

L'APPROCHE DES VALEURS  
EXTREMES EN STATISTIQUE DES  
SERIES FINANCIERES

TOUBA SONIA

2005 – 2006

# Table des matières

0.1	<b>Introduction</b> . . . . .	5
0.2	Notations . . . . .	7
<b>1</b>	<b>Les lois stables</b>	<b>8</b>
1.1	Préliminaire . . . . .	8
1.2	Définitions et caractéristiques de bases . . . . .	9
1.2.1	Lois indéfiniment divisibles . . . . .	9
1.2.2	La fonction caractéristique . . . . .	11
1.2.3	La fonction de densité et la fonction de distribution . . . . .	15
1.2.4	La stabilité . . . . .	18
1.2.5	Calcul des moments . . . . .	19
1.2.6	Propriétés arithmétiques . . . . .	22
1.3	Algorithme de simulation . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Estimation des paramètres du loi <math>\alpha</math>-stable</b>	<b>27</b>
2.1	Méthode des moments . . . . .	27
2.2	La méthode de régression . . . . .	29
2.2.1	Pour une loi stable alpha-symétrique . . . . .	29
2.2.2	Pour une loi alpha-stable . . . . .	32
2.3	La méthode de McCulloch . . . . .	36
2.4	La méthode de Maximum de vraisemblance . . . . .	41
2.5	Aplication en finance . . . . .	41
2.5.1	Application du modèle stable à l'indice du Nazdaq(Parie) . . . . .	44
<b>3</b>	<b>La théorie des valeurs extremes</b>	<b>47</b>
3.1	Statistique d'ordre . . . . .	47
3.1.1	Densité et loi des statistiques d'ordre . . . . .	48
3.1.2	Domaines d'attractions . . . . .	52
3.2	Lois stables et valeurs extrêmes . . . . .	57
3.2.1	Queues lourdes . . . . .	57
3.2.2	Estimation des paramètres . . . . .	58

<b>4</b>	<b>Probabilité de ruine</b>	<b>63</b>
4.1	Mouvement Brownien et le modèle de risque pour petites revendications . . . . .	66
4.1.1	La convergence faible d'un processus de risque au Mouvement Brownien . . . . .	66
4.1.2	Probabilité de ruine pour le processus de limite . . . . .	67
4.2	Lévy-stable et le modèle de risque pour grandes revendications	69
4.2.1	La convergence faible du processus de risque au Lévy-stable . . . . .	70
4.2.2	Le modèle de la probabilité de ruine pour le processus limite de risque dans le cas de grandes revendications .	72

## Table des Figures

1.1	Courbe de la densité pour $\alpha \in \{1.75, 1.5, 1.25\}$ , $\beta = 0$ , $\sigma = 1$ et $\mu = 0$ .	13
1.2	Courbe de la densité pour $\alpha = 2$ , $\beta = 0$ , $\sigma = 1$ et $\mu \in \{-2, 0, 2, 5\}$ .	13
1.3	Courbe de la densité pour $\alpha = 2$ , $\beta = 0$ , $\mu = 0$ et $\sigma \in \{0.5, 0.7, 1, 1.5\}$ .	14
1.4	Courbe de la densité pour $\beta \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$ , $\alpha = 1.5$ , $\sigma = 1$ et $\mu = 0$ .	14
1.5	Comparaison graphique entre les deux paramétrisations S et $S^0$ .	15
1.6	Les distributions de Cauchy, Lévy et Gauss.	17
1.7	Histogrammes normalisés des lois $S\alpha S$ pour différentes valeurs de $\alpha$ calculés sur 5000 réalisations.	26
1.8	Distribution d'une loi normale de paramètre $\alpha = 2$ , $\beta = 0$ , $\mu = 0$ , $\sigma = 1$ pour $n = 60000$ .	27
1.9	Distribution d'une loi stable de paramètre $\alpha = 1.5$ , $\beta = 0$ , $\mu = 0$ , $\sigma = 1$ pour $n = 10000$ .	27
2.1	Les prix des fermetures journaliers du Nazdaq.	46
2.2	Les rendements journaliers du Nazdaq $\left[ \log \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \right]$ pour la période allant 11/10/84 au 22/09/05.	47
2.3	Quantiles normaux contre quantiles empiriques du Nazdaq.	47
2.4	Histogramme des rendements du Nazdaq.	48
3.1	Fonction de probabilité $F_{i:5}(x)$ lorsque X est une variable aléatoire gaussienne.	50
3.2	Fonction de densité $f_{i:5}(x)$ lorsque X est une variable aléatoire gaussienne.	51
3.3	Fonction de probabilité $F_{n:n}(x)$ lorsque X est une variable aléatoire gaussienne.	52
3.4	Fonction de densité $f_{i:5}(x)$ lorsque X est une v.a. gaussienne.	52
3.5	Les domaines d'attraction.	55

## Liste des Tableaux

1.1	Moyenne et variance théorique d'une loi $\alpha$ -stable.	20
1.2	Moyenne et variance empirique d'une loi $\alpha$ -stable symétrique.	21
2.1	Estimation des paramètres $\alpha$ , $\beta$ , $\mu$ et $\sigma$ par la méthode des moments.	31
2.2	Valeurs optimales de $k$ en fonction de $n$ et de $\alpha$ .	33
2.3	Estimation de $\alpha$ et $\gamma$ du loi $\alpha$ -stable symétrique par regression.	34
2.4	Estimation de $\alpha$ et $\sigma$ du loi $\alpha$ -stable par regression.	35
2.5	Estimation des paramètres $\alpha$ , $\beta$ , $\mu$ et $\sigma$ par la méthode de regression.	38
2.6	Estimation de $\alpha$ et $\beta$ par la méthode de McCulloch.	40
2.7	Estimation de $\sigma$ et $\mu$ par la méthode de McCulloch.	42
2.8	Tab.(2.7).Paramètres estimés pour quelques indices.	45
2.9	Statistique de kurtosis pour différentes indices.	46
2.10	Caractéristiques empiriques des rendements du Nazdaq(Parie).	49
2.11	Paramètres estimés des rendements du Nazdaq(Parie).	49
3.1	Domaines d'attractions.	58
3.2	Exemples de ditributions Heavy Tailed.	60
4.1	Probabilité de ruine pour le modèle brownien.	71
4.2	Probabilité de ruine pour $\alpha = 1.12$ et $\mu = 20$ , $\sigma = 10$ et $t = 10$ .	76
4.3	Probabilité de ruine pour $\alpha = 1.5$ et $\mu = 20$ , $\sigma = 10$ et $t = 10$ .	76

## 0.1 Introduction

Dans le domaine de la finance, la variabilité des données prend toute son ampleur. En effet, si l'on regarde les graphiques boursiers représentant l'évolution du prix d'un titre au cours du temps (chapitre 2), des périodes hautes succèdent à des périodes basses qui succèdent à des périodes hautes et ainsi de suite. De plus, dans chaque palier (haut ou bas), on retrouve ces périodes irrégulières. Dans les années 30, Elliott (1938) propose la théorie dite les "vagues d'Elliott". Cette théorie trop subjective reste inexploitée.

Dans les années 60, Mandelbrot étudie ces fluctuations boursières, pour lesquelles il était tout-à-fait clair que le modèle gaussien ne convenait pas. Il s'appuie alors sur les lois de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé "lois  $\alpha$ -stables". Le paramètre  $\alpha$ , compris entre 0 et 2, représente l'exposant caractéristique des lois stables et lorsque celui-ci est strictement inférieur à 2, la variance de la loi stable est infinie. Mandelbrot (1963) confirme que son modèle décrit de façon réaliste la variation des prix pratiqués sur certaines bourses des valeurs. Fama (1965) va valider le modèle précédent sur le prix du marché des actions.

Quelques années plus tard, Fama et Roll (1968) donnent les premières tabulations des lois symétriques  $\alpha$ -stables ( $S\alpha S$ ), ce qui va permettre de concevoir les premiers estimateurs de ces lois. Dans les 20 années suivantes, le travail théorique a porté plus précisément sur l'estimation du paramètre  $\alpha$ .

Le présent mémoire est alors une synthèse des travaux de recherches concernant la théorie des séries financières, ainsi que des différentes propriétés de probabilités et statistiques du modèle stable. Alors quels sont les objectifs et comment se fait la modélisation des séries financières.

### Chapitre 1 : "Les lois Stables"

Le premier chapitre contient des rappels sur les différentes caractéristiques des lois alpha-stables, dans un premier temps, on va étudier les raisons pour lesquelles les lois de Lévy sont si populaires en finance. On constate que les valeurs de la statistique de Kurtosis sont élevées ( $> 3$ ) pour les séries financières. Les lois des chroniques boursières sont donc leptokurtique, ce qui nous fait à considérer les lois de Lévy.

Ces lois possèdent aussi la propriété d'être stable par addition, propriété de stabilité, c'est pour ça de nombreux chercheurs à considérer les lois stables comme modèle pour les rendements d'actifs. Ces lois sont, de plus, caractérisées par quatre paramètres, ce qui facilite grandement les analyses et les estimations.

## Chapitre 2 : "Estimation Des Paramètres"

Après avoir expliqué les caractéristiques de ces quatre paramètres, on va exposer les différentes méthodes pour les estimer ; la méthode de McCulloch ; la méthode de régression ; la méthode de moment et la méthode de maximum de vraisemblance, avec une comparaison entre ces méthodes. On va finir ce chapitre avec une partie d'application qui va comporter une étude de simulation et une application en finance concernant l'indice boursier du Nasdaq (Paris) durant la période allant du 11/10/1984 au 22/09/2005. En suite, on va montrer graphiquement que dans certains cas, les lois de Lévy non gaussienne approchent mieux les lois des séries financières que la loi normale.

## Chapitre 3 : "Théorie Des Valeurs Extrêmes"

Un troisième chapitre contient des rappels sur la statistique d'ordre, qui est très utile en théorie des valeurs extrêmes. cette théorie (TVE) et un outil qui s'attache précisément à décrire et mesurer en terme de probabilité l'intervention des événements rares, où l'apparition des catastrophes : les marchés financiers ont connu de nombreux krachs, comme celui de 1929, annonciateur de la grande crise, et celui du "lundi noir" d'octobre 1987, tremblement de terre (séisme), les volcans, les inondations, ...

Ce qui rend la connaissance des caractéristiques des distributions et propriétés des estimateurs de ces événements, en particulier la probabilité de dépasser un certain seuil.

Puis en caractérisant les lois des extréma et nous étudions le comportement au niveau des "queues" pour la distribution de Lévy. Présentons l'estimation des paramètres de Lévy avec cette approche(TVE) ; l'estimateur de Hill pour l'inverse de l'indice de stabilité  $\alpha$  et l'estimateur de Peng pour le paramètre de localisation  $\mu$ .

## Chapitre 4 : "Probabilité De Ruine"

Un quatrième chapitre sera consacré à la présentation de la théorie de la convergence faible appliqué pour rapprocher le processus de risque selon le mouvement brownien et Lévy stable.

## 0.2 Notations

$v.a.r.$	Variable aléatoire réel.
$i.i.d.$	Indépendent identiquement distribué.
$v.a.$	Variable aléatoire.
$var(.)$	Variance.
$E(.)$	Espérance mathématique (Moyenne).
$F(.)$	Fonction de distribution.
$\bar{F}(.)$	Fonction des queues de distribution.
$F_n(.)$	Fonction de distribution empirique.
$\mathbb{Q}(.)$	Fonction des quantiles.
$\mathbb{Q}_n(.)$	Fonction des quantiles empiriques.
$\xrightarrow{CF}$	Convergence faible.
$\xrightarrow{d}$	Convergence en distribution.
$\stackrel{d}{=}$	Egalité en distribution.
$\Im \{.\}$	Imaginaire d'une fonction.
$\Re \{.\}$	Réel d'une fonction.



# Chapitre 1

## Les lois stables

### 1.1 Préliminaire

En statistique, une des lois les plus utilisées est la loi Gaussienne. Ses différentes propriétés, comme la stabilité, le fait que deux paramètres (moyenne et variance) suffisent à la caractériser ou bien encore le théorème de la limite centrale font que cette loi s'adapte bien dans de nombreuses situations.

Durant la dernière décade, beaucoup des concepts dans la finance théorique et empirique se repose sur la supposition que les revenus d'actifs suivent une distribution normale.

D'après les études de Mandelbrot (1963) et Fama (1965), ils ont trouvé que les chroniques financières possèdent des propriétés fractales comme la variance "infini", l'auto-similarité et la mémoire longue. C'est pour ça ils ont considéré l'utilisation des lois de Lévy, qui permettent de travailler avec des accroissements non stationnaires et sans moment d'ordre 2, et établir des modèles statistiques sur les rendements financiers.

Les lois stables (dites aussi  $\alpha$ -stables, Pareto stables ou Lévy stables) ont été introduites par Paul Lévy en 1924 (Lévy,1925) lors de ses investigations sur le comportement des sommes de variables aléatoires indépendantes. Samorodnitsky et Taqqu (1994) ont étudié de manière approfondie les propriétés de ces lois aussi bien dans le cas univarié que multivarié. Les livres de Feller (1971) et Zolotarev (1986) sont aussi des références de base dans ce domaine.

## 1.2 Définitions et caractéristiques de bases

### 1.2.1 Lois indéfiniment divisibles

**Définition 1 :** Une v.a.r.  $X$  a une distribution indéfiniment divisible si et seulement si  $\forall n, \exists X_1, \dots, X_n$  indépendantes et de même loi telles que [14] :

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_n.$$

**Remarque 1 :** Les v.a.r.  $X_i$  n'ont pas même loi que  $X$ . Mais elles appartiennent à la même famille de loi. Cette classe de v.a.r. permet de résoudre notre problème. En effet, on a le théorème suivant.

**Théorème 1 :** Une v.a.r.  $X$  est la limite d'une somme de  $n$  v.a.r. i.i.d. si et seulement si  $X$  est indéfiniment divisible. La démonstration est détaillée dans (Shiryayev, 1984, p. 336).

**Remarque 2 :** Une des caractérisations des lois indéfiniment divisibles est que leur fonction caractéristique peut s'écrire comme puissance  $n^{\text{ième}}$  d'une autre fonction caractéristique.

**Théorème 2 :** (Lévy-Khinchin) Si  $X$  a une distribution indéfiniment divisible, alors sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\varphi_x(t) = \exp \left\{ i\mu t + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1 - it \sin x}{x^2} M(dx) \right\},$$

où  $\mu$  est un réel et  $M$  est une mesure qui attribue une masse finie à tout intervalle fini et tel que les deux intégrales suivantes :

$$M^+(x) = \int_x^{+\infty} y^{-2} M(dy) \text{ et } M^-(-x) = \int_{-\infty}^{-x} y^{-2} M(dy),$$

sont convergentes pour tout  $x > 0$ . La démonstration est détaillée dans Feller (1971, p. 554-565).

**Exemples 1 :** Beaucoup des lois connues sont indéfiniment divisibles.

- Si une v.a.r.  $X$  suit la loi normale  $N(m, \sigma^2)$  sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\varphi_X(t) = \exp \left\{ imt - \frac{t^2 \sigma^2}{2} \right\} = \left[ \exp \left( i \frac{m}{n} t - \frac{t^2 \frac{\sigma^2}{n}}{2} \right) \right]^n,$$

comme puissance  $n^{\text{ième}}$  de la fonction caractéristique d'une loi normale  $N\left(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ .

- La loi de Cauchy  $C(c)$ , sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\varphi_x(t) = \exp(-c|t|) = \left[ \exp\left(-\frac{c}{n}|t|\right) \right]^n,$$

comme puissance  $n^{\text{ème}}$  de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy  $C\left(\frac{c}{n}\right)$ .

- La loi de Poisson  $P(\lambda)$ , sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\varphi_x(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\} = \left[ \exp\left(\frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right) \right]^n,$$

comme puissance  $n^{\text{ème}}$  de la fonction caractéristique d'une loi de Poisson  $P\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ .

- La loi Gamma  $\Gamma(r, \lambda)$  : sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^r} = \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{\frac{r}{n}}} \right]^n,$$

comme puissance  $n^{\text{ème}}$  de la fonction caractéristique d'une loi Gamma  $\Gamma\left(\frac{r}{n}, \lambda\right)$ .

- Il en va de même pour la loi exponentielle (égale à  $\Gamma(1, \lambda)$ ) et la loi du  $\chi_m^2$  (égale à  $\Gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ).

Pour se rapprocher du théorème de la limite centrale et afin d'avoir une forme explicite de la fonction caractéristique, nous allons définir une famille de lois dont les propriétés seront intéressantes.

**Définition 2 :** Une v.a.r.  $X$  a une distribution stable si et seulement si pour tout  $k$  et toute famille  $X_1, \dots, X_k$  i.i.d. de même loi que  $X$ , il existe  $a_k > 0$  et  $b_k$ , deux réels, tels que :

$$X_1 + \dots + X_k \stackrel{d}{=} a_k X + b_k.$$

Lorsque  $b_k = 0$ , on parle de distribution strictement stable.

**Remarque 3 :** Il est montré dans (Feller, 1971, p (170-171)) qu'il existe une constante réelle  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_k = k^{\frac{1}{\alpha}}$ .

**Proposition 1 :** Si  $X$  est stable,  $X$  est indéfiniment divisible. La réciproque est fautive (voir dans l'exemple 2, ci-dessous, la loi de Poisson).

**Preuve de la proposition 1 :**

Il suffit de prendre des v.a.r.  $Y_j$  tel que :

$$Y_j = \frac{X_j - b_n}{a_n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Comme les  $X_j$  sont indépendantes, les  $Y_j$  sont aussi indépendantes et

$$Y_1 + \dots + Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{a_n} - \frac{b_n}{a_n}.$$

Or  $X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$ , d'où  $Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{d}{=} X$ .

**Théorème 3** : Une v.a.r.  $X$  est la limite en distribution des v.a.r.

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - b_n}{a_n}, \quad a_n > 0,$$

si et seulement si  $X$  est stable.

La démonstration est détaillée dans (Shirayev, 1984, p. 338-339).

### 1.2.2 La fonction caractéristique

Le principal inconvénient de la loi stable est l'absence, de formes explicites pour la plus part de ses fonctions de densités et de fonctions de répartition. C'est pour ça une v.a.  $X$  de loi stable est typiquement décrite par sa fonction caractéristique  $\varphi$  (transformée inverse de Fourier de la densité de probabilité  $f$ ) définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\varphi(X) := E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Il y a beaucoup de représentations pour  $\varphi$  (correspondant aux différentes paramétrisations des lois stables) dont la plus célèbre est donnée par (Samorodnitsky et Taqqu, 1994; Weron, 2004) :

$$\varphi_x(t) = \exp \begin{cases} i\mu t - \sigma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(t)) \ln |t|], & \alpha = 1 \\ i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta (\text{sign}(t)) \tan \frac{\alpha\pi}{2}], & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\text{S}^1)$$

Une loi stable alors est caractérisé par quatre paramètres :

- 1-  $\alpha$  : paramètre principal,  $0 < \alpha \leq 2$ . Il caractérise les queues de distribution. Plus  $\alpha$  diminue, plus les queues sont lourdes qui correspond à de très grandes fluctuations.  $\alpha = 2$  correspond à une loi stable particulière : la très célèbre loi de Gauss ou loi normale.

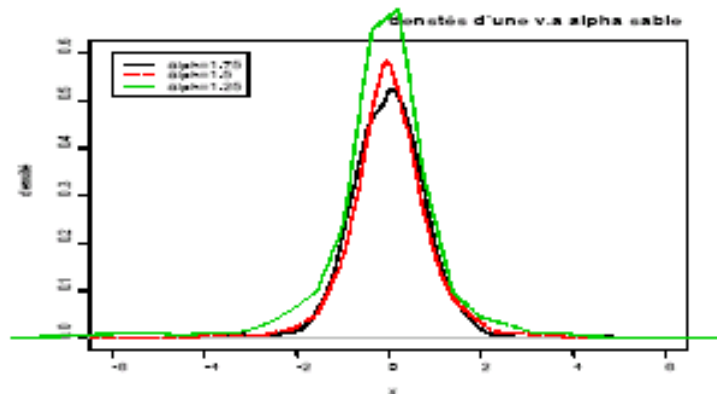


FIG.(1.1). Courbe de la densité pour  $\alpha = \{1.75; 1.5; 1.25\}$ ;  $\beta = 0$ ;  $\sigma = 1$  et  $\mu = 0$ .

Remarquant bien que, plus le paramètre  $\alpha$  est petit, plus la courbe de la densité est pointue et a des queues de distribution épaisse.

- 2-  $-\infty < \mu < +\infty$  : Paramètre de position. Il caractérise la moyenne de la loi (lorsque  $\alpha > 1$ ) Si,  $\beta = 0$  alors  $\mu$  est la médiane. Dans les autres cas le paramètre  $\mu$  ne peut pas être interprété;

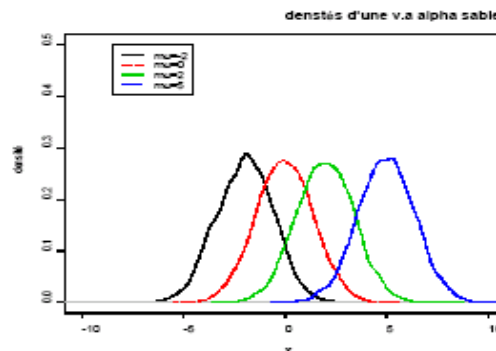


FIG.1.2. Courbe de la densité pour  $\alpha = 2$ ;  $\beta = 0$ ;  $\sigma = 1$  et  $\mu \in \{-2; 0; 2; 5\}$

- 3-  $\sigma > 0$  : paramètre d'échelle; tel que  $\sigma_{Gaussian} = \sqrt{2}\sigma$ ;

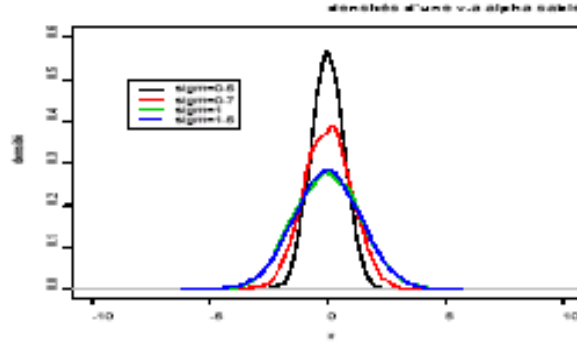


FIG.1.3. Courbe de la densité pour  $\alpha = 2; \beta = 0; \mu = 0$  et  $\sigma \in \{0.5; 0.7; 1; 1.5\}$ .

Plus  $\sigma$  est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre  $\sigma$  permet de centrer plus ou moins le corps de la distribution.

- 4-  $-1 < \beta < 1$  : paramètre de symétrie. Si  $\beta = 0$ , la loi est symétrique par rapport au paramètre  $\mu$ . Si de plus,  $\mu = 0$ , la loi est dite symétrique alpha-stable, de fonction caractéristique :

$$\varphi_x(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha).$$

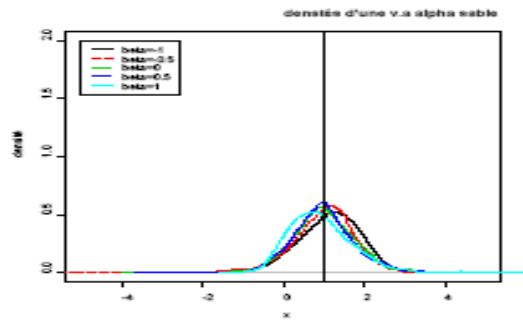


FIG.1.4. Courbe de la densité pour  $\alpha = 1.5; \beta \in \{-1; -0.5; 0; 0.5; 1\}; \sigma = 1$  et  $\mu = 0$ .

Lorsque  $\beta$  est positif (resp. négatif), le mode est à gauche (resp. à droite) de la moyenne. Lorsque  $\beta$  est positif (resp. négatif), la queue de la distribution est plus épaisse à droite (resp. à gauche).

Par convention,  $S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$  représentera une loi stable de paramètres  $\alpha, \mu, \beta$  et  $\sigma$  et  $S\alpha S(\sigma)$  une loi symétrique alpha-stable de paramètre  $\sigma$ .

Une autre expression de  $\varphi_x$  utile dans l'application a donné par Zolotarev (M-paramétrisation de Zolotarev) : on appellera  $X \sim S(\alpha, \beta, \sigma, \mu_0; 0)$  si la fonction caractéristique de  $X$  est définie par :

$$\varphi_x(t) = \exp \begin{cases} i\mu_0 t - \sigma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(t)) (\ln |t| + \ln \sigma)], & \text{pour } \alpha = 1. \\ i\mu_0 t - \sigma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta (\text{sign}(t)) (\tan \frac{\alpha\pi}{2}) ((\sigma |t|)^{1-\alpha} - 1)], & \text{pour } \alpha \neq 1. \end{cases} \quad (S^0)$$

Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\sigma$  sont les mêmes dans les deux paramétrisations  $S^1$  et  $S^0$ , d'où les paramètres de position sont reliés comme suivant :

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 - \beta \left( \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right) \sigma, & \alpha \neq 1 \\ \mu_0 - \beta \frac{2}{\pi} \sigma \ln \sigma, & \alpha = 1 \end{cases}$$

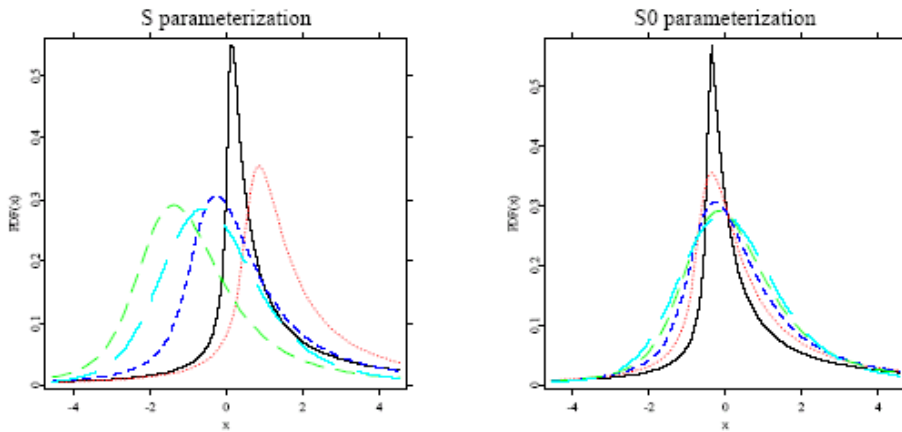


FIG.1.5. Comparison graphique entre les deux paramétrisations  $S$  et  $S^0$ .

**Exemples 2 :** Là aussi, certaines des lois connues appartiennent à cette classe :

- la loi normale  $N(m, \sigma^2)$  est une loi  $S_2\left(m, \beta, \frac{\sigma^2}{2}\right)$  (et réciproquement une loi  $S_2(\mu, \beta, \sigma)$  est une loi normale  $N(\mu, 2\sigma)$ ).
- la loi de Cauchy généralisée de densité  $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x - m)^2}$  est une loi  $S_1(m, 0, \sigma)$
- la loi de Poisson  $P(\lambda)$  n'est pas stable.

Preuve : En effet, soient  $X_1$  et  $X_2$  deux *v.a.r.* suivant une loi de Poisson. Supposons que  $X_1$  et  $X_2$  sont stables, alors il existe  $a > 0$  et  $b$  tels que :

$$X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} aX + b.$$

Par égalité des moyennes et des variances, nous trouvons :

$$\begin{cases} 2\lambda = a\lambda + b \\ 2\lambda = a^2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} b = (2 - \sqrt{2})\lambda \\ a = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ce qui entraîne une contradiction car  $(x_1 + x_2)$  a ses valeurs uniquement dans  $IN$  alors que  $\sqrt{2}x_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$  n'est pas des valeurs dans  $IN$ .

### 1.2.3 La fonction de densité et la fonction de distribution

Le principale inconvénient est que les densités des lois stables sont inconnues sauf dans trois cas :

1. La distribution gaussienne  $S_2(0, \sigma, \mu)$  où

$$\mathbf{f}(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp - \left( \frac{x - \mu}{2\sigma} \right)^2$$

2. La distribution de Cauchy  $S_1(0, \sigma, \mu)$  où

$$\mathbf{f}(x) = \frac{2\sigma}{\pi((x - \mu)^2 + 4\sigma^2)}$$

3. La distribution de Lévy  $S_{\frac{1}{2}}(1, \sigma, \mu)$  où

$$\mathbf{f}(x) = \left( \frac{\sigma}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (x - \mu)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{\sigma}{2(x - \mu)} \right) \mathbf{I}_{] \mu, \infty[}(x)$$

avec  $I$  fonction d'indicatrice.



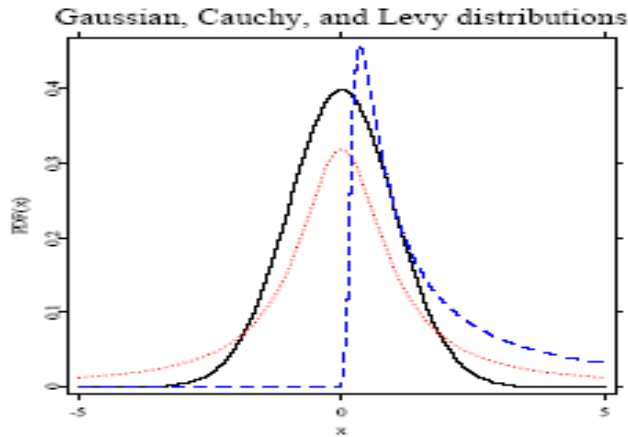


FIG.(1.6).Les distributions de Cauchy, Lévy et Gauss.

Le rouge signifié la distribution de Cauchy, le noire est la distribution de Gauss et le bleu signifié la distribution de Lévy.

- 4- L'absence des formules de forme explicite pour la plus parts du lois  $\alpha$ -stables et les fonctions de distributions ont des conséquences négatives.

Généralement, il y a deux approches à ce problème, la transformé de Fourier (fft ) (fast Fourier transform) doit être appliqué à la fonction caractéristique (Mittnik, Doganoglu et Chenyao, 1999) ou bien l'intégration directe numérique qui a été utilisé par (Nolan, 1997, 1999). A l'aide de la transformée inverse de la fonction caractéristique, donnée par :

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \varphi_x(t) dt.$$

Nous pouvons obtenir  $f$  d'une loi  $\alpha$ -stable symétrique sous la forme d'une intégrale comme suivant :

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha) \cos [xt + \beta t^\alpha w(t, \alpha)] dt,$$

où

$$w(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2}, & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Dans les formules de la méthode d'intégration directe de Zolotarev(1986), d'où la fonction de densité et la fonction de distribution sont intégrables numériquement.

Soit  $\zeta = -\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}$ . La fonction de densité de la loi  $\alpha$ -stable standard dans la représentation  $S^0$ , i.e.  $X \sim S_\alpha^0(1, \beta, 0)$ , peuvent s'exprimer comme la paramétrisation de Zolotarev(1986), alors :

Si  $\alpha \neq 1$  et  $X > \zeta$  :

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha(x - \zeta)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi |\alpha - 1|} \int_{-\eta}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta; \alpha, \beta) \exp \left[ - (x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta; \alpha, \beta) \right] d\theta$$

Si  $\alpha \neq 1$  et  $X = \zeta$  :

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cos(\eta)}{\pi (1 + \zeta^2)^{\frac{1}{2\alpha}}},$$

-Si  $\alpha \neq 1$  et  $X < \zeta$  :

$$f(x; \alpha, \beta) = f(-x; \alpha, -\beta)$$

-Si  $\alpha = 1$  :

$$f(x; 1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta; 1, \beta) \exp \left[ -e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\theta; 1, \beta) \right] d\theta, & \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\pi(1+x^2)}, & \beta = 0. \end{cases}$$

Tel que :

$$\eta = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \arctan(-\zeta), & \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Et

$$V(\theta; \alpha, \beta) = \begin{cases} (\cos \alpha \eta)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \alpha (\eta + \theta)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos [\alpha \eta + (\alpha - 1) \theta]}{\cos \theta}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \beta \theta}{\cos \theta} \right) \exp \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi}{2} + \beta \theta \right) \tan \theta \right], & \alpha = 1, \beta \neq 0 \end{cases}$$

La fonction de distribution  $F(x; \alpha, \beta)$  d'une v.a.  $X$ . qui suit la loi standard  $\alpha$ -stable ( $X \sim S_\alpha(0, \beta, 1)$ ) dans la représentation  $S^0$  peut s'exprimer comme suivant :

-Si  $\alpha \neq 1$  et  $X > \zeta$  :

$$F(x; \alpha, \beta) = c_1(\alpha, \beta) + \frac{\text{sign}(1 - \alpha)}{\pi} \int_{-\eta}^{\frac{\pi}{2}} \exp \left\{ - (x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta; \alpha, \beta) \right\} d\theta,$$

tel que :

$$c_1(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \eta \right), & \alpha < 1, \\ 1, & \alpha > 1. \end{cases}$$

-Si  $\alpha \neq 1$  et  $X = \zeta$  :

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \eta \right),$$

-Si  $\alpha \neq 1$  et  $X < \zeta$  :

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - F(-x; \alpha, -\beta),$$

-Si  $\alpha = 1$  :

$$F(x; 1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp \left[ -e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\theta; 1, \beta) \right] d\theta, & \beta > 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, & \beta = 0, \\ 1 - F(x, 1, -\beta), & \beta < 0. \end{cases}$$

#### 1.2.4 La stabilité

**Propriété 1** : Pour  $\alpha \neq 1$ , nous avons l'équivalence suivante :  
 $X$  suit une loi  $S_\alpha(\mu, \beta, \sigma) \Leftrightarrow Y = \frac{X-\mu}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}}$  suit une loi  $S_\alpha(0, \beta, 1)$ .

**Preuve de la propriété 1** :

Tout d'abord, remarquons que :

$$\varphi_{mx+p}(t) = E \left[ e^{it(mx+p)} \right] = e^{itp} \varphi_x(mt).$$

**Condition nécessaire** : prenons :  $m = \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}}$  et  $p = -\frac{\mu}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}}$ .

Nous avons alors :

$$\varphi_y(t) = \exp \left( -\frac{i\mu t}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \varphi_x \left( \frac{t}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}} \right)$$

$$\varphi_y(t) = \exp \left( -\frac{i\mu t}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \exp \left\{ \frac{i\mu t}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}} - \sigma \left| \frac{t}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}} \right|^\alpha \left[ 1 - i\beta \operatorname{sign} \left( \frac{t}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\}.$$

Or  $\operatorname{sign} \left( \frac{t}{\sigma^{\frac{1}{\alpha}}} \right) = \operatorname{sign}(t)$  car  $\sigma > 0$  donc :

$$\varphi_y(t) = \exp \left\{ -|t|^\alpha \left[ 1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\},$$

qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi  $S_\alpha(0, \beta, 1)$ .

**Condition suffisante** : la démonstration est similaire à la condition nécessaire en prenant  $m = \sigma^{\frac{1}{\alpha}}$  et  $p = \mu$ .

**Remarque 4** : Pour la simulation, il suffit de générer des lois  $S_\alpha(0, \beta, 1)$  et par changement de variables, nous pouvons obtenir des lois  $S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$ .

### 1.2.5 Calcul des moments

**Propriété 3** : Soit  $X$  une v.a. qui suit la loi  $S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ , les moments d'ordre  $p$  sont comme suivant :

1. **Si  $\alpha = 2$ ,**

$$\forall p, E|X|^p < +\infty.$$

2. **Si  $0 < \alpha < 2$ ,**

$$\forall 0 \leq p < \alpha, E|X|^p < +\infty.$$

$$\forall p \geq \alpha, E|X|^p = +\infty.$$

En particulier, pour la moyenne  $E(x)$  et la variance  $var(x)$ , on obtient les résultats dans le tableau suivant :

	$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
EX	$\infty$	$\mu$	$\mu$
varX	$\infty$	$\infty$	$2\sigma^2$

*Tab.(1.1). Moyenne et variance théorique d'une loi  $\alpha$ -stable.*

On peut constater que, dès que  $\alpha < 2$ , la variance d'une loi  $\alpha$ -stable est infinie et dès que  $\alpha < 1$ , c'est la moyenne qui devient infinie. Lorsque  $\alpha > 1$ , la moyenne d'une loi  $\alpha$ -stable est  $\mu$ .

Comme exemple, on a simulé 5000 réalisations d'une v.a.  $x \sim S_\alpha(1, 0, 0)$  et calculé la moyenne et la variance empiriques pour différentes valeurs de l'indice principale  $\alpha$ . Voici les résultats obtenus dans le tableau suivant :

$\alpha$	moyenne	variance
2	-0.0049	1.93
1.9	-0.022	2.65
1.7	0.091	10.36
1.5	-0.017	19.09
1.3	-0.15	269.54
1.1	-0.32	2409.403
0.9	-0.32	12032.59
0.7	-87.90	807950460
0.5	-1525.37	4.2e+10
0.3	-158181361	9.07e+19

Tab.(1.2). Moyenne et variance empirique d'une loi stable symétrique.

### Preuve de la propriété 3 :

En fait pour la première partie de la propriété 3, nous avons vu dans l'exemple 2 que le cas ( $\alpha = 2$ ) correspond au cas gaussien. Et nous savons que les variables aléatoires gaussiennes ont toutes leurs moments finis.

Pour la seconde partie de la propriété 3, remarquons tout d'abord que pour toute *v.a.r.* positive et intégrable, on a :

$$E(y) = \int_0^{+\infty} P(y > v) dv.$$

En posant  $y = |X|^p$  et  $v = u^p$ , nous avons :

$$E(|X|^p) = \int P(|X|^p > u^p) pu^{p-1} du. \quad (1.2)$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{p-1} P(|X| > u)}{u^{p-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} P(|X| > u) = 1.$$

Donc

$$u^{p-1} P(|x| > u) \sim u^{p-1} \text{ au voisinage de } 0.$$

Et

$$\int_0^M u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty \Leftrightarrow \int_0^M u^{p-1} du < +\infty \Leftrightarrow p > 0.$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{p-1} P(|X| > u)}{u^{p-\alpha-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^\alpha P(|X| > u) = \gamma C(\alpha).$$

Donc

$$u^{p-1} P(|X| > u) \sim u^{p-\alpha-1} \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Et

$$\int_M^{+\infty} u^{p-1} P(|X| > u) du < +\infty \Leftrightarrow \int_M^{+\infty} u^{p-\alpha-1} du < +\infty \Leftrightarrow p < \alpha$$

**Conclusion :** D'après (1.2), il est facile de voir que :

$$E|x|^p < +\infty.$$

Lorsque :

$$\begin{aligned} \int_0^M u^{p-1} P(|X| > u) du &< +\infty \\ \int_M^{+\infty} u^{p-1} P(|X| > u) du &< +\infty. \end{aligned}$$

C'est-à-dire lorsque  $0 < p < \alpha$ .

**Preuve de 2 :**

Nous avons que  $\dot{\varphi}_x(0) = iE(X)$ , et que :

$$\varphi_x(t) = \exp \{ i\mu t - \gamma |t|^\alpha g(\text{sign}(t)) \}.$$

D'où :

$$g(\text{sign}(t)) = 1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Alors :

$$\dot{\varphi}_x(t) = (i\mu - \gamma \text{sign}(t) |t|^{\alpha-1} g(\text{sign}(t))) \exp \{ i\mu t - \gamma |t|^\alpha g(\text{sign}(t)) \}.$$

Ce qui entraîne que  $\dot{\varphi}_x(0) = i\mu$  d'où  $E(X) = \mu$ .

**Propriété 4 :** Si  $X$  suit une loi  $S_\alpha(0, \beta, \sigma)$ , alors on a :

$$\forall 0 < p < \alpha, E|X|^p = C(\alpha, \beta, p) \gamma^{\frac{p}{\alpha}},$$

D'où

$$C(\alpha, \beta, p) = \frac{2^{p-1} \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})}{p \int_0^{+\infty} u^{-p-1} \sin^2 u du} \left( 1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2} \right)^{\frac{p}{2\alpha}} \cos \left( \frac{p}{\alpha} \arctan \left( \beta \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right).$$

La démonstration se trouve dans l'article de (Hardin, 1984).

### 1.2.6 Propriétés arithmétiques

Propriété 1 :

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux variables aléatoires indépendantes de loi stable  $S_\alpha(\beta_1, \sigma_1, \mu_1)$  et  $S_\alpha(\beta_2, \sigma_2, \mu_2)$  alors  $(x_1 + x_2)$  suit une loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  telle que

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad ; \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \quad ; \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Notons que si :

$$\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow \beta = \beta_1 = \beta_2.$$

Cette propriété d'additivité est très intéressante en finance, car deux titres ayant les mêmes valeurs des paramètres peuvent être considérés ensemble et la loi qui résultera de cette association conservera les mêmes valeurs du paramètre  $\alpha$  mais les autres paramètres seront modifiés. Cette propriété est utilisée pour étudier les portefeuilles [15] McCulloch.

Propriété 2 :

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux variables aléatoires qui suivent une loi  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$  et  $c \in \mathbb{R}$  alors :

$$ax_1 + bx_2 + c \stackrel{d}{=} S_\alpha \left( \beta, \sigma (a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \mu (a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + c \right).$$

## 1.3 Algorithme de simulation

La complexité du problème de simulation d'une  $v.a.x \sim S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$  est le manque d'une expression analytique de l'inverse  $F^{-1}$  de la fonction cumulative. Le premier pas a été fait par Kanter (1975), qui a donné la méthode directe pour simuler  $S_{\alpha < 1}(1, 1, 0)$ .

L'algorithme de Chambers, Mallows et Stuck (1976), qui nous a permis de générer une loi  $S_\alpha(0, \beta, 1)$ , et pour obtenir une loi  $S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$ , il suffit de faire un changement de variable (propriété 1).

Première étape :

Elle consiste à générer une loi  $\Phi$  uniforme sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et une loi  $W$  exponentielle de paramètre 1.

Pour cela, il faut d'abord générer deux  $v.a.r.$  uniformes sur  $]0, 1[$  (notées  $U_1$  et  $U_2$ ). Puis en utilisant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}\Phi &= \pi U_1 - \frac{\pi}{2} \\ W &= -\log(1 - U_2)\end{aligned}$$

Deuxième étape :

Elle consiste à calculer des différentes quantités (fonction de  $\Phi$  et de  $W$ ).

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 - \alpha, \\ a &= \tan \frac{\Phi}{2}, \\ b &= \tan \frac{\varepsilon\Phi}{2}, \\ \tau &= -\varepsilon \tan(\alpha\Phi_0), \\ B &= \frac{b}{\frac{\varepsilon\Phi}{2}}, \\ d &= \frac{z^{1-\varepsilon} - 1}{\varepsilon}, \\ z &= \frac{\cos(\varepsilon\Phi) - \tan(\alpha\Phi_0) \sin(\varepsilon\Phi)}{W \cos \Phi}.\end{aligned}$$

Troisième étape :

Elle consiste à générer une loi  $Y$  stable  $S_\alpha(0, \beta, 1)$ . Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante :

**Proposition 2** : Soit  $\Phi$  une loi uniforme sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $W$  une loi exponentielle de paramètre 1, si nous posons :

$$\begin{aligned}\text{pour } \alpha &= 1, Y = \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{1}{2}\pi + \beta\Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left( \frac{\frac{1}{2}\pi W \cos \Phi}{\frac{1}{2}\pi + \beta\Phi} \right) \right), \\ \text{pour } \alpha &\neq 1, Y = \left\{ (\cos(\alpha\Phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi\tau B [b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} \right. \\ &\quad \left. (1 + \varepsilon d) + \tau \left( d + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\}. \\ &= \frac{\sin \alpha (\Phi - \Phi_0)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \Phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ \text{d'où } \Phi_0 &= \frac{\pi\beta}{2} \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha}.\end{aligned}$$



Alors la *v.a.r.*  $Y$  suit une loi  $S_\alpha(0, \beta, 1)$ .

Cet algorithme a été légèrement modifié, voir (Janicki et Weron 1994, et Weron et Weron 1995), qui permet de simuler des variables aléatoires  $X$  de loi stable  $S_\alpha(\beta, 1, 0)$  avec  $\alpha \in ]0; 2]$  et  $\beta \in [-1; 1]$ . Il ont choisi cet algorithme parmi d'autres (voir aussi Samorodnitsky et Taqqu ) pour deux raisons :

- Le temps de calcul est quasiment nul. Il faut moins d'une minute pour simuler un échantillon de taille 60 000.
- Les paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$  pour ce générateur sont très bien estimés par la méthode de McCulloch. Les paramètres  $\mu$  et  $\beta$  sont correctement estimés par la méthode de McCulloch pour des petites valeurs de  $\beta$ , ce qui est souvent le cas pour des chroniques boursières.

1. Posons :

$$C = \frac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\alpha}, \text{ et } D = \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

2. Calculons :

$$Y = \begin{cases} D \frac{\sin(\alpha(V+C))}{(\cos V)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(V-\alpha(V+C))}{W}\right)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \left( \left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right) \tan V - \beta \log \left(\frac{W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V}\right) \right), & \alpha = 1, \end{cases}$$

où,  $V$  est une v.a. uniforme sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $W$  une v.a. exponentielle de paramètre 1. La v.a.  $Y$  ainsi obtenue est d'une distribution  $S_\alpha(0, \beta, 1)$ .

3. Enfin, le changement de variable,

$$X = \begin{cases} \sigma Y + \mu, & \alpha \neq 1, \\ \sigma Y + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \log \sigma + \mu, & \alpha = 1. \end{cases}$$

nous permet d'obtenir une v.a.  $X \sim S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$ .

Remarque :

- Dans le cas d'une loi  $S_\alpha S$  (c'est-à-dire  $\beta = 0$ ), nous avons :

$$Y = \frac{\sin(\alpha\Phi)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

- Plus particulièrement, dans le cas ou  $\alpha = 2$ , nous avons :

$$Y = \frac{\sin 2\Phi}{\sqrt{\cos \Phi}} \left( \frac{\cos \Phi}{W} \right)^{\frac{-1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin \Phi$$

- Enfin,dans le cas ou  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ ,nous avons :

$$Y = \tan \Phi.$$

Formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

Exemple 1 :

Nous avons simulé 5000 réalisations des v.a. qui suivent la lois  $S_\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . La figure (1.7) présente les histogrammes faits à partir de ces simulations.

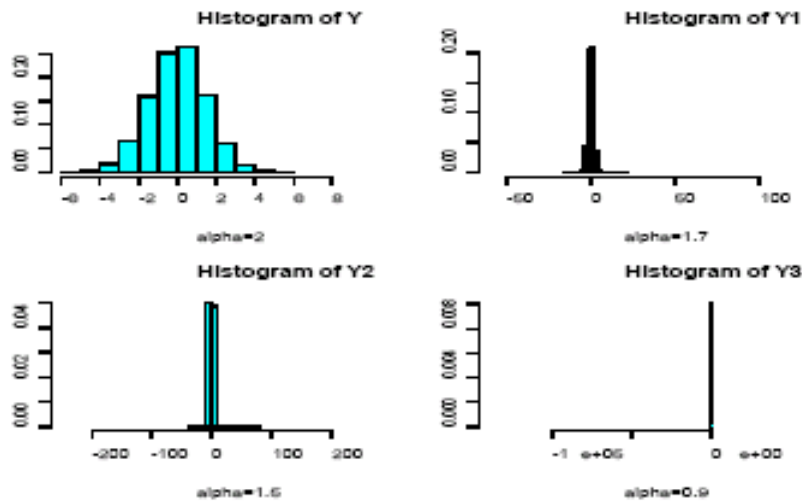


FIG.(1.7).Histogrammes normalisés des lois  $S_\alpha S$  pour différentes valeurs de  $\alpha$

Exemple 2 :

Nous pouvons constater que le générateur de variables aléatoires stables choisi approche correctement la loi théorique. La distribution empirique a été construite à partir de  $N$  variables aléatoire simulées avec l'algorithme de Weron et Weron.

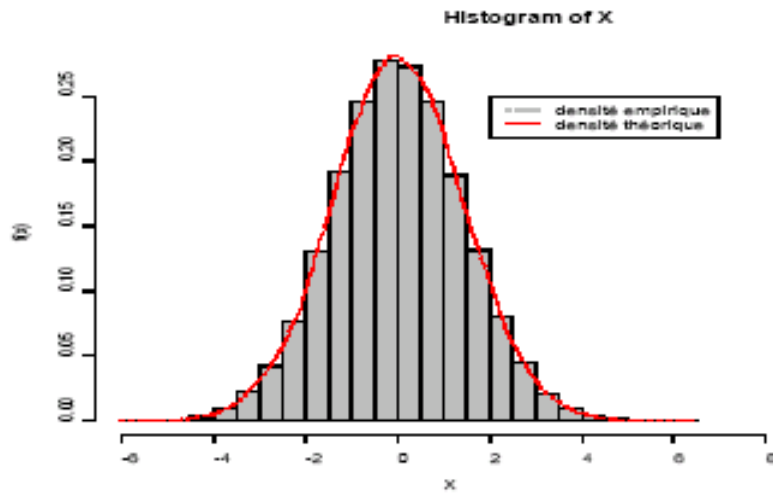


FIG.(1.8).Distribution d'une loi normale de paramètre  $\alpha = 2$ ;  $\beta = 0$ ;  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$  pour  $n = 60000$ .

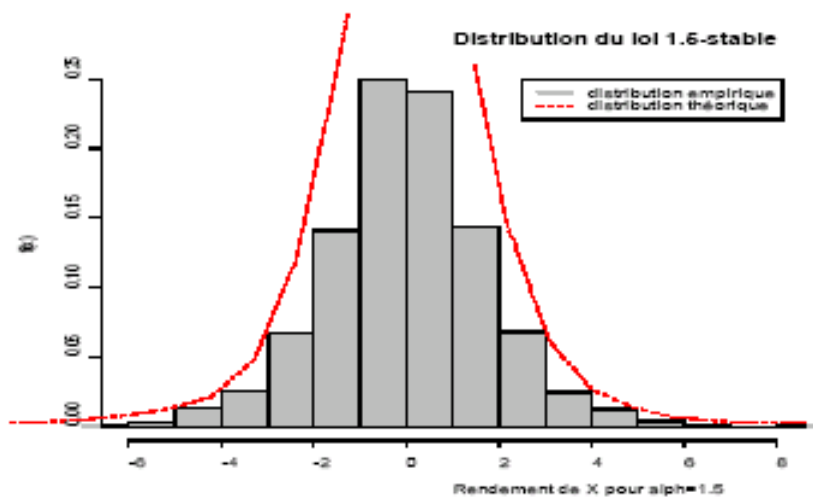


FIG.(1.9).Distribution d'une loi stable de paramètre  $\alpha = 1.5$ ;  $\beta = 0$ ;  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 1$  pour  $n = 10000$ .

# Chapitre 2

## Estimation des paramètres du loi $\alpha$ -stable

D'après l'étude précédente,  $\alpha$ -stable est caractérisé par quatre paramètres d'où on peut les estimer avec des différentes méthodes : maximum de vraisemblance, utilisation des fractiles de cette loi, régression utilisant la fonction caractéristique (cdf), moment,...

Mais le vrai inconvénient dans cette estimation est l'absence d'une forme explicite de la fonction de densité (pdf). Commençons par la méthode des moments.

### 2.1 Méthode des moments

Soit l'échantillon  $x_1, \dots, x_n$  des variables aléatoires indépendantes identiquement distribués (i.i.d.), on définit la fonction caractéristique de l'échantillon par :

$$\widehat{\varphi}_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(itx_j)$$

Puisque  $|\widehat{\varphi}_x(t)| < 1$ , tout les moments de  $\widehat{\varphi}_x(t)$  sont finis et, pour tout  $t$  fixé, elle est la moyenne de l'échantillon des v.a. i.i.d ( $\exp(itx_j)$ ).

D'où  $\widehat{\varphi}_x(t)$  est un estimateur consistant de la fonction caractéristique  $\varphi_x(t)$  (utilisant la loi de grand nombre).

Press (1972) a proposé cette méthode qui basé sur la transformation de la fonction caractéristique. On obtient des estimateurs consistants puisque ils sont basés sur les estimateurs  $\varphi_x(t)$ ,  $\Im m \{\varphi_x(t)\}$  et  $\Re e \{\varphi_x(t)\}$  d'où ils sont déjà consistants.

D'après ( $S^1$ ) on a pour tout  $\alpha$  :

$$|\varphi_x(t)| = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha).$$

$$-\ln |\varphi_x(t)| = \sigma^\alpha |t|^\alpha.$$

Pour  $\alpha \neq 1$ , ils ont choisi deux nombres non nulle de  $t$  telle que  $t_1 \neq t_2$  pour  $k = 1, 2$  on trouve :

$$-\ln |\widehat{\varphi}_x(t_k)| = \sigma^\alpha |t_k|^\alpha$$

On résoud les deux équations suivantes pour  $t_1 = 0, 2$  et  $t_2 = 0, 8$  :

$$\begin{cases} -\ln |\widehat{\varphi}_x(t_1)| = \sigma^\alpha |t_1|^\alpha \\ -\ln |\widehat{\varphi}_x(t_2)| = \sigma^\alpha |t_2|^\alpha \end{cases} \quad (1.3)$$

On trouve :

$$\widehat{\alpha} = \frac{\ln \frac{\ln |\widehat{\varphi}_x(t_1)|}{\ln |\widehat{\varphi}_x(t_2)|}}{\ln \left| \frac{t_1}{t_2} \right|}$$

Et

$$\widehat{\sigma} = \exp \left( \frac{\ln |t_1| (-\ln |\widehat{\varphi}_x(t_2)|) - \ln |t_2| (-\ln |\widehat{\varphi}_x(t_1)|)}{\ln \left| \frac{t_1}{t_2} \right|} \right)$$

Pour estimer  $\beta$  et  $\mu$  il suffit de choisir deux autres nombres réels non nulle de  $t$  telle que pour  $k = 3, 4$  on a  $t_3 = 0, 1$  et  $t_4 = 0, 4$ , et de faire la même chose pour :

$$\Im \{ \varphi_x(t_k) \} = \exp(-|\sigma t_k|^\alpha) \sin \left[ \mu t_k + |\sigma t_k|^\alpha \beta \text{sign}(t_k) \tan \frac{\pi \alpha}{2} \right]$$

On trouve :

$$\begin{cases} \arcsin \left( \frac{\Im \{ \widehat{\varphi}_x(t_3) \}}{\exp(-|\sigma t_3|^\alpha)} \right) = \mu t_3 + \beta \sigma^\alpha \tan \frac{\pi \alpha}{2} |t_3|^\alpha \\ \arcsin \left( \frac{\Im \{ \widehat{\varphi}_x(t_4) \}}{\exp(-|\sigma t_4|^\alpha)} \right) = \mu t_4 + \beta \sigma^\alpha \tan \frac{\pi \alpha}{2} |t_4|^\alpha \end{cases} \quad (1.4)$$

On résoud (1.4) on trouve :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \frac{|t_4|^\alpha \arcsin\left(\frac{\Im m\{\widehat{\varphi}_x(t_3)\}}{\exp(-|\sigma t_3|^\alpha)}\right) - |t_3|^\alpha \arcsin\left(\frac{\Im m\{\widehat{\varphi}_x(t_4)\}}{\exp(-|\sigma t_4|^\alpha)}\right)}{t_3 |t_4|^\alpha - t_4 |t_3|^\alpha} \\
&= \frac{|t_4|^{\widehat{\alpha}-1} \frac{\widehat{U}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\widehat{\alpha}-1} \frac{\widehat{U}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\widehat{\alpha}-1} - |t_3|^{\widehat{\alpha}-1}}. \\
\widehat{\beta} &= \frac{t_3 \arcsin\left(\frac{\Im m\{\widehat{\varphi}_x(t_4)\}}{\exp(-|\sigma t_4|^\alpha)}\right) - t_4 \arcsin\left(\frac{\Im m\{\widehat{\varphi}_x(t_3)\}}{\exp(-|\sigma t_3|^\alpha)}\right)}{\sigma^\alpha \tan \frac{\alpha\pi}{2} (t_3 |t_4|^\alpha - t_4 |t_3|^\alpha)} \\
&= \frac{\frac{\widehat{U}(t_4)}{t_4} - \frac{\widehat{U}(t_3)}{t_3}}{\left[|t_4|^{\widehat{\alpha}-1} - |t_3|^{\widehat{\alpha}-1}\right] \sigma^{\widehat{\alpha}} \tan \frac{\widehat{\alpha}\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Telle que :

$$\widehat{U}(t_k) = \arcsin\left(\frac{\Im m\{\widehat{\varphi}_x(t_k)\}}{\exp(-|\sigma t_k|^\alpha)}\right).$$

**Exemple :** On a simulé 5000 réalisations des v.a. qui suivent la loi  $S_{1.75}(0.05, 0.5, 1)$  par la méthode du moment, le résultat des paramètres estimés est suivant le tableau (2.1) ci-dessous :

parametres	$\alpha = 1.75$	$\beta = 0.5$	$\mu = 0.05$	$\sigma = 1$
estimateurs	1.74	0.44	0.016	0.99

Tab(2.1).estimation de  $\alpha, \beta, \mu$  et  $\sigma$ .

## 2.2 La méthode de régression

### 2.2.1 Pour une loi stable alpha-symétrique

Rappelons que pour une  $v.a.r. x \sim S\alpha S$ , nous avons :

$$\varphi_x(t) = \exp(-\gamma |t|^\alpha).$$

Ce qui entraîne que :

$$|\varphi_x(t)|^2 = \exp(-2\gamma |t|^\alpha).$$

$$\log [-\log |\varphi_x(t)|^2] = \log 2\gamma + \alpha \log |t|. \quad (1.5)$$

Posons pour  $r = 1, \dots, K$ ,  $t_r$  c'est un ensemble de nombres réels approprié et  $K \in [9, 134]$  :

$$\begin{aligned} y_r &= \log [-\log |\varphi_x(t_r)|^2] ; \\ \lambda &= \log 2\gamma ; \\ w_r &= \log |t_r|. \end{aligned}$$

L'égalité (1.5) implique que :

$$y_r = \lambda + \alpha w_r.$$

Si on pose

$$\hat{y}_r = \log [-\log |\widehat{\varphi}_x(t_r)|^2].$$

D'où

$$|\widehat{\varphi}_x(t_r)|^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \cos(t_r x_i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^n \sin(t_r x_i) \right]^2 \right\},$$

On peut alors proposer comme modèle, le modèle linéaire suivant :

$$\hat{Y} = \lambda + \alpha W_r + \varepsilon_r.$$

D'où  $\varepsilon_r$  est le term d'erreur.

**Remarques 7 :**

1. D'après la définition des lois alpha-stables symétriques, on a la partie imaginaire de la fonction caractéristique de ces lois est nulle. On peut alors estimer la fonction caractéristique sans la partie sinus on trouve :

$$|\widehat{\varphi}_x(t_r)|^2 = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \cos(t_r x_i)}{n} \right)^2$$

2. Pour définir les  $t_r$ , et  $K$  par rapport à  $n$ , on utilise la méthode de (Koutrevelis, 1980), c'est-à-dire :

$$\forall r \in [1; K], t_r = \frac{\pi r}{25},$$

et le paramètre  $K$  est choisi suivant le tableau (1.4) ci-dessous :

$n/\alpha$	1,9	1,7	1,5	1,3	1,1	0,9	0,7	0,5	0,3
200	9	10	11	22	24	28	30	86	134
800	9	10	11	16	18	22	24	68	124
1600	10	10	11	14	15	18	20	56	118

Tab(2.2). Valeurs optimales de  $K$  en fonction de  $n$  et de  $\alpha$ .

### 1. Estimation du paramètre $\alpha$ :

Par régression linéaire, on obtient :

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r - \sum_{r=1}^K w_r \sum_{r=1}^K \hat{y}_r}{K \sum_{r=1}^K w_r^2 - \left( \sum_{r=1}^K w_r \right)^2} \quad (1.6)$$

Si on prend :

$$\sum_{r=1}^K w_r = 0,$$

l'équation (1.6) devient :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r}{\sum_{r=1}^K w_r^2}$$

### 2. Estimation du paramètre $\gamma$ :

De même manière, on obtient :

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{r=1}^K w_r^2 \sum_{r=1}^K \hat{y}_r - \sum_{r=1}^K w_r \sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r}{K \sum_{r=1}^K w_r^2 - \left( \sum_{r=1}^K w_r \right)^2}. \quad (1.7)$$

On a déjà :

$$\hat{\lambda} = \ln(2\hat{\gamma}) \Rightarrow \hat{\gamma} = \frac{1}{2} \exp \hat{\lambda}.$$

Si on prend :

$$\sum_{r=1}^K w_r = 0,$$

l'équation (1.7) devient alors :



$$\hat{\lambda} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^k \hat{y}_k.$$

Ce qui entraine que :

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2} \exp \left( \frac{1}{K} \sum_{r=1}^K \hat{y}_r \right).$$

Exemple :

On va simuler des lois  $S_\alpha S$  pour différentes valeurs de l'indice  $\alpha$  tel que  $\gamma \sim 1$ , les résultats sont suivant le tableau (2.3) ci-dessous :

$\alpha/n$	1600	800	200	$\alpha/n$	1600	800	200
1.9	1.88	1.91	1.92	1.9	1,00	1,12	1,04
1.7	1.67	1.65	1.62	1.7	0,93	1,05	1.05
1.5	1.47	1.54	1.51	1.5	0,95	0,93	0,94
1.3	1.34	1.36	1.35	1.3	0,99	1,03	0.93
1.1	1.12	1.05	1.13	1.1	1,06	0,99	1,00
0.9	0.89	0.87	0.90	0.9	0,96	0,88	1,02
0.7	0.72	0.66	0.72	0.7	0,98	1.07	1.09
0.5	0.50	0.48	0.45	0.5	1.02	1,02	1.06

Tab.(2.3). Estimation de  $\alpha$  et  $\gamma$  du loi  $\alpha$ -stable symétrique.

## 2.2.2 Pour une loi alpha-stable

Pour estimer les parametres d'une  $v.a.x. \sim S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$  par la méthode de régression utilisant aussi la fonction caracteristique de cette loi  $\varphi_x(t)$ . On a la partie imaginaire et la partie réel de  $\varphi_x(t)$  sont données pour  $\alpha \neq 1$  par :

$$\Re \{\varphi_x(t)\} = \exp(-|\sigma t|^\alpha) \cos \left[ \mu t + |\sigma t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right]. \quad (1.8)$$

$$\Im \{\varphi_x(t)\} = \exp(-|\sigma t|^\alpha) \sin \left[ \mu t + |\sigma t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right]. \quad (1.9)$$

Alors on peut calculer le module de  $\varphi_x(t)$  tel que :

$$|\varphi_x(t)| = \sqrt{(\Re \{\varphi_x(t)\})^2 + (\Im \{\varphi_x(t)\})^2} = \sqrt{\exp(-2|\sigma t|^\alpha)}.$$

Et

$$|\varphi_x(t)|^2 = \exp(-2|\sigma t|^\alpha).$$

On peut écrire :

$$\log[-\log|\varphi_x(t)|^2] = \log(2\sigma^\alpha) + \alpha \log|t|. \quad (1.10)$$

D'après les deux équations (1.8) et (1.9) on trouve :

$$\arctan\left(\frac{\Im\{\varphi_x(t)\}}{\Re\{\varphi_x(t)\}}\right) = \mu t + \beta\sigma^\alpha \tan\frac{\pi\alpha}{2} \text{sign}(t)|t|^\alpha \quad (1.11)$$

L'équation (1.10) dépend que de  $\alpha$  et  $\sigma$ , donc on peut les estimer par la méthode de régression :

Posons pour  $r = 1, \dots, K$ , et  $t_r$  un ensemble de nombres réels approprié et  $K \in [9, 134]$  en fonction de  $\alpha$  et  $n$  (le nombre d'observation étudié) :

$$\begin{aligned} y_r &= \log[-\log|\varphi_x(t_r)|^2]; \\ m &= \log 2\sigma^\alpha; \\ w_r &= \log|t_r|. \end{aligned}$$

D'après (1.10) on trouve :

$$y_r = m + \alpha w_r + \varepsilon_r.$$

Koutrouvelis (1980) a proposé le choix de  $t_r$  avec  $t_r = \frac{\pi r}{25}$ ,  $\forall r \in [1; K]$ .

L'estimation de  $\alpha$  et  $\sigma$  :

Par régression linéaire (la méthode de moindre carrée), on obtient :

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\text{cov}(w_r, y_r)}{\text{var}(w_r)} \\ \hat{m} = \hat{y}_r - \hat{\alpha} w_r \end{cases}.$$

Alors :

$$\hat{\alpha} = \frac{K \sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r - \sum_{r=1}^K w_r \sum_{r=1}^K \hat{y}_r}{K \sum_{r=1}^K w_r^2 - \left(\sum_{r=1}^K w_r\right)^2} \quad (1.12)$$

Si on prend :

$$\sum_{r=1}^K w_r = 0,$$

l'équation (1.12) devient :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r}{\sum_{r=1}^K w_r^2}.$$

De même manière, on obtient :

$$\hat{m} = \frac{\sum_{r=1}^K w_r^2 \sum_{r=1}^K \hat{y}_r - \sum_{r=1}^K w_r \sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r}{K \sum_{r=1}^K w_r^2 - \left(\sum_{r=1}^K w_r\right)^2}. \quad (1.13)$$

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{2} \exp \hat{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Si on prend :

$$\sum_{r=1}^K w_r = 0.$$

L'équation (1.13) devien alors :

$$\hat{m} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^k \hat{y}_k.$$

Ce qui entraine que :

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{K} \sum_{r=1}^K \hat{y}_r\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Exemple :

On va simuler 5000 réalisation des v.a. qui suivent la loi  $S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$  pour différentes valeurs de l'index  $\alpha$  tel que  $\sigma \sim 1$  par la méthode de régression, les résultats sont suivant le tableau (2.4) ci-dessous :

$\alpha$	2	1.9	1.85	1.75	1.5	1.25	0.9	0.5
$\hat{\alpha}$	2.01	1.89	1.83	1.75	1.50	1.27	0.94	0.5
$\hat{\sigma}$	1.02	0.98	1.00	1;00	1;03	0.99	1.01	1.03

Tab.(2.4). Estimation de  $\alpha$  et  $\sigma$  du loi  $\alpha$ -stable.

Lorsque  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\sigma}$  sont obtenues et  $\alpha$  et  $\sigma$  sont fixées on ses valeurs, l'estimation de  $\beta$  et  $\mu$  peut obtenir de l'équation (1.11) avec la méthode de regression comme suivant :

$$\arctan \left( \frac{\Im \{\varphi_x(t)\}}{\Re \{\varphi_x(t)\}} \right) = \mu t + \beta \sigma^\alpha \tan \frac{\pi \alpha}{2} \text{sign}(t) |t|^\alpha .$$

Posons pour  $r = 1, \dots, K$ , et  $t_r$  un ensemble de nombres réels approprié et  $K \in [9, 134]$  en fonction de  $\alpha$  et  $n$  (d'après Koutrouvelis (1980)) posons :

$$\begin{aligned} y_r &= \arctan \left( \frac{\Im \{\varphi_x(t_r)\}}{\Re \{\varphi_x(t_r)\}} \right); \\ m_r &= \beta \sigma^\alpha \tan \frac{\pi \alpha}{2} |t_r|^\alpha; \\ w_r &= t_r. \end{aligned}$$

D'après l'équation (1.11) on trouve :

$$y_r = m_r + \mu w_r + \varepsilon_r.$$

Utilisant la méthode de moindre carrée on trouve :

$$\hat{\mu} = \frac{K \sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r - \sum_{r=1}^K w_r \sum_{r=1}^K \hat{y}_r}{K \sum_{r=1}^K w_r^2 - \left( \sum_{r=1}^K w_r \right)^2}. \quad (1.14)$$

Si on prend :

$$\sum_{r=1}^K w_r = 0,$$

l'équation (1.14) devient :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r}{\sum_{r=1}^K w_r^2}.$$

Et :

$$\hat{m}_r = \frac{\sum_{r=1}^K w_r^2 \sum_{r=1}^K \hat{y}_r - \sum_{r=1}^K w_r \sum_{r=1}^K w_r \hat{y}_r}{K \sum_{r=1}^K w_r^2 - \left( \sum_{r=1}^K w_r \right)^2}.$$

Telle que :

$$\hat{m}_r = \beta \hat{\sigma}^{\hat{\alpha}} \tan \frac{\pi \hat{\alpha}}{2} |t_r|^{\hat{\alpha}}. \quad (1.15)$$

Posons :

$$L = \beta \hat{\sigma}^{\hat{\alpha}} \tan \frac{\pi \hat{\alpha}}{2}.$$

Donc l'équation (1.15) devient comme suivant :

$$\hat{m}_r = \hat{L} |t_r|^\alpha.$$

Une autre forme de regression lineair pour trouver  $\hat{L}$ , de la même manière on trouve :

$$\hat{L} = \frac{K \sum_{r=1}^K w 1_r \hat{m}_r - \sum_{r=1}^K w 1_r \sum_{r=1}^K \hat{m}_r}{K \sum_{r=1}^K w 1_r^2 - \left( \sum_{r=1}^K w 1_r \right)^2}.$$

Où  $w 1_r = |t_r|^\alpha$ . Alors on trouve que :

$$\hat{\beta} = \hat{L} / \hat{\sigma}^{\hat{\alpha}} \tan \frac{\hat{\alpha} \pi}{2}.$$

**Exemple :** On a simuler 5000 réalisation des *v.a.* qui suivent une loi  $S_{1.75} (0.5, 0.5, 1)$  le résultat des parametres estimés avec la méthode est suivant le tableau (2.5) :

Parametres	$\alpha = 1.75$	$\beta = 0.5$	$\mu = 0.5$	$\sigma = 1$
Estimateurs	1.736	0.59	0.026	1.004

Tab.(2.5). Estimation de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  et  $\sigma$ .

## 2.3 La méthode de McCulloch

### 1. Estimation de $\alpha$ et $\beta$ par la méthode de McCulloch :

D'après l'article de McCulloch (1986), on peut dire que cette méthode est basée sur l'utilisation des quantiles d'un échantillon de variables aléatoires stables pour  $\alpha > 0.6$ .

Posons alors[1] :

$$\nu_\alpha = \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}} \quad \text{et} \quad \nu_\beta = \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} - 2\hat{x}_{0.50}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}$$

Où  $\hat{x}_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  quantile de l'échantillon. Les statistiques  $\nu_\alpha$  et  $\nu_\beta$  sont des fonctions de  $\alpha$  et de  $\beta$ , et elles ne dépendent pas de  $\sigma$  et de  $\mu$ .

Il ont posé aussi deux fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  telle que :

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \nu_\alpha \quad \text{et} \quad \varphi_2(\alpha, \beta) = \nu_\beta$$

Ces deux fonctions ont été tabulées par DuMouchel (Tab.(1.8) et Tab.(1.9)).

$$\nu_\alpha = \phi_1(\alpha, \beta).$$

$\alpha$	$\beta$				
	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	2.439	2.439	2.439	2.439	2.439
1.90	2.512	2.512	2.513	2.513	2.515
1.80	2.608	2.609	2.610	2.613	2.617
1.70	2.737	2.738	2.739	2.742	2.746
1.60	2.912	2.909	2.904	2.900	2.902
1.50	3.148	3.136	3.112	3.092	3.089
1.40	3.464	3.436	3.378	3.331	3.316
1.30	3.882	3.834	3.720	3.626	3.600
1.20	4.447	4.365	4.171	4.005	3.963
1.10	5.217	5.084	4.778	4.512	4.451
1.00	6.314	6.098	5.624	5.220	5.126
0.90	7.910	7.590	6.861	6.260	6.124
0.80	10.448	9.934	8.779	7.900	7.687
0.70	14.838	13.954	12.042	10.722	10.370
0.60	23.483	21.768	18.332	16.216	15.584
0.50	44.281	40.137	33.002	29.140	27.782

Note that  $\phi_1(\alpha, -\beta) = \phi_1(\alpha, \beta)$ .

Tab.(1.8).

$$\nu_\beta = \phi_2(\alpha, \beta).$$

$\alpha$	$\beta$				
	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
2.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.90	0.0	0.018	0.036	0.053	0.071
1.80	0.0	0.039	0.077	0.113	0.148
1.70	0.0	0.063	0.123	0.178	0.228
1.60	0.0	0.089	0.174	0.248	0.309
1.50	0.0	0.118	0.228	0.320	0.390
1.40	0.0	0.148	0.285	0.394	0.469
1.30	0.0	0.177	0.342	0.470	0.546
1.20	0.0	0.206	0.399	0.547	0.621
1.10	0.0	0.236	0.456	0.624	0.693
1.00	0.0	0.268	0.513	0.699	0.762
0.90	0.0	0.303	0.573	0.770	0.825
0.80	0.0	0.341	0.634	0.834	0.881
0.70	0.0	0.387	0.699	0.890	0.927
0.60	0.0	0.441	0.768	0.936	0.962
0.50	0.0	0.510	0.838	0.970	0.985

Note that  $\phi_2(\alpha, -\beta) = -\phi_2(\alpha, \beta)$ .

Tab.(1.9).

Ils ont inversé ces tables (1.8 et 1.9) pour connaître  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $\nu_\alpha$  et  $\nu_\beta$  i.e.

$$\alpha = \psi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta) \quad \text{et} \quad \beta = \psi_2(\nu_\alpha, \nu_\beta) \quad .$$

Comme suivant :

Telle que :

$$\psi_2(\nu_\alpha, -\nu_\beta) = -\psi_2(\nu_\alpha, \nu_\beta) \quad .$$

Considérons, par exemple, une série de 19275 rendements logarithmiques journaliers de l'indice boursier Dow Jones. Les quantiles 5%,25% ,50%,75% ,95% valent respectivement :

-0.0160188078 ; -0.0045998682 ; 0.0003924647 ; 0.0053301529 ; 0.0159665567.

Alors :

$$\nu_\alpha = \frac{\widehat{x}_{0.95} - \widehat{x}_{0.05}}{\widehat{x}_{0.75} - \widehat{x}_{0.25}} = 3.22 \quad \text{et} \quad \nu_\beta = \frac{\widehat{x}_{0.95} + \widehat{x}_{0.05} - 2\widehat{x}_{0.50}}{\widehat{x}_{0.95} - \widehat{x}_{0.05}} = -0.026$$

D'après les tables (1.8) et (1.9) on trouve :

$$\alpha = 1.48 \quad \text{et} \quad \beta = -0.20.$$

- Un deuxième exemple, on va simuler 5000 réalisation des  $v.a.$  qui suivent la loi alpha-stable pour différentes valeur de  $\alpha$  et  $\beta$ . On trouve les résultats suivantes :

$\alpha$	2	1.75	1.5	1.25	1
$\beta$	0	-0.5	0.5	0.8	1
$\nu_\alpha$	2.46	2.67	3.16	3.80	5
$\nu_\beta$	-0.01	-0.12	0.23	0.51	0
$\widehat{\alpha}$	2	1.73	1.47	1.21	1.1
$\widehat{\beta}$	0	-0.48	0.41	0.68	0

Tab.(2.6). Estimation de  $\alpha$  et  $\beta$  (McCulloch).

## 2. Estimation de $\sigma$ et $\mu$ par la méthode de McCulloch :

De même façon, ils ont posé :

$$\nu_\sigma = \frac{\widehat{x}_{0.75} - \widehat{x}_{0.25}}{\sigma} .$$

Comme une fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ . Elle est tabulé par DuMouchel dans la table (1.12).

$$\nu_c = \phi_3(\alpha, \beta).$$

$\alpha$	$\beta$				
	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	1.908	1.908	1.908	1.908	1.908
1.90	1.914	1.915	1.916	1.918	1.921
1.80	1.921	1.922	1.927	1.936	1.947
1.70	1.927	1.930	1.943	1.961	1.987
1.60	1.933	1.940	1.962	1.997	2.043
1.50	1.939	1.952	1.988	2.045	2.116
1.40	1.946	1.967	2.022	2.106	2.211
1.30	1.955	1.984	2.067	2.188	2.333
1.20	1.965	2.007	2.125	2.294	2.491
1.10	1.980	2.040	2.205	2.435	2.696
1.00	2.000	2.085	2.311	2.624	2.973
0.90	2.040	2.149	2.461	2.886	3.356
0.80	2.098	2.244	2.676	3.265	3.912
0.70	2.189	2.392	3.004	3.844	4.775
0.60	2.337	2.635	3.542	4.808	6.247
0.50	2.588	3.073	4.534	6.636	9.144

Note that  $\phi_3(\alpha, -\beta) = \phi_3(\alpha, \beta)$ .

Tab.(1.12).

Pour connaître la valeur estimée du paramètre d'échelle  $\sigma$ , nous calculons sur l'échantillon étudié  $\hat{x}_{0.75}$  et  $\hat{x}_{0.25}$ , en déduisant que :

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\nu_\sigma}.$$

Ils ont posé aussi :

$$G = \begin{cases} \mu + \beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ \mu, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Zolotarev a montré que la distribution de la variable aléatoire  $G$  ne rencontre pas de discontinuité quand  $\alpha$  franchit la valeur 1 lorsque  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\beta$  restent constants.

La table (1.13) montre que :

$$\nu_G = \frac{G - \hat{x}_{0.50}}{\sigma},$$

est une fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ .



$$\nu_{\zeta} = \phi_3(\alpha, \beta).$$

$\alpha$	$\beta$				
	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.90	0.0	-0.017	-0.032	-0.049	-0.064
1.80	0.0	-0.030	-0.061	-0.092	-0.123
1.70	0.0	-0.043	-0.088	-0.132	-0.179
1.60	0.0	-0.056	-0.111	-0.170	-0.232
1.50	0.0	-0.066	-0.134	-0.206	-0.283
1.40	0.0	-0.075	-0.154	-0.241	-0.335
1.30	0.0	-0.084	-0.173	-0.276	-0.390
1.20	0.0	-0.090	-0.192	-0.310	-0.447
1.10	0.0	-0.095	-0.208	-0.346	-0.508
1.00	0.0	-0.098	-0.223	-0.383	-0.576
0.90	0.0	-0.099	-0.237	-0.424	-0.652
0.80	0.0	-0.096	-0.250	-0.469	-0.742
0.70	0.0	-0.089	-0.262	-0.520	-0.853
0.60	0.0	-0.078	-0.272	-0.581	-0.997
0.50	0.0	-0.061	-0.279	-0.659	-1.198

Note that  $\phi_3(\alpha, -\beta) = -\phi_3(\alpha, \beta)$ .

Tab.(1.13).

Ils ont trouvé la relation suivante :

$$\widehat{G} = \widehat{x}_{0.50} + \widehat{\sigma} \cdot \nu_G$$

Donc l'estimateur de  $\mu$  et de la forme suivant :

$$\widehat{\mu} = \begin{cases} \widehat{G} - \widehat{\beta} \widehat{\sigma} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1. \\ \widehat{\mu} = \widehat{G}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Dans notre exemple,  $\widehat{\alpha} = 1.48$  et  $\widehat{\beta} = -0.20$ . D'après la table (1.12),  $\nu_{\sigma} = 1.952$ . Ainsi la valeur estimée de  $\sigma$  vaut 0.005, et  $\nu_G = 0.499$ ,  $\widehat{G} = 0.0028$ . D'où  $\widehat{\mu} = 0.0028$ . Alors notre échantillon suit une loi stable de paramètre  $\alpha = 1.48$ ,  $\beta = -0.20$ ,  $\sigma = 0.005$  et  $\mu = 0.0028$ .

- Un deuxième exemple on va simuler 5000 réalisation des *v.a.* du loi alpha-stable pour différente valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\sigma = 0.5$  et  $\mu = 0.5$ .

$\widehat{\alpha}$	2	1.73	1.47	1.21	1.1
$\widehat{\beta}$	0	-0.48	0.41	0.68	0
$\nu_{\sigma}$	1.90	1.94	1.98	2.29	1.98
$\widehat{\sigma}$	0.98	0.95	0.92	0.64	1.29
$\widehat{\mu}$	0	0.01	-0.08	-0.16	2.12e+16

Tab (2.7) Estimation de  $\sigma$  et  $\mu$  (McCulloch).

## 2.4 La méthode de Maximum de vraisemblance

D'après Nolan (2001), il a utilisé la paramétrisation  $S^0$  de Zolotarev  $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu_0, 0)$ . Supposons le vecteur paramètre  $\vec{\theta} = (\alpha, \beta, \sigma, \mu_0)$  et la densité  $f(x/\vec{\theta})$ . L'espace paramètre  $\theta = (0, 2] * [-1, 1] * (0, \infty) * (-\infty, \infty)$ .

La fonction logarithmique de likelihood pour un échantillon des v.a. indépendantes identiquement distribuées du loi alpha-stable est donnée par :

$$l(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i/\vec{\theta}).$$

L'évaluation de cette fonction est difficile à cause de l'absence d'une forme explicite de la fonction de densité du loi stable. Zolotarev a détaillé la plus part de ce qui a été connu sur les densités du loi stable.

Cette méthode est basée sur l'approximation numérique de la fonction likelihood de Lévy-stable. Elle est développée par DuMouchel(1971) et récemment optimisée par Nolan(1997) et Nolan(2001), avec un programme appelé "STABLE" pour calculer les différentes densités, les fonctions de distributions et les quantiles, donc il est possible d'utiliser le modèle Lévy-stable dans une variété de problèmes pratiques, voir [9] et [11]. C'est la plus lente des trois méthodes mais possède des propriétés asymptotiquement normales.

Les études de simulation suggèrent que les techniques décrites la méthode de moments rapporte les évaluations les plus mauvaises, (Stoyanov et Racheva-Iotova, 2004; Weron, 2004). La méthode de McCulloch vient ensuite avec des résultats acceptables et temps d'exécution plus bas que les approches de régression. D'autre part, l'approche de Koutrouvelis rapporte de bons estimateurs avec un temps d'exécution plus rapide, mais légèrement moins précis.

Finalement, les évaluations de ML sont presque toujours les plus précises, particulièrement en ce qui concerne le paramètre skewness. Cependant, comme nous avons déjà dit, les techniques d'évaluation sont certainement les plus lentes de toutes les méthodes discutées.

## 2.5 Application en finance

De nombreux modèles financiers supposent actuellement que les variations du logarithme des prix forment un mouvement brownien. Les analyses sont

basées sur le rendement  $R_t(T)$  d'un actif entre les dates  $t$  et  $(t + T)$  défini par :

$$R_t(T) = \ln \frac{P_{t+T} + D_{[t,t+T]}}{P_t} 100 \quad .$$

Où  $P_t$  est le prix à l'instant  $t$ , et  $D_{[t,t+T]}$  est la rémunération générée par l'actif entre les dates  $t$  et  $(t + T)$ .

On va maintenant citer les propriétés de ce modèle Brownien :

1. Le rendement est une fonction continue dans le temps.
2. Les accroissements du processus sont stationnaires.
3. Les accroissements sont indépendants.
4. Le moment d'ordre 2 des lois marginales du processus existe.

Mais, depuis les travaux de Mandelbrot dans les années 60, beaucoup d'indications empiriques contredisent cette modélisation. Parmi ces indications on peut citer :

1. Une possibilité de dissymétrie dans la distribution empirique des rendements.
2. Des queues épaisses dans l'histogramme, révélant un comportement asymptotique plus lent que celui de la distribution normale.
3. Une variance empirique infinie ou plutôt instable. (elle continue à varier considérablement quelle que soit la taille de l'échantillon).
4. Un coefficient d'aplatissement (kurtosis) empirique très supérieur à 3 qui représente celui de la loi de Gauss.

C'est pour cela, et forts du théorème centrale limite généralisé, que Mandelbrot (1963) puis Fama (1965) préfèrent la loi Lévy-stable à la loi gaussienne dans la modélisation des données financières. L'indice de stabilité ne reste pas constant lorsque que l'échelle de temps considérée augmente, lorsque nous passons, par exemple, des rendements journaliers, aux rendements hebdomadaires, aux rendements mensuels, etc.

On prend comme exemple des différentes indices boursiers Journaliers, hebdomadaires et mensuelles, le tableau suivant contient les valeurs estimées des paramètres de la loi stable :

	Paramètres	Nazdaq	Dow Jens	CAC40	Nikkei
Journaliers	$\widehat{\alpha}$	1.386	1.48	1.664	2
	$\widehat{\beta}$	-0.165	0	-0.36	0
	$\widehat{\sigma}$	0.005	0.005	0.007	0.007
	$\widehat{\mu}$	0.0011	0.0003	0.0003	0.0003
Hebdomadaires	$\widehat{\alpha}$	1.48	1.56	1.729	1.91
	$\widehat{\beta}$	-0.20	-0.25	-0.48	-1.59
	$\widehat{\sigma}$	0.015	0.012	0.017	0.017
	$\widehat{\mu}$	0.003	0.002	0.001	0.002
Mensuelles	$\widehat{\alpha}$	1.56	1.66	2	2
	$\widehat{\beta}$	-0.25	-0.36	-2.16	-2.16
	$\widehat{\sigma}$	0.036	0.028	0.04	0.04
	$\widehat{\mu}$	0.017	0.008	0.012	0.007

Tab.(2.8). Paramètres estimés pour quelques indices.

Le kurtosis  $K$  et le coefficient d'asymétrie (skewness)  $S$  d'une v.a.x. sont définis comme suivant :

$$\mathbf{K} := \frac{E[(X - \mu)^4]}{E^2[(X - \mu)^2]} .$$

$$\mathbf{S} := \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^3]}{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]^{3/2}} .$$

Pour la distribution Gaussienne,  $K$  égal à 3 et  $S = 0$ , lorsque  $K > 3$ , la distribution est dite leptokurtique et présente(souvent) des queues épaisses.

On rappelle que le kurtosis empirique d'une série de  $n$  observations est défini par,

$$\mathbf{K} := \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4 \right) / \mathbf{S}^4$$

Où

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \quad , \quad \mathbf{S}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Désignent la moyenne et la variance empiriques respectivement.

Les valeurs du kurtosis des différentes indices pour différentes échelles du temps dans le tableau suivant :

	Journaliers	Hebdomadaires	Mensuelles
Nazdaq	1257.60	263.90	50.83
Dow Jens	1562.04	342.04	69.80
CAC40	1336.67	307.45	70.02
Nikkei	1318.99	330.41	67.40

Tab.(2.8). Statistiques de Kurtosis pour différentes indices.

On constate que le kurtosis est très supérieur à 3 ce qui entraîne la non validité de l'ajustement normal pour les rendements de ces indices. D'où, le recours aux modèles stables dont les paramètres (estimés par la méthode de McCulloch) sont présentés dans le tableau.(2.7). On constate que la valeur de  $\alpha$  varie entre 1.386 et 2. En général, les titres financiers ont un indice de stabilité compris entre 1 et 2 ( $1 < \alpha < 2$ ).

### 2.5.1 Application du modèle stable à l'indice du Nazdaq(Parie)

On dispose de 5196 observations du prix de l'indice boursier Nazdaq(Parie), et on veut modéliser la distribution empirique des rendements de cet indice par une distribution théorique convenable. Les données, prises dans le site internet "www. finance.yahoo", représentent les prix (de fermeture) quotidiens durant la période allant du 11/10/1984 au 22/09/2005.

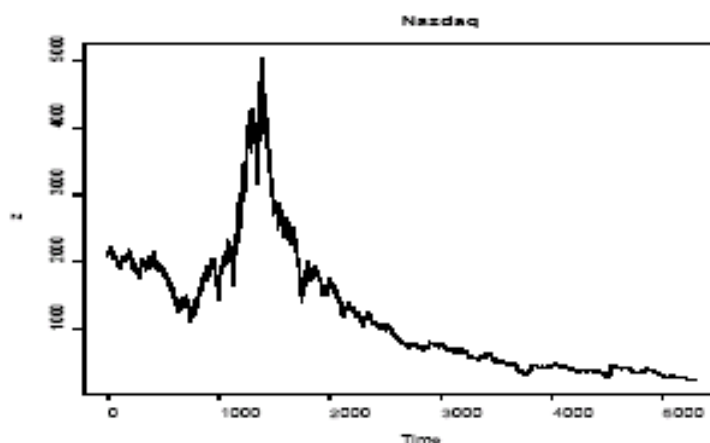


FIG.2.1.Les prix des fermetures journaliers du Nazdaq.

La figure.(2.1). représente les prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier Nasdaq (Parie), de la période allant du 11/10/1984 au 22/09/2005.

(i.e. 19 ans), soit 5196 observations, du fait que les marchés boursiers sont fermés pendant les fins de la semaine (i.e. Dimanche et Lundi) et les jours fériés, les jours non ouvrables ne sont pas donc pris en compte. Ainsi une année commerciale contient presque 250 jours ouvrables en moyenne.

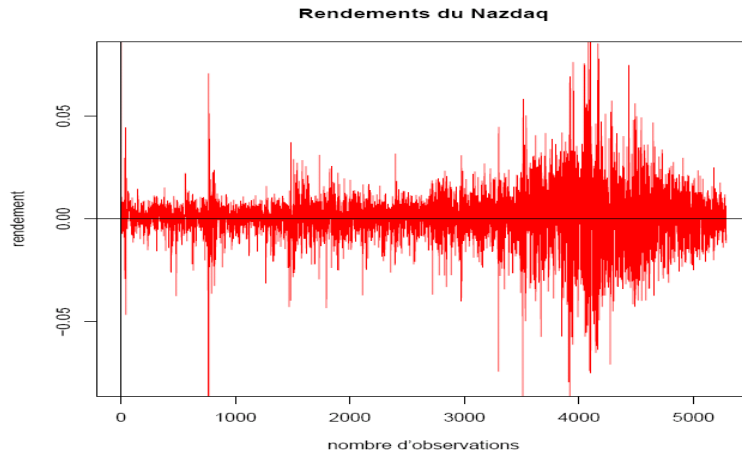


FIG.2.2. Les rendements journaliers  $\left[ \log \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \right]$  pour la période 11/10/1984 au 22/09/2005.

La figure.(2.2). représente l'évolution de la série des rendements de l'indice de Nazdaq, de la période allant du 11/10/1984 au 22/09/2005, l'axe des abscisses présente le nombre d'observations (i.e. jours ouvrables) et l'axe des ordonnées présente le rendement de l'indice journalier. La première constatation que l'on peut faire est que la série est stationnaire, mais on observe quand même des périodes de grande variation. La seconde est l'existence de quelques valeurs extrêmes.

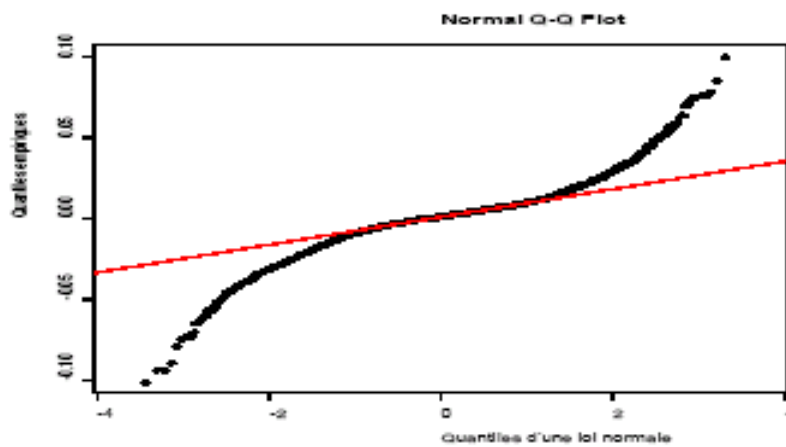


FIG. 2.3 –Quantiles normaux contre quantiles empiriques du Nazdaq.

La figure (2.3) montre que l’hypothèse selon laquelle les rendements seraient normalement distribués est à rejeter : il y a une déviation par rapport à la direction droite aux extrémités.

Les caractéristiques empiriques des rendements sont présentées dans le tableau suivant :

moyenne	0.0005946
écart type	0.01984736
minimum	-0.1204000
maximum	1.0000000
1 <sup>er</sup> quartile	-0.0049600
médiane	0.0011650
3 <sup>ème</sup> quartile	0.0066500

Tab.(2.9). Caractéristiques empiriques des rendements du Nazdaq(Parie).

Le kurtosis de la série des rendements vaut  $1241.023 > 3$ , ce qui confirme la non validité de l’ajustement normal. Pour ajuster une loi stable aux rendements, on calcule par la méthode de McCulloch les estimateurs des différents paramètres. On obtient approximativement, pour  $(\alpha = 1.5; \beta = 0; \mu = 0; \sigma = 1)$ .

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$
1.386	-0.16	0.005	0.001

Tab.(2.10). Paramètres estimés de rendement du Nazdaq(Paris).

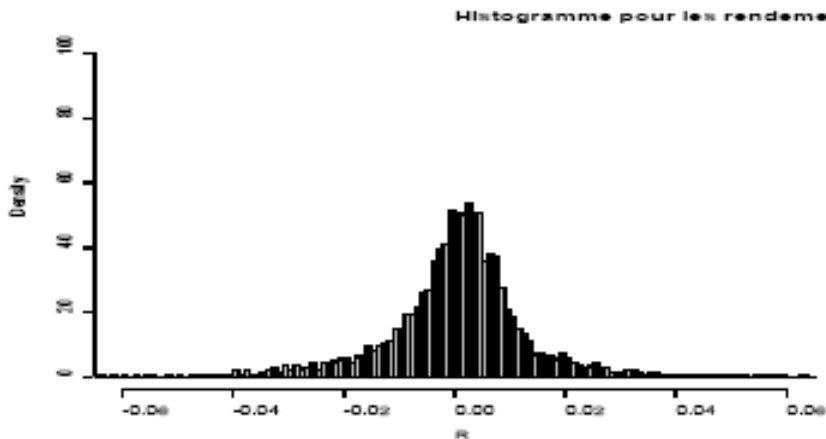


FIG.2.9.Histogramme des rendements du Nazdaq.

# Chapitre 3

## La théorie des valeurs extremes

L'histoire de la théorie des valeurs extrêmes est très récente, elle débute dans les années (28) par les travaux de (Fisher et Tippett, 1928 ; Gnedenko, 1943) dont on caractérise les domaines d'attractions de la plus grande observation.

Ces travaux ont été suivis par les résultats de (de Haan et Balkema, 1974). D'où ils ont découvert un résultat, très intéressant, concernant l'approximation de la queue par la distribution de Pareto (GPD, généralisée Pareto distribution).

On cherche alors à décrire le comportement des valeurs extrêmes d'un échantillon. C'est-à-dire que l'on veut approcher la loi que suit le maximum ou le minimum des observations lorsque celles-ci suivent une loi inconnue.

Une forte variation du prix d'un certain actif financier est un événement rare qui se traduit par l'apparition des valeurs extrêmes dans la série des rendements de cet actif. D'où le rôle important que peut jouer la théorie des valeurs extrêmes dans la prévision du comportement des marchés financiers.

L'intérêt de l'application de cette théorie aux séries financières vient du fait qu'elle permet d'analyser les distributions de leurs maxima et minima. La connaissance de ces distributions est un excellent outil d'aide à la décision.

Pour commencer notre étude et les explications de la théorie des valeurs extrêmes, il fallait avoir un grand bagage, alors notre point de départ sera les statistiques d'ordre. Celles-ci sont un outil essentiel de modélisation des risques.

### 3.1 Statistique d'ordre

Définition :



On appelle statistique d'ordre, l'application mesurable  $S$  de  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})^n$  à valeur dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})^n$  classant les observations de la suite  $(X_n)_n$  par ordre croissant ;

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow{S} (X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}), \text{ avec } X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}.$$

De sorte que :

$$X_{1,n} := \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ et } X_{n,n} := \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Le vecteur  $(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$  est appelé l'échantillon ordonné, et  $X_{i,n}$  étant la  $i^{\text{ième}}$  statistique d'ordre (ou statistique d'ordre  $i$ ).

**Remarque :** Même si les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes, les statistiques d'ordre ne sont pas indépendantes (par définition).

### 3.1.1 Densité et loi des statistiques d'ordre

David (1970) et Balakrishnan et Clifford Cohen (1991) montrent que l'expression de la distribution de  $X_{i,n}$  est :

$$\begin{aligned} F_{i,n}(x) &= \Pr \{X_{i,n} \leq x\} \\ &= \Pr[\text{au moins } i \text{ de } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont inférieures à } x] \\ &= \sum_{r=i}^n \Pr[\text{exactement } r \text{ de } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont inférieures à } x] \\ &= \sum_{r=i}^n \binom{n}{r} [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r}. \end{aligned}$$

Alors, on déduit que la fonction de densité est de la forme suivant :

$$f_{i,n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x).$$

Pour les statistique d'ordre extrême, on obtient les expressions suivantes :

$$F_{1,n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n .$$

Et

$$f_{1,n}(x) = n [1 - F(x)]^{n-1} f(x).$$

Pour la statistique du minimum et

$$F_{n,n}(x) = [F(x)]^n .$$

Et

$$f_{n,n}(x) = n [F(x)]^{n-1} f(x) .$$

Pour la statistique du maximum.

**Remarque :**

Les expressions de  $F_{1,n}$  et  $F_{n,n}$  peuvent s'obtenir comme suivant :

$$\begin{aligned} \{X_{1,n} \geq x\} &\Leftrightarrow \{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq x\} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n \{X_i \geq x\} . \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \{X_{n,n} \leq x\} &\Leftrightarrow \{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x\} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x\} . \end{aligned}$$

En utilisant la propriété d'indépendance des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , on déduit que

$$\begin{aligned} F_{1,n}(x) &= \Pr \{X_{1,n} \leq x\} \\ &= 1 - \Pr \{X_{1,n} \geq x\} \\ &= 1 - \Pr \{\bigcap_{i=1}^n \{X_i \geq x\}\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \Pr \{X_i \geq x\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \Pr \{X_i \leq x\}] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n . \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} F_{n,n}(x) &= \Pr \{X_{n,n} \leq x\} \\ &= \Pr \{\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x\}\} \\ &= \prod_{i=1}^n \Pr \{X_i \leq x\} \\ &= [F(x)]^n . \end{aligned}$$

**Densité conjointe de deux statistiques d'ordre :**

La densité conjointe des deux statistiques d'ordre  $X_{i,n}$  et  $X_{j,n}$  avec  $i < j$  est donnée par :

$$f_{X_i, X_j}(y, z) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(y)]^{i-1} \cdot [F(z) - F(y)]^{j-i-1} [1 - F(z)]^{n-j} f(y)f(z)$$

La moyenne tronquée : On appelle moyenne tronquée, la statistique :

$$T_{n,r} = \frac{1}{n-2r} \sum_{i=r+1}^{n-r} X_{(i)}.$$

La fonction de distribution empirique et la fonction quantile :

Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite des v.a.r. i.i.d. de distribution  $F$  inconnue,

$$F(x) = \Pr(X_1 \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque entier  $n \geq 1$ , on a  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  la statistique d'ordre associée  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . On note par :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i < x\}}, \quad x \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{i}{n} \text{ pour } x \in ]X_{i,n}, X_{i+1,n}]. \end{aligned}$$

Où  $0 \leq i \leq n$ ,  $X_{0,n} = -\infty$ ,  $X_{n+1,n} = +\infty$ , la fonction de distribution empirique basée sur les  $n$  premiers v.a. .

On définit la fonction des quantiles  $\mathbb{Q}$  par :

$$\mathbb{Q}(s) := F^{\leftarrow}(s) = \inf \{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq s\}, \quad 0 < s < 1.$$

Où  $F^{\leftarrow}$  est l'inverse généralisée de la fonction de distribution  $F$ . La fonction des quantiles empirique  $\mathbb{Q}_n$  est définie pour  $n \geq 1$  par :

$$\mathbb{Q}_n(s) = \inf \{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq s\} = \begin{cases} X_{0,n} & \text{pour } t < 0, \\ X_{i,n} & \text{pour } \frac{i-1}{n} < t \leq \frac{i}{n}, 1 \leq i \leq n-1, \\ X_{n,n} & \text{pour } t > 1. \end{cases}$$

Nous savons que, pour une taille d'échantillons fixée, le maximum des observations  $X_n^+ = \max(X_1 \dots X_n)$  va suivre  $X_n^+ \sim F^n$ , lorsque  $X_i \sim F$ . Mais pour des échantillons devenant de plus en plus grand, ce résultat n'aura plus beaucoup

de sens car la loi  $F^n$  dégénère .On veut donc chercher une loi non-dégénérée pour le maximum de l'échantillon.

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une loi limite non-dégénérée est le théorème suivant :

**Théorème : (Théorème de Fisher et Tippett)** S'il existe deux suites de constantes  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  et  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  avec  $a_n > 0, \forall n$ , telles que, pour  $n \rightarrow \infty$  :

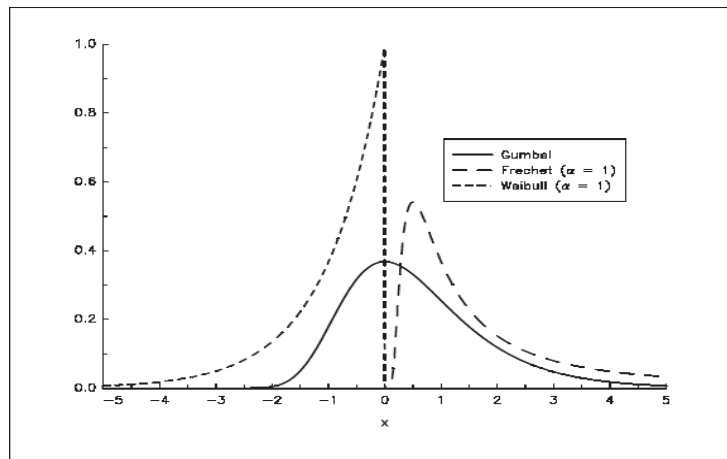
$$P_r \{ (X_n^+ - b_n)/a_n \} \rightarrow G(x).$$

Où  $G$  est une fonction non-dégénérée, alors  $G$  est l'une des fonctions suivantes :

$$\begin{cases} G_0(x) = \exp(-\exp(-x)) & -\infty < x < +\infty, \\ G_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha}) & x \geq 0, \alpha > 0, \\ G_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}) & x < 0, \alpha < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.15)$$

On appelle  $G_0$  loi Gumbel,  $G_{1,\alpha}$  loi Fréchet et  $G_{2,\alpha}$  loi Weibull. Inverse-

ment, chacune de ces trois distributions est la distribution pour le maximum standardisé  $(X_n^+ - b_n)/a_n$ , d'un échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  et dans ce cas, on a  $G = F_X$ , c'est-à-dire que les observations suivent par exemple une loi  $G$ .



**FIG.3.5. Les domaines d'attractions.**

Remarque :

C'est sur, que ce théorème n'est valable que si les séquences  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$  existent et admettent une limite. Prenons par exemple le cas de la distribution exponentielle (Coles(2001), section 3.1.5).

On a :

$$F(x) = 1 - \exp(-x)$$

Alors :

$$\begin{aligned} P_r \left( \frac{X_n^+ - b_n}{a_n} \leq x \right) &= P_r(X_n^+ \leq a_n x + b_n) \\ &= F^n(a_n x + b_n) \\ &= [1 - \exp(-a_n x - b_n)]^n. \end{aligned}$$

Si nous posons  $a_n = 1$  et  $b_n = \ln n$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_r \left( \frac{X_n^+ - b_n}{a_n} \leq x \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n} \exp(-x))^n \\ &= \exp(-\exp(-x)). \end{aligned}$$

Car :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

On a montré alors, la convergence de  $F^n(x - \ln n)$  vers la distribution Gumbel.

### 3.1.2 Domaines d'attractions

Une question intéressante est de déterminer quelles sont les lois  $F$  dont les maxima suivent asymptotiquement une loi  $G$  donnée et comment les suites  $a_n$  et  $b_n$  peuvent-elles être trouvées. Le domaine d'attraction d'une loi est une sorte de généralisation du théorème central limite, il est défini de la façon suivante :

**Définition 1 :** On appelle domaine d'attraction de  $G$  (ou domaine d'attraction maximal) l'ensemble des lois  $F$  pour lesquelles le maximum normalisé suit la loi  $G$ .

L'inverse de la fonction de hasard  $h(x)$ , d'une fonction de répartition  $F$  est définie par :

$$\tilde{h}(x) = \frac{1 - F(x)}{f(x)}.$$

On peut choisir alors les constantes  $a_n$  et  $b_n$  telles que :

$$\mathbf{a}_n = \tilde{h}(\mathbf{b}_n) \quad , \quad \mathbf{b}_n = \mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{1} - \frac{1}{n}\right)$$

**Définition 2 :** Une distribution  $F$  est dite max-stable pour des suites  $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $a_n > 0$  et  $\{\mathbf{b}_n\}_{n=1}^{\infty}$ , si  $F^n(\mathbf{b}_n + \mathbf{a}_n x) = \mathbf{F}(x)$ ,  $\forall \mathbf{n}$ .

**Définition 3 :** Une distribution  $F$  est du même type qu'une distribution des valeurs extrêmes donnée par (1.15), si et seulement si elle est max-stable. Pour les trois distributions des valeurs extrêmes, les suites  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  et  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  qui normalisent le maximum sont les suivantes :

Gumbel :  $a_n = 1$  ou  $a_n = \text{constante}$ ,  $b_n = \log n$ .

Weibull :  $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $b_n = 0$ .

Fréchet :  $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $b_n = 0$ .

Domaine d'attraction (G)	Gumbel	Fréchet	Weibull
F	Gaussienne Exponentielle Lognormale Gamma	Cauchy Paréto $\alpha$ -stable ( $\alpha < 2$ )	Uniforme Beta

Tab.(3.1). Domaines d'attraction.

Nous voyons que les trois distributions de valeurs extrêmes sont très différentes en terme de max-domaine d'attraction :

1. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Gumbel, nous trouvons des distributions qui n'ont pas de queues épaisses (mais qui peuvent être leptokurtiques).
2. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Fréchet, nous trouvons des distributions qui ont des queues épaisses.

3. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Weibull, nous trouvons des distributions à support fini, ce qui implique que le support du maximum soit borné à droite.

Cela a des implications d'un point de vue financier, puisque la problématique va être de choisir entre les distributions  $G_0$  et  $G_1$  (et dans ce cas, quelle valeur pour  $\alpha$ ?) pour modéliser le maximum.

Sachant la distribution  $F$ , nous voudrions connaître à quel max-domaine d'attraction ( $MDA$ ) elle appartient et quelles sont les constantes de normalisation. La réponse est relativement complexe et n'est pas unique. Nous indiquons ici les critères les plus utilisés[19].

**Définition 4** : Une fonction  $f$  est dite à variation régulière d'indice  $\alpha$  et on note  $f \in RV_\alpha$  si pour tout  $x > 0$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha .$$

**Théorème** :  $F \in MDA(G_1)$  si et seulement si  $(1 - F) \in RV_{-\alpha}$ . Dans ce cas,  $a_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$  et  $b_n = 0$ .

Ce théorème formulé par Gnedenko (1943) permet de caractériser très simplement les distributions  $F \in MDA(G_1)$ . En effet, elles doivent vérifier :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha} .$$

Prenons par exemple le cas de la distribution Pareto. Nous avons :

$$F(x) = 1 - x^{-\frac{1}{\gamma}} .$$

Nous en déduisons que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{-\frac{1}{\gamma}}}{t^{-\frac{1}{\gamma}}} = x^{-\frac{1}{\gamma}} .$$

Donc  $(1 - F) \in RV_{-\frac{1}{\gamma}}$  et  $F \in MDA(G_{\frac{1}{\gamma}})$ . Remarquons que :

$$a_n = F^{-1}(1 - n^{-1}) = n^\gamma .$$

Nous vérifions :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) &= \lim_{t \rightarrow \infty} F^n(n^\gamma x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x^{-\frac{1}{\gamma}}}{n} \right) \\ &= \exp\left(-x^{-\frac{1}{\gamma}}\right). \end{aligned}$$

Loi Généralisée (GEV) :

Il existe une autre paramétrisation des distributions des valeurs extrêmes permettant de grouper les lois Fréchet et Weibull. On la nomme souvent paramétrisation  $\gamma$ .

**Proposition 1** : En considérant la transformation  $\gamma = \frac{1}{\alpha}$  on peut réécrire les fonctions de (1.15) de la manière suivante :

**Loi Gumbel :**

$$G_0(x) = \exp(-e^{-x}), \forall x$$

**Lois Fréchet et Weibull :**

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left(- (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right), & 1 + \gamma x > 0, \gamma \neq 0 \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

Propriétés :

1.  $G_\gamma = G_0$  quand  $\gamma \rightarrow 0$  (par valeurs positive ou négative).
2.  $G_\gamma = \begin{cases} G_{1,\alpha} & \text{pour } \gamma > 0 \\ G_{2,\alpha} & \text{pour } \gamma < 0 \end{cases}$
3. Les densités correspondantes sont données par :

$$g_0(x) = \exp(-e^{-x})e^{-x}.$$

$$g_\gamma(x) = \begin{cases} G_\gamma(x) (1 + \gamma x)^{-(1+\frac{1}{\gamma})}, & (1 + \gamma x) > 0, \quad \gamma \neq 0; \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

4.  $g_\gamma = g_0$  quand  $\gamma \rightarrow 0$ .



La distribution GEV :

Pour faciliter le travail avec ces trois distributions limites, Jenkinson-Von Mises a donné une représentation qui a été obtenue en introduisant un paramètre de forme (paramètre de scale)  $\zeta$ . On appelle cette distribution la distribution généralisée des valeurs extrêmes (Generalized Extreme Value *GEV*), qui a la forme suivante :

$$G_{\mu,\sigma,\zeta}(x) = \exp \left[ - \left\{ 1 + \zeta \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\zeta}} \right].$$

Remarquons que la distribution *GEV* est *G* en introduisant le paramètre de position  $\mu$  et le paramètre d'échelle  $\sigma$ .

Remarque :

$$G_{\mu,\sigma,\zeta} = \begin{cases} G_0, & \text{pour } \zeta = 0 \\ G_{1,\alpha}, & \text{pour } \zeta > 0 \\ G_{2,\alpha}, & \text{pour } \zeta < 0 \end{cases}.$$

Rappelons maintenant la définition de la distribution de Pareto Généralisée (GPD) introduite par Pickands (1975) [8].

**Définition 3 :** La loi GPD  $G_{\gamma,\sigma}$  avec les paramètres  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$  est définie de la manière suivante :

$$G_{\gamma,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma \frac{x}{\sigma})^{-\frac{1}{\gamma}}, & \text{si } \gamma \neq 0; \\ e^{-\frac{x}{\sigma}}, & \text{si } \gamma = 0. \end{cases}, \quad x \in D(\gamma, \sigma)$$

Où

$$D(\gamma, \sigma) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } \gamma \geq 0; \\ \left[0, -\frac{\sigma}{\gamma}\right] & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$$

**Définition 4 :** Les Loix Pareto généralisées sont les lois

$$W(x) = 1 + \log G(x).$$

Où  $G(x)$  est l'une des lois des valeurs extrêmes.

**Résultat 1 :** Les lois Pareto généralisées avec le paramètre  $\alpha$  sont :

**Exponentielle  $GP_0$  :**

$$W_0(x) = 1 - e^{-x}, \quad \text{si } x \geq 0.$$

**Pareto**  $GP_1$  :

$$W_1(x) = 1 - x^{-\alpha}, \quad \text{si } x \geq 1, \quad \alpha > 0.$$

**Béta**  $GP_2$  :

$$W_2(x) = 1 - (-x)^{-\alpha}, \quad \text{si } -1 \leq x \leq 0, \quad \alpha < 0.$$

Exemples de distributions Heavy-Tailed :

Il existe plusieurs distributions Heavy-Tailed, le tableau(3.2) donne une liste non-exhaustive de ces distributions. Toutes ces distributions ont un support  $(0, +\infty)$  à l'exception de celui de la loggamma qui a un support  $(1, +\infty)$ .

Nom	Queue $\bar{F}$ ou densité	Paramètres
Lognormale	$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Burr	$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x\gamma}\right)^\alpha$	$\alpha, \beta, \gamma > 0$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\gamma}$	$c > 0, 0 < \gamma < 1$
Loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$

Tab.(3.2).Exemples de distributions Heavy-Tailed.

## 3.2 Lois stables et valeurs extrêmes

### 3.2.1 Queues lourdes

La distribution de probabilité d'une v.a. possède des queues lourdes si quelques uns de ses moments n'existent pas. La distribution de Paréto est le plus simple exemple de distributions à queues lourdes.

Propriété : Soit  $x$  une v.a.r.  $S_\alpha(\mu, \beta, \sigma)$ , on a les deux résultats suivantes lorsque l'exposant caractéristique est strictement inférieur à 2, la variance est infinie et les queues sont asymptotiquement équivalentes à une loi de Paréto :

$$\left\| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha P(X > x) = \sigma^\alpha C_\alpha (1 + \beta); \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha P(X < -x) = \sigma^\alpha C_\alpha (1 - \beta). \end{array} \right\| \quad (1.16)$$

Où :

$$C_\alpha = \left( 2 \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1} = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

La démonstration est détaillée dans (Janicki et Weron, 1994 ; Samorodnitsky et Taqqu, 1994, p. 16-18 ). La relation (1.16), entraîne que :

$$\mathbf{P}(|X| > x) \sim \mathbf{C}_\alpha \sigma^\alpha \mathbf{x}^{-\alpha}.$$

**Remarque :** L'égalité précédente (1.16) nous fait penser à la caractérisation des lois de Pareto. En effet, une *v.a.r.*  $X$  suit une loi de type Pareto si :

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x).$$

Où  $h(x)$  est une fonction à variation lente, c'est-à-dire :

$$\forall t > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1.$$

Mandelbrot, (1962) a montré que pour les lois  $\alpha$ -stable, nous avons :

$$P(X \geq x) = x^{-\alpha} [f_1(\alpha) + f_2(\alpha) x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha})].$$

Par passage à la limite quand  $x$  tend vers  $(+\infty)$ , on s'aperçoit que les lois stables sont asymptotiquement parétiennes.

On voit donc que la loi stable prend en compte les queues de distributions qui sont souvent porteuses des informations importantes et par conséquent il ne faut pas les négliger comme le fait la loi de Gauss.

### 3.2.2 Estimation des paramètres

#### Estimation de l'indice du queue $\alpha$

Ce paramètre a été largement étudié et plusieurs bons estimateurs ont été proposés, (voir par exemple Pickands(1975), Hill(1975), Dekkers, Einmahl et de Haan (1989), Csörgö, Deheuvels et Mason (1985), Groeneboom, Lopuhaä, et de Wolf. (2003),...), dont le plus célèbre est celui de Hill (Hill, 1975). Cet estimateur est basé sur la propriété de la variation régulière dans le cas où la fonction de distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction de  $G_\gamma$  avec  $\gamma > 0$ , et sur la condition que la queue de la distribution  $F$  satisfait :

$$\mathbf{1} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \sim c \mathbf{x}^{-\frac{1}{\gamma}},$$

quand  $x \rightarrow \infty$  pour  $\gamma > 0$  et  $c > 0$ . Donc l'estimateur de Hill est applicable seulement dans le cas où l'indice des valeurs extrêmes est positif, c'est-à-dire,

dans le cas où la fonction de distribution  $F$  a queue lourde, i.e., une fonction de distribution  $F$  a queue lourde si la fonction du queue :

$$\bar{F} = \mathbf{1} - \mathbf{F},$$

est à variation régulière en  $+\infty$  d'indice  $\left(-\frac{1}{\gamma}\right)$ ,

$$\bar{F} = \mathbf{x}^{-\frac{1}{\gamma}} \mathbf{L}(\mathbf{x}),$$

où  $\gamma$  est l'indice des valeurs extrêmes et  $L$  est une fonction à variation lente. La construction de cet estimateur est basée sur l'utilisation du Maximum de Vraisemblance.

La méthode de Hill insiste sur le comportement de la queue de distribution, ce qui donne un estimateur basé sur les  $k$  plus grandes observations, où  $k$  est un entier vérifiant certaines conditions, i.e.,

$$k \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{k}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.17)$$

Alors, si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  est un échantillon des v.a.  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , et si  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  désigne la statistique d'ordre associée, alors l'estimateur de Hill  $\hat{\alpha}_n$  pour l'inverse  $\frac{1}{\alpha}$  de l'indice de stabilité  $\alpha$  est,

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \mathbf{X}_{n-i+1,n} - \log \mathbf{X}_{n-k,n} \quad .$$

C'est un estimateur consistant et asymptotiquement normal pour  $\frac{1}{\alpha}$ .

Exemple : L'estimateur de Hill pour une loi de Pareto et loi stable pour différentes valeurs de  $\alpha$  et le nombre d'observation  $n$ .

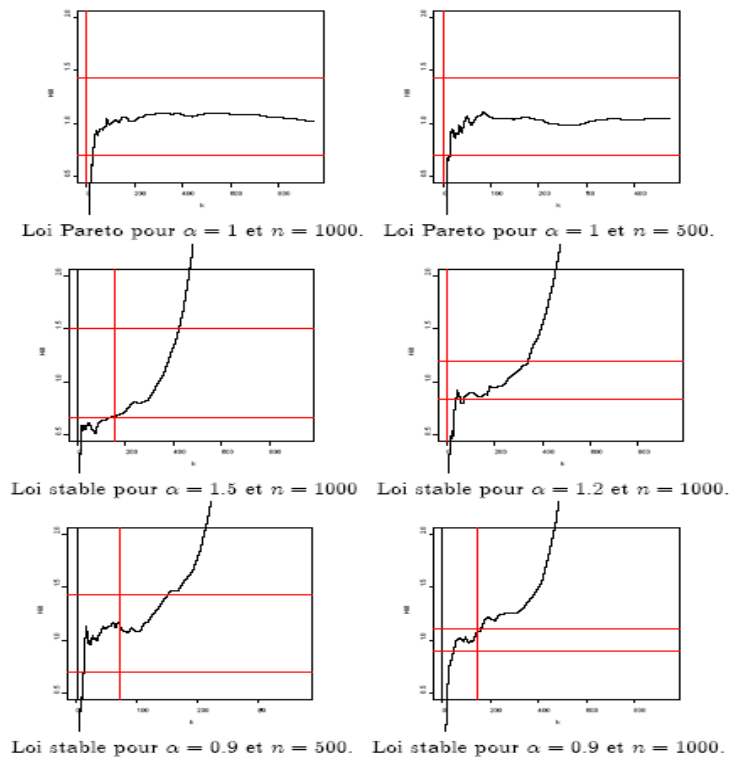


FIG.(2.5).L'estimateur de Hill pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $n$ .

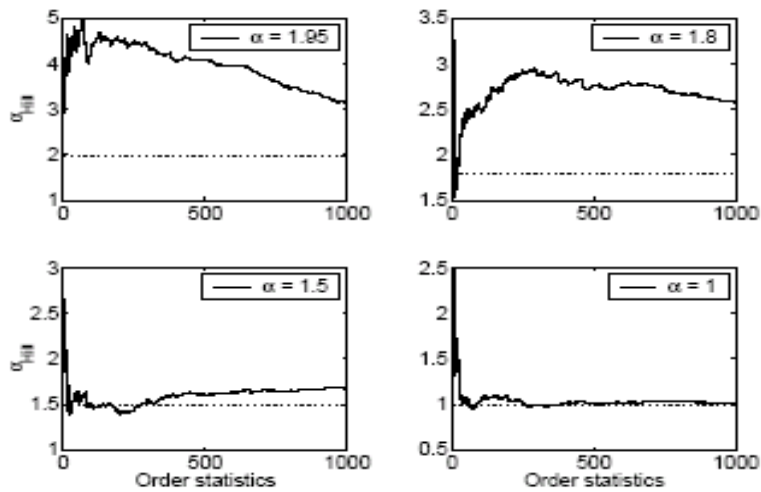


FIG.(2.6).L'estimateur de Hill pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $n$  d'une loi stable.

Remarquant que la précision des résultats est dépend de la valeur de l'indice de stabilité et la taille de l'échantillon. Lorsque  $\alpha$  est petit les résultats sont mieux que lorsque  $\alpha$  est grand.

## Estimation de paramètre de position $\mu$

Liang Peng (2000) à proposé un estimateur alternatif  $\widehat{\mu}_n$  du moyenne ( $\mu = EX$ ) des distributions à queues lourdes pour  $\alpha > 1$ , qui est asymptotiquement normal sous la condition de deuxième ordre, après avoir constaté que l'estimateur naturel  $\overline{X}$  n'est pas asymptotiquement normal pour  $\alpha < 2$ . Pour un peut plus de détail concernant la consistence et la normalité de cet estimateur voir l'article de Peng(2000).

Peng à divisé cet estimateur comme suivant :

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^1 F^-(u) du \\ &= \int_0^{\frac{k}{n}} F^-(u) du + \int_{\frac{k}{n}}^{1-\frac{k}{n}} F^-(u) du + \int_{1-\frac{k}{n}}^1 F^-(u) du \\ &: = \mu_n^{(1)} + \mu_n^{(2)} + \mu_n^{(3)}, \end{aligned}$$

telle que :

$$F^-(s) := \inf \{x : F(x) \geq s\}, \quad 0 < s < 1.$$

Appelé la fonction inverse de  $F$  et  $k = k(n)$ , qui vérifié les conditions (1.17).

Où

$$\widehat{\mu}_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} X_{i,n},$$

est la moyenne empirique tronquée, et,

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_n^{(1)}(k) &= \frac{k}{n} X_{k,n} \frac{\widehat{\alpha}_n^{(1)}}{\widehat{\alpha}_n^{(1)} - 1}, \\ \widehat{\mu}_n^{(3)}(k) &= \frac{k}{n} X_{n-k+1,n} \frac{\widehat{\alpha}_n^{(3)}}{\widehat{\alpha}_n^{(3)} - 1}. \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_n^{(1)} &= \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(-X_{i,n}) - \log^+(-X_{k,n}) \right\}^{-1}, \\ \widehat{\alpha}_n^{(3)} &= \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(-X_{n-i+1,n}) - \log^+(-X_{n-k+1,n}) \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

sont deux versions de l'estimateur de Hill, avec :

$$\log^+ t = \log(t \vee 1).$$

# Chapitre 4

## Probabilité de ruine

L'histoire de la modélisation pour le processus de risque d'assurance commence avec le grand travail de Filip Lundberg dans sa thèse 1903 qui a mis la base de la théorie de risque actuariel . Par une transformation de temps appropriée il était capable de limiter son analyses au processus de Poisson homogène.

Cette découverte semblable à l'identification par Bachelier en 1900 que le mouvement brownien est la composante clef pour des modèles financiers. Il a été alors laissé à Harald Cramér et son école de Stockholm pour incorporer les idées de Lundberg dans l'apparition de la théorie de processus stochastiques.

Alors le modèle de base mentionnées dans la suite comme le modèle de Cramér-Lundberg qui a la structure suivante :

**Definition :** (Le modèle de Cramér-Lundberg, le modèle de renouvellement)

1. Le processus des tailles de revendication :

Le processus des tailles de revendication  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont des v.a. i.i.d. positives ayant de meme fonction de distribution  $F$ , une moyenne finie  $\mu = EX_1$ , et une variance  $\sigma^2 = var(X_1) \leq \infty$ .

2. Le temps de revendication :

Les revendications arrivent aux instants aléatoires de temps  $0 < T_1 < T_2 < \dots$

3. Le processus d'arrivée de revendication :

Le nombre des revendications dans l'intervalle  $[0, t]$  est dénoté par :

$$N(t) = \sup \{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$



4. Le temps d'enterrer :

$$Y_1 = T_1, \quad Y_k = T_k - T_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

Sont des v.a. i.i.d. exponentiellement distribué avec une moyenne finie  $EY_1 = \frac{1}{\lambda}$ .

5. Les séquences  $(X_k)$  et  $(Y_k)$  sont indépendantes l'un de l'autre.

Le modèle de renouvellement est donné par 1, 3, 5 et :

6. Le temps d'enterrer  $Y_k$  données dans (1.1) sont des v.a. i.i.d. avec une moyenne  $EY_1 = \frac{1}{\lambda}$ .

Remarque :

1\ Une conséquence de la définition est que  $N(t)$  est un processus homogène de Poisson de paramètre  $(\lambda t)$  et d'intensité  $\lambda > 0$ . De là :

$$\Pr(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Alternativement, un processus homogène de Poisson est défini par les trois propriétés suivantes :

- Il commence au zéro :  $N(0) = 0$ .
- Il a des incréments indépendants et stationnaires.
- Pour chaque  $t > 0$ ,  $N(t)$  est un v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre  $(\lambda t)$  :

$$\Pr(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2\ Le processus du somme de revendication totale noté  $S(t)$  du portefeuille est défini par :

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0. \end{cases}$$

Une quantité importante dans ce contexte est la distribution de somme de revendication totale ou la distribution de revendication globale  $G_t(x)$  :

$$G_t(x) = \Pr(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

où

$$F^{n*}(x) = \Pr\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right).$$

Le processus de risque résultant  $R(t)_{t \geq 0}$  est maintenant défini comme suivant :

$$R(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0.$$

Telle que  $u \geq 0$  est le réserve initiale, et  $c > 0$  est la prime payé par les assurés.

**Définition :** (Ruine)

La probabilité de ruine dans le cas du temps fini (finite horizon) est :

$$\psi(u, T) = \Pr(R(t) < 0 \text{ pour quelque } t \leq T), \quad 0 < T < \infty, \quad u \geq 0.$$

La probabilité de ruine dans le cas du temps infini est :

$$\psi(u) = \psi(u, \infty), \quad u \geq 0.$$

Les temps de ruine est :

$$\tau(T) = \inf \{t : 0 \leq t \leq T, R(t) < 0, 0 < T \leq \infty\}.$$

**Lemme :**

Pour le modèle de renouvellement :

$$E(R(t)) = u + ct - \mu E(N(t)). \quad (1.3)$$

Pour le modèle de Cramér-Lundberg :

$$E(R(t)) = u + ct - \mu \lambda t. \quad (1.4)$$

**Preuve :**

On a :

$$E(R(t)) = u + ct - E(S(t)),$$

et :

$$\begin{aligned} E(S(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(S(t)/N(t) = k) \Pr(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i / N(t) = k\right) \Pr(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) \Pr(N(t) = k) \\ &= \mu \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(N(t) = k) \\ &= \mu E N(t), \end{aligned}$$

la relation (1.3) est vérifiée. Car  $EN(t) = \lambda t$  dans le cas d'un processus homogène de Poisson la relation (1.4) est vérifiée.

Les tableaux suivantes présentent les différentes fonctions de distribution de taille de revendication dans les deux cas petite et grande revendication :

Les lois	$\bar{F}$ ou la densité $f$	Paramètres
Exponentielle	$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$
Gamma	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\tau}$	$c > 0, \tau \geq 1$
Loi normale tronqué	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	
N'importe quelle distribution avec un support limité		

Tab.(I). Fonctions de distribution de taille de petite revendication.

Les lois	$\bar{F}$ ou la densité $f$	Paramètres
Lognormale	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - \mu)^2 / (2\sigma^2)}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Pareto	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x}\right)^\alpha$	$\alpha, k > 0$
Burr	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x^\tau}\right)^\alpha$	$\alpha, k, \tau > 0$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\tau}$	$c > 0, 0 < \tau < 1$
Loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$
$\alpha$ -stable tronqué	$\bar{F}(x) = \Pr( X  > x)$ , où $X$ suit $\alpha$ -stable	$1 < \alpha < 2$ .

Tab.(II). Fonctions de distribution de taille de grande revendication.

## 4.1 Mouvement Brownien et le modèle de risque pour petites revendications

Cette section sera consacrée à l'approximation du processus de risque selon le mouvement brownien. Supposons que la distribution des tailles de revendication appartient au domaine d'attraction de la loi normale.

### 4.1.1 La convergence faible d'un processus de risque au Mouvement Brownien

Considérons la définition d'un processus de risque comme suivant :

$$R_n(t) = u_n + c_n t - \sum_{k=1}^{N(nt)} X_k^{(n)}. \quad (3.1)$$

Où  $u_n \geq 0$  est le réserve initiale,  $c_n > 0$  est la prime payé par les assurés et la séquence  $\{X_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$  est un processus des tailles de revendication tel que  $EX_k^{(n)} = \mu_n$  et  $var X_k^{(n)} = \sigma_n^2$ . Pour rapprocher le processus de risque selon le mouvement brownien, supposons que :

$$\begin{aligned} n^{-\frac{1}{2}}u_n &\rightarrow u, \\ n^{-\frac{1}{2}}c_n &\rightarrow c, \\ n^{\frac{1}{2}}\mu_n &\rightarrow \mu, \\ \sigma_n^2 &\rightarrow \sigma^2, \\ E\left(Y_k^{(n)}\right)^{2+\varepsilon} &\leq M. \end{aligned}$$

Pour certains  $\varepsilon > 0$ , où  $M$  est indépendante de  $n$ .

Alors :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}R_n(t) \xrightarrow{c.F} u + (c - \mu\lambda)t + \sigma\lambda^{\frac{1}{2}}B(t). \quad (3.2)$$

On va dénoter le processus de limite de l'approximation par :

$$R_B(t) = u + (c - \mu\lambda)t + \sigma\lambda^{\frac{1}{2}}B(t). \quad (3.3)$$

La relation (3.2) permet nous d'approximer le processus de risque par  $R_B(t)$  pour lequel il est possible de tirez des formules exactes pour des probabilités de ruine dans des temps fini et infini.

#### 4.1.2 Probabilité de ruine pour le processus de limite

La convergence faible de processus stochastique n'implique pas la convergence de probabilité de ruine engénérale. Ainsi, pour prendre l'avantage de l'approximation au MB il est nécessaire de montrer que la probabilité de ruine dans les temps finis et infinis de processus de risque converge aux probabilité de ruine de MB.

On a :

$$\tau(T) = T(R_n) = \inf \{t : 0 \leq t \leq T, R(t) < 0, 0 < T \leq \infty\} \quad (3.4)$$

Alors  $T(R_n) \xrightarrow{p.s} T(R_B)$  si  $R_n \xrightarrow{p.s} R_B$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $\Pr\{T(R_n) < \infty\} \rightarrow \Pr\{T(R_B) < \infty\}$ . Ainsi, on a besoin de trouver des formules pour les probabilités de ruine du processus  $R_B$ .

Soit  $R_B$  être le mouvement brownien avec le lineaire drift défini dans (3.3).

Alors :

$$\Pr \{T(R_B) < \infty\} = \exp \left\{ -2 \frac{u(c - \lambda\mu)}{\sigma^2 \lambda} \right\}. \quad (3.5)$$

Et

$$\Pr \{T(R_B) \leq t\} = 1 - \Phi \left\{ \frac{u + (c - \lambda\mu)t}{\sigma(\lambda t)^{\frac{1}{2}}} \right\} + \exp \left\{ -2 \frac{u(c - \lambda\mu)}{\sigma^2 \lambda} \right\} \left[ 1 - \Phi \left\{ \frac{u - (c - \lambda\mu)t}{\sigma(\lambda t)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right]. \quad (4.1)$$

Il est aussi possible de déterminer la distribution de densité de temps du ruine. Soit  $T(R_B)$  être le temps de ruine du processus (3.3). Alors la densité  $f_T$  du v.a.  $T(R_B)$  à la forme suivant :

$$f_T(t) = \frac{\beta^{-1} e^{\alpha\beta}}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} t^{-\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \{ \beta^2 t^{-1} + (\alpha\beta)^2 t \} \right], \quad t > 0.$$

Où

$$\alpha = \frac{(c - \lambda\mu)}{\sigma \lambda^{\frac{1}{2}}} \text{ et } \beta = \frac{u}{\sigma \lambda^{\frac{1}{2}}}.$$

Le modèle Brownien est une approximation du processus de risque dans le cas où la distribution de tailles de revendication appartient au domaine d'attraction de la loi normale et les suppositions imposées au processus de risque indiquent que le nombre de revendications est grand et les tailles de revendications sont petites.

La table suivant donne la probabilité de ruine du modèle brownien pour différentes valeurs de  $u$ ,  $c$  et  $\lambda$ , et pour paramètres fixées  $\mu = 20$ ,  $\sigma = 10$  et  $t = 10$ .

$u$	$c$	$\lambda$	$\psi(t)$	$\psi$
25	50	2	8.0842e-02	8.2085e-02
25	60	2	6.7379e-03	6.7379e-03
30	60	2	2.4787-03	2.4787-03
35	60	2	9.1185e-04	9.1188e-04
40	60	2	3.344e-04	3.346e-04
40	70	3	6.5282e-02	6.9483e-02

Tab.(4.1). Probabilité de ruine pour le modèle brownien.

Exemple[8] :

Ils ont considéré un modèle de risque où la distribution de tailles de revendication appartient au domaine d'attraction de la loi normale et le processus comptant le nombre de revendications est un processus de compte de renouvellement construit des variables i.i.d. aléatoires avec un premier moment fini. Soit  $R(t)$  être le processus de risque suivant :

$$R(t) = u + ct - \sum_{K=1}^{N(t)} X_k.$$

Où  $u \geq 0$  est le réserve initial,  $c > 0$  est le revenu de prime dans l'intervalle d'unité de temps et  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  sont des v.a.i.i.d appartenant au domaine d'attraction de la loi normale. De plus,  $EX_k = \mu$ ,  $Var X_k = \sigma^2$  et l'intensité d'arriver les revendications est  $\lambda$ . Ainsi, nous obtenons :

$$\Pr \{T(R) \leq t\} \sim \Pr \{T(R_B) \leq t\}. \quad (3.7)$$

Et

$$\Pr \{T(R) < \infty\} \sim \Pr \{T(R_B) < \infty\}. \quad (3.8)$$

Où

$$R_B(t) = u + (c - \mu\lambda)t + \sigma\lambda^{\frac{1}{2}}B(t).$$

Et  $B(t)$  est le mouvement Brownien standart. Utilisant les formules des probabilités de ruine dans des temps finis et infinis donnés dans (3.5) et (3.6) nous calculons les valeurs approximatives de probabilités de ruine pour différents valeurs de réserve initial, la prime, l'intensité de revendications, l'espérance de revendications et leur variance, voyons la Tab.(4.1). Un type d'échantillon du processus  $R_B(t)$  pour  $u = 40$ ,  $c = 100$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 10$  et  $\lambda = 3$  est dans la figure (4.1) :

## 4.2 Lévy-stable et le modèle de risque pour grandes revendications

Dans cette section on va exposer l'approximation de processus de risque au loi alpha-stable dont  $1 < \alpha < 2$ .

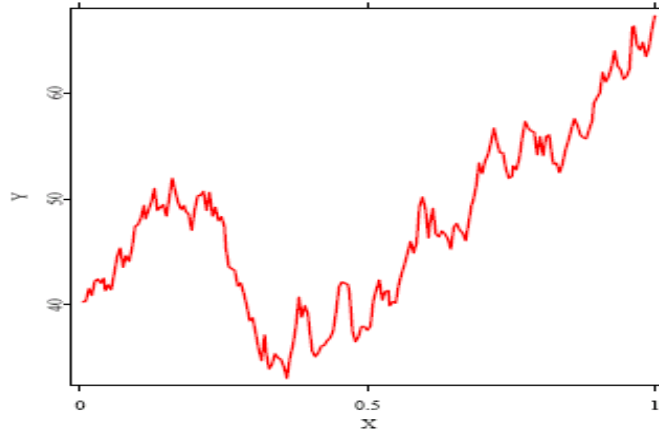


FIG. 4.1 – Un type d'échantillon de processus  $R_B$ .

Nous supposons que les revendications sont grandes c-à-d la distribution des tailles de revendications à queue lourde. Plus précisément, nous constatons que la distribution des revendications appartenant au domaine d'attraction du loi stable où  $1 < \alpha < 2$ . Nous supposons que les tailles de revendication constituent une séquence des *v.a. i.i.d.* et que le processus de compte de revendication ne doit pas être indépendant des v.a. des tailles de revendication

#### 4.2.1 La convergence faible du processus de risque au Lévy-stable

Supposons un processus de risque  $R_n(t)$  converge faiblement au loi stable et définis comme suit :

$$R_n(t) = u_n + c_n t - \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} X_k^{(n)}.$$

Où  $u_n \geq 0$  est le réserve initial,  $c_n > 0$  est le taux de prime,  $\{X_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$  une séquence des v.a. *i.i.d.* décrivent les tailles des revendications et  $N^{(n)}(t)$ , c'est le processus de point comptant le numero des revendications. De plus, supposons que les v.a. représentant les tailles de revendications a la forme suivant :

$$X_k^{(n)} = \frac{1}{\varphi(n)} X_k.$$

Où  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  est une séquence des v.a.i.i.d. avec la distribution  $F$  et  $EX_k = \mu$ , et la fonction de normalisation :

$$\varphi(n) = n^{\frac{1}{\alpha}} L(n).$$

Où  $L$  est à variation lente à l'infini. Alors on va supposer que les v.a.  $X_k$  appartiennent au domaine d'attraction de Lévy-stable, telle que :

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \xrightarrow{c.F} Z_{\alpha, \beta}(1).$$

Où  $Z_{\alpha, \beta}(t)$  est la loi stable avec le paramètre d'échelle  $\sigma$ , paramètre d'asymétrie  $\beta$ , et le paramètre de stabilité  $1 < \alpha < 2$ . Pour les détails voir Janicki et Weron(1994) et Samorodnitsky et Taqqu (1994).

Soit  $R_\alpha(t)$  la loi stable avec un drift lineaire :

$$R_\alpha(t) = u + ct - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha, \beta}(t).$$

Où  $u, c$  et  $\lambda$  sont des positives,  $\{X_k\}$  est une séquence des v.a.i.i.d. comme il est défini précédemment,  $\{N^{(n)}\}$  est l'ordre de processus du point satisfie à :

$$\frac{N^{(n)}(t) - \lambda nt}{\varphi(n)} \xrightarrow{c.F} 0. \quad (3.9)$$

Où  $\left(\xrightarrow{c.F}\right)$  signifie la convergence faible,  $\lambda$  une constante positive.

Et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( c^{(n)} - \lambda n \frac{\mu}{\varphi(n)} \right) = c. \quad (3.10)$$

Et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} = u. \quad (3.11)$$

Alors :

$$R_n(t) = u_n + c_n t - \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} X_k \xrightarrow{c.F} R_\alpha(t) = u + ct - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha, \beta}(t). \quad (3.12)$$

Quant  $n \rightarrow \infty$ , voir Billingsley (1968).

La supposition (3.9) est satisfaite pour une large classe de processus de point.



### 4.2.2 Le modèle de la probabilité de ruine pour le processus limite de risque dans le cas de grandes revendications

Nous présentons le comportement asymptotique pour Les probabilités de ruine dans des temps finis et infinis. Soit  $T$  le temps de ruine et  $Z_{\alpha,\beta}(t)$  la loi alpha-stable avec  $0 < \alpha < 2$ ,  $-1 < \beta \leq 1$  et le paramètre d'échelle  $\sigma$ . Alors avec Furrer, Michna, et Weron (1997) et Willekens (1987) on a :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Pr \left\{ T \left( u + cs - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(s) \right) \leq t \right\}}{\Pr \left\{ \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(t) > u + ct \right\}} = 1. \quad (3.13)$$

Utilisant le comportement asymptotique du :

$$\Pr \left\{ \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(t) > u + ct \right\}.$$

Quand  $u \rightarrow \infty$  pour  $1 < \alpha < 2$ , on trouve d'après (Samorodnitsky et Taqqu, 1994) que :

$$\Pr \left\{ T \left( u + cs - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(s) \right) \leq t \right\} \sim C_{\alpha} \frac{1 + \beta}{2} \lambda (\sigma)^{\alpha} t (u + ct)^{-\alpha}. \quad (3.14)$$

Où

$$C_{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}. \quad (3.15)$$

La probabilité asymptotique de ruine dans le temps fini est l'inférieure limite de la probabilité de ruine de temps finie.

Soit  $Z_{\alpha,\beta}(t)$  la loi stable avec  $\alpha \neq 1$  et  $|\beta| \leq 1$  ou bien  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ . Alors pour les positives  $u$ ,  $c$ , et  $\lambda$  on a :

$$\Pr \left\{ T \left( u + cs - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(s) \right) \leq t \right\} \leq \frac{\Pr \left\{ \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(t) > u + ct \right\}}{\Pr \left\{ \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(t) > ct \right\}}. \quad (3.16)$$

Maintenant, nous considérons la probabilité de ruine dans le cas du temps infinie pour la loi stable pour  $\beta = 1$  (le cas quand les revendications sont positives dans le modèle de risque rapproché par Lévy-stable) il est possible de donner une formule exacte pour la probabilité de ruine dans le cas de

temps infini, soit  $Z_{\alpha,\beta}(t)$  la loi stable avec  $1 < \alpha < 2$ ,  $\beta = 1$ , et le paramètre d'échelle  $\sigma$ . Alors pour les positives  $u$ ,  $c$ , et  $\lambda$ , Furrer (1998) a montré que :

$$\Pr \left\{ T \left( u + cs - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(s) \right) < \infty \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{\Gamma \{1 + (\alpha - 1)n\}} u^{(\alpha-1)n}. \quad (3.17)$$

Où :

$$a = c\lambda^{-1}(\sigma)^{-\alpha} \cos \left\{ \pi \frac{(\alpha - 2)}{2} \right\}. \quad (3.18)$$

En général, pour un  $\beta$  arbitraire nous pouvons obtenir le comportement asymptotique pour des probabilités de temps infinies de ruine quand le réserve initial  $u$  tend vers l'infini. Soit  $Z_{\alpha,\beta}(t)$  la loi stable avec  $1 < \alpha < 2$ ,  $-1 < \beta \leq 1$ , et le paramètre d'échelle  $\sigma$ . Alors pour les positives  $u$ ,  $c$ , et  $\lambda$ , on trouve (Port, 1989, théorème 9) :

$$\Pr \left\{ T \left( u + cs - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(s) \right) < \infty \right\} = \frac{A(\alpha, \beta) \lambda (\sigma)^\alpha}{\alpha (\alpha - 1) c} u^{-\alpha+1} + o(u^{-\alpha+1}). \quad (3.19)$$

Quand  $u \rightarrow \infty$ , où :

$$A(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\pi} \sqrt{1 + \beta^2 \tan^2 \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right)} \sin \left\{ \frac{\pi\alpha}{2} + \arctan \left[ \beta \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] \right\}.$$

$u$	$c$	$\lambda$	$\psi(t)$	$\psi$
25	50	2	0.34864	0.81799
25	60	2	0.18050	0.69146
30	60	2	0.17611	0.68675
35	60	2	0.17192	0.68273
40	60	2	0.16791	0.67924
40	70	3	0.46062	0.86446

Tab.(4.2). Probabilités de ruine pour  $\alpha = 1.12$ , et les fixés  $\mu = 20$ ,  $\sigma = 10$ , et  $t = 10$ .

$u$	$c$	$\lambda$	$\psi(t)$	$\psi$
25	50	2	9.0273e-02	0.39735
25	60	2	3.7381e-02	0.23231
30	60	2	3.6168e-02	0.21461
35	60	2	3.5020e-02	0.20046
40	60	2	3.3932e-02	0.18880
40	70	3	1.1424e-01	0.44372

Tab.(4.3). Probabilités de ruine pour  $\alpha = 1.5$ , et les fixés  $\mu = 20$ ,  $\sigma = 10$ , et  $t = 10$ .

Il nous reste de considérer le cas  $\beta = -1$ , qu'il est différent car la queue droite de la distribution du  $\alpha$ -stable avec  $\beta = -1$  ne se comporte pas comme une fonction de puissance, mais comme une fonction exponentielle (elle n'est pas une fonction à queue lourde). Soit  $Z_{\alpha,\beta}(t)$  la loi stable avec  $1 < \alpha < 2$ ,  $-1 < \beta \leq 1$ , et le paramètre d'échelle  $\sigma$ . Alors pour les positives  $u, c$ , et  $\lambda$ , on a :

$$\Pr \left\{ T \left( u + cs - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_{\alpha,\beta}(s) \right) < \infty \right\} = \exp \left\{ -a^{\frac{1}{(\alpha-1)}} u \right\}. \quad (3.20)$$

Où  $a$  à la même expression (3.18).

Exemple :

Supposons que les revendications sont des v.a.i.i.d. et leur distribution appartient au domaine d'attraction de la loi stable avec  $1 < \alpha < 2$ .

Soit  $R(t)$  le processus de risque suivant :

$$R(t) = u + ct - \sum_{n=1}^{N(t)} X_k.$$

Où  $u$  est le réserve initiale,  $c$  est le taux de prime payé par les assurés, et  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  est une séquence des v.a.i.i.d. avec une distribution appartenant au domaine d'attraction de Lévy-stable où  $1 < \alpha < 2$ , comme il est signalé dans (3.8). De plus,  $EX_k = \mu$  et  $\lambda$  l'intensité de revendication. La même chose que l'approximation de mouvement brownien on a :

$$\Pr \{T(R) \leq t\} \sim \Pr \{T(R_\alpha) \leq t\}.$$

Et :

$$\Pr \{T(R) < \infty\} \sim \Pr \{T(R_\alpha) < \infty\}.$$

Où

$$R_\alpha(t) = u + (c - \lambda\mu)t - \lambda^{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha(t).$$

Telle que  $Z_\alpha(t)$  est la loi stable avec  $\beta = 1$ , et le paramètre d'échelle  $\sigma$ . Pour  $\alpha = 2$ , la variance  $\sigma_{gauss} = \sqrt{2}\sigma$  ainsi il est raisonnable de poser  $\sigma = 2^{-\frac{1}{\alpha}}\sigma_{gauss}$  dans le cas générale. Utilisant les relations (3.14) et (3.17) pour calculer les probabilités de temps fini et infini de ruine pour différentes valeurs

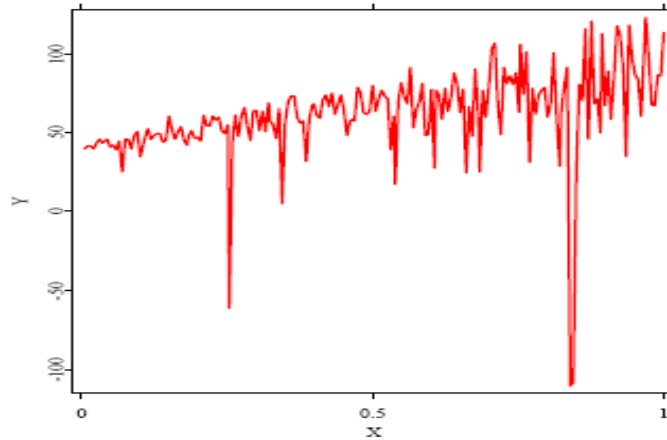


FIG. 4.2 – Un type d'échantillon du processus  $R_\alpha$  pour  $\alpha = 1.5$ ,  $u = 40$ ,  $c = 100$ ,  $\mu = 20$ ,  $\sigma = 10$ , et  $\lambda = 3$ .

du réserve initiale, prime, intensité de revendications, l'espérance de revendications et leur paramètre d'échelle, sont dans les **Tab(4.2)** et **Tab(4.3)**.

Un type d'échantillon du processus  $R_\alpha$  est présenté dans la Figure (4.2).

Les résultats des tables montrent les effets de la pesanteur des queues de distribution de revendication sur un paramètre crucial pour la probabilité de ruine des sociétés d'assurance.

Des simulations numériques sont établies pour les différentes valeurs du paramètre de stabilité  $\alpha$ . Il est clairement visible qu'une diminution du paramètre  $\alpha$  augmente la probabilité de ruine. Les tables illustrent aussi le rapport entre la probabilité de ruine et le réserve initial  $u$ , la prime  $c$ , l'intensité de revendications  $\lambda$ , l'espérance de revendications  $\mu$  et leur paramètre d'échelle  $\sigma$ .

Il est montré que la probabilité de ruine pour les distributions de revendication a queues lourdes est considérablement plus élevé que pour les distributions de revendication a queues clair. Ainsi l'estimation du paramètre de stabilité  $\alpha$  pour des données réelles est crucial pour le choix du réserve initial  $u$  et la prime  $c$ .

## Conclusion

Dans ce travail nous avons montré que les lois stables décrivent mieux les séries financières que la loi normale, et nous avons pris comme exemple un échantillon réel dont les paramètres ont été estimés par la méthode de McCulloch. Plusieurs méthodes d'estimation peuvent être appliquées aux lois stables, nous citons : la méthode des Moments, McCulloch, la Régression et la méthode de Maximum de vraisemblance. Chaque méthode a des inconvénients et des avantages par rapport à l'autre comme nous l'avons montré au chapitre 2.

Nous avons exposé la théorie des valeurs extrêmes (TVE) appliquée à l'estimation des paramètres de la loi stable via l'estimateur de Hill pour l'inverse de l'indice de stabilité et l'estimateur de Peng pour le paramètre de position  $\mu$ .

Cependant, la (TVE) ne donne pas des bonnes estimations de  $\alpha$  lorsque  $\alpha > 1.5$  ainsi que la qualité de l'estimation dépend du choix de la valeur initiale de  $\alpha$ , le choix de  $k$  optimal et de la taille de l'échantillon étudié (temps d'exécution important). Malgré ses inconvénients, la TVE reste un outil très utile dans différents domaines.

# Bibliographie

- [1] Adam, E. (2001). L'analyse fractale des marchés financiers. Stage effectué à Finama Asset Management.
- [2] Asmussen, S. (2000). Ruin Probabilities, World Scientific, Singapore.
- [3] Billingsley, P. (1968). Convergence of Probability Measures, John Wiley and Sons, New York.
- [4] Burnecki, K., Härdle, W. and Weron, R. (2004). Simulation of risk processes, in J. Teugels and B. Sundt (eds.), Encyclopedia of Actuarial Science, John Wiley and Sons, Chichester.
- [5] Borak, Sz., Härdle, W. et Weron, R. (2004). Stable Distributions, in P. Cizek, W. Härdle, R. Weron (eds.) Statistical Tools for Finance and Insurance, Springer.
- [6] Csörgő, S., Deheuvels, P. et Mason, D. (1985). Kernel estimates of the tail index of a distribution. *Ann. Statist.*, 13, 1050-1077.
- [7] de Haan, L. (1976). Sample extrêmes : an elementary introduction. *Statistica Neerlandica*. **30**, 161-172.
- [8] de Haan, L. et Resnick, S. (1996). On asymptotic normality of the Hill estimator. Preprint, disponible au TR1155. ps.Z, [http : //www.orie.cornell.edu/trilst/trilst.html](http://www.orie.cornell.edu/trilst/trilst.html).
- [9] de Haan, L. et Stadtmüller, U. (1996). Generalized regular variation of second order. *J. Australian Math. Soc.*, (serie A), **61**, 381-395.
- [10] Dekkers, A.L.M. et de Haan, L. (1989). On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *Annals of Statistics*. **17**, 1795-1832.
- [11] Drees, H. (2000). Weighted approximations of tail processes for  $\beta$ -mixing random variables. *Annals of Applied Probability*. **10**, 1274-1301.

- [12] Drees, H. (2002). Extreme quantile estimation for dependent data with applications to finance. Preprint N° 68. University of Saarland. disponible dans : *www.math.uni-sb.de*.
- [13] Embrechts, P., Kluppelberg, C., and Mikosch, T. (1997). Modeling Extremal Events. With a View towards Insurance and Finance, Springer, Berlin.
- [14] Fama, E.F. et Roll, R. (1971). Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66, 331-338.
- [15] Furrer, H. (1998). Risk processes perturbed by  $\alpha$ -stable Lévy motion, *Scandinavian Actuarial Journal* 10 : 23-35.
- [16] Furrer, H., Michna, Z. and Weron A. (1997). Stable Lévy motion approximation in collective risk theory, *Insurance : Mathematics and Economics* 20 : 97-114.
- [17] Groeneboom, P., Lopuhaä, H.P. et de Wolf, P.P. (2003). Kernel estimators for the extreme value index. *Ann. Statist.*, 31, 1956-1995.
- [18] Hill, B. (1975) A Simple Approach to Inference About Tail of a Distribution, *Ann. Statist.*, 3, 1163-1174.
- [19] Iglehart, D. L. (1969). Diffusion approximations in collective risk theory, *Journal of Applied Probability* 6 : 285-292.
- [20] J. Pickands, "Statistical inference using extreme order statistics", *Ann. Statist.* 3 (1975), pp. 119-131.
- [21] J.P. Nolan, "Maximum likelihood estimation of stable parameters", Preprint, American University.
- [22] J.P. Nolan, (2001). Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions, in O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick (eds.), *Lévy Processes*, Birkhäuser, Boston.
- [23] J.P. Nolan, *Communications in Statistics – Stochastic Models* 13 (1997) 759. The computer program STABLE can be downloaded from : <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>.
- [24] Janicki, A. et Weron, A. (1994). Simulation and chaotic behavior of  $\alpha$ -stable stochastic processes. New York, Marcel Dekker.

- [25] Lévy Paul, 1925. Calcul des probabilités. Paris, Gauthier-Villars.
- [26] Ludovic d'estampes. Thèse de doctora : Traitement statistique des processus alpha-stable; Mesures de dependance et identification des AR stable; Tests séquenriels tronqués. École doctorale : Informatique et télécommunications. Spécialité : Réseaux et Télécommunications.
- [27] McCulloch, (1986). Estimation des paramètres alpha-stable pour  $0.6 < \alpha \leq 2$ .
- [28] Port, S. C. (1989). Stable processes with drift on the line, Trans. Amer. Math. Soc. 313 : 201–212.
- [29] Rafal.Weron, (2001)"Lévy-stable revisited :tail index >2 does not exclude the Lévy-stable regime", International Journal of Modern Physics C 12(2), 209-223, [Cond-mat/0103256].
- [30] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). Stochastic Processes for Insurance and Finance, John Wiley and Sons, New York.
- [31] Samorodnitsky, G. et Taqqu, M.S.(1994). Stable non-Gaussian random processes : Stochsatic models with infinite variance. Chapman & Hall, New York.
- [32] Schmidli, H. (1994). Diffusion approximations for a risk process with the possibility of borrowing and investment, Stochastic Models 10 : 365-388.
- [33] Statistical Tools for Finance and Insurance, Pavel Cizek, Wolfgang Hardle, Rafal Weron. November 17, 2004.
- [34] Thierry Roncalli. Théorie des Valeurs Extremes ou Modélisation des Evénements Rares pour la Gestion des Risques. Janvier-2002. Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais. Bercy-Expo – Immeuble Bercy Sud – 4<sup>eme</sup> etage 90, Quai de Bercy — 75613 Paris Cedex 12.France.
- [35] Weron A. et Weron R. (1995). Computer simulation of Lévy -stable variables and processes. Lecture Notes in Physics, 457, 379-392.
- [36] Willekens, E. (1987). On the supremum of an infinitely divisible process, Stoch. Proc. Appl. 26 : 173–175.
- [37] Zolotarev, V.M. (1986). One-Dimensional Stable Distributions. American Mathematical Society.