

# Table des matières

Notations	ii
Résumé	1
Abstract	2
Introduction	3
<b>1 Equations différentielles stochastiques</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction	6
1.2 Processus stochastiques	7
1.2.1 Processus mesurable, adapté, progressivement mesurable	8
1.3 Filtration	9
1.4 Mouvement Brownien	9
1.4.1 Construction par série de fourier	10
1.5 Martingale	11
1.6 Intégrale stochastique	12
1.6.1 Cas de processus simple	13
1.7 Cas de processus général	16
1.8 Formule d'Itô	18
1.8.1 Première formule d'Itô	18
1.9 Existence et unicité	24
<b>2 Principe du maximum du second-ordre en contrôle des diffusions</b>	<b>30</b>
2.1 Formulation du problème et hypothèses	30
2.2 Estimation des solutions	31
2.3 Principe du maximum du seconde ordre	40
2.3.1 Estimation du premier ordre	40
2.3.2 Estimation du second ordre	44
2.4 Principe du maximum	46
2.5 Equations et processus adjoints	48
<b>3 Des conditions nécessaires et suffisants pour un contrôle des problèmes relaxés et stricts</b>	<b>50</b>
3.1 Introduction	50
3.2 Formulation du problème et hypothèses	51

---

3.3	Approximation des trajectoires : . . . . .	56
3.4	Condition nécessaire et suffisante d'optimalité en contrôle relaxé	56
3.4.1	Inéquation variationnelle processus adjoint et equation adjointe . . . . .	61
3.5	Conditions nécessaires pour un contrôle des problèmes relaxés en forme globale . . . . .	63
3.5.1	Condition suffisante d'optimalité pour les contrôles relaxés . . . . .	63
3.6	Conditions nécessaires et suffisantes d' optimalités pour les contrôles stricts . . . . .	65
3.7	Les conditions d'optimalités nécessaires pour les contrôles stricts	66
3.8	Les conditions d'optimalités suffisantes pour des contrôles stricts.	67
	<b>Bibliographie</b>	<b>67</b>

# Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$	Espace de probabilité filtré.
$W_t$	Mouvement Brownien.
$EDS$	Equation différentielle stochastique
$\mathfrak{R}$	Ensemble de contrôles relaxés.
$\mathcal{U}_{ad}$	Ensemble de contrôles admissibles.
$\delta(\mathcal{U}_{ad})$	C'est l'ensemble $\{q \in \mathfrak{R} : q = \delta_v; v \in \mathcal{U}_{ad}\}$
$\mathbb{A}$	Un Borélien de $\mathbb{R}^d$ .
$J(\cdot)$	La fonction de coût à minimiser.
$q(t)$	Contrôle relaxé.
$\mu$	Contrôle relaxé optimal
$u$	Contrôle strict optimal.
$dt - p.p.$	Presque partout par rapport la mesure $dt$ .
$P - p.s.$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$\mu_t^\theta = \mu_t + \theta(q_t - \mu_t)$	Contrôle perturbé
$p(t)$	Processus adjoint
$H(t, X_t, u_t, p_t)$	Hamiltonien.
$\delta_x$	La mesure de Dirac en $x$ .
$\Phi^*$	Le transposé de $\Phi$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ .
$\mathbb{P} \otimes dt$	La mesure produit de $\mathbb{P}$ avec la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$
$\mathbb{I}_A$	L'indicatrice de $A$ est noté : $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

$$\begin{aligned}f_{xx}yy &= \sum_{i,j=1}^n f_{x^i x^j} y^i y^j \\ \alpha\beta &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \in \mathbb{R} \text{ est le produit scalaire dans } \mathbb{R}^n \\ LS &= \sum_{i=1}^d L_i S_i \in \mathbb{R} \\ ML &= \sum_{i=1}^d M_i L_i \in \mathbb{R}^n \\ M\alpha\gamma &= \sum_{i=1}^d (M_i \alpha) \gamma_i \in \mathbb{R}^n \\ MN &= \sum_{i=1}^d M_i N_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ MLN &= \sum_{i=1}^d M_i L N_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ ML\gamma &= \sum_{i=1}^d M_i L_i \gamma_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

# Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse au problème de contrôle optimal stochastique qui consiste à étudier les conditions nécessaires d'optimalité vérifiant par un contrôle strict ou relaxé dans le cas d'un système différentiel gouverné par une équation différentielle stochastique avec des coefficients contrôlés dans un domaine de contrôles n'est pas nécessairement convexe. D'après la méthode classique de Peng [36], le principe du maximum stochastique a été donné par deux processus adjoints  $P(t)$  et  $Q(t)$  et inégalité variationnel. Par contre, Bahlali [5] a introduit une autre approche basée sur la dérivée du premier ordre seulement malgré la diffusion est contrôlée. Cette nouvelle approche permet d'établir un principe du maximum stochastique global pour les problèmes de contrôle strict et relaxé.

Mots – clés : *Contrôle relaxé, Principe du maximum stochastique, Contrôle stricte, Processus adjoint.*

# Abstract

In this work we consider a stochastic control problem where the set of strict control is not necessarily convex, and the system are governed by a nonlinear stochastic differential equation, in which the control enters both the drift and the diffusion coefficients.

The general stochastic maximum principle for strict controls established by Peng [36] and its extension to the class of measure-valued processes developed by Bahlali, Mezerdi and Djehich [3] have been both obtained by using the second-order expansion, these two results are given with two adjoint processes and a variational inequality of the second-order.

We study also a new approach introduced by Bahlali [5] in order to establish necessary as well as sufficient conditions of optimality in the form of global stochastic maximum principle, for strict and relaxed controls without using the second-order expansion.

**Key Words :** *Relaxed control, Strict control, Necessary conditions, Stochastic maximum principle, Adjoint process.*

# Introduction

Notre objectif dans ce travail est l'étude d'un problème de contrôle stochastique relaxé, c'est à dire les problèmes pour lesquels la classe des contrôles admissibles est constituée de processus à valeurs mesurées. Nous nous intéressons au problème de contrôle stochastiques qui consiste à minimiser une certaine fonction de coût  $J(\cdot)$  définie par :  $J(u_t) = \mathbb{E} \left\{ g(x(T)) + \int_0^T h(t, x(t), u_t) dt \right\}$  où  $x(T)$  est une solution d'une équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t)) dt + \sigma(t, x(t), u(t)) dB_t, \\ x(0) = \zeta, \end{cases}$$

On s'intéresse aux conditions nécessaires d'optimalité pour le contrôle strict et relaxé. Les divers aspects des processus de diffusion et des équations différentielles stochastiques sont traités dans cet ouvrage parmi lesquels : Kushner [29], Pham [34], Karatzas-shreve [28], Yong [40] et Fleming [19]. Le principe du maximum stochastique global pour les contrôles stricts a été introduit par Peng [36] qui est basé sur la dérivée de second ordre. D'autres versions du principe du maximum dans lesquelles le coefficient de diffusion ( $\sigma(t, x, u)$ ) dépend explicitement du contrôle  $u$  ont été établies par Bensoussan [8, 9], Elliot [14] et Bahlali [1, 2, 3]. Dans le cas d'un système différentiel gouverné par une équation différentielle stochastique dépend des contrôles admissibles qui sont adaptés à une filtration plus petite que la filtration naturelle  $\mathcal{F}_t$  (c'est à dire système partiellement observable) a été abordé par Bensoussan [9] et Hausmann [23, 24, 25]. Dans le cas où les coefficients de l'équation d'état ne sont pas réguliers (c'est à dire ne sont pas différentiables) des résultats ont été obtenus par Mezerdi [31], Hafayed et Mezerdi [26] en utilisant le gradient généralisé de Clarke. Dans les cas des diffusions non dégénérées ont été étudiés par Bahlali, Mezerdi et Ouknine [7]. Mathématiquement, il existe deux méthodes de résolutions majeures en contrôle optimal, soit dans le cas déterministe ou stochastique, pour aborder les problèmes des contrôles stochastiques, le principe de la programmation dynamique (principe de Bellman) et le principe du maximum (principe de Pontryagin [35]). Les difficultés inhérentes au principe du maximum et au principe de la programmation dynamique ont poussé plusieurs auteurs à développer d'autres approches. Parmi celle-ci on peut citer :

l'approche par la théorie du potentiel et l'analyse convexe introduite par Bismit [11], les techniques basées sur les inégalités variationnelles étudiées par Bensoussan [8, 9] et la méthode de Bahlali [5] pour établir un principe du maximum dans laquelle le coefficient de diffusion dépend explicitement du contrôle avec un domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe. Cette nouvelle méthode a permis de résoudre plusieurs problèmes de contrôles stochastiques en finances. La suite de ce travail est organisée de la manière suivante :

### Chapitre-1

Dans le premier chapitre, on s'intéresse aux problèmes des processus stochastiques, Mouvement Brownien, Martingale et les solutions faibles et fortes des équations différentielles stochastiques.

Nous commençons par présenter les résultats principaux des équations différentielles stochastiques de façon générale. On décrit brièvement les processus stochastiques, Mouvement Brownien, Martingale et les solutions faibles et fortes des équations différentielles stochastiques.

### Chapitre-2

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité selon la méthode de Peng [36], c'est le cas où les coefficients  $b(t, x, u)$  et  $\sigma(t, x, u)$  sont contrôlés et le domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe. Pour cela, on suppose que la fonction coût  $J(u)$ , où  $u$  est un contrôle admissible, est différentiable et admet un minimum en  $u$ , qu'on appellera contrôle optimal,

$$J(u) = \min \{J(v), v \in \mathcal{U}\},$$

puis on perturbe le contrôle  $u$  sur un interval de longueur  $\theta$  où on obtient un contrôle  $u_\theta$ . qu'on appellera perturbation forte de  $u$ . L'intérêt de la perturbation du contrôle optimal  $u$  est d'introduire un contrôle  $u_\theta(t)$  pour lequel nous pourrions dériver la fonction  $J(u_\theta)$ . Les conditions nécessaires vérifiées par le contrôle  $u$  s'appelleront conditions nécessaires d'optimalité. L'obtention de ces conditions nécessaires d'optimalité est basée sur la dérivation de  $J(u_\theta)$  au point  $\theta = 0$  et le fait que le contrôle  $u$  est optimal. Le résultat obtenu dans ce chapitre est un processus adjoint de deuxième ordre et une inégalité entre Hamiltoniens.

### Chapitre-3

Le troisième chapitre contient la contribution essentielle de ce travail, on étudie les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les contrôles relaxés et stricts. Ces



resultats concernant les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités établies selon la méthode de Bahlali [5]. On sait que les resultats classique sur le principe du maximum stochastique reposent en grande partie sur la dérivée de second-ordre. Par contre, par l'approche de Bahlali [5] en utilisant seulement la dérivée du premier ordre. Cette nouvelle approche introduit par Bahlali [5] permet d'établir un principe du maximum stochastique global pour les problèmes de contrôle strict et relaxé.

# Chapitre 1

## Equations différentielles stochastiques

### 1.1 Introduction

Les équations différentielles stochastiques constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires. celles ci ont été introduites pour la première fois en 1946 par K.Ito pour étudier les trajectoires de processus de diffusions. Cette notion a été traitée de manière profonde en relation avec la théorie des semi-martingales. Les équations différentielles stochastiques a une grande importance sur tout dans les domaines des sciences de l'ingénieur (filtrage des processus, contrôle optimal, mathématique financière etc ... ) ont été réalisées en utilisant ce genre d'équations. Il existe une multitude d'ouvrages et d'articles traitant ces équations (voir par exemple Ikeda-Watnabe[27], Oksendal [32] etc...). Les équations différentielles stochastiques constituent un modèle de diffusions en milieu non homogène. Soit  $x_t$  la position d'une particule assez petite en suspension dans un liquide à l'instant  $t$ . Si on néglige l'inertie de la particule, on peut admettre que le déplacement de la particule est résultante de deux composantes, d'une part un déplacement centré du a la vitesse macroscopique du liquide, d'autre part des fluctuations provoquées par l'agitation thermique des molécules du liquide. Soit  $b(t, x, u)$  la vitesse macroscopique du liquide au point  $x$  à l'instant  $t$ . On supposera que la composante fluctuative dépend du temps ; de la position  $x$  et de la durée  $\Delta t$  pendant la quelle est envisagée déplacement alors :

$$x_{t+\Delta t} - x_t = b(t, x) \Delta t + \xi_{t,x,\Delta t}.$$

avec :

$$\mathbb{E}(\xi_{t,x,\Delta t}) = 0.$$

Si on suppose que

$$\xi_{t,x,\Delta t} = \sigma(t; x_t) \xi_{t;\Delta t},$$

où  $\sigma(t; x_t)$  désigne les propriétés du milieu  $\xi_{t;\Delta t}$  l'accroissement en milieu homogène

$$\xi_{t;\Delta t} = B_{t;\Delta t} - B_t,$$

avec  $B_t$  un mouvement Brownien alors,

$$x_{t+\Delta t} - x_t = b(t, x) \Delta t + \sigma(t; x_t) (B_{t;\Delta t} - B_t).$$

En passant aux différentiables, on obtient

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x) dt + \sigma(t; x_t) dB_t, \\ x_0 = \xi. \end{cases}$$

La formulation intégrale nous donne :

$$x_t = \xi + \int_0^t b(s, x_s) ds + \int_0^t \sigma(s; x_s) dB_s.$$

Comme  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  est un processus dont les trajectoires sont  $P - p.s.$ , à variation infinie,  $\int_0^t \sigma(s; x_s) dB_s$  ne peut pas être considéré comme une intégrale de Lebesgue. Par conséquent cette équation ne peut pas être interprétée comme une équation différentielle ordinaire Cette intégrale  $\int_0^t \sigma(s; x_s) dB_s$  appelé intégrale stochastique d'Itô.

## 1.2 Processus stochastiques

La notion de processus stochastique modélise les phénomènes naturels où des expériences dont l'évolution au cours du temps dépend du hasard. C'est l'équivalent de la notion de variable aléatoire pour les problèmes à temps fixé. Un traitement complet de la théorie générale des processus est donné dans (*Dellacherie-Meyer* [13]), Ghikhman-Skorokhod [38]. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité,  $\mathbb{T}$  un ensemble d'indices (qui peut être  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$  ou une partie de  $\mathbb{R}$ ) et  $(E, \xi)$  est un espace mesurable.

**Définition 1.2.1** *On appelle processus stochastique défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  admettant  $\mathbb{T}$  comme ensemble d'indices et  $(E, \xi)$  comme espace d'états, toute famille de variables aléatoires  $(X_t; t \in \mathbb{T})$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$  l'application  $t \in [0, \mathbb{T}] \rightarrow X_t(\omega)$  est appelée trajectoire (où réalisation) du processus  $X$  correspondant à  $\omega$ .*

**Remarque 1.2.2** *On peut regarder le processus  $X$  comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des trajectoires. C'est-à-dire l'application*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow E^{\mathbb{T}},$$

definie par

$$X(\omega) = (X_t(\omega); t \in \mathbb{T}),$$

où  $E^{\mathbb{T}}$  designe l'ensemble des applications de  $\mathbb{T}$  dans  $E$ .

### 1.2.1 Processus mesurable, adapté, progressivement mesurable

On suppose que  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ,  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable :

1) un processus  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit mesurable si l'application

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^+ \times \Omega, B(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F} &\rightarrow (E, \xi), \\ (t; \omega) &\rightarrow X_t(\omega) = X(t; \omega), \end{aligned}$$

est mesurable.

2) Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  une filtration de  $\mathcal{F}$ , un processus  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dit adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  si les variables aléatoires sont  $\mathcal{F}_t$  mesurables pour chaque  $t \in \mathbb{R}^+$  la v.a

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \xi) \text{ est } \mathcal{F}_t \text{ mesurable}$$

C'est-à-dire :

$$\forall B \in \xi; X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t.$$

Il est clair que  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est adapté par rapport à sa filtration naturelle

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t).$$

3)  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est progressivement mesurable si

$$([0; t] \times \Omega, B[0, t] \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow X_t(\omega) = X(t; \omega) \text{ est mesurable.}$$

#### Modifications, indistingabilité des processus.

1) Deux processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  définis sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sont dit modification l'un de l'autre si :

$$\mathbb{P}(w \in \Omega : X_t(w) = Y_t(w)) = 1; \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

C'est à dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, X_t(w) = Y_t(w) \text{ } \mathbb{P} - p.s.$$

2) Deux processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  définis sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sont dit indistingables s'il existe un ensemble  $N - \mathbb{P}$ -négligeable tel que :

$$P(w \notin N : X_t(w) = Y_t(w), \forall t \in \mathbb{R}^+) = 1.$$

C'est à dire

$$\forall w \notin N \Rightarrow X_t(w) = Y_t(w), \forall t \in \mathbb{R}^+; \mathbb{P} - p.s.$$

et  $Y$  ont les mêmes trajectoires sauf peut-être sur un ensemble négligeable.

### 1.3 Filtration

Une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est une famille croissante  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de sous tribus de  $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

pour tout  $0 \leq s \leq t$  dans  $\mathbb{T}$ . La filtration  $\mathcal{F}_t$  s'interprète comme l'information connue à la date  $t$ , et elle augmente avec le temps. On pose  $\mathcal{F}_k = \sigma(\cup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t)$  la plus petite  $\sigma$  sous tribu contenant tous les  $\mathcal{F}_t \forall t \in \mathbb{T}$ .

**Exemple 1.3.1** (*Canonique de filtration*) est le suivant :

Si  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est un processus stochastique la filtration naturelle (ou canonique) de  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t \text{ tel que } t \in \mathbb{T})$  la plus petite  $\sigma$  sous tribu par rapport à la quelle  $X_s$  est mesurable pour tout  $0 \leq s \leq t$ .

**Remarque 1.3.2** On dit qu'une filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s \leq t} \mathcal{F}_s \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Et si elle est complète c'est-à-dire :  $\mathcal{F}_0$  contient les ensembles négligeables.

### 1.4 Mouvement Brownien

un mouvement Brownien standard est processus aléatoire à temps continu  $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$  tel que :

1)

$$B_0 = 0 \text{ p.s.}$$

2) Pour tout  $0 \leq s \leq t$ ; dans  $\mathbb{T}$ ,

$$\text{l' accroissement } B_t - B_s \text{ est indépendant de } \sigma(B_u, u \leq s),$$

et suit une loi gaussienne centrée de variance  $(t - s)$ .

3).

$$(B_t) \text{ est à trajectoire continue.}$$

#### Un mouvement Brownien vectoriel

Un mouvement Brownien vectoriel (d-dimensionnel), sur  $[0, T]$  ou  $\mathbb{R}^+$ , est un processus continu à valeur dans  $\mathbb{R}^d$

$$(B_t)_{t \in \mathbb{T}} = \left( B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d \right)_{t \in \mathbb{T}}$$

tel que :

i)

$$B_0 = 0.$$

ii)

Pour tout  $0 \leq s \leq t$ , dans  $\mathbb{T}$ , l'accroissement  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\sigma(B_u, u \leq s)$ ,

et suit une loi gaussienne centrée de matrice de variance-covariance  $(t-s)Id$ , où  $Id$  est la matrice d'unité  $d \times d$ . Les coordonnées  $(B_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , un mouvement Brownien vectoriel sont des mouvements Browniens réels indépendants. Réciproquement des mouvements Browniens réels indépendants engendrent un mouvement Brownien vectoriel.

### 1.4.1 Construction par série de Fourier

Soit  $t \in [0, T]$ , on pose :

$$B_t = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \zeta_n,$$

où  $(\zeta_n)$  est une suite de variables iid  $\sim N(0, 1)$ . Alors  $B_t$  est une variable gaussienne, car c'est une somme de variables gaussiennes iid

$$\mathbb{E}(B_t) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2) &= \mathbb{E} \left( \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \zeta_n \right) \left( \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mt)}{m} \zeta_m \right) \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nt)}{n^2} = t. \end{aligned}$$

On peut également vérifier que le processus  $B_t$  ainsi défini a toutes les propriétés d'un mouvement Brownien standard

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_t}{\partial t} &= \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \cos(nt)}{\partial t} \frac{1}{n} \zeta_n \\ &= \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nt) \zeta_n. \end{aligned}$$

La variable  $\frac{\partial B_t}{\partial t}$  est donc une variable gaussienne, car c'est une somme de variables gaussiennes.

$$\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial B_t}{\partial t} \right)^2 \right] = \infty,$$

il est donc une contradiction, car une variable gaussienne ne peut avoir une variance infinie. En conclusion la variable  $\frac{\partial B_t}{\partial t}$  n'est pas bien définie,  $t \rightarrow B_t$  est continue n'est pas dérivable.

## 1.5 Martingale

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré. On appelle un processus  $M_t$  adapté à  $\mathcal{F}_t$  est une martingale si est seulement si :

i)

$$\mathbb{E}(|M_t|) < \infty, \forall t \geq 0$$

et

i

$$\mathbb{E}(M_t | F_s) = M_s p.s, \forall t \geq 0.$$

On définit de manière similaire une sous-martingale et une sur-martingale au temps continu avec les correspondantes

i)

$$\mathbb{E}(|M_t|) < \infty, \forall t \geq 0,$$

et

ii)

$$\mathbb{E}(M_t | F_s) < M_s p.s, \forall t \geq 0.$$

**Lemme 1.5.1** *Le mouvement Brownien standard  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est une martingale par rapport à sa filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ .*

**Preuve.** (i) Par cauchy -Schartz, on a :

$$\mathbb{E}(|B_t|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(|B_t|^2)} = \sqrt{t} < \infty$$

(ii)  $\forall 0 \leq s < t$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s^B) &= \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s^B) \\ \mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s^B) &= \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B) + \mathbb{E}(B_s | \mathcal{F}_s^B) \\ &= 0 + B_s. \end{aligned}$$

Les processus suivants sont des martingales par rapport à  $(\mathcal{F}_s^B)$  ■

**Exemple 1.5.2** 1).

$$M_t = B_t^2 - t, \forall t \geq 0$$

2)

$$N_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right) \text{ p.s.}, \forall t \geq 0$$

**Théorème 1.5.3** (théorème de Lévy).

Soit  $(X_t)$  un processus à trajectoire continue adapté à une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  et tel que :

(i)  $X_t$  est une martingale par rapport à  $\mathcal{F}_t$ .

(ii)  $X_t^2 - t$  est une martingale par rapport à  $\mathcal{F}_t$ .

Alors  $X_t$  est un mouvement Brownien standard. On cherche maintenant à définir la variable aléatoire  $\int_0^t f(s)dB_s$  quand  $\{f(s), s \geq 0\}$  est un processus stochastique.

## 1.6 Intégrale stochastique

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration de  $\mathcal{F}$  satisfaisant les conditions habituelles et  $B = (B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  mouvements Browniens.

**Définition 1.6.1** Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit simple si il existe une subdivision  $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$ , de l'intervalle  $[0; T]$  et une famille  $(\zeta_i)_{i \geq 0}$  de variables aléatoires avec

$$\sup_i \mathbb{E}(|\zeta_i|) \leq c < \infty, \text{ telle que } \zeta_i \text{ est } \mathcal{F}_{t_i} \text{ mesurable } \forall i \geq 0 :$$

$$X_t = \zeta_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t).$$

Où  $\mathbb{1}_A$  désigne l'indicatrice de l'ensemble  $A$ , c'est-à-dire :  $\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 : \text{si } t \in A, \\ -1 : \text{sinon.} \end{cases}$

**Remarque 1.6.2** L'ensemble des processus simples sera noté  $S_T$ .

**Définition 1.6.3** Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  progressivement mesurable est dit de classe  $M_T$  si

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t^2 dt < \infty \right].$$



$$M_T = \left\{ X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}} \text{ progressivement mesurables } \mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t^2 dt < \infty \right] \right\}.$$

C'est -à-dire :  $M_T$  est l'ensemble des processus progressivement mesurables de carré intégrable.

**Définition 1.6.4** Un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  progressivement mesurable est dit de classe  $\mathbb{P}_T$  si :

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^T X_t^2 dt < \infty \right\} = 1.$$

$$P_T = \left\{ X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}} \text{ progressivement mesurables} : \mathbb{P} \left\{ \int_0^T X_t^2 dt < \infty \right\} = 1 \right\}.$$

C'est -à-dire :  $P_T$  est l'ensemble des processus progressivement mesurables de carré presque sûrement intégrable.

**Lemme 1.6.5**

$$S_T \subset M_T \subset P_T.$$

Dans ce qui suit, on va construire et donner les propriétés des intégrales stochastiques par rapport au mouvement Brownien  $B = (B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  du type  $I(X) = \int_0^t X_s dB_s$ , pour des processus appartenant successivement à  $S_T$ ,  $M_T$  et  $P_T$ . Mais avant remarquons qu'on ne peut pas définir les intégrales de ce type comme intégrales de Lebesgue -Stieljes puisque les trajectoires du mouvement Brownien sont à variation infinie. Seulement les trajectoires du mouvement Brownien contiennent toute les propriétés qui en un certain sens sont l'analogue de la finitude de la variation.

### 1.6.1 Cas de processus simple

Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  un processus stochastique simple, on définit formellement intégrale stochastique de  $X$  par rapport au mouvement Brownien  $B = (B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  comme suit :

$$I(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \zeta_n (B_t - B_{t_k}).$$

$$I(t) = \int_0^t X_s dB_s.$$

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^t \left[ \zeta_0 1_{\{0\}}(s) + \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i 1_{[t_i, t_{i+1}[}(s) \right] dB_s \\
&= \int_0^t \zeta_0 1_{\{0\}}(s) dB_s + \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i \int_0^t 1_{[t_i, t_{i+1}[}(s) dB_s \\
&= \zeta_0 B_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \zeta_n (B_t - B_{t_k}).
\end{aligned}$$

Puisque

$$P(\zeta_0 = 0) = 1.$$

On conclut, et en vérifiant que pour tout  $i \neq j$  :

$$\mathbb{E} \{ \delta(t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \} = 0.$$

De plus,

$$\mathbb{E} [I(t)] = 0 \text{ et } \text{Var} (I(t)) = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\delta(s))^2 ds \right].$$

Dans ce qui suit, on se donne les propriétés fondamentales de l'intégrale stochastique, concernant la linéarité et la propriété de Martingale

**Lemme 1.6.6** 1)

$$t \geq 0, I(t) \text{ est } \mathcal{F}_t \text{ mesurable.}$$

2) *linéarité* : Soient  $I(t)$  et  $J(t)$  deux intégrales stochastiques données par :

$$I(t) = \int_0^t \delta(s) dB_s \text{ et } J(t) = \int_0^t \phi(s) dB_s.$$

Alors on obtient le résultat suivant :

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\delta(s) \pm \phi(s)) dB_s$$

et

$$\alpha I(t) = \int_0^t \alpha \delta(s) dB_s.$$

3)

$$(I(t))_{t \geq 0} \text{ est une martingale.}$$

et

4)

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t \delta(s) dB_s \right)^2 = \mathbb{E}(I^2(t)) = \mathbb{E} \left( \int_0^T \delta^2(s) ds \right).$$

**Preuve.** 3)  $0 \leq s \leq t$ . On traite le cas où  $s \in [t_l, t_{l+1}[$  et  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  tel que  $t_{l+1} \leq t_k$ .

$$\begin{aligned}
I(t) &= \sum_{j=0}^{l-1} \delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \delta(t_l)(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \\
&\quad + \sum_{j=l+1}^{k-1} \delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \delta(t_k)(B_t - B_{t_k}), \\
\mathbb{E}(I(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{l-1} \{ \delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \delta(t_l)(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \} \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{j=l+1}^{k-1} \{ \delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \delta(t_k)(B_t - B_{t_k}) \} \mid \mathcal{F}_s \right]. \\
&= I(s) + 0.
\end{aligned}$$

Puisque

$$(B_{t_{l+2}} - B_{t_{l+1}}), (B_{t_{l+3}} - B_{t_{l+2}}), \dots, (B_t - B_{t_k}) \text{ sont indépendants de } \mathcal{F}_s,$$

et le fait que le mouvement Brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, on en déduit que  $(I(t))$  est martingale. 4) On pose  $t = t_k$ , il vient

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}),$$

notons par  $D_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$  puis on prend le carré de  $I(t)$  on trouve :

$$\begin{aligned}
I^2(t) &= \left( \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \delta^2(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + 2 \sum_{i < j}^{k-1} \delta(t_j)\delta(t_i)D_i.D_j. \\
\mathbb{E}(I^2(t)) &= \mathbb{E} \left( \sum_{j=0}^{k-1} (\delta(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}))^2 + 2 \sum_{i < j}^{k-1} \delta(t_j)\delta(t_i)D_i.D_j \mid \mathcal{F}_{t_j} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} \left[ (\delta^2(t_j)) E \left( (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \mid \mathcal{F}_{t_j} \right) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}(\delta^2(t_j)) (t_{j+1} - t_j)
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E} \left( \int_0^T \delta^2(t) ds \right)$$

Finalement on obtient le lemme. ■

## 1.7 Cas de processus général

L'ensemble des processus simples  $S_T$  est dense dans  $M_T$ . Soient  $T > 0$  et  $\delta$  un processus tel que :  $I$  et  $\delta$  sont  $\mathcal{F}_t$ -adapté. De plus,

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T \delta^2(t) dt \right) < \infty, \forall T > 0,$$

**Théorème 1.7.1** *Il existe une suite de processus étagées  $\delta_n$  tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \int_0^T |\delta_n - \delta|^2 dt \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n - \delta\|_{L^2(\Omega, [0, T])}^2 \rightarrow 0.$$

On définit l'intégrale  $\int_0^t \delta(s) dB_s$  par la limite suivante dans  $L^2(\Omega, [0, T])$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \delta_n(s) dB_s = \int_0^t \delta(s) dB_s.$$

*Preuve.* Il faut montrer que la limite existe, Soit  $(m; n)$  assez grand :

$$\text{var} (I_n(t) - I_m(t)) = \mathbb{E} \left( \int_0^t \delta_n(u) - \delta_m(u) dB_u \right)^2.$$

D'après l'isométrie d'Itô on a :

$$\text{Var} (I_n(t) - I_m(t)) = \mathbb{E} \int_0^t (\delta_n(u) - \delta_m(u))^2 du$$

$$\begin{aligned} \text{Var} (I_n(t) - I_m(t)) &\leq 2 \left[ \mathbb{E} \int_0^t (\delta_n(u) - \delta(u))^2 du + \mathbb{E} \int_0^t (\delta(u) - \delta_m(u))^2 du \right] \\ &< \infty \end{aligned}$$

$I_n(t)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{L}^2(\Omega, [0, T])$  donc converge dans  $\mathbb{L}^2(\Omega, [0, T])$  vers une limite unique  $I(t)$  qui sera notée  $\int_0^t \delta(s) dB_s$ . ■

**Lemme 1.7.2** 1)  $I(t)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, ce qui implique que :

$$I(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \delta_n(s) dB_s$$

2) linéarité :

$$I(t) = \int_0^t \delta(s) dB_s ; \gamma(t) = \int_0^t \phi(s) dB_s$$

$$I(t) \pm \gamma(t) = \int_0^t (\delta(s) \pm \phi(s)) dB_s$$

et

$$cI(t) = \int_0^t c\delta(s)dB_s$$

3)

$(I(t))_{t \geq 0}$  est une martingale.

4)

$t \rightarrow \int_0^t \delta(s)dB_s$  est continue

5)

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t \delta(s)dB_s \right)^2 = \mathbb{E}(I^2(t)) = \mathbb{E} \left( \int_0^T \delta^2(s)ds \right).$$

**Exemple 1.7.3** Calculer  $\int_0^t B(s)dB_s$

$$\delta_n(s) = \begin{cases} B(0) : \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t}{n}, \\ B\left(\frac{t}{n}\right) : \text{si } \frac{t}{n} \leq s \leq \frac{2t}{n}, \\ \vdots \\ B\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) : \text{si } \frac{(n-1)t}{n} \leq s \leq t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t B(s)dB_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \delta_n(s)dB_s \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} B\left(\frac{k}{n}t\right) \left[ B\left(\frac{k+1}{n}t\right) - B\left(\frac{k}{n}t\right) \right] \end{aligned}$$

On pose

$$B_k = B\left(\frac{k}{n}t\right),$$

on obtient,

$$\int_0^t B(s)dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_k (B_{k+1} - B_k)$$

de plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{k+1} - B_k)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{k+1})^2 - \sum_{k=0}^{n-1} B_{k+1}B_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (B_k)^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{k+1} - B_k)^2 &= \frac{1}{2} B_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} B_k (B_{k+1} - B_k) \\ \sum_{k=0}^{n-1} B_k (B_{k+1} - B_k) &= \frac{1}{2} B_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{k+1} - B_k)^2 \end{aligned}$$

Par le passage à la limite on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} B_k (B_{k+1} - B_k) &= \frac{1}{2} B^2(t) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{k+1} - B_k)^2 \\ &= \frac{1}{2} B^2(t) - \frac{1}{2} t. \end{aligned}$$

Ceci est d'après la variation quadratique.

## 1.8 Formule d'Itô

### 1.8.1 Première formule d'Itô

Soit  $B$  un mouvement brownien sur  $(\Omega; \mathcal{F}; \mathcal{F}_t; P)$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et bornée. Alors :

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B(s)) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s)) ds$$

Calculer  $\int_0^t B(s) dB_s$  tel que :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ B_t^2 &= 0 + 2 \int_0^t B(s) dB_s + \int_0^t ds \end{aligned}$$

Ce qui donne, d'après l'intégration

$$\int_0^t B(s) dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

### Deuxième formule d'Itô

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  de class  $C^{1,2}$  on a :

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t f'(s, B(s)) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(s, B(s)) ds + \int_0^t f'_t(s, B(s)) ds$$

### Formule d'intégration par partie

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 + \int_0^t f(s) dB_s + \int_0^t g(s) ds, \\ Y(t) &= y_0 + \int_0^t h(s) dB_s + \int_0^t k(s) ds, \end{aligned}$$

avec  $f, g, h, k \in \mathbb{L}_{loc}^2$  deux processus d'Itô réel. D'après la formule d' Itô vectorielle

$$\phi(X(t); Y(t)) = X(t) Y(t)$$

$$dX(t) Y(t) = X(t) dY(t) + Y(t) dX(t) + d\langle X(t); Y(t) \rangle$$

et on obtient la formule d'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} X(t)Y(t) &= X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) \\ &\quad + \int_0^t g(s)k(s)ds. \end{aligned}$$

**Exemple 1.8.1** Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux mouvements Browniens indépendants seulement aux temps  $t$

$$B_1(t)B_2(t) = \int_0^t B_1(s)dB_2(s) + \int_0^t B_2(s)dB_1(s).$$

### Solutions faibles, fortes des équations différentielles stochastiques

Soit  $(\Omega; \mathcal{F}; P; (\mathcal{F}_t))$  un espace probabilité muni d'une filtration. Soit  $x = (x_t)_{t \in [0, T]}$  un processus stochastique continu à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  un mouvement Brownien de  $d$ -dimensionnel

$$\begin{aligned} b &: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma &: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow M_{n \times d}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

deux fonctions Boreliennes. Soit  $\xi$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$  mesurable indépendante de  $B$  telle que :

$$E(|\xi|^p) < \infty, \forall p > 1.$$

Soit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x) dt + \sigma(t, x) dB_t, \\ x_0 = \xi, \end{cases} \quad (1.1)$$

vérifiant les conditions suivantes :

$$P(x_0 = \xi) = 1, \quad (1.2)$$

$$P\left(\int_0^t |b(s, x_s)| + \sigma^2(s, x_s) ds < \infty\right) = 1, \quad (1.3)$$

$$x_t = \xi + \int_0^t b(s, x_s) ds + \int_0^t \sigma(s, x_s) dB_s, \quad (1.4)$$

**Définition 1.8.2** On dit que l'équation (1.1) admet une solution forte (trajectorielle) si pour chaque espace de probabilité muni d'une filtration  $(\Omega; \mathcal{F}; P; (\mathcal{F}_t))$  pour tout mouvement brownien  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  il existe un processus  $x = (x_t)_{t \in [0, T]}$  continu tel que les conditions (1.2), (1.3) et (1.4) sont vérifiées. Quand on parle de solution au sens

fort, on sous-entend que sont déjà donnés un espace probabilité muni d'une filtration  $(\Omega; \mathcal{F}; P; (\mathcal{F}_t))$  et un mouvement Brownien  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ . Si de plus  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$  alors le processus  $x = (x_t)_{t \in T}$  est  $\mathcal{F}_t$ -adapté et on a

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^B.$$

**Définition 1.8.3** On dit que l'équation (1.1) admet une solution faible (en loi). Si on peut trouver un espace probabilité muni d'une filtration  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t)$ , un mouvement brownien  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  et un processus  $X = (X_t)_{t \in T}$  continu tels que les conditions (1.2); (1.3); (1.4) soient vérifiées. Quand on parle de solution faible est la collection des objets  $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t), B, X)$  dans beaucoup de cas, où la solution faible existe, on a  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$  et par conséquent  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  relativement à  $\mathcal{F}_t$ . C'est pour quoi dans le cas des solutions faible on a :

$$\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t^X.$$

**Remarque 1.8.4** Les solutions faibles ne sont pas mesurables par rapport à  $\mathcal{F}_t^B$  et c'est ce qui différencie les solutions faibles des solutions fortes.

**Définition 1.8.5** On dit que l'équation (1.1) admet une solution forte unique si pour deux solutions fortes  $x = (x_t)_{t \in [0, T]}$  et  $y = (y_t)_{t \in [0, T]}$  on a

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} |x_t - y_t| > 0 \right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(x_t = y_t; \forall t \in [0, T]) = 1.$$

**Définition 1.8.6** On dit que l'équation (1.1) admet une solution faible (en loi). Si pour deux solutions  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, B; X)$  et  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}}, (\bar{\mathcal{F}}_t), \bar{B}, \bar{X})$  il y a coïncidence des distributions des processus  $X$  et  $\bar{X}$ . C'est-à-dire : pour  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$  on a :

$$\mathbb{P}(w \in \Omega : X(w) \in A) = \bar{\mathbb{P}}(\bar{w} \in \bar{\Omega} : \bar{X}(\bar{w}) \in A).$$

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) dB_t \quad \text{et } X_0 = x_0. \quad (1.5)$$

**Définition 1.8.7** Une solution faible de l'équation (1.5) est un processus continu  $X_t$  tel que les processus  $M_t$  et  $N_t$  définis respectivement par :

$$M_t = X_t - x_0 - \int_0^t f(X_s) ds$$

et

$$N_t = M_t^2 - \int_0^t g^2(X_s) ds,$$



sont des martingales. Le mouvement Brownien standard  $(B_t)$  à disparu de la définition de solution faible. Ainsi une solution faible d'une EDS est une solution en loi mais plus du tout une solution (trajectorielle) de l'équation (1.5).

**Proposition 1.8.8** *Supposons  $f, g$  continues,  $g$  bornée et supposons encore que l'équation (1.5) admet une solution forte  $X_t$  alors  $X_t$  est une solution faible de (1.5)*

**Preuve.**  $g$  est bornée, il est clair que ;

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t f(X_s) ds = \int_0^t g(X_s) dB_s$$

est une martingale continue de carré intégrable. De plus la variation quadratique de  $(M_t)$  est donné par :

$$\langle M_t \rangle = \int_0^t g^2(X_s) ds,$$

donc le processus  $(N_t)$  défini par :

$$N_t = M_t^2 - \int_0^t g^2(X_s) ds,$$

est une martingale. ■

**Remarque 1.8.9** *Une EDS peut admettre une solution faible, mais pas de solution forte, il existe donc plus souvent une solution faible qu'une solution forte. La question de l'unicité de la solution faible est par contre plus délicate, il faut préciser ce qu'on entend par (unique)*

**Exemple 1.8.10** *(La solution faible de l'EDS)*

1) On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{X_t} dB_t \text{ et } X_0 = x_0,$$

est un processus  $(X_t)$  tel que les processus  $(M_t)_t, (N_t)_t$  définis par :

$$M_t = X_t - a \int_0^t X_s ds \text{ et } N_t = M_t^2 - \int_0^t X_s^2 ds,$$

sont des martingales.

2) **(Equation de Detanaka)**

On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dx_t = \text{sgn}(x_s) dB_s, X_0 = x_0 \tag{E_1}$$

telle que la fonction  $\text{sgn}(\cdot)$  est définie par :  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$  Alors, cette dernière équation  $(E_1)$  possède une solution faible, mais elle n'admet pas de solution forte.

$$X_t - 0 = X_t \text{ et } X_t^2 - \int_0^t 1 ds,$$

sont martingales. Par le théorème de Levy la solution faible de l'équation  $(E_1)$  est nécessairement un mouvement Brownien standard, mais qui n'est pas le mouvement Brownien standard  $(B_t)$ , on ne peut pas remplacer  $X_t$  par  $B_t$  dans l'équation  $(E_1)$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité sur lequel on peut définir un mouvement Brownien  $X$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$ , la filtration propre de  $X$  par le même raisonnement que ci-dessus le processus  $B$  définit par :

$$B(t) = \int_0^t \text{sgn}(x_s) dX_s,$$

est encore un mouvement Brownien par différentiation :

$$dB(t) = \text{sgn}(x_t) dX,$$

et puisque

$$\frac{1}{\text{sgn}(x)} = \text{sgn}(x).$$

On veut donc de construire une solution faible. Avec les notations précédentes le  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t, -X)$  est une autre solution faible de  $(E_1)$  ne peut pas être solution forte. Ce qui implique que  $B(t)$  est mesurable par rapport

$$\mathcal{F}_t^{|X|} = \sigma(|x(s)|; s \leq t).$$

Si  $X$  était solution forte, alors

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t^{|X|},$$

est une contradiction car le signe du Brownien  $X$  est une variable aléatoire qui contient beaucoup d'information. Les solutions faibles ne sont pas mesurables par rapport à  $\mathcal{F}_t^B$  et c'est ce qui différencie les solutions faibles des solutions fortes. Les théorèmes fondamentaux de *Yamada-Watnabe* nous donnent la relation entre les solutions faibles et fortes. Ceci est donné par le théorème suivant :

**Théorème 1.8.11** 1) *L'unicité forte implique l'unicité faible.*

2) *L'existence faible et l'unicité forte implique l'existence forte.*

**Exemple 1.8.12** (*Detanaka*) *On considère l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$dx_t = \text{sgn}(x_s) dB_s, \tag{E2}$$

telle que la fonction  $\text{sgn}(\cdot)$  est définie par :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Alors, cette dernière équation (E2) possède une solution faible unique en loi mais elle n'admet pas de solution forte. En déduit de ce qui précèdent, que toute solution de l'équation (E2) est nécessairement un mouvement Brownien. Il suffit de prouver que le processus  $Z(t)$  définie par :

$$Z(t) = \exp\left(\lambda x(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}\right),$$

est une martingale pour toute  $x(t)$  solution de (E2) et  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . Alors

$$Z(t) = Z(s) \exp\left(\lambda(x(t) - x(s)) - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)$$

Puisque le processus  $\exp\left(\lambda(x(t) - x(s)) - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s^X$  et suit la loi  $\mathcal{N}(0; t-s)$  de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(t) | \mathcal{F}_s^X) &= \mathbb{E}\left(Z(s) \exp\left(\lambda(x(t) - x(s)) - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right) | \mathcal{F}_s^X\right), \\ &= Z(s) \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(x(t) - x(s)) - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)\right], \\ &= Z(s) \exp\left(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right) \mathbb{E}\{\exp[\lambda(x(t) - x(s))]\}. \end{aligned}$$

Et comme on a  $x(t) - x(s)$  est processus gaussien centré de variance  $t-s$ . De plus : pour toute suite croissante  $(t_j; j \leq n)$  positive et toute suite  $(\lambda_j; j \leq n)$  :

$$\mathbb{E}\left(\exp \sum_{i=0}^n \left[\lambda_i(x(t_i) - x(t_{i-1})) - \lambda_i^2 \frac{(t_i - t_{i-1})}{2}\right]\right) = \exp\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i^2 \frac{(t_i - t_{i-1})}{2}\right)$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(t) | \mathcal{F}_s^X) &= Z(s) \exp\left(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right) \exp\left(+\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right), \\ &= Z(s). \end{aligned}$$

En déduit que  $Z(t)$  est une  $\mathcal{F}_s^X$ -martingale. D'où le resultat.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité sur lequel on peut définir un mouvement Brownien  $X$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$ , la filtration propre de  $X$  par le même raisonnement que ci-dessus le processus  $B$  définit par :

$$B(t) = \int_0^t \text{sgn}(X_s) dX_s,$$

est encore un mouvement Brownien par différentiation

$$dB(t) = \operatorname{sgn}(x_t) dX_t$$

et puisque

$$\frac{1}{\operatorname{sgn}(x)} = \operatorname{sgn}(x).$$

On voit donc de construire une solution faible. Avec les notations précédentes le  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathcal{F}_t, B_t, -X)$  est une autre solution faible de  $(E_1)$  ne peut pas être solution forte. Ce qui implique que  $B(t)$  est mesurable par rapport

$$\mathcal{F}_t^{|X|} = \sigma(|x(s)|; s \leq t).$$

Si  $X$  était solution forte, alors :

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t^{|X|},$$

est une contradiction car le signe du Brownien  $X$  est une variable aléatoire qui contient beaucoup d'information .

## 1.9 Existence et unicité

Le problème est, comme Les équations différentielles stochastiques constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients  $b$  et  $\sigma$ , l'équation différentielle a une unique solution. On suppose que

$$|b(t; x) - b(t; y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t; y)|^2 \leq k|x - y|^2. \quad (1.6)$$

$$|b(t; x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq k(1 + |x_t|^2). \quad (1.7)$$

Maintenant, on se donne ci-dessous le théorème d'existence et unicité du à K.Itô

**Théorème 1.9.1** *Si les coefficients  $b$  et  $\sigma$  vérifient les conditions (1.6) et (1.7). Alors l'équation (1.1) admet une solution forte unique  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$   $(\mathcal{F}_t)$  adapté et continue avec condition initiale  $X_0 = \xi$  de plus cette solution est markovienne et vérifie*

$$E \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p \right) < M, \forall p > 1.$$

où  $M$  est une constante qui dépend de  $k; p; T$  et  $\xi$ .

**Remarque 1.9.2** *La condition de lipshitzienne (1.6) nous assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.1)*

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = 3x_t^{\frac{2}{3}}, & \text{et } x_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a, \\ (t-a)^3 & \text{si } t > a. \end{cases} \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

$b(x_t) = 3x_t^{\frac{2}{3}}$  n'est pas lipschitzienne car la dérivée n'est pas bornée n'est pas dérivable au point  $x_0 = 0$ .

**Remarque 1.9.3** La condition de croissance (1.7) nous assure la explosion de la solution et si on n'a pas cette condition l'équation (1.1) admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'explosion.

**Exemple 1.9.4** On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx_t}{dt} = x_t^2, x_0 = 1.$$

C'est-à-dire  $b(x) = x^2$ ,  $\sigma = 0$ , sont lipschitzienne donc, il existe une solution unique donnée par :

$$x_t = \frac{1}{1-t} : 0 \leq t \leq 1,$$

car

$$\lim_{t \rightarrow 1} x_t = +\infty.$$

La preuve du théorème d'existence et unicité est basé sur les deux lemmes suivants :

**Lemme 1.9.5** Lemme de Gronwall

Soit  $f$  une fonction intégrable et non négative définie pour  $t \geq 0$  et vérifiant

$$f(t) \leq \beta + c \int_0^t f(s) ds.$$

où  $c$  est une constante positive. Alors on a :

$$f(t) \leq \beta \int_0^t \exp(cs) ds.$$

Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \right|^2 \right] \leq C \mathbb{E} \left[ \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds \right].$$

où  $C$  est constante positive.

**Preuve. 1) Unicité**

Soient  $X = (X_t)_{t \in T}$  et  $Y = (Y_t)_{t \in T}$  deux solutions (1.1) tel que  $X_0 = Y_0 = \xi$ . On appliquant l'inégalité :

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

et en utilisant les formules de  $X_t$  et  $Y_t$  on obtient :

$$\begin{aligned} |X_t - Y_t|^2 &\leq 2 \left| \int_0^t b(s, X_s) - b(s, Y_s) ds \right|^2 \\ &\quad + 2 \left| \int_0^t \sigma(s; X_s) - \sigma(s; Y_s) dB_s \right|^2, \end{aligned}$$

passant à l'espérance mathématique on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2) &\leq 2\mathbb{E} \left( \left| \int_0^t b(s, X_s) - b(s, Y_s) ds \right|^2 \right) \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left( \left| \int_0^t \sigma(s; X_s) - \sigma(s; Y_s) dB_s \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Par les inégalités de Cauchy-Schawrtz et Buckholders-Davis-Gundy on obtient :

$$\left\langle \int_0^t g(s) dB_s \right\rangle_T = \int_0^t g^2(s) ds.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2) &\leq 2T\mathbb{E} \int_0^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2 ds \\ &\quad + 2\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s; X_s) - \sigma(s; Y_s)|^2 ds. \end{aligned}$$

En appliquant la condition de lipschitzienne (1.5) on obtient :

$$\mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2) \leq c \int_0^t \mathbb{E}|X_s - Y_s|^2 ds.$$

où  $c = \max(2Tk; 2k)$ . En appliquant l'inégalité de Tchébychef on obtient

$$\forall \theta > 0; \left( P|X_t - Y_t|^2 > \theta \right) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_t - Y_t|^2)}{\theta} = 0.$$

Donc pour tout ensemble  $D$  dénombrable partout dense dans  $[0; T]$  on a

$$P \left( \sup_{t \in [0; T]} |X_t - Y_t|^2 > 0 \right) = 0$$

enfin le processus  $X$  et  $Y$  sont continues. On conclut que

$$P \left( \sup_{t \in T} |X_t - Y_t|^2 > 0 \right) = 0$$

Ce qui prouve l'unicité forte de la solution.

**2) Existence :** On montre l'existence d'une solution forte en utilisant la méthode des approximations successives et pour cela on pose

$$X_t^n = \xi + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds + \int_0^t \sigma(s; X_s^{n-1}) dB_s. \quad (1.8)$$

On pose

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}) ds + \int_0^t \sigma(s; X_s^n) - \sigma(s; X_s^{n-1}) dB_s$$

En utilisant la même technique que pour l'unicité on obtient

$$E \left( |X_t^{n+1} - X_t^n|^2 \right) \leq c \int_0^t E |X_s^n - X_s^{n-1}|^2$$

où  $c = \max(2Tk; 2k)$  D'après (1.6) on a

$$\mathbb{E} \left( |X_t^1 - X_t^0|^2 \right) \leq 2cT \left( 1 + \mathbb{E} \left( |X_t^0|^2 \right) \right),$$

puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( |X_t^1 - X_t^0|^2 \right) &\leq 2\mathbb{E} \left| \int_0^t b(s, X_s^0) ds \right|^2 + 2\mathbb{E} \left| \int_0^t \sigma(s; X_s^0) dw_s \right|^2 \\ &\leq 2T\mathbb{E} \int_0^t |b(s, X_s^0)|^2 ds + 2\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s; X_s^0)|^2 ds \\ &\leq 2Tk \int_0^t \left( 1 + \mathbb{E} |(X_s^0)|^2 \right) ds + 2k \int_0^t \left( 1 + \mathbb{E} |(X_s^0)|^2 \right) ds \\ &\leq (2cTk + 2k) \left( 1 + \mathbb{E} |(X_s^0)|^2 \right) T \\ &\leq 2cT \left( 1 + \mathbb{E} |(X_s^0)|^2 \right). \end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \left( |X_t^1 - X_t^0|^2 \right) \leq MT$$

tel que  $M = 2c \left( 1 + \mathbb{E} |(X_s^0)|^2 \right)$ . Par récurrence sur  $n$  il résulte que

$$\mathbb{E} \left( |X_t^{n+1} - X_t^n|^2 \right) \leq \frac{(MT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

et démontré que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( |X_t^{n+2} - X_t^{n+1}|^2 \right) &\leq \frac{(MT)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &\leq c \int_0^t \mathbb{E} \left( |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right) ds \leq c \int_0^t \frac{(Ms)^{n+1}}{(n+1)!} ds = c \frac{(MT)^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned}$$

on obtient alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( |X_t^m - X_t^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \|X_t^m - X_t^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} \left\| X_t^{k+1} - X_t^k \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$  on obtient  $\mathbb{E} \left( |X_t^m - X_t^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ . alors on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( |X_t^m - X_t^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (1.9)$$

Donc  $X_t^n$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  et par conséquent elle est convergente. Notons  $X_t$  sa limite, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_t^n \rightarrow X_t.$$

Maintenant, le processus  $X_t^n$  définit par :

$$X_t^n = \xi + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds + \int_0^t \sigma(s; X_s^{n-1}) dB_s$$

D'après l'égalité (1.9) et lemme de *Fatou* on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T |X_s - X_s^n|^2 ds &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |X_s^m - X_s^n|^2 ds \rightarrow 0. \\ \mathbb{E} \left( \lim_n \int_0^T |X_s - X_s^n|^2 ds \right) &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \int_0^T |X_s^m - X_s^n|^2 ds \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E} \int_0^T |X_s - X_s^n|^2 ds \rightarrow 0.$$

En utilisant l'isométrie d'Itô

$$\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s; X_s^n) - \sigma(s; X_s)|^2 ds \leq C \int_0^t \mathbb{E} \left( |X_s^n - X_s|^2 \right) ds \rightarrow 0,$$

et de plus

$$\int_0^t \sigma(s; X_s^n) dB_s \rightarrow \int_0^t \sigma(s; X_s) dB_s$$

On applique l'inégalité de Hölder

$$\mathbb{E} \int_0^t |b(s; X_s^n) - b(s; X_s)|^2 ds \leq cT \int_0^t \mathbb{E} \left( |X_s^n - X_s|^2 \right) ds \rightarrow 0$$



Et par la continuité de  $b(t, \cdot)$  on obtient

$$\int_0^t b(s; X_s^n) ds \rightarrow \int_0^t b(s; X_s) ds, \quad (n \rightarrow \infty)$$

En passant à la limite dans (1.8) on obtient

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s; X_s) dB_s$$

Donc  $X_t$  est une solution de l'équation (1.1) montrons que

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p \right) < M, \quad \forall p > 1.$$

Par l'inégalité  $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$  et on passant aux espérance on a

$$\mathbb{E} (|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E} (|\xi|^2) + 3T\mathbb{E} \int_0^t |b(s, X_s)|^2 ds + 3\mathbb{E} \int_0^t |\sigma(s; X_s)|^2 ds,$$

d'après (1.7) on trouve

$$\mathbb{E} (|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E} (|\xi|^2) + 3Tk \int_0^t \mathbb{E} (1 + |X_s|^2) ds + 3k \int_0^t \mathbb{E} (1 + |X_s|^2) ds.$$

Posant  $M = \max(3; 3Tk; 3k)$  et  $c = \max(M, 2M)$  on obtient

$$\mathbb{E} (|X_t|^2) \leq c \left( 1 + \mathbb{E} (|\xi|^2) \right) + c \int_0^t \mathbb{E} (|X_s|^2) ds.$$

En appliquant le lemme de Grnwall on obtient :

$$\mathbb{E} (|X_t|^2) \leq c \left( 1 + \mathbb{E} (|\xi|^2) \right) e^{ct}; \quad \forall t \in T$$

Puisque  $\mathbb{E} (|\xi|^2) < \infty$  alors en posant  $M = c \left( 1 + \mathbb{E} (|\xi|^2) \right) e^{cT}$ . On obtient

$$\mathbb{E} (|X_t|^2) \leq M; \quad \forall t \in [0, T].$$

Ce qui implique

$$E \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p \right) < M.$$

D'où le resultat. ■

## Chapitre 2

# Principe du maximum du second-ordre en contrôle des diffusions

Dans ce chapitre on donne une généralisation du principe du maximum stochastique dans le cas où les coefficients de drifte  $b$  et de diffusion  $\sigma$  de l'équation d'état contient un terme de contrôle. Ce résultat a été obtenu par Peng [36] en 1990 en utilisant les dérivées de second ordre pour avoir une estimation des solutions de l'équation d'état de l'ordre  $o(\theta)$ .

### 2.1 Formulation du problème et hypothèses

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  un espace probabilité filtré et  $B = (B_t)$  un mouvement Brownien standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$ . Soit  $\mathbb{A}$  un Borélien de  $\mathbb{R}^d$ . Un contrôle  $u$  est un processus -adapté à valeurs dans un  $\mathbb{A}$ , tel que :

$$\mathbb{E} |u(t)|^m < \infty, \forall m > 1.$$

On note par  $\mathcal{U}$  l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t)) dt + \sigma(t, x(t), u(t)) dB_t, \\ x(0) = \zeta, \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow M_{n \times d}(\mathbb{R}),$$

sont deux fonctions Boreliennes et  $\zeta$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et indépendante de  $B$  telle que :

$$E(|\zeta|^m) < \infty, \forall m > 1.$$

la fonction coût à minimiser est de la forme

$$J(u) = E \left[ g(x(T)) + \int_0^T h(t, x(t), u(t)) dt \right]. \quad (2.2)$$

où :

$$h : [0, T] \times R^n \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } g : R^n \rightarrow \mathbb{R},$$

sont deux fonctions Boreliennes et  $x(T)$  la solution de l'équation (2.1) prise au temps terminal  $T$ .

**Notation 2.1.1** On note par  $f_x$  et  $f_{xx}$  les dérivées premières et secondes par rapport à  $x$  pour  $f := b, \sigma, h, g$ .

On suppose que :

$$\begin{aligned} & b, \sigma, g \text{ et } h \text{ sont deux fois dérivables par rapport à la variable d'état } x, \\ & b_x, \sigma_x, g_x, h_x, b_{xx}, \sigma_{xx}, g_{xx}, \text{ et } h_{xx} \text{ sont continues en } (x, u). \quad (2.3) \\ & b_x, \sigma_x, g_x, h_x, b_{xx}, \sigma_{xx}, g_{xx}, \text{ et } h_{xx} \text{ sont bornés.} \\ & b, \sigma, g_x \text{ et } h_x \text{ sont bornés par } C(1 + |X| + |u|). \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.2** 1) Les coefficients  $b, \sigma$  sont dérivables et à dérivées bornées, donc Lipschitziennes, alors l'équation (2.1) admet une solution forte unique donnée par :

$$x(t) = \zeta + \int_0^t b(t, x(t), u(t)) dt + \int_0^t \sigma(t, x(t), u(t)) dB_t.$$

De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^m \right] < M, \quad \forall m > 1,$$

où  $M$  est une constante qui dépend de  $m; T, k, \text{ et } \zeta$ .

**Remarque 2.1.3** 2) Sous les conditions (2.3) sur  $h$  et  $g$  la fonction coût est bien définie.

## 2.2 Estimation des solutions

Puisque le coefficient  $\sigma$  contient le terme de contrôle et que le domaine du contrôle  $\mathbb{A}$  n'est pas convexe, la méthode classique qui consiste à utiliser les dérivées du premier ordre n'est plus valable car on aura une estimation de ordre de  $0(\theta)$ . C'est à dire on aura l'estimation suivante :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |x^\theta(t) - x(t)|^2 \right] = o(\theta).$$

Ce qui ne nous permettra pas d'avoir un principe du maximum mais un principe du maximum à une constante près. l'idée initiée par Peng [36] est de passer aux dérivées de second ordre et ainsi avoir une estimation d'ordre de  $o(\theta)$ . Ce qui nous permettra d'avoir un principe du maximum. Soit  $(x, u)$  une solution optimale et soit la perturbation suivante :

$$u^\theta(t) = \begin{cases} v & \text{si } t \in [\tau, \tau + \theta] \\ u(t) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

ou  $0 \leq \tau \leq T$  est fixé  $\theta$  suffisamment petit et  $v$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable arbitraire à valeurs dans  $\mathbb{A}$  telle que :

$$\mathbb{E} \sup_{w \in \Omega} |v(w)| < \infty.$$

Soit  $x^\theta$  la trajectoire associée au contrôle  $u^\theta$ , c'est-à-dire la solution de l'équation :

$$\begin{cases} dx^\theta(t) = b(t, x^\theta(t), u^\theta(t)) dt + \sigma(t, x^\theta(t), u^\theta(t)) dB_t \\ x^\theta(0) = \zeta \end{cases}$$

Le contrôle  $u$  étant optimal pour le coût  $J$ , on a l'inéquation variationnelle suivante :

$$J(u^\theta) - J(u) \geq 0.$$

**Notation 2.2.1** pour  $f = b, \sigma, h, g$  on note :

$$f_{xx}yy = \sum_{i,j=1}^n f_{x^i x^j} y^i y^j$$

**Lemme 2.2.2** (S. Peng) [36]

Sous les hypothèses (2.3) on a l'estimation suivante :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) - x_2(t)|^2 \right] \leq C\theta^2 \quad (2.5)$$

on a  $x_1, x_2$  sont les solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t \left[ b(s, x(s), u^\theta(s)) - b(s, x(s), u(s)) + b_x(s, x(s), u(s)) x_1(s) \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[ \sigma(s, x(s), u^\theta(s)) - \sigma(s, x(s), u(s)) + \sigma_x(s, x(s), u(s)) x_1(s) \right] dB_s \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) = & \int_0^t \left[ \left( b_x \left( s, x(s), u^\theta(s) \right) - b_x \left( s, x(s), u(s) \right) \right) x_1(s) + b_x \left( s, x(s), u(s) \right) x_2(s) \right] ds \\
 & + \int_0^t \frac{1}{2} b_{xx} \left( s, x(s), u(s) \right) x_1(s) x_1(s) ds \\
 & + \int_0^t \left[ \left( \sigma_x \left( s, x(s), u^\theta(s) \right) - \sigma_x \left( s, x(s), u(s) \right) \right) x_1(s) + \sigma_x \left( s, x(s), u(s) \right) x_2(s) \right] dB_s \\
 & + \int_0^t \frac{1}{2} \sigma_{xx} \left( s, x(s), u(s) \right) x_1(s) x_1(s) dB_s
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

**Preuve.** tout d'abord on montre que :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[ |x_1(t)|^2 \right] \leq C\theta. \tag{2.8}$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[ |x_2(t)|^2 \right] \leq C\theta^2. \tag{2.9}$$

En effet, en utilisant l'inégalité

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |x_1(t)|^2 & \leq 4T \int_0^t \mathbb{E} |b_x \left( s, x(s), u(s) \right) x_1(s)|^2 ds \\
 & + 4 \int_0^t \mathbb{E} |\sigma_x \left( s, x(s), u(s) \right) x_1(s)|^2 ds \\
 & + 4 \int_0^t \mathbb{E} \left| b \left( s, x(s), u^\theta(s) \right) - b \left( s, x(s), u(s) \right) \right|^2 ds \\
 & + 4 \int_0^t \mathbb{E} \left| \sigma \left( s, x(s), u^\theta(s) \right) - \sigma \left( s, x(s), u(s) \right) \right|^2 ds
 \end{aligned}$$

De la définition de  $u^\theta(t)$  on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |x_1(t)|^2 & \leq 4T \int_0^t \mathbb{E} |b_x \left( s, x(s), u(s) \right) x_1(s)|^2 ds \\
 & + 4 \int_0^t \mathbb{E} |\sigma_x \left( s, x(s), u(s) \right) x_1(s)|^2 ds \\
 & + 4T \int_\tau^{\tau+\theta} \mathbb{E} |b \left( s, x(s), v \right) - b \left( s, x(s), u(s) \right)|^2 ds \\
 & + 4 \int_\tau^{\tau+\theta} \mathbb{E} |\sigma \left( s, x(s), v \right) - \sigma \left( s, x(s), u(s) \right)|^2 ds
 \end{aligned}$$

par(2.3) on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |x_1(t)|^2 &\leq 8M \int_0^t \mathbb{E} |x_1(s)|^2 ds \\ &\quad + 8 \int_\tau^{\tau+\theta} c \left( 1 + \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} |x(s)|^2 \right) ds \\ &\leq 8M \int_0^t \mathbb{E} |x_1(s)|^2 ds + 8c(1+M)\theta \end{aligned}$$

par les inégalités de Gronwall et Bukholder- Davis-Gundy on obtient (2.8)

de la même manière on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |x_2(t)|^2 &\leq 6T \int_0^t \mathbb{E} |b_x(s, x(s), u(s)) x_2(s)|^2 ds \\ &\quad + 6 \int_0^t \mathbb{E} |\sigma_x(s, x(s), u(s)) x_2(s)|^2 ds \\ &\quad + 6T \int_0^t \mathbb{E} \left| b_x(s, x(s), u^\theta(s)) - b_x(s, x(s), u(s)) x_1(t) \right|^2 ds \\ &\quad + 3T \int_0^t \mathbb{E} |b_{xx}(s, x(s), u(s)) x_1(s) x_1(s)|^2 ds \\ &\quad + 6 \int_0^t \mathbb{E} \left| \sigma_x(s, x(s), u^\theta(s)) - \sigma_x(s, x(s), u(s)) x_1(t) \right|^2 ds \\ &\quad + 3 \int_0^t \mathbb{E} |\sigma_{xx}(s, x(s), u(s)) x_1(s) x_1(s)|^2 ds \end{aligned}$$

De (2.3) la définition de  $u^\theta(t)$  et (2.8) no a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |x_2(t)|^2 &\leq 12M \int_0^t \mathbb{E} |x_2(s)|^2 ds + 12M \int_\tau^{\tau+\theta} \theta ds + 6M \int_\tau^{\tau+\theta} \theta^2 ds \\ &\leq 12M \int_0^t \mathbb{E} |x_2(s)|^2 ds + 6(M+T)\theta^2, \end{aligned}$$

par les inégalités de Gronwall et Bukholder- Davis-Gundy on obtient.la relation (2.9) .Les relations (2.8) et (2.9)Va nous pèrmettre de montrer la relation (2.5)pour la simplicité des calculs,on pose :

$$x_3 = x_1 + x_2.$$

En appliquant le développement de Taylor avec reste intégrale au point  $x$  et à l'ordre 1 aux fonctions  $b(x+x_3; u^\theta)$  et  $\sigma(x+x_3; u^\theta)$  on a :

$$\begin{aligned} b(t; x+x_3; u^\theta) &= b(t; x; u^\theta) + b_x(t; x; u) \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \lambda b_{xx}(t, x + \lambda\theta x_3; u^\theta) d\lambda d\theta x_3(t) x_3(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t; x + x_3; u^\theta) &= \sigma(t; x; u^\theta) + \sigma_x(t; x; u^\theta) x_3(t) \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \lambda \sigma_{xx}(t, x + \lambda \theta x_3; u^\theta) d\lambda d\theta x_3(t) x_3(t) \end{aligned}$$

en passant aux intégrales on obtient :

$$\begin{aligned} &+ \int_0^1 \int_0^1 \lambda \sigma_{xx}(t, x + \lambda \theta x_3; u^\theta) d\lambda d\theta x_3(t) x_3(t) \\ &\int_0^t b(s; x + x_3; u^\theta) ds + \int_0^t \sigma(s; x + x_3; u^\theta) dB_s \\ = &\int_0^t b(s; x; u) ds + \int_0^t \sigma(s; x; u) dB_s + \int_0^t b_x(s; x; u) x_3(s) ds + \int_0^t \sigma_x(s; x; u) x_3(s) dB_s \\ &+ \int_0^t (b_x(s; x; u^\theta) - b_x(s; x; u)) x_3(s) + \int_0^t (\sigma_x(s; x; u^\theta) - \sigma_x(s; x; u)) x_3(s) dB_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t b_{xx}(s; x; u) x_3(s) x_3(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{xx}(s; x; u) x_3(s) x_3(s) dB_s \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \lambda [b_{xx}(s, x + \lambda \theta x_3; u^\theta) - b_{xx}(s, x; u)] d\lambda d\theta x_3(s) x_3(s) ds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \lambda [\sigma_{xx}(s, x + \lambda \theta x_3; u^\theta) - \sigma_{xx}(s, x; u)] d\lambda d\theta x_3(s) x_3(s) dB_s \end{aligned}$$

en remplaçant  $x_3$  par sa valeur on a :

$$\begin{aligned} &x(t) + x_1(t) + x_2(t) - \zeta + \int_0^t B^\theta(s) ds + \int_0^t \Lambda^\theta(\theta) dB_s \\ = &\int_0^t b(s; x + x_1 + x_2; u^\theta) ds + \int_0^t \sigma(s; x + x_1 + x_2; u^\theta) dB_s \end{aligned}$$

où  $B^\theta(s)$  et  $\Lambda^\theta(\theta)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} B^\theta(s) &= \frac{1}{2} b_{xx}(s; x; u) (x_2(s) x_2(s) + 2x_1(s) x_2(s)) + (\sigma_x(s; x; u^\theta) - \sigma_x(s; x; u)) x_2(s) \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \lambda [b_{xx}(s, x + \lambda \theta (x_1 + x_2); u^\theta) - b_{xx}(s, x; u)] d\lambda d\theta (x_1 + x_2)(s) (x_1 + x_2)(s) ds \\ \Lambda^\theta(\theta) &= \frac{1}{2} \sigma_{xx}(s; x; u) (x_2(s) x_2(s) + 2x_1(s) x_2(s)) + (b_x(s; x; u^\theta) - b_x(s; x; u)) x_2(s) \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \lambda [\sigma_{xx}(s, x + \lambda \theta (x_1 + x_2); u^\theta) - \sigma_{xx}(s, x; u)] d\lambda d\theta (x_1 + x_2)(s) (x_1 + x_2)(s) ds \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$x(t) + x_1(t) + x_2(t) = \zeta + \int_0^t b(s; x + x_1 + x_2; u^\theta) ds + \int_0^t \sigma(s; x + x_1 + x_2; u^\theta) dB_s$$

$$- \int_0^t B^\theta(s) ds - \int_0^t \Lambda^\theta(\theta) dB_s$$

Et par consequent on aura :

$$\begin{aligned} x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) - x_2(t) &= \int_0^t \left[ b(s; x; u^\theta) - b(s; x + x_1 + x_2; u^\theta) \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[ \sigma(s; x; u^\theta) - \sigma(s; x + x_1 + x_2; u^\theta) \right] dB_s \\ &+ \int_0^t B^\theta(s) ds + \int_0^t \Lambda^\theta(s) dB_s \end{aligned}$$

Et passant aux espérances on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) - x_2(t) \right|^2 &\leq 3T \int_0^t \mathbb{E} \left| b(s; x; u^\theta) - b(s; x + x_1 + x_2; u^\theta) \right|^2 ds \\ + 3 \int_0^t \mathbb{E} \left| \sigma(s; x; u^\theta) - \sigma(s; x + x_1 + x_2; u^\theta) \right|^2 ds &+ 6T \int_0^t \mathbb{E} \left| B^\theta(s) \right|^2 ds + 6 \int_0^t \mathbb{E} \left| \Lambda^\theta(s) \right|^2 ds \end{aligned}$$

Puisque  $b$  et  $\sigma$  sont lipschitziennes alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) - x_2(t) \right|^2 &\leq 6K \int_0^t \mathbb{E} \left| x^\theta(s) - x(s) - x_1(s) - x_2(s) \right|^2 ds \\ &+ 6T \int_0^t \mathbb{E} \left| B^\theta(s) \right|^2 ds + 6 \int_0^t \mathbb{E} \left| \Lambda^\theta(s) \right|^2 ds \end{aligned}$$

Puisque  $b_x$  et  $b_{xx}$  sont bornées alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| B^\theta(s) \right|^2 &\leq 2M \mathbb{E} |x_2(s) x_2(s)|^2 + 8M \mathbb{E} |x_1(s) x_2(s)|^2 + 4M \mathbb{E} |x_2(s)|^2 \\ &+ 2M \mathbb{E} |(x_1(s) + x_2(s))(x_1(s) + x_2(s))|^2 \end{aligned}$$

d'après (2.8), (2.9) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| B^\theta(s) \right|^2 &\leq C \left( \theta^4 + \theta^2 + \theta\sqrt{\theta} \right) \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left| \int_0^t B^\theta(s) ds \right|^2 &= o(\theta) \end{aligned}$$

De la même manière et puisque  $\sigma_x$  et  $\sigma_{xx}$  sont bornées on a :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left| \int_0^t B^\theta(s) ds \right|^2 &= o(\theta) \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left| \int_0^t \Lambda^\theta(s) ds \right|^2 &= o(\theta) \end{aligned}$$



Ce qui nous donne :

$$\mathbb{E} \left| x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) - x_2(t) \right|^2 \leq 6K \int_0^t \mathbb{E} \left| x^\theta(s) - x(s) - x_1(s) - x_2(s) \right|^2 ds + o(\theta)$$

Par le lemme de Gronwall on obtient :

$$\mathbb{E} \left| x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) - x_2(t) \right|^2 \leq o(\theta) \exp(6KT) = o(\theta).$$

Finalement on obtient le lemme par l'inégalité de Bukholder -Davis-Gundy. ■

**Remarque 2.2.3** *les équations (2.6), (2.7) sont appelées respectivement équation variationnelle du premier et de second ordre. On introduit l'équation (2.7) car si on utilise seulement l'équation(2.6) On aura l'estimation suivante :*

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) \right|^2 \right] \leq C\theta = o(\theta)$$

**Lemme 2.2.4** : (S.Peng) [36]

soit  $u$  un contrôle optimal alors sous l'hypothèse (2.5) on a :

$$\begin{aligned} o(\theta) &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t; x(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u(t)) dt \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[ g_x(x(T))(x_1(T) + x_2(T)) + \int_0^T h_x(t; x(t), u(t))(x_1(t) + x_2(t)) dt \right] \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ g_{xx}(x(T))(x_1(T)x_1(T)) + \int_0^T h_{xx}(t; x(t), u(t))(x_1(t)x_1(t)) dt \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

**Preuve.** puisque  $u$  est optimal alors on a :

$$0 \leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t; x(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u(t)) dt \right] + \mathbb{E} \left[ g(x^\theta(T)) - g(x(T)) \right]$$

en appliquant le développement de Taylor au point  $x^\theta$  à l'ordre 1, aux fonctions

$$h(t; x(t) + x_1(t) + x_2(t), u^\theta(t)) \text{ et } g(x(T) + x_1(T) + x_2(T))$$

$$\begin{aligned} h(t; x(t) + x_1(t) + x_2(t), u^\theta(t)) &= h(t; x^\theta(t), u^\theta(t)) \\ -h_x(t; x^\theta(t), u^\theta(t)) &\left( x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) - x_2(t) \right) + o(\theta) \\ g(x(T) + x_1(T) + x_2(T)) &= g(x^\theta(T)) \\ -g_x(x^\theta(T)) &\left( x^\theta(T) - x(T) - x_1(T) - x_2(T) \right) + o(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t; x(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u(t)) \right] dt + \mathbb{E} [g(x^\theta(T)) - g(x(T))] \\
 0 &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t; x(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u(t)) \right] dt + \mathbb{E} [g(x^\theta(T)) - g(x(T))] \\
 0 &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t; x(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u(t)) \right] dt + \mathbb{E} [g(x^\theta(T)) - g(x(T))] \\
 &\quad + \int_0^T h_x(t; x^\theta(t), u^\theta(t)) (x^\theta(t) - x(t) - x_1(t) - x_2(t)) dt \\
 &\quad + \mathbb{E} [g(x(T) + x_1(T) + x_2(T)) - g(x(T))] \\
 &\quad + g_x(x^\theta(T)) (x^\theta(T) - x(T) - x_1(T) - x_2(T)) + o(\theta),
 \end{aligned}$$

et en utilisant (2.3) et (2.4)

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t; x(t) + x_1(t) + x_2(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u^\theta(t)) \right] dt, \quad (2.11) \\
 &\quad + \mathbb{E} [g(x(T) + x_1(T) + x_2(T)) - g(x(T))] + o(\theta),
 \end{aligned}$$

par le développement de Taylor des fonctions

$$h(t; x(t) + x_1(t) + x_2(t), u^\theta(t)) \text{ et } g(x(T) + x_1(T) + x_2(T)),$$

au point  $x$  à l'ordre 2 on a :

$$\begin{aligned}
 &h(t; x(t) + x_1(t) + x_2(t), u^\theta(t)) = \\
 &h(t; x(t), u^\theta(t)) + h_x(t; x(t), u^\theta(t)) (x_1(t) + x_2(t)) \\
 &+ \frac{1}{2} h_{xx}(t; x(t), u^\theta(t)) (x_1(t) + x_2(t)) (x_1(t) + x_2(t)) + o(|x_1 + x_2|^2) \\
 &g(x(T)) + g_x(x(T)) (x_1(T) + x_2(T)) \\
 &+ \frac{1}{2} g_{xx}(x(T)) (x_1(T) + x_2(T)) (x_1(T) + x_2(T)) + o(|x_1 + x_2|^2)
 \end{aligned}$$

par (2.7) et (2.8) on a  $o(|x_1 + x_2|^2) = o(\theta)$  ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 &h(t; x(t) + x_1(t) + x_2(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u(t)) = o(\theta) \\
 &+ h(t; x(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u(t)) + h_x(t; x(t), u^\theta(t)) (x_1(t) + x_2(t)) \\
 &+ \frac{1}{2} h_{xx}(t; x(t), u^\theta(t)) (x_1(t) + x_2(t)) (x_1(t) + x_2(t)) + h_x(t; x(t), u(t)) (x_1(t) + x_2(t)) \\
 &+ \frac{1}{2} h_{xx}(t; x(t), u(t)) (x_1(t) + x_2(t)) (x_1(t) + x_2(t)) - h_x(t; x(t), u(t)) (x_1(t) + x_2(t))
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}h_{xx}(t; x(t), u(t))(x_1(t) + x_2(t))(x_1(t) + x_2(t))$$

ET

$$\begin{aligned} g(x(T) + x_1(T) + x_2(T)) - g(x(T)) &= o(\theta) \\ &+ g_x(x(T))(x_1(T) + x_2(T)) \\ &+ \frac{1}{2}g_{xx}(x(T))(x_1(T) + x_2(T))(x_1(T) + x_2(T)). \end{aligned}$$

Donc on peut réécrire (2.11) comme suit :

$$\begin{aligned} o(\theta) + \alpha(T) + \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t; x(t), u^\theta(t)) - h(t; x(t), u(t)) \right] dt. \\ + \mathbb{E} \int_0^T h_x(t; x(t), u(t))(x_1(t) + x_2(t)) dt. \tag{2.12} \\ + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T h_{xx}(t; x(t), u(t))(x_1(t)x_1(t)) dt + E[g_x(x(T))(x_1(T) + x_2(T))] \\ + \frac{1}{2}g_{xx}(x(T))(x_1(T)x_1(T)). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T h_x(t; x(t), u^\theta(t)) - h_x(t; x(t), u(t)) \right] (x_1(t) + x_2(t)) dt. \\ + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T h_{xx}(t; x(t), u(t))(x_1(t)x_2(t)) dt + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T h_{xx}(t; x(t), u(t))(x_2(t)x_1(t)) dt. \\ + \frac{1}{2} E \int_0^T h_{xx}(t; x(t), u(t))(x_2(t)x_2(t)) dt. \\ + \frac{1}{2} E \int_0^T h_{xx}(t; x(t), u^\theta(t)) - h_{xx}(t; x(t), u(t))(x_1(t) + x_2(t))(x_1(t) + x_2(t)) dt. \\ + \frac{1}{2} \mathbb{E} [g_{xx}(x(T))(x_1(T)x_2(T))] + \frac{1}{2} \mathbb{E} [g_{xx}(x(T))(x_2(T)x_1(T))]. \end{aligned}$$

De la définition de  $x^\theta$  et (2.3), (2.4) et (2.5) on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \alpha(T) &= \mathbb{E}(x_1(T)x_2(T)) + \mathbb{E}(x_1(T)x_2(T)) + \mathbb{E}(x_2(T)x_2(T)). \\ &+ \int_\tau^{\tau+\theta} \mathbb{E}(x_1(t) + x_2(t)) dt. \\ &+ \int_\tau^{\tau+\theta} \mathbb{E}(x_1(t) + x_2(t))(x_1(t) + x_2(t)) dt + . \\ &+ \int_0^T \mathbb{E}(x_1(t))(x_2(t)) dt. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T \mathbb{E}(x_2(t)) (x_1(t)) dt + \int_0^T \mathbb{E}(x_2(t)) (x_2(t)) dt.$$

où  $K = \max \{MT; \frac{1}{2}C\}$  .par (2.8) ; (2.9) et l'inégalité de Cauchy -Schwartz on a :

$$\alpha(T) \leq K\theta \left( \sqrt{\theta} + \theta \right) + K\theta \left( \theta + 2\theta\sqrt{\theta} + \theta^2 \right) + K\theta\sqrt{\theta} + K\theta^2 = o(\theta)$$

En remplaçant  $\alpha(T)$  dans (2.11) on conclut. ■

### 2.3 Principe du maximum du seconde ordre

Le principe du maximum généralisé sera établi essentiellement à partir du lemme (2.3) et la relation (2.10). Dans ce cas on a deux estimations à faire. C'est à dire dans (2.10) on calcule en premier l'estimation du premier ordre

$$\mathbb{E} \left[ g_x(x(T)) (x_1(T) + x_2(T)) + \int_0^T h_x(t; x(t), u(t)) (x_1(t) + x_2(t)) dt \right].$$

Puis celle du second ordre :

$$\mathbb{E} \left[ g_{xx}(x(T)) (x_1(T) x_1(T)) + \int_0^T H_{xx}(t; x(t), u(t)) (x_1(t) x_1(t)) dt \right].$$

Pour la simplicité des calculs, on note :

$$f(t) = f(t; x(t); u(t)) \text{ et } f^\theta(t) = f(t; x(t); u^\theta(t)),$$

pour  $f = b; b_x, b_{xx}, \sigma, \sigma_{xx}, \sigma, g, g_x, g_{xx}, h, h_x, h_{xx}$ .

#### 2.3.1 Estimation du premier ordre

L'estimation du premier ordre consiste à calculer la partie où on a les dérivés du premier ordre dans (2.10). C'est à dire calculer la quantité

$$\mathbb{E} [g_x(x(T)) (x_1(T) x_1(T))].$$

la quantité,

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T h_x(t; x(t), u(t)) (x_1(t) + x_1(t)) dt \right].$$

se simplifiera dans les calculs. On considère l'équation linéaire associée aux équations (2.6) et (2.7)

$$\begin{cases} d\Phi_1(t) = b_x(t) \Phi_1(t) dt + \sigma_x(t) \Phi_1(t) dB_t \\ \Phi_1(0) = I_d \end{cases}$$

Cette équation est linéaire et à coefficients bornés, donc elle admet une solution forte unique. De plus la solution  $\Phi_1$  est inversible et son inverse  $\Psi_1$  vérifie :

$$\begin{cases} d\Psi_1(t) = (\Psi_1(t) \sigma_x(t) \sigma_x(t) - \Psi_1(t) b_x(t)) dt - \Psi_1(t) \sigma_x(t) dB_t \\ \Psi_1(0) = I_d \end{cases}$$

Pour vérifier que  $\Psi_1$  est inverse de  $\Phi_1$ , on vérifie

$$\Psi_1 \Phi_1 = \Phi_1 \Psi_1 = Id$$

en appliquant la formule de Itô

$$d(\Psi_1 \Phi_1) = d(\Phi_1 \Psi_1) = 0 \quad / d\Psi_1 = \alpha dt + \beta dB_t.$$

$$\begin{aligned} d(\Psi_1 \Phi_1) &= d\Psi_1 \Phi_1 + d\Phi_1 \Psi_1 + d\langle \Psi_1, \Phi_1 \rangle \\ &= (b_x \Phi_1 + \sigma_x \Phi_1 \beta + \Phi_1 \alpha) dt + (\sigma_x + \beta \Phi_1) dB_t \end{aligned}$$

$$\alpha = -\Psi_1 b_x + \Psi_1 \sigma_x \sigma_x$$

$$\beta = -\Psi_1 \sigma_x$$

$$\begin{cases} d\Psi_1(t) = (\Psi_1(t) \sigma_x(t) \sigma_x(t) - \Psi_1(t) b_x(t)) dt - \Psi_1(t) \sigma_x(t) dB_t \\ \Psi_1(0) = I_d \end{cases},$$

en suivant la méthode de résolvante des équations différentielles ordinaires linéaires, on pose :

$$\eta_1(t) = \Psi_1(t) (x_1(t) + x_2(t)).$$

Par la formule de Itô on a :

$$\begin{aligned} d\eta_1(t) &= d\Psi_1(x_1 + x_2) + \Psi_1(dx_1 + dx_2) + d\langle \Psi_1; x_1 + x_2 \rangle \\ &= (\Psi_1 \sigma_x \sigma_x - \Psi_1 b_x) dt (x_1 + x_2) - \Psi_1 \sigma_x (x_1 + x_2) dB_t \\ &\quad + \Psi_1 \left[ \left( b_x^\theta - b + b_x x_1 \right) dt + \left( \sigma_x^\theta - \sigma + \sigma_x x_1 \right) dB_t \right] \\ &\quad + \Psi_1 \left[ \left( (b^\theta - b_x) x_1 \right) + b_x x_2 + \frac{1}{2} b_{xx} x_1 x_1 \right] dt \\ &\quad + \Psi_1 \left[ \left( \sigma_x^\theta - \sigma_x \right) x_1 + \sigma_x x_2 + \frac{1}{2} \sigma_{xx} x_1 x_1 \right] dB_t \\ &\quad - \Psi_1 \sigma_x \left( \sigma_x^\theta - \sigma \right) - \sigma_x (\sigma_x x_1) dt - \Psi_1 \sigma_x \left[ \left( \sigma_x^\theta - \sigma_x \right) x_1 + \sigma_x x_2 + \frac{1}{2} \sigma_{xx} x_1 x_1 \right] dt \\ d\eta_1(t) &= \left[ \Psi_1(t) \left( b^\theta(t) - b(t) - \Psi_1(t) \sigma_x(t) \left( \sigma_x^\theta(t) - \sigma(t) \right) \right) \right] dt \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} \Psi_1(t) b_{xx}(t) x_1(t) x_1(t) + \left( b_x^\theta(t) - b_x(t) \right) \Psi_1(t) x_1(t) \right] dt \end{aligned}$$

$$+ \left[ -\frac{1}{2} \Psi_1(t) \sigma_x(t) \sigma_{xx}(t) x_1(t) x_1(t) - \sigma_x \left( \sigma_x^\theta(t) - \sigma_x(t) \right) \Psi_1(t) x_1(t) \right] dt$$

$$+ \left[ \Psi_1(t) \left( \sigma^\theta(t) - \sigma(t) \right) + \frac{1}{2} \Psi_1(t) \sigma_{xx}(t) x_1(t) x_1(t) + \left( \sigma_x^\theta(t) - \sigma_x(t) \right) \Psi_1(t) x_1(t) \right] dB_t$$

On pose :

$$X_1 = \Phi_1^*(T) g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi_1^*(s) h_x(s) ds$$

$$\xi_1(t) = \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_t) - \int_0^t \Phi_1^*(s) h_x(s) ds$$

On remarque que :

$$\mathbb{E}[g_x(x(T)) (x_1(T) + x_2(T))] = \mathbb{E}(\Phi_1^*(T) g_x(x(T)) \eta_1(t))$$

$$\mathbb{E}[g_x(x(T)) (x_1(T) + x_2(T))] = \mathbb{E}(\eta_1(t) \xi_1(t))$$

Donc pour calculer le premier terme

$$\mathbb{E}[g_x(x(T)) (x_1(T) + x_2(T))], .$$

de l'estimation du premier ordre, il suffit de calculer

$$\mathbb{E}(\eta_1(t) \xi_1(t)).$$

Puisque

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t), \quad X_1 \in L^2(\Omega; \mathcal{F}; P) \text{ et } \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_t).$$

est une martingale de carré intégrale; alors la décomposition de Itô nous donne :

$$\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_1) + \int_0^t G_1(s) dB_s \tag{2.13}$$

où  $G_1(s)$  est un processus adapté tel que :

$$E \int_0^T |G_1(s)|^2 ds < \infty.$$

Donc on peut utiliser une forme de  $\xi_1(t)$  mieux adaptée à notre problème :

$$\xi_1(t) = \mathbb{E}(X_1) + \int_0^t G_1(s) dB_s - \int_0^t \Phi_1^*(s) h_x(s) ds$$

Et par la suite on aura :

$$d \xi_1(t) = G_1(t) dB_t - \Phi_1^*(t) h_t(t) dt$$

En appliquant la formule de Itô à  $\eta_1(t) \xi_1(t)$  :

$$d (\xi_1(t) \eta_1(t)) = d\xi_1(t) + \xi_1(t) d\eta_1(t) + d \langle \xi_1(t), \eta_1(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= -h_x(x_1 + x_2) dt + G_1 \Psi_1(x_1 + x_2) dB_t + p_1 \left[ (b^\theta - b) - \sigma_x (\sigma^\theta - \sigma) \right] dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} p_1 [b_{xx} x_1 x_1 - \sigma_x \sigma_{xx} x_1 x_1] dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} G_1 \Psi_1 \sigma_x x_1 x_1 + G_1 \Psi_1 (\sigma_x^\theta - \sigma_x) x_1 dt \\
 d(\xi_1(t) \eta_1(t)) &= -h_x(x_1 + x_2) dt + p_1 \left[ (b^\theta - b) + Q_1 (\sigma^\theta - \sigma) \right] dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} [p_1 b_{xx} x_1 x_1 + Q_1 \sigma_{xx} x_1 x_1] dt \\
 &\quad + \left[ p_1 (b_x^\theta - b_x) x_1 - p_1 \sigma_x (\sigma_x^\theta - \sigma_x) x_1 \right] dt + G_1 \Psi_1 (\sigma_x^\theta - \sigma_x) x_1 dt \\
 &\quad + \left[ p_1 (\sigma^\theta - \sigma) + \frac{1}{2} p_1 \sigma_{xx} x_1 x_1 + p_1 (\sigma_x^\theta - \sigma_x) x_1 \right] dB_t
 \end{aligned}$$

En passant à l'espérance on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[g_x(x(T))(x_1(T) + x_2(T))] &= \mathbb{E} \int_0^T \left[ p_1(t) (b^\theta(t) - b(t)) + Q_1(t) (\sigma^\theta(t) - \sigma(t)) \right] dt \\
 &+ \mathbb{E} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} (p_1(t) b_{xx}(t) + Q_1(t) \sigma_{xx}(t)) x_1(t) x_1(t) \right] dt - \int_0^T h_x(t) (x_1(t) + x_2(t)) dt
 \end{aligned}$$

où :

$$p_1(t) = \Psi_1^*(t) \xi_1(t) \tag{2.14}$$

$$Q_1(t) = \Psi_1^*(t) G_1(t) - \sigma_x^*(t, x(t), u(t)) p_1(t) \tag{2.15}$$

En définissant le Hamiltonien  $H$  par :

$$H(t; x(t), u(t), p(t), Q(t)) = h(t, x(t), u(t)) + p(t) b(t, x(t), u(t)) + Q(t) \sigma(t, x(t), u(t))$$

Et en remplaçant  $\mathbb{E}[g_x(x(T))(x_1(T) + x_2(T))]$  par sa valeur, on peut réécrire (2.10) comme suit :

$$\begin{aligned}
 \circ(\theta) &\leq \mathbb{E} \int_0^T \left[ H(t; x(t), u^\theta(t), p_1(t), Q_1(t)) - H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t)) \right] dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T [H_{xx}(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t))] x_1(t) x_1(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}[g_{xx}(x(T))(x_1(T) x_1(T))]
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Cette inéquation est appelée inéquation variationnelle du premier ordre.

### 2.3.2 Estimation du second ordre

L'estimation du second ordre à calculer la partie où on a les dérivées du second ordre dans (2.16), c'est à dire calculer la quantité :

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} [g_{xx}(x(T)) (x_1(T) x_1(T))] + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T [H_{xx}(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t))] x_1(t) x_1(t) dt. \quad (2.17)$$

Comme nous trouvons devant un cas non linéaire, on ne peut pas appliquer directement la méthode de l'estimation du premier ordre. Dans ce cas on doit d'abord linéariser la quantité à estimer et pour cela on pose :

$$z = x_1 x_1^*$$

et par la formule de Itô on obtient par :

$$dz(t) = (z(t) b_x^*(t) + b_x(t) z(t) + \sigma_x(t) z(t) \sigma_x^*(t) + A_\theta(t)) dt + (z(t) \sigma_x^*(t) + \sigma_x(t) z(t) + B_\theta(T)) dB_t, \quad (2.18)$$

où les quantités  $A_\theta(t)$  et  $B_\theta(T)$  sont données par :

$$\begin{aligned} A_\theta(t) &= x_1(t) (b^\theta(t) - b(t))^* + (b^\theta(t) - b(t)) x_1^*(t) + \sigma_x(t) x_1(t) (\sigma^\theta(t) - \sigma(t))_1^* \\ &\quad + (\sigma^\theta(t) - \sigma(t)) x_1^*(t) \sigma_x^*(t) + (\sigma^\theta(t) - \sigma(t)) (\sigma^\theta(t) - \sigma(t))^* \\ B_\theta(T) &= x_1(t) (\sigma^\theta(t) - \sigma(t))^* + (\sigma^\theta(t) - \sigma(t)) x_1^*(t), \end{aligned}$$

on remarque que d'après (2.3), (2.9) on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T A_\theta(t) dt &\leq \mathbb{E} \int_0^T (\sigma^\theta(t) - \sigma(t)) (\sigma^\theta(t) - \sigma(t))^* dt + o(\theta) \\ \mathbb{E} \int_0^T B_\theta(t) dB_t &\leq o(\theta), \end{aligned}$$

soit l'équation linéaire associée à (2.18) suivante :

$$\begin{cases} d\Phi_2(t) = (\Phi_2(t) b_x^*(t) + b_x(t) \Phi_2(t) + \sigma_x(t) \Phi_2(t) \sigma_x^*(t)) dt \\ \quad + (\Phi_2(t) \sigma_x^*(t) + \sigma_x(t) \Phi_2(t)) dB_t \\ \Phi_2(0) = Id \end{cases} .$$

Cette équation est linéaire et à coefficients bornées; donc elle admet une solution forte unique. De plus la solution  $\Phi_2$  est inversible et son inverse  $\Psi_2$  vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\Psi_2(t) = ((\sigma_x(t) + \sigma_x^*(t)) \Psi_2(t) (\sigma_x(t) + \sigma_x^*(t))^* - \Psi_2(t) b_x^*(t) - b_x(t) \Psi_2(t)) dt \\ \quad - \sigma_x(t) \Psi_2(t) \sigma_x^*(t) dt + (\Psi_2(t) \sigma_x^*(t) + \sigma_x(t) \Psi_2(t)) dB_t \\ \Psi_2(0) = Id \end{cases} .$$



Par la même méthode que pour l'estimation du premier ordre on pose :

$$\eta_2(t) = \Psi_2(t) z(t).$$

Par la formule de Itô on a :

$$d\eta_2(t) = [\Psi_2(t) A_\theta(t) - \sigma_x^*(t) \Psi_2(t) B_\theta(t) - \Psi_2(t) B_\theta(t)] dt + B_\theta(t) \Psi_2(t) dB_t.$$

On pose :

$$\begin{aligned} X_2 &= \Phi_2^*(T) g_{xx}(x(T)) + \int_0^T \Phi_2^*(s) H_{xx}(s) ds \\ \xi_2(t) &= E(X_2 | \mathcal{F}_t) - \int_0^t \Phi_2^*(s) H_{xx}(s) ds. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_{xx}(x(T))(x_1(T) x_1(T))] &= \mathbb{E}(\Phi_2^*(T) g_{xx}(x(T)) \eta_2(T)) \\ \mathbb{E}[g_{xx}(x(T))(x_1(T) x_1(T))] &= \mathbb{E}(\eta_2(T) \xi_2(T)). \end{aligned}$$

Donc pour calculer  $\mathbb{E}[g_{xx}(x(T))(x_1(T) x_1(T))]$ , il suffit de calculer  $\mathbb{E}(\eta_2(T) \xi_2(T))$ . Puisque  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$ ,  $X_2 \in L^2(\Omega; \mathcal{F}; P)$  et  $E(X_2 | \mathcal{F}_t)$  est une martingale, de carré intégrale, alors la décomposition de Itô nous donne :

$$\mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_2) + \int_0^t G_2(s) dB_s.$$

où  $G_2(s)$  est un processus adapté tel que :

$$\mathbb{E} \int_0^T |G_2(s)|^2 dB_s < \infty.$$

Donc :

$$\xi_2(t) = \mathbb{E}(X_2) + \int_0^t G_2(s) dB_s - \int_0^t \Phi_2^*(s) H_{xx}(s) ds.$$

Et par la suite on aura :

$$d\xi_2(t) = G_2(t) dB_t - \Phi_2^*(t) H_{xx}(t) dt.$$

En appliquant la formule de Itô à  $\eta_2(t) \xi_2(t)$  et en passant à l'espérance on obtient :

$$\begin{aligned} d(\eta_2(t) \xi_2(t)) &= [(\Psi_2 A_\theta - \sigma_x^* \Psi_2 B_\theta - \Psi_2 B_\theta)_\theta dt + B_\theta \Psi_2 dB_t] \xi_2(t) \\ &\quad + \eta_2(t) [G_2(t) dB_t - \Phi_2^*(t) H_{xx}(t) dt] + G_2(t) B_\theta \Psi_2 dt \\ \mathbb{E}[g_{xx}(x(T))(x_1(T) x_1(T))] &= \mathbb{E} \int_0^T Tr \left[ \left( \sigma^\theta(t) - \sigma(t) \right)^* p_2(t) \left( \sigma^\theta(t) - \sigma(t) \right) \right] - H_{xx}(t) x_1 x_1 dt. \end{aligned}$$

Où :

$$p_2(t) = \Psi_2^*(t) \xi_2(t) \quad (2.19)$$

Enfin on peut réécrire (2.16) :

$$\begin{aligned} \circ(\theta) \leq \mathbb{E} \int_0^T \left[ H(t; x(t), u^\theta(t), p_1(t), Q_1(t)) - H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t)) \right] dt \\ + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T Tr \left[ \left( \sigma^\theta(t) - \sigma(t) \right)^* p_2(t) \left( \sigma^\theta(t) - \sigma(t) \right) \right] dt \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette inéquation est appelée inéquation variationnelle du second ordre.

## 2.4 Principe du maximum

En utilisant la définition de  $u^\theta$ , l'inéquation variationnelle (2.20) nous donne :

$$\begin{aligned} \circ(\theta) \leq \mathbb{E} \int_\tau^{\tau+\theta} [H(t; x(t), v, p_1(t), Q_1(t)) - H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t))] dt \\ + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_\tau^{\tau+\theta} Tr \left[ \left( \sigma^\theta(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)) \right)^* p_2(t) \left( \sigma^\theta(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)) \right) \right] dt \\ 0 \leq \frac{1}{\theta} \mathbb{E} \int_\tau^{\tau+\theta} [H(t; x(t), v, p_1(t), Q_1(t)) - H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t))] dt \\ + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_\tau^{\tau+\theta} Tr \left[ \left( \sigma^\theta(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)) \right)^* p_2(t) \left( \sigma^\theta(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)) \right) \right] dt. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\theta$  vers 0, on applique la théorème de Feibéné :

$$\begin{aligned} 0 \leq \left( \mathbb{E} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_\tau^{\tau+\theta} [H(t; x(t), v, p_1(t), Q_1(t)) - H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t))] dt \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_\tau^{\tau+\theta} Tr \left[ \left( \sigma^\theta(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)) \right)^* p_2(t) \left( \sigma^\theta(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)) \right) \right] dt \right) \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_\tau^{\tau+\theta} \frac{f(x_t)}{\theta} dt = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{F(x_{\tau+\theta}) - F(x_\tau)}{\theta} = f(x_\tau) \\ 0 \leq \mathbb{E} (H(t; x(t), v, p_1(t), Q_1(t)) - H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t)) \\ + \frac{1}{2} Tr [(\sigma(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)))^* p_2(t) (\sigma(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)))] \\ 0 \leq H(t; x(t), v, p_1(t), Q_1(t)) - H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t)) \\ + \frac{1}{2} Tr [(\sigma(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)))^* p_2(t) (\sigma(t, x(t), v) - \sigma(t, x(t), u(t)))] . \end{aligned}$$

Pour tout  $v \in U$ , Pps,  $dt$  pp ou d'une manière équivalente :

$$H(t; x(t), v, p_1(t), Q_1(t)) - p_2(t) \sigma(t, x(t), u(t)) + \frac{1}{2} Tr [(\sigma(t, x(t), v) \sigma^*(t, x(t), v)) p_2(t)]$$

$$\begin{aligned} &\geq H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t)) - p_2(t) \sigma(t, x(t), u(t)) + \\ &+ \frac{1}{2} Tr [(\sigma(t, x(t), u(t)) \sigma^*(t, x(t), u(t))) p_2(t)], \forall v \in U, \mathbb{P}.ps, dt.pp. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les formules explicites des processus adjointes  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  sont calculés à partir de (2.14) et (2.19) et sont donnés par :

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \Psi_1^*(t) \xi_1(T) \\ &= \mathbb{E}(\Psi_1^*(t) \Phi_1^*(T) g_x(x(T)) | \mathcal{F}_t) + \Psi_1^*(t) \int_t^T \Phi_1^*(s) h_x(s) ds \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} p_2(t) &= \Psi_2^*(t) \xi_2(T) \\ &= \mathbb{E}(\Psi_2^*(t) \Phi_2^*(T) g_{xx}(x(T)) | \mathcal{F}_t) + \Psi_2^*(t) \int_t^T \Phi_2^*(s) H_{xx}(x, u, p_1, Q_1) ds. \end{aligned} \quad (2.23)$$

D'autre part,

$$Q_1(t) = \Psi_1^*(t) G_1(t) - \sigma_x^*(t, x(t), u(t)) p_1(t)$$

est donne par (2.15) et  $G_1(t)$  vérifie :

$$\begin{aligned} \int_0^t G_1(s) dB_s &= E(X_1 | \mathcal{F}_t) - E(X_1) = E \left[ \Phi_1^*(t) g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi_1^*(s) h_x(s) ds | \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - E \left[ \Phi_1^*(t) g_x(x(T)) + \int_0^T \Phi_1^*(s) h_x(s) ds \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

On peut maintenant annoncer le résultat principal de ce chapitre qui est le théorème du principe maximum généralisé.

**Théorème 2.4.1** *Si  $(x, u)$  est une solution optimale pour notre problème. Alors il existe  $(p_1, Q_1)$  et  $(p_2, Q_2)$  deux processus  $\mathcal{F}_t$ -adaptés donnés par (2.22) et (2.23) tels que :*

$$\begin{aligned} &H(t; x(t), v, p_1(t), Q_1(t)) - p_2(t) \sigma(t, x(t), u(t)) + \frac{1}{2} Tr [(\sigma(t, x(t), v) \sigma^*(t, x(t), v)) p_2(t)] \\ &\geq H(t; x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t)) - p_2(t) \sigma(t, x(t), u(t)) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} Tr [(\sigma(t, x(t), u(t)) \sigma^*(t, x(t), u(t))) p_2(t)], \forall v \in U, Pps, dt - p.p., \text{ soit vérifié.}$$

**Remarque 2.4.2**  $H_{xx}(x, u, p, Q)$  est la dérivée seconde du Hamiltonien  $H$  au point  $x$  et est donnée par :

$$H_{xx}(x, u, p, Q) = h_{xx}(t, x(t), u(t)) + p(t) b_{xx}(t, x(t), u(t)) + Q(t) \sigma_{xx}(t, x(t), u(t)).$$

Les processus adjoints  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  sont appelés respectivement processus adjoints du premier et second ordre.

## 2.5 Equations et processus adjoints

En appliquant la formule de Itô aux processus adjoints

$$p_1(t) = \Psi_1^*(t) \xi_1(t).$$

et

$$p_2(t) = \Psi_2^*(t) \xi_2(t),$$

on obtient :

$$\begin{cases} -dp_1(t) = [b_x^*(t, x(t), u(t)) p_1(t) + \sigma_x^*(t, x(t), u(t)) Q_1(t) - h_x(t, x(t), u(t))] dt - Q_1(t) dB_t, \\ p_1(T) = g_x(x(T)). \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} dp_1(t) &= d(\Psi_1^*(t) \xi_1(t)) = d\Psi_1^*(t) \xi_1(t) + \Psi_1^*(t) d\xi_1(t) + d\langle \Psi_1^*(t); \xi_1(t) \rangle \\ &= (\sigma_x^*(t) \sigma_x^*(t) \Psi_1^*(t) \xi_1(t) - b_x^*(t) \Psi_1^*(t) \xi_1(t) dt - \sigma_x^*(t) \Psi_1^*(t) \xi_1(t) dB_t \\ &\quad - \Psi_1^* h_x dt + \Psi_1^*(t) G(t) dB_t - \sigma_x^* \Psi_1^*(t) G(t) dt \end{aligned}$$

$$-dp_1(t) = [b_x^*(t, x(t), u(t)) p_1(t) + \sigma_x^*(t, x(t), u(t)) Q_1(t) - h_x(t, x(t), u(t))] dt - Q_1(t) dB_t$$

$$p_1(T) = \Psi_1^*(T) \xi_1(T) = \mathbb{E}(\Psi_1^*(T) \Phi_1^*(T) g_x(x(T)) | \mathcal{F}_t) + \Psi_1^*(t) \int_T^T \Phi_1^*(s) h_x(s) ds$$

$$p_1(T) = \mathbb{E}(g_x(x(T))).$$

De même méthode, on trouve :

$$\begin{cases} -dp_2(t) = [b_x^*(t, x(t), u(t)) p_2(t) + p_2(t) b_x^*(t, x(t), u(t))] dt \\ \quad + [\sigma_x^*(t, x(t), u(t)) p_2(t) \sigma_x^*(t, x(t), u(t)) + \sigma_x^*(t, x(t), u(t)) Q_2(t)] dt \\ \quad + [Q_2(t) \sigma_x(t, x(t), u(t)) + H_{xx}(x(t), u(t), p_1(t), Q_1(t))] dt - Q_2(t) dB_t \\ p_2(T) = g_{xx}(x(T)). \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $Q_1, G_1$  sont donnés respectivement par (2.15), (2.24) et  $Q_2, G_2$  vérifient :

$$Q_2(t) = \Psi_2^*(t) G_2(t) - \sigma_x(t, x(t), u(t)) p_2(t) - \sigma_x^*(t, x(t), u(t)) p_2(t) \quad (2.27)$$

$$\int_0^t G_2(s) dB_s = \mathbb{E} \left[ (\Phi_2^*(t) g_{xx}(x(T)) + \int_0^t \Phi_2^*(s) H_{xx}(x(s), u(s), p_1(s), Q_1(s)) ds) | \mathcal{F}_t \right]$$

$$- \mathbb{E} \left[ \Phi_2^*(t) g_{xx}(x(T)) + \int_0^t \Phi_2^*(s) H_{xx}(x(s), u(s), p_1(s), Q_1(s)) ds \right]. \quad (2.28)$$

Les processus  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  sont appelés respectivement processus adjoints du premier et second ordre et (2.25) et (2.26) les équations adjointes du premier et second ordre. En utilisant ces équations on peut reformuler le théorème (2.4.2) comme suit Si  $(x_t, u_t)$  est une solution optimale pour le problème de contrôle, alors il existe deux couples

uniques  $(p_1, Q_1)$  et  $(p_2, Q_2)$  solutions respectives des équations rétrogrades (2.25) et (2.26) tels que l'inégalité variationnelle (2.21) soit vérifiée. Il est intéressant de voir que les solutions des équations rétrogrades (2.25) et (2.26) sont données explicitement par (2.22), (2.15), (2.24) et (2.23), (2.27), (2.28).

## Chapitre 3

# Des conditions nécessaires et suffisants pour un contrôle des problèmes relaxés et stricts

### 3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de généraliser le chapitre (2) c'est-à-dire établir une généralisation du principe du maximum en contrôle optimale stochastique. Notre objectif dans ce chapitre est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le problème (1.1)-(1.2) selon la méthode de Bahlali. l'idée serait d'injecter l'espace des contrôles stricts  $\mathcal{U}$  dans l'espace des mesures de probabilité sur  $\mathbb{U}$  où  $\mathbb{U}$  désigne l'ensemble des valeurs prises par le contrôle strict. Ce nouveau espace appelé espace des contrôles relaxés. La démonstration est basé sur l'approximation des trajectoires des contrôles relaxés par les trajectoires des contrôles stricts et le principe du maximum approché. L'idée principale est d'utiliser le fait que l'espace des contrôles relaxés est convexe. On établit les conditions optimales en utilisation la méthode classique de perturbation convexe. Si  $u$  un contrôle relaxé optimal et  $q$  un élément arbitraire de  $\mathcal{R}$ , on peut définir un contrôle perturbé comme suit :

$$u_t^\theta = u_t + \theta (q_t - u_t).$$

avec un petit suffisant  $\theta > 0$  et pour chaque  $t \in [0, T]$ . D'après l'optimalité de  $u$  on a :

$$J(u_t^\theta) - J(u_t) \geq 0$$

### 3.2 Formulation du problème et hypothèses

soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  un espace probabilisé filtré sur lequel on définit mouvement Brownien  $d$ - dimensionnel  $B = (B_t)$ , on suppose que

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t),$$

on considère L'EDS suivant :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t)) dt + \sigma(t, x(t), u(t)) dB_t \\ x(0) = \zeta \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow M_{n \times d}(\mathbb{R})$  sont deux fonctions Boreliennes et  $\zeta$  une variable aléatoire  $n$ -dimensionnel  $\mathcal{F}_0$ -mesurable indépendante de  $B$  telle que:

$$\mathbb{E}(|\zeta|^m) < \infty, \forall 1 < m.$$

Soit  $T$  un nombre réel strictement positif et  $\mathbb{U}$  un sous ensemble non vide de  $\mathbb{R}^d$ .

#### Définition 3.2.1 :

Un contrôle admissible est  $u$  est un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeurs dans un  $\mathbb{U}$  tel que :

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0; T]} |u(t)|^m < \infty, \forall 1 < m.$$

On note par  $\mathcal{U}$  l'ensemble des tous les contrôles admissibles .Pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ; on étudie un contrôle de problème stochastique dont le système est gouverné par une équation différentielle stochastique et non linéaire (3.1) la fonction coût est défini de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ g(x(T)) + \int_0^T h(t, x(t), u(t)) dt \right] \quad (3.2)$$

où  $h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonction Boreliennes et  $x_t^v$  est la trajectoire du système contrôlé par  $v$  . $u \in \mathcal{U}$  est nommé optimale si elle satisfait.

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v)$$

et  $x(T)$  la solution de l'équation (3.1) prise au temps terminal  $T$ .

#### Notation 3.2.2

$$M_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$M; N. \in M_{n \times n}^d(\mathbb{R}); L, S \in M_{n \times d}(\mathbb{R}); \alpha; \beta \in \mathbb{R}^n \text{ et } \gamma \in \mathbb{R}^d$$

$$\alpha\beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \in \mathbb{R} \text{ est le produit scalaire dans } \mathbb{R}^n.$$

$$ML = \sum_{i=1}^d M_i L_i \in \mathbb{R}^n$$

$$LS = \sum_{i=1}^d L_i S_i \in \mathbb{R}$$

$$M\alpha\gamma = \sum_{i=1}^d (M_i \alpha) \gamma_i \in \mathbb{R}^n$$

$$MN = \sum_{i=1}^d M_i N_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$MLN = \sum_{i=1}^d M_i L N_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$ML\gamma = \sum_{i=1}^d M_i L_i \gamma_i \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$L^*$  la matrice transposée de la matrice  $L$   $M^* = (M_1^*, \dots, M_d^*)$

**Notation 3.2.3** On note par  $f_x$  et  $f_{xx}$  les dérivées premières et secondes par rapport à  $x$  pour  $f=b, \sigma, h, g$  on suppose que :

$$b, \sigma, h, g \text{ sont deux fois dérivables par rapport à la variable d'état } x \quad (3.3)$$

$$b_x, \sigma_x, h_x, g_x \text{ sont uniformes bornés. } b, \sigma, h, g \text{ sont bornés par } C(1 + |x| + |u|)$$

**Remarque 3.2.4** 1) les coefficients  $b, \sigma$  sont dérivables et à dérivées bornées, donc lipschitziennes, alors l'équation (3.1) admet une solution forte unique donnée par :

$$x(t) = \zeta + \int_0^t b(t, x(t), u(t)) dt + \int_0^t \sigma(t, x(t), u(t)) dB_t$$

de plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^m \right] < M, \forall m > 1$$

où  $M$  est une constante qui dépend de  $m; T; k$ , et  $\zeta$ .



**Remarque 3.2.5** 2) Sous les conditions (3.3) sur  $h; g$  la fonction coût est bien définie. Avant d'établir le principe du maximum relaxé, nous allons donner des hypothèses et des définitions nécessaires.

**Exemple 3.2.6** : calculer le contrôle optimale que minimise  $J$  sur  $\mathcal{U}$ .

$$v : [0, T] \rightarrow \{-1; 1\} \text{ et } J(v) = \int_0^T (x_t^v)^2 dt.$$

Où  $x_t^v$  est solution de l'équation :

$$\begin{cases} dx^v(t) = v_t dt \\ x^v(0) = 0 \end{cases}$$

$$\inf_{v \in \mathcal{U}} J(v) = 0.$$

On considère une suite des contrôles :

$$v_t^n = (-1)^k, \text{ si } \frac{k}{n}T \leq t \leq \frac{k+1}{n}T, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$|x_t^{v^n}| \leq \frac{T}{n}$$

$$|J(v^n)| \leq \frac{T^3}{n^2},$$

donc :

$$\inf_{v \in \mathcal{U}} J(v) = 0.$$

Soit  $V$  l'ensemble des mesures de Radon sur  $[0, T] \times \mathbb{U}$  dont la projection sur  $[0, T]$  coïncide avec la mesure de Lebesgue  $dt$ . Munie de la topologie de la convergence stable des mesures.  $V$  est un espace compact mesurable. La convergence stable est préconisée par les fonctions mesurables bornées  $h(t, a)$  telles que pour chaque  $t \in [0, T]$ ,  $h(t, \cdot)$  soit continue. l'ensemble  $V$  est muni de sa tribu Borilienne, qui est le plus petite tribu telle que l'application

$$q \rightarrow \int h(s, a) q(ds, da),$$

soit mesurable pour toute fonction  $h$  mesurable bornée et continue en  $a$ .

**Définition 3.2.7** Un contrôle relaxé  $q$  est une variable aléatoire  $q(w, dt, da)$  à valeurs dans l'espace  $V$  telle que pour chaque  $t$ .

$$1_{[0, t]} q \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{mesurable.}$$

**Remarque 3.2.8** *Un contrôle relaxé peut être écrit sous la forme*

$$q(w, dt, da) = dtq(w, dt, da),$$

où  $q(w, dt, da)$  est un processus progressivement mesurable à valeurs dans l'espace  $P(\mathbb{U})$  des mesures de probabilités.

**Remarque 3.2.9** *L'ensemble  $\mathcal{U}$  des contrôles stricts peut être injecté dans l'ensemble  $\mathcal{R}$  des contrôles relaxés par l'application  $\Psi$*

$$\mu \rightarrow \Psi(\mu)(dt, da) = dt \cdot \delta_{\mu(t)} \cdot (da) \in \mathcal{R},$$

où  $\delta_{\mu(t)}$  est la mesure de Dirac de masse  $\mu$ .

Le deuxième résultat principal de ce chapitre est caractérisé par l'optimalité des processus contrôles stricts. L'idée principale est remplacer les contrôles relaxés par des mesures (*Dirac*) qui chargent des contrôles stricts. Ainsi on doit réduire le  $\mathcal{R}$  des contrôles relaxés et minimise le coût de  $J$  sur l'ensemble :

$$\delta(\mathcal{U}) = \{q \in \mathfrak{R} : q = \delta_v, v \in \mathcal{U}\}. \quad (3.4)$$

où  $\delta(\mathcal{U})$  l'ensemble des contrôles relaxés sous la forme des mesure de Dirac qui charge des contrôles stricts. Si pour chaque :

$$t \in [0, T], q_t \in \delta(\mathcal{U}),$$

alors

$$q_t = \delta_{v_t} \text{ avec } v \in \mathcal{U}.$$

Si  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$f(x_t) - f(\zeta) - \int_0^t \int_U l f(s, x_s, a) q_s(w, da) ds,$$

est un P- martingale et  $L$  est ingénieurateur infinitésimal associé à l'équation d'état dans le cas des contrôles relaxés est donnée par :

$$\begin{cases} dx^q(t) = \int_U b(t, x^q(t), a) q_t(da) dt + \int_U \sigma(t, x^q(t), a) q_t(da) dB_t \\ x^q(0) = \zeta \end{cases} \quad (3.5)$$

la fonction coût à minimiser est donné par

$$J(q) = E \left[ g(x(T)) + \int_0^T \int_U h(t, x(t), a) q_t(da) dt \right], \quad (3.6)$$

avec les mêmes hypothèses sur  $h$  et  $g$ . On cherche à minimiser la fonction coût  $J(q)$  sur l'ensemble  $\mathcal{R}$ , telle que :

$$J(\mu) \leq J(q).$$

On note :

$$J(\mu) = \inf_{\mu \in \mathcal{R}} J(q) \tag{3.7}$$

**Remarque 3.2.10** *On pose :*

$$b^*(t, x_t^q, q_t) = \int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da) dt$$

$$\sigma^*(t, x_t^q, q_t) = \int_U \sigma(t, x_t^q, a) q_t(da)$$

$$h^*(t, x_t^q, q_t) = \int_U h(t, x^q(t), a) q_t(da).$$

l'équation précédente donnée : 
$$\begin{cases} dx_t^q = b^*(t, x_t^q, q_t) dt + \sigma^*(t, x_t^q, q_t) dB_t \\ x^q(0) = \zeta \end{cases}$$

la fonction coût est définie par :

$$J(q) = \mathbb{E} \left[ g(x^q(T)) + \int_0^T h^*(t, x_t^q, q_t) dt \right],$$

et dans ce cas la fonction  $b^*$  et  $\sigma^*$  qui satisfait les mêmes conditions que  $b, \sigma$  et de plus linéaire en  $q$ .  $P(\mathbb{U})$  l'ensemble des valeurs du processus  $q_t$ , où  $\mathbb{P}(\mathbb{U})$  est l'espace des mesures de probabilités sur  $\mathbb{U}$  soit convexe et compact. Si  $q_t = \delta_{\mu(t)}$  est la mesure de Dirac au  $u(t)$  pour chaque  $t \in [0, T]$

alors :

$$\int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da) dt = \int_U b(t, x_t^q, a) \delta_{\mu(t)}(da) dt = b(t, x_t^q, u_t)$$

$$\int_U \sigma(t, x_t^q, a) q_t(da) = \int_U \sigma(t, x_t^q, a) \delta_{\mu(t)}(da) dt = \sigma(t, x_t^q, u_t)$$

$$\int_U h(t, x^q(t), a) q_t(da) = \int_U h(t, x_t^q, a) \delta_{\mu(t)}(da) dt = h(t, x_t^q, u_t),$$

dans ce cas  $x_t^u = x_t^q$  et  $J(q) = J(u)$ , ce qui nous permettra d'obtenir un problème de contrôle strict .

### 3.3 Approximation des trajectoires :

Pour établir le principe du maximum dans le cas des contrôles relaxés, on a besoin d'un résultat d'approximation des trajectoires des contrôles relaxés par les trajectoires des contrôles stricts. Pour cela, l'outil essentiel est un lemme connu sous le nom de chattering lemma et qui est donné par :

**Lemme 3.3.1** (*Chattering lemma*)

Soit  $q$  un contrôle relaxé alors il existe une suite  $(u^n)$  de contrôle ordinaire telle que :

$$dq_t^n(da) = dt \delta_{u^n(t)}(da) \rightarrow dq_t(da) \text{ faiblement quand } n \rightarrow +\infty.$$

Pour toute fonction  $h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times P(\mathbb{U}) \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue sur  $[0, T] \times P(\mathbb{U})$  telle que

$$\int_0^T \int_U h(t, x^q(t), a) q_t(da) dt \text{ soit linéaire en } q$$

on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_U h(t, x^q(t), a) q_t^n(da) dt = \int_0^T \int_U h(t, x^q(t), a) q_t(da) dt \text{ unif.}$$

### 3.4 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité en contrôle relaxé

Dans ce cas non linéaire on ne peut pas appliquer le principe de l'optimisation convexe car le coût  $J$  ne peut jamais être convexe (même si on suppose que  $g$  et  $h$  sont convexes) car

$$x_t^{\lambda u + (1-\lambda)v} \neq \lambda x_t^u + (1-\lambda) x_t^v.$$

Dans ce cas on applique la méthode des perturbations c'est à dire : on se donne un contrôle optimal  $u$  et on le perturbe puisque  $\mathcal{R}$  convexe, on applique la méthode des perturbations convexes c'est à dire  $\theta > 0$ , assez petit soit  $u$  un contrôle optimal. On pose pour tout  $q \in \mathcal{R}$ ,

$$u_t^\theta = u_t + \theta (q_t - u_t) \tag{3.8}$$

puisque  $u_t$  est optimal alors :

$$J(u_t^\theta) - J(u_t) \geq 0 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(u_t^\theta) - J(u_t) = J(u_t + \theta (q_t - u_t)) - J(u_t) \\ 0 &\leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J(u_t + \theta (q_t - u_t)) - J(u_t)}{\theta} = J_q(u_t)(q_t - u_t). \end{aligned}$$

Pour obtenir l'inégalité variationnelle on a besoin de lemmes suivant

**Lemme 3.4.1**

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} |x_t^\theta - x_t^u|^2 \right] = 0 \quad (3.10)$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} x_t^\theta - x_t^u &= \int_0^t \left[ \int_U b(s, x_s^\theta, a) u_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^u, a) u_s(da) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[ \int_U \sigma(s, x_s^\theta, a) u_s^\theta(da) - \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s(da) \right] dB_s \\ x_t^\theta - x_t^u &= \int_0^t \left[ \int_U b(s, x_s^\theta, a) u_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^u, a) u_s^\theta(da) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[ \int_U b(s, x_s^u, a) u_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^u, a) u_s(da) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[ \int_U \sigma(s, x_s^\theta, a) u_s^\theta(da) - \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s^\theta(da) \right] dB_s \\ &\quad + \int_0^t \left[ \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s^\theta(da) - \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s(da) \right] dB_s. \end{aligned}$$

De la définition de  $u^\theta(t)$  et passant aux espérance on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |x_t^\theta - x_t^u|^2 &\leq C \mathbb{E} \int_0^t \left| \int_U b(s, x_s^\theta, a) u_s(da) - \int_U b(s, x_s^u, a) u_s(da) \right|^2 ds \\ &\quad + C\theta^2 \mathbb{E} \int_0^t \left| \int_U b(s, x_s^\theta, a) q_s(da) - \int_U b(s, x_s^\theta, a) u_s(da) \right|^2 ds \\ &\quad + C \mathbb{E} \int_0^t \left| \int_U \sigma(s, x_s^\theta, a) u_s(da) - \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s(da) \right|^2 ds. \\ &\quad + C\theta^2 \mathbb{E} \int_0^t \left| \int_U \sigma(s, x_s^\theta, a) q_s(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\theta, a) u_s(da) \right|^2 ds. \end{aligned}$$

D'après (3.3) et  $b, \sigma$  sont uniformément lipchtéziene par rapport à  $x$

$$E |x_t^\theta - x_t^u|^2 \leq CE \int_0^t |x_t^\theta - x_t^u|^2 ds + C\theta^2$$

on applique lemme de Gronwall inégalité Buckholder-Davis Gundy :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} |x_t^\theta - x_t^u|^2 \right] = 0$$

Finalement on obtient le lemme. ■

**Lemme 3.4.2** Soit  $z_t$  est la solution unique de l'équation linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dz_t = \int_U b(t, x_t^\theta, a) u_t(da) z_t dt + \int_U \sigma(t, x_t^u, a) u_t(da) z_t dB_t \\ + \left[ \int_U b(t, x_t^u, a) q_t(da) - \int_U b(t, x_t^\theta, a) u_t(da) \right] dt \\ + \left[ \int_U \sigma(t, x_t^u, a) q_t(da) - \int_U \sigma(t, x_t^\theta, a) u_t(da) \right] dB_t \\ z_0 = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

On a :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} E \left| \frac{x_t^\theta - x_t^u}{\theta} - z_t \right|^2 = 0 \quad (3.12)$$

**Preuve.** On pose :

$$X_t = \frac{x_t^\theta - x_t^u}{\theta} - z_t \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{\theta} \int_0^t \left[ \int_U b(s, x_s^\theta, a) u_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^u, a) u_s^\theta(da) \right] ds \\ &+ \frac{1}{\theta} \int_0^t \left[ \int_U b(s, x_s^u, a) u_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^u, a) u_s(da) \right] ds \\ &+ \frac{1}{\theta} \int_0^t \left[ \int_U \sigma(s, x_s^\theta, a) u_s^\theta(da) - \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s^\theta(da) \right] dB_s \\ &+ \int_0^t \left[ \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s^\theta(da) - \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s(da) \right] dB_s \\ &- \int_0^t \int_U b(s, x_s^\theta, a) u_s(da) z_s ds - \int_0^t \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s(da) z_s dB_s \\ &- \int_0^t \left[ \int_U b(s, x_s^u, a) q_s(da) - \int_U b(s, x_s^u, a) u_s(da) \right] ds \end{aligned}$$

$$- \int_0^t \left[ \int_U \sigma(s, x_s^u, a) q_s(da) - \int_U \sigma(s, x_s^u, a) u_s(da) \right] dB_s..$$

D'après la définition de  $u^\theta(t)$  et passant aux espérances on obtient :

$$\begin{aligned} E |X_t|^2 &\leq CE \int_0^t \int_0^1 \int_U |b_x(s, x_s^u + \lambda(X_s + z_s), a) X_s|^2 u_s(da) d\lambda ds \\ &+ CE \int_0^t \int_0^1 \int_U |\sigma_x(s, x_s^u + \lambda(X_s + z_s), a) X_s|^2 u_s(da) d\lambda ds + CE |\alpha_t^\theta|^2, \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{aligned} \alpha_t^\theta &= \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^u + \lambda(X_s + z_s), a) (x_s^\theta - x_s^u) q_s(da) d\lambda ds \\ &- \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^u + \lambda(X_s + z_s), a) (x_s^\theta - x_s^u) u_s(da) d\lambda ds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^u + \lambda(X_s + z_s), a) (x_s^\theta - x_s^u) q_s(da) d\lambda dB_S \\ &- \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^u + \lambda(X_s + z_s), a) (x_s^\theta - x_s^u) u_s(da) d\lambda dB_S \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^u + \lambda(X_s + z_s), a) (z_s) u_s(da) d\lambda ds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^u + \lambda(X_s + z_s), a) ((z_s)) u_s(da) d\lambda dB_S \\ &- \int_0^t \int_U b_x(s, x_s^u, a) (z_s) u_s(da) ds - \int_0^t \int_U \sigma_x(s, x_s^u, a) (z_s) u_s(da) dB_S. \end{aligned}$$

On a  $b_x$  et  $\sigma_x$  sont continues et bornés donc :

$$\mathbb{E} |X_t|^2 \leq CE \int_0^t |X_t|^2 ds + CE |\alpha_t^\theta|^2$$

Où

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbb{E} |\alpha_t^\theta|^2 = 0.$$

On a appliqué le lemme (3.3.1) et la continuité de  $b_x$  et  $\sigma_x$  et lemme de Gronwall et inégalité Buckholder-Davis-Gundy :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left| \frac{x_t^\theta - x_t^u}{\theta} - z_t \right|^2 = 0$$

Finalement on obtient le lemme. ■

**Lemme 3.4.3** *Soit  $u$  est contrôle optimal relaxé, alors on a :*

$$0 \leq \mathbb{E} [g_x(x_T^u) z_T] + \mathbb{E} \int_0^T \int_U h_x(t; x_t^u, a) u_t(da) z_t dt + \mathbb{E} \int_0^T \left[ \int_U h_x(t; x_t^u, a) q_t(da) - \int_U h_x(t; x_t^u, a) u_t(da) \right] dt \quad (3.14)$$

**Preuve.** On applique le lemme (3.3.1) on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} \left[ g(x_T^\theta) - g(x_T^u) \right] + \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t; x_t^\theta, a) u_t^\theta(da) dt - \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t; x_t^u, a) u_t(da) dt \\ 0 &\leq \mathbb{E} \left[ g(x_T^\theta) - g(x_T^u) \right] + \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t; x_t^\theta, a) u_t^\theta(da) dt - \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t; x_t^u, a) u_t^\theta(da) dt \\ &\quad + \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t; x_t^u, a) u_t^\theta(da) dt - \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t; x_t^u, a) u_t(da) dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

D'après la définition de  $u^\theta(t)$  on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} \left[ g(x_T^\theta) - g(x_T^u) \right] + \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t; x_t^\theta, a) u_t(da) dt - \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t; x_t^u, a) u_t(da) dt \\ &\quad + \theta \mathbb{E} \int_0^T \left[ \int_U h(t; x_t^\theta, a) q_t(da) - \int_U h(t; x_t^\theta, a) u_t(da) \right] dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} \int_0^1 g_x(x_T^u + \lambda\theta(X_T + z_T)) z_T d\lambda + \mathbb{E} \int_0^T \int_U \int_0^1 h_x(x_t^u + \lambda\theta(X_t + z_t), a) u_t(da) z_t d\lambda dt \\ &\quad \mathbb{E} \int_0^T \left[ \int_U h(t; x_t^\theta, a) q_t(da) - \int_U h(t; x_t^\theta, a) u_t(da) \right] dt + \rho_t^\theta, \end{aligned}$$

telle que  $\rho_t^\theta$  définie par :

$$\rho_t^\theta = \mathbb{E} \int_0^1 g_x(x_T^u + \lambda\theta(X_T + z_T)) X_T d\lambda + \mathbb{E} \int_0^T \int_U \int_0^1 h_x(x_t^u + \lambda\theta(X_t + z_t), a) u_t(da) X_t d\lambda dt$$

d'après la continuité de  $g_x$  et  $h_x$  et inégalité Cauchy Schwartz et lemme (10)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \rho_t^\theta = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} [g_x(x_T^u) z_T] + \mathbb{E} \int_0^T \int_U h_x(t; x_t^u, a) u_t(da) z_t dt + \\ &\quad + \mathbb{E} \int_0^T \left[ \int_U h_x(t; x_t^u, a) q_t(da) - \int_U h_x(t; x_t^u, a) u_t(da) \right] dt. \end{aligned}$$

Finalement on obtient le lemme. ■



### 3.4.1 Inéquation variationnelle processus adjoint et equation adjointe

A partir de l'inégalité variationnelle(V.I)on établie les conditions nécessaires d'optimalité qui vérifient le contrôle optimal  $u$ . Soit  $\Phi$  la solution fondamentale associéé à l'équation linéaire (E.L)

$$\begin{cases} d\Phi_t = \int_U b_x(t, x_t^u, a) u_t(da) \Phi_t dt + \int_U \sigma_x(t, x_t^u, a) u_t(da) \Phi_t dB_t \\ \Phi_0 = I_d \end{cases} \quad (3.17)$$

$\Phi$  inversible et son inverse  $\Psi$  vérifie :

$$\begin{cases} d\Psi = \left[ \int_U \sigma_x(t, x_t^u, a) u_t(da) \Psi_t \int_U \sigma_x^*(t, x_t^u, a) u_t(da) \right] dt - \int_U b_x(t, x_t^u, a) u_t(da) \Psi_t dt \\ - \int_U \sigma_x(t, x_t^u, a) u_t(da) \Psi_t dB_t \\ \Phi_0 = Id \end{cases} \quad (3.16)$$

telle que :  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifie :

$$E \left[ \sup_{t \in [0, T]} |\Phi_t|^2 \right] + E \left[ \sup_{t \in [0, T]} |\Psi_t|^2 \right] < \infty$$

on pose :

$$\alpha_t = \Psi_t z_t \quad (3.18)$$

$$X_1 = \Phi_T^*(T) g_x(x^u(T)) + \int_0^T \left[ \Phi_t^* \int_U h_x(t; x_t^u, a) u_t(da) \right] dt \quad (3.19)$$

$$Y_t = E(X_1 / F_t) - \int_0^t \left[ \Phi_s^* \int_U h_x(s; x_s^u, a) u_s(da) \right] ds \quad (3.20)$$

On remarque d'après (3.18), (3.19), (3.20)

$$\mathbb{E}(\alpha_T Y_T) = \mathbb{E}(g_x(x_T^u) z_T) \quad (3.21)$$

telle que  $g_x$  et  $h_x$  sont bornnés et (3.17)  $X_1$  est carré intégrable

$$\left( E |X_1|^2 \right) < \infty$$

$\mathbb{E}(X_1 / F_t)$  est un martingale de carré intégrable, théorème de décomposition de Itô pour les martingales carré intégrable. Si  $(z_t)$  est une martingale de carré intégrable alors il existe un processus  $Q_s$  telle que :

$$z_t = \mathbb{E}[z_t] + \int_0^t Q_s dB_s,$$

telle que :

$$\mathbb{E} \int_0^t |Q_s|^2 ds.$$

On applique théorème de décomposition de Itô on a :

$$Y_t = \mathbb{E}(X_1) + \int_0^t Q_s dB_S - \int_0^t \left[ \Phi_s^* \int_U h_x(s; x_s^u, a) u_s(da) \right] ds.$$

On a appliqué la formule d'Itô sur  $\alpha_t = \Psi_t z_t$  et  $\alpha_t Y_t$ , (3.21) et inégalité (3.14)

$$0 \leq \mathbb{E} \int_0^T [H(t; x_t^u, q_t, p_t^u, P_t^u) - H(t; x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u)] dt. \quad (3.22)$$

On définit le Himiltonian  $H$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times P(\mathbb{U}) \times \mathbb{R}^n \times M_{n \times d}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  avec :

$$H(t; x_t^u, q_t, p_t^u, P_t^u) = \int_U h(t; x_t, a) q_t(da) + \int_U b(t; x_t, a) q_t(da) p_t + \int_U \sigma(t; x_t, a) q_t(da) P_t$$

$(p_t^u, P_t^u)$  est un couple de processus adapté telle que :

$$p_t^u = \Psi_t^* Y_t, p_t^u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^n) \quad (3.23)$$

$$P_t^u = \Psi_t^* Q - \int_U \sigma_x^*(t, x_t^u, a) u_t(da) p_t^u; P_t^u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^{n \times d}), \quad (3.24)$$

et le processus  $Q$  vérifié :

$$\begin{aligned} \int_0^t Q_s dB_S &= \mathbb{E} \left[ \Phi_T^*(T) g_x(x^u(T)) + \int_0^T \Phi_t^* \int_U h_x(t; x_t^u, a) u_t(da) / F_t \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[ \Phi_T^*(T) g_x(x^u(T)) + \int_0^T \Phi_t^* \int_U h_x(t; x_t^u, a) u_t(da) \right]. \end{aligned}$$

le processus  $p_t^u$  est un processus adjoint et avec (3.19), (3.20), (3.23)

$$p_t^u = \mathbb{E} \left[ \Psi^* \Phi_T^*(T) g_x(x^u(T)) + \Psi^* \int_t^T \Phi_t^* \int_U h_x(s; x_s^u, a) u_s(da) ds / F_t \right].$$

On a appliqué la formule d'Itô sur le processus adjoint  $p_t^u$  on obtient l'équation adjointe

$$\begin{cases} -dp_t^u = H_x(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) dt - P_t^u dB_t \\ p_T^u = g_x(x^u(T)) \end{cases} \quad (3.26)$$

### 3.5 Conditions nécessaires pour un contrôle des problèmes relaxés en forme globale

**Théorème 3.5.1** *Soit  $u$  un contrôle relaxé optimal minimise le coût  $J$  et soit  $x_t^u$  est la trajectoire optimale, il existe un couple de processus  $(p_t^u, P_t^u) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^n) \times L^2([0, T], \mathbb{R}^{n \times d})$  adapté est solution de l'équation différentielle stochastique de Backward (3.26) telle que :*

$$H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) = \inf_{q \in P(U)} H(t, x_t^u, q_t, p_t^u, P_t^u) \quad (3.27)$$

**Preuve.** Le resultat immédiat d'après (3.22). Pour une preuve plus détaillée voir Bahlali, Mézardi et Djehiche [3]. ■

#### 3.5.1 Condition suffisante d'optimalité pour les contrôles relaxés

**Théorème 3.5.2** *Soit  $\mathcal{R}$  un ensemble convexe et pour tout  $q \in \mathcal{R}$  et pour tout  $t \in [0, T]$  les fonctions  $g$  et  $x \rightarrow H(t, x_t, q_t, p_t, P_t)$  sont convexes, alors  $u$  est un optimal contrôle pour le problème initial (3.5), (3.6), (3.7) s'il vérifie :*

$$H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) = \inf_{q \in P(U)} H(t, x_t^u, q_t, p_t^u, P_t^u)$$

**Preuve.** Soit  $u$  un contrôle relaxé arbitraire (candidat peut être optimale) et  $x_t^u$  la solution associée. Pour tout contrôle relaxé  $q$  la solution associée  $x_t^q$  on a :

$$J(u) - J(q) = \mathbb{E}[g(x^u(T)) - g(x^q(T))] + \mathbb{E} \int_0^T \int_U h(t, x^u(t), a) u_t(da) - \int_U h(t, x^q(t), a) q_t(da) dt$$

Puisque  $g$  est convexe, on aura :

$$\begin{aligned} g(x^q(T)) - g(x^u(T)) &\geq g_x(x^u(T)) (x^q(T) - x^u(T)) \\ g(x^q(T)) - g(x^u(T)) &\geq g_x(x^u(T)) (x^q(T) - x^u(T)) \\ J(u) - J(q) &\leq \mathbb{E}[g_x(x^u(T)) (x^u(T) - x^q(T))] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_U h(t, x^u(t), a) u_t(da) - \int_U h(t, x^q(t), a) q_t(da) dt \right], \end{aligned}$$

on remarque que  $p_T^u = g_x(x^u(T))$  donc :

$$\begin{aligned} J(u) - J(q) &\leq \mathbb{E}[p_T^u (x^u(T) - x^q(T))] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_U h(t, x^u(t), a) u_t(da) - \int_U h(t, x^q(t), a) q_t(da) dt \right], \end{aligned}$$

en appliquant la formule de Itô à  $p_t^u (x_t^u - x_t^q)$

$$\begin{aligned}
 d(p_t^u (x_t^u - x_t^q)) &= dp_t^u (x_t^u - x_t^q) + p_t^u d(x_t^u - x_t^q) + d\langle p_t^u, x_t^u - x_t^q \rangle \\
 d(p_t^u (x_t^u - x_t^q)) &= (-H_x(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) dt - P_t^u dB_t) (x_t^u - x_t^q) \\
 &\quad + p_t^u \left[ \int_U b(t; x_t^u, a) u_t(da) - \int_U b(t; x_t^q, a) q_t(da) \right] dt \\
 &\quad + p_t^u \left[ \int_U \sigma(t; x_t^u, a) u_t(da) - \int_U \sigma(t; x_t^q, a) q_t(da) \right] dB_t \\
 &\quad - P_t^u \left[ \int_U \sigma(t; x_t^u, a) u_t(da) - \int_U \sigma(t; x_t^q, a) q_t(da) \right] dt.
 \end{aligned}$$

On passant à l'espérance :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(p_t^u (x_t^u - x_t^q)) &= \mathbb{E} \int_0^T -H_x(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) (x_t^u - x_t^q) dt \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_0^T p_t^u \left[ \int_U b(t; x_t^u, a) u_t(da) - \int_U b(t; x_t^q, a) q_t(da) \right] \\
 &\quad - \mathbb{E} \int_0^T P_t^u \left[ \int_U \sigma(t; x_t^u, a) u_t(da) - \int_U \sigma(t; x_t^q, a) q_t(da) \right] dt \\
 J(u) - J(q) &\leq \mathbb{E} \int_0^T [H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) - H(t, x_t^q, q_t, p_t^u, P_t^u)] dt \\
 &\quad - \mathbb{E} \int_0^T H_x(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) (x_t^u - x_t^q) dt.
 \end{aligned}$$

Puisque  $H$  est convexe en  $x$  et linéaire en  $u$ , plus condition nécessaire d'optimalité (3.27) plus les lemmes (3.2), (3.3) on a :

$$H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) - H(t, x_t^q, q_t, p_t^u, P_t^u) \geq H_x(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) (x_t^u - x_t^q)$$

Equivalent :

$$H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) - H(t, x_t^q, q_t, p_t^u, P_t^u) - H_x(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) (x_t^u - x_t^q) \leq 0.$$

Alors on obtient :

$$J(u) - J(q) \leq 0.$$

D'où le résultat ■

### 3.6 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les contrôles stricts

On doit remplacer l'ensemble  $\mathcal{R}$  des contrôles relaxés et minimiser le coût de  $J$  par l'ensemble  $\delta(\mathcal{U})$  :

$$\delta(\mathcal{U}) = \{q \in \mathcal{R} : q = \delta_v; v \in \mathcal{U}\} \quad (3.29)$$

où  $\delta(\mathcal{U})$  l'ensemble des contrôles relaxés sous la forme des mesure de Dirac qui charge des contrôles stricts Si pour chaque  $t \in [0, T]$ ,  $q_t \in \delta(\mathcal{U})$  alors  $q_t = \delta_{v_t}$ . avec  $v \in \mathcal{U}$

**Lemme 3.6.1** *Soit  $\mu$  un contrôle relaxé  $\mu = \delta_u$  minimise le coût  $J$  sur ouvert  $\delta(\mathcal{U})$  si et seulement si  $u$  minimise le coût  $J$  sur  $\mathcal{U}$ .*

**Preuve.** Soit  $\mu = \delta_u$  est un contrôle optimale relaxé minimise le coût  $J$  sur ouvert  $\delta(\mathcal{U})$ , donc on a :

$$J(\mu) \leq J(q), \forall q \in \delta(\mathcal{U}) \quad (3.30)$$

Tant que  $q \in \delta(\mathcal{U})$ , donc il existe  $v \in \mathcal{U}$  comme si  $q = \delta_v$ . Donc il est facile de voir ce la

$$\begin{cases} x^\mu = x^u \\ x^q = x^v \\ J(\mu) = J(u) \\ J(q) = J(v) \end{cases}, \quad (3.31)$$

par (3.30), on aura

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in \mathcal{U}.$$

Par contre, soit  $u$  un contrôle strict d'optimal minimise le cout  $J$  sur l'ouvert  $\mathcal{U}$ . Donc :

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in \mathcal{U}.$$

Tant que les contrôles  $u, v \in \mathcal{U}$ , il existe  $\mu, q \in \delta(\mathcal{U})$  comme si  $q = \delta_v$  et  $\mu = \delta_u$ . Ceci implique les relations(3.31). Par conséquent on aura :

$$J(\mu) \leq J(q), \forall q \in \delta(\mathcal{U}).$$

D'où le résultat ■

**Remarque 3.6.2** *Le contrôle optimale relaxé  $\mu$  existe, mais n'est pas nécessairement un élément de  $\delta(\mathcal{U})$ . Un contrôle optimal strict  $u$  ne peut pas nécessairement existe.*

**Remarque 3.6.3** *Si Le contrôle optimale relaxé  $\mu \in \delta(\mathcal{U})$ , donc on aura l'existence du contrôle optimale relaxé. Dans ce cas, si on remplace l'ensemble des contrôles relaxés  $\mathcal{R}$  par l'ensemble  $\delta(\mathcal{U})$ , donc le problème du contrôle relaxé devient simplement un problème du contrôle strict.*

**Remarque 3.6.4** *On sait que l'existence d'une solution optimale d'un problème du contrôle strict est assurée par la condition de Filipov. Il est intéressant de voir si on a la condition de Filipov, donc le contrôle optimal relaxé est un élément de  $\delta(\mathcal{U})$ .*

### 3.7 Les conditions d'optimalités nécessaires pour les contrôles stricts

Il faut définir l'Hamiltonien dans le cas strict de  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times M_{n \times d}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$H(t, x, v, p, P) = h(t, x, v) + b(t, x, v)p + \sigma(t, x, v)P$$

Supposons que  $u$  est un contrôle optimale strict minimisé le coût  $J$  sur  $\mathcal{U}$  et  $x^u$  la solution de l'équation (3.1) contrôlée par  $u$ . Donc il existe un couple unique de processus adapté

$$(p^u, P^u) \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^n) \times L^2([0, T] \times \mathbb{R}^{n \times d}),$$

et solution de :

$$\begin{cases} -dp_t^u = H_x(t, x_t^u, u, p_t^u, P_t^u) dt - P_t^u dB_t \\ p_T^u = g_x(x_T^u), \end{cases} \quad (3.32)$$

et vérifiés :

$$H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) = \inf_{v_t \in U} H(t, x_t^u, v_t, p_t^u, P_t^u), \quad P - ps, dt - pp. \quad (3.33)$$

**Preuve.** Soit  $u$  un contrôle optimal strict de problème  $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$  et  $v$  être un élément arbitraire de  $\mathcal{U}$ . Donc, il existe  $\mu, q \in \delta(\mathcal{U})$  telle que :

$$\mu = \delta_u; \quad q = \delta_v \quad (3.34)$$

comme  $u$  minimise le coût  $J$  sur  $\mathcal{U}$ , donc par le lemme (3.5.2),  $\mu$  minimise  $J$  sur  $\delta(\mathcal{U})$ . Alors, par les conditions d'optimalités nécessaires pour des contrôles relaxés théorème (3.4.1), il existe une paire unique des processus adaptés  $(p_t^\mu, P_t^\mu)$ , qui est une solution de (3.26) comme ci

$$H(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu) = \inf_{q_t \in \delta(\mathcal{U})} H(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu), \quad P \cdot ps, dt \cdot pp.$$

par (3.34) on peut facilement voir :

$$x^\mu = x^u$$

$$H(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu) = H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u)$$

$$H(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu) = H(t, x_t^u, v_t, p_t^u, P_t^u)$$

ou la paire  $(p_t^u, P_t^u)$  est solution de (3.32) le théorème est prouvé. ■

**Remarque 3.7.1** Peng [36] a établi les conditions d'optimalités nécessaires pour des contrôles stricts du second ordre avec deux processus adjoints. Par contre, Bahlali [5] a été introduit par une autre approche basée sur la dérivée du premier ordre seulement malgré la diffusion est contrôlée. Cette nouvelle approche permet d'établir un principe du maximum stochastique global pour les problèmes de contrôle strict et relaxé. Les conditions d'optimalités nécessaires du premier ordre avec seulement un processus adjoint.

### 3.8 Les conditions d'optimalités suffisantes pour des contrôles stricts.

**Théorème 3.8.1** On suppose que  $g$  et l'application  $x \rightarrow H(t, x, v, p, P)$  sont convexes, alors  $u$  est un contrôle optimal pour le problème  $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$ , s'il vérifie :

$$H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) = \inf_{v_t \in U} H(t, x_t^u, v_t, p_t^u, P_t^u), \quad P - ps, dt - pp.$$

**Preuve.** Soit  $u$  être un contrôle strict (candidat peut être optimale) telle que :

$$H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u) = \inf_{v_t \in U} H(t, x_t^u, v_t, p_t^u, P_t^u), \quad P, ps, dt, pp.$$

Soient  $u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{U}$ , donc il existe  $\mu$  et  $q \in \delta(\mathcal{U})$  telle que :

$$\mu = \delta_u, q = \delta_v$$

ceci implique que :

$$x^\mu = x^u$$

$$H(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu) = H(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u)$$

$$H(t, x_t^\mu, q_t, p_t^\mu, P_t^\mu) = H(t, x_t^u, v_t, p_t^u, P_t^u)$$

On déduit que :

$$H(t, x_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, P_t^\mu) = \inf_{q_t \in \delta(U)} H(t, x_t^u, q_t, p_t^u, P_t^u), \quad P, ps, dt, pp.$$

$H$  est convexe par rapport à  $x$ , et  $g$  est convexe, d'après le théorème (3.1.4)  $\mu$  minimise le coût  $J$  sur  $\delta(\mathcal{U})$ . Par lemme, (3.5.2), on déduit que  $u$  minimise le coût  $J$  sur  $\mathcal{U}$ . Le théorème est donc prouvé. ■

**Remarque 3.8.2** Les conditions d'optimalités suffisantes pour des contrôles stricts sont prouvés sans supposer que l'ensemble  $\mathcal{U}$  est convexe.

# Bibliographie

- [1] S. BAHLALI, B. MEZERDI, *Approximation in stochastic optimal control of diffusion processes*. Random and Stochastic equations. Vol. 8, N° 4. pp. 365-372. (2000).
- [2] S. BAHLALI, B. MEZERDI , *Necessary conditions for optimality in relaxed stochastic control problems*. Stochastica and Stochastics Repots. Vol. 73 , pp. 201-218.(2002)
- [3] S. BAHLALI, B. DJEHICHE AND B. MEZERDI , *The relaxed stochastic maximum principle in singular optimal control of diffusions*, SIAM. J. Control. Optimal. Vol. 46, Issue 2, pp. 427-444. (2007).
- [4] S. BAHLALI , Thèse de doctorat, *Approximation et conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes de contrôles stochastiques relaxés*. Université de Batna. (2002)
- [5] S. BAHLALI , *Necessary and sufficient optimality conditions for relaxed and strict control problems*. SIAM. J. Control. Optimal., Vol. 47, pp. 2078-2095.(2008)
- [6] K. BAHLALI, B. DJEHICHE AND B. MEZERDI *On the stochastic maximum principle in optimal control of degenerate diffusions with Lipschitz coefficients*, Appl. Math. and Optim., Vol. 56, pp. 364-378.(2007)
- [7] K. BAHLALI, B. MEZERDI AND Y. OUKNINE , *The maximum principle for optimal control of diffusion with nonsmooth coefficients*. Stochastics. Vol. 57, pp. 303-316. (1996)
- [8] A. BENSOUSSAN , *Lectures on stochastic contr.* In Lect. Notes in Math. 972, Springer Varlag, pp. 1-62. (1983).



- 
- [9] A. BENSOUSSAN , *Stochastic maximum principle for distributed parametre system*, J Franklin Inst., 315, pp. 387-406.(1983).
- [10] J.M. BISMUT , *An introductory approach to duality in Optimal Stochastic Control*, SAIM, Rev., Vol. 20, N° 1 Jan.(1978).
- [11] J.M. BISMUT , *An introductory approach to duality in Optimal Stochastic Control*, SAIM, Rev., Vol. 20, N° 1 Jan. (1978).
- [12] P. CADENILLAS AND I. KARATZAS , *The stochastic maximum principle for linear convex optimal control with random coefficients*, SIAM J. Control. Optimal. Vol. 33, pp. 590-624(1995).
- [13] C. DELLACHERIE ET P.A. MAYER , *Probabilités et Potentiel*. Hermann.(1980)
- [14] R.J. ELLIOTT AND M. KOHLMANN (1980), *The variational principle and stochastic optimal control*, *Stochastic*, 3, pp. 229-241.
- [15] I. EKELAND , *On the variational principle*, J. Math. App., Vol 47, pp. 324-353.(1974)
- [16] I. EKELAND ET R. TEMAM *Analyse convexe et problèmes variationnels* (1974).
- [17] N. EL KAROUI *Aspects probabilistes du contrôle stochastic*. 1, N.M, 876, Springer-Verlag (1983).
- [18] N. EL KAROUI, S. PENG AND M.C. QUENZ. *Backward stochastic differential equations in finance*, *Mathematical Finance*. Vol. 7. pp.1-71. (1997).
- [19] W.H. FLEMING *Optimal control of partially observable diffusions*, SAIM J. Optimal Control, Vol. 6, pp. 194-214.(1976).
- [20] W.H. FLEMING *Generalized solution in optimal stchastic control, in differential games and control theory III*. E. Roxin, P.-T.Liu, and R.L. Sternberg ( EDS.) Marel Dekker. New York. pp. 147-165.(1976).
- [21] W.H. FLEMING AND R.W. RISHEL *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer Verlag. New York. (1975).

- 
- [22] W.H. FLEMING AND H.M. SONER *Controlled Markov processes and viscosity solution*. Springer Verlag. New York.(1992).
- [23] U G. HAUSSMANN *Existence of optimal Markovien controls for degenerate diffusions in stochastic differential systems*. Lecture notes in control and inform. Sci. 78, Springer Verlag, Berlin, pp.171-186.(1986).
- [24] U G. HAUSSMANN , *A stochastic maximum principle for optimal of diffusions*. Pitman Reseach Notes in Math. Series 151. New York. (1986)
- [25] U.G. HAUSSMANN , *General necessary conditions for optimal control of stochastic systems*, Math. Programming. Studies. Vol. 6, pp. 30-48. (1976)
- [26] M. HAFAYED AND B. MEZERDI , *Generalized gradient in stochastic optimal control*, AJMAA, Vol 6, Issue-2, (2009).
- [27] N. IKEDA ET S. WATANABE , *Stochastic differential equations and diffusion Processes*, 2<sup>nd</sup> Edition, North Holland-Kodansha, Amsterdam-Tokyo.(1989)
- [28] I. KARATZAS AND S. SHREVE .*Brownian motion and stochastic calculus*. Springer Verlag.(1988).
- [29] H.J. KUSHNER , *Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems*, SAIM J. Control Optimal., 10, 550-565. (1972)
- [30] H.J. KUSHNER AND F.C. SCHWEPPE .*A maximum principle for stochastic control sustems*, J. Math. Anal. appl.,Vol. 8, 287-302.(1964).
- [31] B. MEZERDI.*Necessary conditions for optimality for a diffusion with a non-smooth drift*. *Stochastics*, Vol. 24, pp. 305-326.(1988).
- [32] B. ØKSENDAL , *Stochastic Deffirential equations, an introduction with applications*, 5<sup>th</sup> Edition, Springer Verlag. New York. (1998)
- [33] J. PELLAUMAIL , *Solutions faibles et semi-martingale*, Sem. proba.XV, Lect. Notes in Math. 851. (1975)
- [34] H. PHAM , *Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance*. Vol. 61, Springer-Verlage. New York (2005).

- 
- [35] L.S. PONTRYAGIN, V.G. BOLTANSKI AND R.V. GAMKRELIDZE , *The mathematical theory of optimal processes*. Interscience N.Y. (1962).
- [36] S. PENG , *A general stochastic maximum principle for optimal control problems* SIAM J. Contr. Optim. 28, N° 4, pp. 966-979, (1990).
- [37] D. REVUS AND M. YOR , *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer Verlag (1991).
- [38] A.V. SKOROKHOD , *Studies in theory of random processes*. Reading Mass. Addison Wesley.(1965).
- [39] J. WARGA , *Necessary conditions without differentiability assumptions in optimal control*, Jor. of Diff. equations, Vol. 18 , pp. 41-62.(1975).
- [40] J. YONG AND X.Y. ZHOU , *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB equations*. Springer-Verlag.(1999).
- [41] X.Y. ZHOU , *Stochastic near-optimal controls : Necessary and sufficient conditions for near-optimality*, SIAM J. Control. Optimal., Vol. 36, pp. 929-947. (1998).
- [42] X.Y. ZHOU , *Maximum principle, dynamic programming and their connection in deterministic control*, Journal of optimisation theory and applications. Vol. 65, 363-373. (1990).
- [43] X.Y. ZHOU , *The connexion between the maximum principle and dynamic programming in stochastic control*. Stoch. Rep., 31, pp. 1-13. (1990).
- [44] X.Y. ZHOU , *Sufficient conditions of optimality for stochastic systems with controllable diffusions*, IEEE Trans. Automat. Controlv 41, 1176-1179. (1996).