [13] Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. Wiley, New York.
- [14] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, V. and Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks*. Wiley, New York.
- [15] El-Gohary, A., Al-Ruzaiza, A. (2007). New Class of Positively Quadrant Dependent Bivariate Distributions with Pareto. *International Mathematical Forum*, 2, 2007, no. 26, 1259-1273.
- [16] Embrechts, P., McNeil, A. and Frey, R. (2005). *Quantitative risk management : concepts, techniques and tools*. Princeton university press.
- [17] Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A. (2003). Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, ed. S. Rachev, Elsevier, Chapter 8, pp. 329-384.
- [18] Frees, E. and Valdez, E. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, 2, 1-25.
- [19] Genest, C. and MacKay, J. (1986). The Joy of copulas : Bivariate Distribution With Uniform Marginals. *Journal of the American Statistical Association*, 40, 280-283.
- [20] Genest, C. et MacKay, J. (1986). Copules Archimédiennes et Familles de lois Bidimensionnelles dont les Marges sont Données. *La revue canadienne de statistique*, 14, 145-159.
- [21] Genest, C. and Rivest, L. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 1034-1043.
- [22] Genest, C., Ghoudi, K. and Rivest, L. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika* 82, 543-552.
- [23] Genest, C. and Favre, A. (2006). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12, 347-368.
- [24] Ghoudi, K., Khoudraji, A. and Rivest, L. (1997). Propriétés statistiques des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles. *Canadian Journal of Statistics*, 26, 187-197.
- [25] Ghoudi, K., and Abdous, B. (2005). Non parametric estimators of multivariate extreme dependance function. *Journal of non parametric Statistics*, Vol. 17, No. 8, 915-935.
- [26] Hanagal, D. (1996). A Multivariate Pareto Distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 25, 1471-1488.

- [27] Hanagal, D. (1997). Note on estimation of reliability under bivariate Pareto stress-strength model. *Statistical Papers*, 38, 453-459.
- [28] Joe, H. and Xu, J. (1996). The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models. Dept. of Statistics University of British Columbia, Tech. Rept. 166.
- [29] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London.
- [30] Jupp, P. and Mardia, K. (1982). A Characterisation of The Multivariate Pareto Distribution. *The Annals of Statistics*, Vol. 10, No. 3, 1021-1024.
- [31] Kleiber, C. and Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [32] Klugman, S., Panjer, H., and Willmot, G. (2004). *Loss Models : Form Data to Decisions*. Wiley, New York.
- [33] Kotz, S., Balakrishnan, N. and Johnson, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*, Vol 1, second edition. Wiley, New York.
- [34] Kotz, S., Balakrishnan, N. and Johnson, N. (2000). *Continuous Multivariate Distributions*, Vol.1, John Wiley and Sons, New York, 577-619.
- [35] Li, H. (2006). Tail Dependence of Multivariate Pareto Distributions. Technical Report , Washington State University, U.S.A..
- [36] Mardia, K. (1962). Multivariate Pareto distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 33, 1008-1015.
- [37] Marshall, A. and Olkin, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*. 83, 834–841.
- [38] Meraghni, D. (2008). Modelling distribution tails. Thèse de doctorat de l'université de Biskra.
- [39] Nadarajah, S. and KOTZ, S. (2003). Reliability for Pareto models. *International Journal of Statistics*, Vol. LXI, N. 2, pp. 191-204.
- [40] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2005). Muliere and Scarsini's bivariate Pareto distribution : sums, products, and ratios. *SORT* 29, 2, 183-200.
- [41] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006). Performance measures for some bivariate Pareto distributions. *International Journal of General Systems*, 35, 387-393.
- [42] Nelson, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*, Springer.
- [43] Rytgaard, M. (1990). Estimation in the Pareto Distribution. *ASTIN Bulletin* 20, 201-216.
- [44] Shao, Q. (2004). Notes on maximum likelihood estimation for the three-parameter Burr XII distribution. *Computational Statistics & Data Analysis* 45, 675–687.

- [45] Trivedi, P. and Zimmer, D. (2005). Copula Modeling : An Introduction for Practitioners, Foundations and Trends in Econometrics, Vol 1, 1-115.
- [46] Varadhan, R. and Gilbert, P. (2009). BB : An R Package for Solving a Large System of Nonlinear Equations and for Optimizing a High-Dimensional Non-linear Objective Function, Journal of Statistical Software, 32,4.
- [47] Yarmohammadi, M. and Pazira, H. (2010). Minimax Estimation of the Parameter of the Burr Type XII Distribution, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 4(12), 6611-6622.
- [48] Yeh, H. (2000). Two multivariate Pareto distributions and their related inferences. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 28, No.2, 71-86.
- [49] Yeh, H. (2002). Some alternative multivariate Pareto distribution. Technical Report, NSC92-2118-M-002-006.
- [50] Yeh, H. (2002). Six multivariate Zipf distributions and their related properties, Statistics & Probability Letters. 56, 131–141.
- [51] Yeh, H. (2004a). Some properties and characterizations for generalized multivariate Pareto distributions, Journal of Multivariate Analysis., 88, 47-60.
- [52] Yeh, H. (2007). The frailty and the Archimedean structure of the general multivariate Pareto distributions. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, Vol 2, No.3, 713–729.
- [53] Zari, T. (2010). Contribution a l'étude du processus empirique de copule. Thèse de doctorat de l'université Paris 6.