République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MED. KHIDER BISKRA
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

présenté par

Saloua LABED

Pour l'Obtention du Grade de Magister en Mathématiques

Option

Analyse & Modèles Aléatoires

Mesures Martingales et Application au Contrôle Stochastique

Devant Le Jury :

Abdelhakim **NECIR**	**MC**	**Université de Biskra**	**Président**
Brahim **MEZERDI**	**PR**	**Université de Biskra**	**Rapporteur**
Seid **BAHLALI**	**DR MAC**	**Université de Biskra**	**Examinateur**

Soutenu le :…/…/2005

DEDICACE

A la mémoire de ma mère.
A mon père.
A ma tante Farida.

A mes très chères frères et sœurs : Linda, Lazhari, Fatima, Leila, Abdel Wahabe, Amina, Walid, Mohamed Islam.

Mes vifs remerciement vont également à tous mes enseignants en graduation et en post-graduation : Labed.B, Melkmi.L, Mezerdi.B, Necir.A, S. Bahlali …etc.

A tous mes proches amis intimes collègues d'études précisément à ma sœur Nadjette Bouziane.

SALOUA.

Remerciements

C'est pour moi un très grand plaisir d'exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur Brahim Mezerdi, professeur à l'université de Biskra. Ses encouragements et sa disponibilité grandement contribuée à l'élaboration de ce travail. La qualité du sujet proposé, les orientations dont j'ai bénéficié se sont avérées toujours pertinentes. Je suis sûr qu'il est aussi content que moi que ce travail ait vu le jour.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Dr A. Necir maître de conférences à l'université de Biskra, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier honorablement au Dr S. Bahlali chargé de cours à l'université de Biskra d'avoir accepté d'être examinateur et de participer au jury.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants en graduation, en post graduation et au Lycée.

Honneur et gratitude à tous ceux qui de près ou de loin ont participé à la réalisation de ce travail.

ملخص

ندرس في هذا العمل قضايا التحكم للمعادلات التفاضلية العشوائية. و في هذا السياق و بصفة خاصة ينصب هذا البحث على دراسة التقريب و الشروط اللازمة لوجود قيمة عظمى للقضية المدروسة.

في الفصل الأول نعطي تعريف و بعض الخصائص المتعلقة بتوابع عشوائية تأخذ قيمها في فضاء القياسات و كذا بعض النتائج التي تلزمنا لحل قضايا التحكم للمعادلات التفاضلية العشوائية.

الفصل الثاني يخص قضايا التقريب في التحكم العشوائي، حيث ندرس تقريب توابع عشوائية تأخذ قيمها في فضاء القياسات بالتوابع العشوائية لحركة براون.

في الفصل الثالث ندرس قضايا التحكم الضعيفة، بحيث نجد أن احتمال وجود قانون توزيع للثنائية المتكونة من المراقب (التحكم) و المسار يلزم وجود مراقبة مرخاة مثالية.

Abstract

In this work, we are interested in the necessary conditions of optimality in stochastic optimal control whose system is controlled by a martingale measure. These necessary conditions will be established with theorems of approximations.

In the first chapter, we were interested in certain definitions, properties and the construction of martingales measures and then we give results of extension of this problem.

In the second chapter, one considers theorems of approximation of martingales measures by stochastic integrals with respect to the Brownian motion and convergence within the meaning of L^2 between the initial and the relaxed problems.

In the final chapter, one defines the problem of relaxed stochastic controls, and the relation between the weak solutions of the stochastic differential equations and the martingales problems. Then one defines the control rules and then we prove an existence result.

Key words : Stochastic differential equation, martingale measure, stochastic control, relaxed control, control rule, optimal rule, martingale, Brownian motion.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons aux conditions nécessaires d'optimalité en contrôle optimal stochastique dont le système est dirigé par une mesure martingale. Ces conditions nécessaires seront établies avec des théorèmes d'approximations.

Au premier chapitre, nous nous sommes intéressés à certaines définitions et propriétés, ensuite à la construction des mesures martingales et le résultat d'extension de ce problème.

Au second chapitre, on considère des théorèmes d'approximations des mesures martingales par des intégrales stochastiques par rapport au mouvement Brownien et la convergence au sens de L^2 entre les problèmes initial et relaxé.

Au dernier chapitre, on définit le problème de contrôle stochastique relaxé, et la relation entre les solutions faibles des équations différentielles stochastiques et les problèmes de martingales. Ensuite on définit les règles de contrôle et on montre un résultat d'existence d'un contrôle optimal.

Mots clés : Equation différentielle stochastique, mesure martingale, contrôle stochastique, contrôle relaxé, règle de contrôle, règle optimale, martingale, mouvement Brownien.

Table des matières

0.1 Introduction

Dans ce mémoire on considère un problème de contrôle stochastique où la dynamique est donnée par la solution d'une équation d'Itô dans le cas où la dérive et la matrice de diffusion sont contrôlés. Il est bien connu que si on ne met pas d'hypothèses de convexité l'existence d'une solution optimale dans l'espace des contrôles stricts n'est pas garantie. Pour remédier à cette situation, on considère une classe plus large de contrôles donnée par des processus à valeurs mesures jouissant de bonnes propriétés topologiques. Ces contrôles sont appelés contrôles relaxés. Il est clair que la relaxation de ce problème ne constitue pas une adaptation du cas déterministe et pose un problème crucial de la définition de l'équation d'état dans laquelle le terme intégral stochastique sera appelé à être redéfini. La reformulation faible des solutions d'équations différentielles stochastiques définissant l'état du système en termes de problèmes de martingales a permis d'établir des résultats d'existence et d'approximation faibles (El-Karoui & all [7]).

Mais il est tout a fait clair que si on cherche des résultats trajectoriels où on doit travailler directement sur l'état du système et non seulement sa distribution, on doit définir une relaxation adéquate du terme intégrale stochastique.

Ce problème a été abordé dans El-Karoui & all [7] et El-Karoui-Méléard [10] , où il a été montré que le bon processus directeur pour les équations relaxées est une mesure martingale dont le processus croissant coïncide avec le contrôle relaxé et non pas un mouvement Brownien.

Ce concept de mesure martingale a été introduit par Walsh [35] pour construire un calcul stochastique pour des processus à deux paramètres, particulièrement adéquats pour représenter les perturbations aléatoires en théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques. Les mesures martingales ont trouvé des applications dans divers domaines, tels que le contrôle stochastique (El-Karoui & all [7] , Méléard [26]).

Le premier chapitre de ce travail est introductif, on présente les définitions et des propriétés de bases des mesures martingales et on donne quelques exemples puis on passe aux propriétés de décomposition d'intensité et à la construction des mesures martingales.

Au deuxième chapitre, on s'intéresse au problème de l'approximation des EDS dirigées par des mesures martingales. Pour le problème relaxé défini en termes de mesures martingales, il est intéressant de voir sous quelles conditions sur les coefficients, l'équation d'état dirigée par une mesure martingale peut-elle être approchée fortement par une équations dirigées par un mouvement Brownien. Méléard [26] a démontré que sous des conditions Lipschitziennes sur les coefficients, la solution de l'équation stochastique définissant l'état du système relaxé peut être approché uniformément en probabilité par une suite de solutions d'équations différentielles stochastiques associées à des contrôles stricts et dirigées par un même mouvement Brownien. Cet résultat est obtenu de théorèmes d'approximation et un lemme d'approximation fondamentale obtenu premièrement pour des mesures déterministes, et généralisé pour les mesures aléatoires [11] , [08], connu sur le nom de chattering lemma et une application du théorème de Skorokhod [33] .

Au dernier chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de l'existence d'une solution optimale du problème relaxé. On a privilégié la démarche des problèmes de martingales dirigés par des opérateurs intégrés par rapport à une mesure aléatoire. On définit l'ensemble $\Re(r, z)$ des règles de contrôle, en utilisant une formulation en termes de "problème de martingale", nous pouvons montrer la compacité de $\Re(r, z)$ et de $\Re^*(r, z)$ l'ensemble des lois optimales.

Enfin on s'est intéressé à la comparaison des problèmes de contrôle : quand il y a unicité en loi des équations contrôlées, le problème initial et relaxé ont la même fonction de valeur. D'ailleurs s'il y a unicité trajectorielle des contrôles constants, on peut se limiter aux contrôles adaptés à la filtration donnée (le problème fort).

Chapitre 1

Mesures martingales et quelques propriétés

1.1 Motivation

La théorie des mesures martingales a été introduite par J.B Walsh en 1984. L'idée est de construire un calcul stochastique à deux paramètres espace-temps. Les processus ont la propriété de martingale dans la variable de temps et la propriété de mesure dans l'espace. L'exemple fondamental de mesure martingale est le bruit blanc, qui apparaîtra facilement comme un modèle de perturbation aléatoire dépendant en espace et temps dans les équations aux dérivées partielles stochastiques. Plus généralement, le résultat des mesures martingales dans la représentation de processus qui sont à variations quadratiques est l'intégrale de fonction d'espace-temps.

Les mesures martingales modélisent bien les problèmes de contrôle relaxés où le coefficient de diffusion est contrôlé, ou un système d'interaction particulier est représenté comme l'intégrale stochastique de mesure martingale, où des processus de branchement.

1.2 Définitions et propriétés de bases des mesures martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et (E, ξ) un espace de Lusin. On considère une fonction d'ensemble $U(A, w)$ définie sur$\mathcal{A} \times \Omega$, où $\mathcal{A}$ est un sous anneau de ξ qui vérifié :

$$\|U(A)\|_2^2 = E\left[U(A)^2\right] < \infty \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$
$$A \cap B = \emptyset \implies U(A) + U(B) = U(A \cup B) \quad p.s$$
$$\forall A \text{ et } B \text{ dans } \mathcal{A}.$$

On va dire que l'application U est $\sigma-$finie s'il existe une suite croissante (E_n) de E tels que :

$$1) \quad \bigcup_n E_n = E.$$
$$2) \quad \forall n, \xi_n = \xi_{|E_n} \subseteq \mathcal{A}.$$
$$3) \quad \sup\left\{\|U(A)\|_2, A \in \xi_n\right\} < \infty.$$

La fonction d'ensemble est additive dénombrable si pour un n, et une suite (A_j) de ξ_n décroît vers $\varnothing$, $\|U(A_j)\|_2$ tends vers zéro. Alors il est facile d'étendre U par :

$$U(A) = \lim_n U(A \cap E_n)$$

dans tout ensemble de ξ tel que la limite existe dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

La fonction d'ensembles qui vérifie toutes ces propriétés est appelée : une mesure $\sigma-$finie L^2-estimé.

Définition 1-2-1 : *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré, vérifiant les conditions habituelles* [5].

$\{M_t(A), \quad t \geq 0, A \in \mathcal{A}\}$ *est une $\mathcal{F}_t-$mesure martingale si seulement si :*

1) $M_0(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$
2) $\{M_t(A), t \geq 0\}$ *est une* $\mathcal{F}_t -$ *martingale,* $\forall A \in \mathcal{A}.$
3) $\forall t > 0, M_t(.)$ *est une mesure* $\sigma -$ *finie.*

Remarque 1-2-2 :

1- Pour tout $T > 0$, la famille locale $(E_n)_n$ de M_t peut être choisie indépendante de t, $0 \leq t \leq T$. [cf. [29]].

2- Si $M(., A)M(., B)$ est une $(\mathcal{F}_t - P)-$martingale quand $A \cap B = \emptyset$, alors M est appelée une mesure martingale orthogonale.

Définition 1-2-3 : *Si M est une mesure martingale, et en plus, pour tout $A \in \mathcal{A}$ la trajectoire $t \to M_t(A)$ est continue, alors on dit que M est continue.*

Définition 1-2-4 : *Si M* et *N sont deux $\mathcal{F}_t-$mesures martingales sur E vérifiant : pour tout $A \in \xi_n$ et $B \in \xi'_m$, $\forall n$, $\forall m$,*

$$\{M_t(A)N_t(B), \quad t \geq 0\} \quad \textit{est une } \mathcal{F}_t - \textit{martingale,}$$

alors M et N sont appelées mesures martingales orthogonales.

On peut associer à chaque ensemble A de $\mathcal{A}$ le processus croissant $\langle M(A)\rangle$ de la martingale $\{M_t(A), \quad t \geq 0\}$. Le processus peut être régularisé en une mesure positive sur $\mathbb{R}_+ \times E$, dans le sens suivant :

Théorème 1-2-5 : (Walsh [35] **)** *Si M est une $\mathcal{F}_t-$mesure martingale, il existe une mesure aléatoire $\sigma-$finie positive $\gamma(da, ds)$ dans $E \times \mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}_t-$prévisible, tel que pour un A de $\mathcal{A}$, le processus $(\gamma(A \times (0, t]))_t$ est prévisible, et vérifié :*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall t > 0, \quad \gamma\left(A \times (0, t]\right) = \langle M(A) \rangle_t \quad P - p.s.$$

Si M est continue, γ est continue, i.e.

$$\gamma\left(E_n \times \{t\}\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0.$$

La mesure γ est appelée *intensité de M.*

Remarque 1-2-6 :

1- $\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad \forall t > 0,$

$$\langle M(A), M(B) \rangle_t = \langle M(A \cap B) \rangle_t = \gamma\left(A \cap B \times (0, t]\right) \quad P - p.s$$

par la définition de mesures martingales orthogonales (remarque 1-2-2).

La mesure γ caractérise ainsi complètement toutes les variations quadratiques de la mesure martingale M.

2- Dans la suivant, les mesures sur $E \times \mathbb{R}_+$ sont positives et $\sigma-$finies.

3- On peut construire une intégrale stochastique par rapport à M, par la méthode qui est employée dans la construction de l'intégrale d'Itô [Walsh [35]].

Corollaire 1-2-7 : Soient M une mesure martingale sur E et $\gamma(da, ds)$ une mesure aléatoire continue positive sur $E \times \mathbb{R}_+$. Alors M est une mesure martingale continue avec intensité γ si seulement si :

$$E\left(\exp\left\{\int_E \int_0^t f(a,s) M(da, ds) - \frac{1}{2} \int_{E \times (0,t]} f^2(a,s)\gamma(da, ds)\right\}\right) = 1, \tag{1.1}$$

$$\forall f \in L^2_\gamma, \quad \forall \gamma > 0.$$

Remarque 1-2-8 : par extension

$$\int_E \int_0^t f(a,s)M(da,ds)$$

sera notée par $M_t(f)$.

Preuve La condition est évidement nécessaire.

Inversement, soit f dans L^2_γ et la fonction suivant :

$$F(w,a,u) = \theta f(w,a,u)1_{]s,t]}(u)1_{G_s}(w),$$

où $G_s \in \mathcal{F}_s, \quad 0 \leq s < t, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

La condition (1.1) implique :

$$E\left[\exp\left\{\begin{array}{c} \theta(\int_E \int_0^t f(w,a,u)1_{]s,t]}(u)1_{G_s}(w)M(da,du)) \\ -\frac{\theta^2}{2}\int_{E\times(s,t]} 1_{G_s}(w)f^2(a,u)\gamma(da,du) \end{array}\right\}\right] = 1$$

$$E\left[\exp\left\{\theta 1_{G_s}\int_E\int_s^t f(w,a,u)M(da,du) - \frac{\theta^2}{2}1_{G_s}\int_E\int_s^t f^2(a,u)\gamma(da,du)\right\}\right] = 1$$

Alors :

$$E\left[\exp\left\{\theta 1_{G_s}(M_t(f)-M_s(f)) - 1_{G_s}\frac{\theta^2}{2}\int_E\int_s^t f^2(a,u)\gamma(da,du)\right\}\right] = 1$$

i.e.

$$E\left[1_{G_s}\exp\left\{(M_t(f)-M_s(f))\theta - \frac{\theta^2}{2}\int_E\int_s^t f^2(a,u)\gamma(da,du)\right\}\right] = P(G_s)$$

Alors pour $f \in L^2_\gamma$, $M_t(f)$ est une martingale continue avec variation quadratique

$$\int_E\int_0^t f^2(a,u)\gamma(da,du)$$

selon le résultat de Jacod et Memin [20], au sujet de la caractérisation des martingales continues.◀

1.3 Exemples des mesures martingales

1.3.1 L'espace E est fini

On suppose que E est un espace finie $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Une mesure martingale est déterminée uniquement par les n martingales de carré intégrable orthogonales

$$(M_t(\{a_i\}))_{i=1}^n .$$

Inversement, soient $m_t^1, m_t^2, ..., m_t^n, \quad n-$martingales orthogonales avec processus croissent $(C_t^i)_{i=1}^n$; alors l'expression :

$$M_t(A) = \sum_{i=1}^n m_t^i \delta_{\{a_i\}}(A)$$

définit une mesure martingale sur E avec intensité :

$$\begin{aligned}
\langle M(da)\rangle_t &= \left\langle \sum_{i=1}^n m^i \delta_{\{a_i\}}(da) \right\rangle_t \\
&= \sum_{i=1}^n d\delta_{\{a_i\}}(da) \left\langle m^i \right\rangle_t \\
&= \sum_{i=1}^n dC_t^i \delta_{\{a_i\}}(da)
\end{aligned}$$

1.3.2 Plus généralement

Proposition 1-3-1 : Soit E un espace de Lusin et $(u_s)_{s\geq 0}$ un processus prévisible. On considère de plus une martingale de carré intégrable m_t avec processus à variation quadratique C_t. Soit :

$$M_t(A) = \int_0^t 1_A(u_s) dm_s, \tag{1.2}$$

pour A dans ξ, alors :

$$\{M_t(A), \quad A \in \mathcal{A}, t \geq 0\}$$

est une mesure martingale avec intensité égale à :

$$\delta_{u_s}(da)dC_s.$$

Si m est continue, M est continue.

Inversement, toute mesure martingale avec intensité

$$\delta_{u_s}(da)dC_s$$

est de cette forme ; .i.e. (1.2), avec $m_t = M_t(E)$.

Preuve On trouve immédiatement que M_t est une mesure martingale.

$$\begin{aligned}
\langle M(da)\rangle_t &= \left\langle \int_0^t 1_{\{da\}}(u_s)dm_s \right\rangle \\
&= \int_0^t \left(1_{\{da\}}(u_s)\right)^2 d\langle m\rangle_s \\
&= \int_0^t 1_{\{da\}}(u_s)d\langle m\rangle_s \\
&= \int_0^t \delta_{u_s}(da)dC_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{puis que } 1_A(u_s) &= \begin{cases} 1 & \text{si } u_s \in A \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \\
&= \delta_{u_s}(A).
\end{aligned}$$

alors l'intensité de $\{M_t(A), \quad A \in \mathcal{A}, t \geq 0\}$ est : $\delta_{u_s}(da)dC_s$.

Inversement, on étudie la différence

$$M_t(A) - M_t(f1_E), \quad A \in \xi,$$

$$\text{où } f(w,s) = 1_A(u_s(w)) \tag{1.3}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
M_t(f1_E) &= \int_E \int_0^t (1_A(u_s)1_E(u_s))M(da,ds) = \int_E \int_0^t 1_{A\cap E}(u_s)M(da,ds) \\
&= \int_E \int_0^t 1_A(u_s)M(da,ds) = \int_0^t 1_A(u_s) \int_E M(da,ds) \\
&= \int_0^t 1_A(u_s)M(E,ds) = \int_0^t 1_A(u_s)dm_s\,; \quad \text{si } m_s = M_s(E)
\end{aligned}$$

puis que f ne dépend pas de a.

$M_t(A) - M_t(f1_E)$ est une martingale avec processus croissent :

$$\begin{aligned}
\langle M(A) - M(f1_E)\rangle_t &= \int_E \int_0^t (1_A(a) - f(s))^2 \delta_{u_s}(da)dC_s \\
&= \int_E \int_0^t \left(1_A^2(a) - 21_A(a)f(s) + f^2(s)\right) \delta_{u_s}(da)dC_s \\
&= \int_0^t \left(1_A(u_s) - 21_A(u_s)f(s) + f^2(s)\right) dC_s \\
&= \int_0^t (1_A(u_s) - f(s))^2 dC_s = 0 \quad \text{par } (1.3)
\end{aligned}$$

Alors :

$$M_t(A) = M_t(f1_E) = \int_0^t 1_A(u_s)dm_s \quad P - p.s. \blacktriangleleft$$

1.3.3 Le bruit blanc

Comme le mouvement Brownien dans les théorèmes des martingales continues, elle existe une mesure martingale fondamentale appelée bruit blanc.

On considère une mesure gaussienne centrée W dans $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \xi, \mu)$ où μ est une mesure positive $\sigma-$finie sur $\mathbb{R}_+ \times E$, définie par :

$$\forall h \in L^2_\mu, \quad E\left(\exp W(h)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+ \times E} h^2(y)\mu(dy)\right). \tag{1.4}$$

Une construction d'une telle mesure est donnée par Neveu [29].

Le processus $B_t(A) = W((0,t] \times A)$, définie par l'état $A \in \mathcal{A}$ qui vérifie :

$$\mu((0,t] \times A) < \infty, \quad \forall t > 0,$$

est alors un processus gaussien avec augmentation indépendante et intensité μ, avec trajectoire cadlag[1]. Il est facile de montrer que $\{B_t(A), \quad t \geq 0, A \in \mathcal{A}\}$ est une mesure martingale d'intensité déterministe par rapport à sa filtration naturelle. Quand μ est continue, sa continuité est prouvée selon au corollaire 1-2-7 (1.1) et la caractérisation (1.4) des mesures gaussiennes centrées.

[1](continue à droit, limité à gauche)

Par (1.4) :

$$E\left[\exp(W(h))\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{E\times\mathbb{R}_+} h^2(y)\mu(dy)\right)$$

Donc :

$$E\left[\exp(W(h))\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{E\times\mathbb{R}_+} h^2(y)\mu(dy)\right)\right] = 1$$

Alors :

$$E\left[\exp\left(W(h) - \frac{1}{2}\int_{E\times\mathbb{R}_+} h^2(y)\mu(dy)\right)\right] = 1$$

et d'après le corollaire 1-2-7, est continue.

Définition 1-3-2 : *Quand la mesure μ est continue, la famille*

$$\{B_t(A), \quad t \geq 0, A \in \mathcal{A}\}$$

est appelé : bruit blanc avec intensité μ.

Les bruits blancs sont déterminés complètement par la nature déterministe de ses intensités.

Proposition 1–3-3 : Soit

$$\{M_t(A), \quad A \in \mathcal{A}, t \geq 0\}$$

une $\mathcal{F}_t-$mesure martingale avec une intensité déterministe continue γ. Alors, M est un bruit blanc (par rapport à sa filtration naturelle).

Preuve Ce résultat est immédiat selon au corollaire 1-2-7 et à la caractérisation (1.4) des mesures gaussiennes centrées.◄

1.3.4 Mesures martingales images

Proposition et définition 1-3-4 : *(E, ξ) et $(U,\mathcal{U})$ sont deux espaces de Lusins. Soit N une mesure martingale avec intensité $\gamma(ds, da)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times U$ et $\Phi(w, s, u)$ un processus $\mathcal{P} \otimes \mathcal{U}$ mesurable $E-$estimé.*

Soit :

$$M_t(w, B) = \int_0^t \int_U 1_B\left(\Phi(w, s, u)\right) N(w, ds, du).$$

$\{M_t(B), \quad t \geq 0, B \in \xi\}$ *définies une mesure martingale avec intensité* μ, *où* μ *est donné par :*

$$\begin{aligned}
\mu((0,t] \times B) &= \langle M(B) \rangle_t \\
&= \left\langle \int_0^t \int_U 1_B(\Phi(s,u)) N(ds,du) \right\rangle_s \\
&= \int_0^t \int_u \left[1_B(\Phi(s,u))\right]^2 \langle N(ds,du) \rangle_s \\
&= \int_0^t \int_U 1_B(\Phi(s,u)) \gamma(ds,du).
\end{aligned}$$

M est appelé mesure martingale image de N selon Φ. On remarque que si N est continue, M est aussi continue.

1.4 Décomposition d'intensité

Lemme 1-4-1 : Soit $\gamma(da,dt)$ une mesure aléatoire prévisible $\sigma-$finie, γ peut être décomposé comme suivant :

$$\gamma(da,dt) = q_t(da) dK_t,$$

où K_t est un processus aléatoire prévisible croissant et $(q_t(da))_{t \geq 0}$ est une famille prévisible des mesures aléatoires $\sigma-$finie.

Preuve On utilise les notations de section 1-2.

Si γ est une mesure finie, le lemme est clair.

Dans les autres cas, il existe une fonction $\mathcal{P} \otimes \xi$ mesurable

$$W : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E \to (0, \infty)$$

telle que :

$$\grave{\gamma}(da,dt) = \gamma(da,dt) W(a,t)$$

est finie. Alors on peut décomposer :

$$\grave{\gamma}(da,dt) = q_t^{'}(da) dK_t;$$

le résultat se démontre par :

$$q_t(da) = W^{-1}(a,t)q_t^{'}(da),$$

i.e.

$$\begin{aligned}\gamma(da,dt)W(a,t) &= \acute{\gamma}(da,dt) \\ &= q_t^{'}(da)dK_t \\ &= W(a,t)q_t(da)dK_t.\end{aligned}$$

Alors :

$$\gamma(da,dt) = q_t(da)dK_t. \blacktriangleleft$$

Remarque 1-4-2 : Cette décomposition n'est pas unique, et il est toujours possible du supposer que le processus K_t est croissant, par exemple on remplace K_t par $t + K_t$. Au suivant on va utiliser cette décomposition d'intensité dans laquelle la cordonnée de temps joue un rôle spécial, et on va noter l'intensité des mesures martingales par la forme :

$$q_t(da)dK_t,$$

avec des processus croissants $(K_t)_{t\geq 0}$.

1.5 Construction des mesures martingales

Un résultat important est qu'il est toujours possible de donner une représentation des mesures aléatoires $(q_t(da))_{t\geq 0}$ comme mesures images des mesures déterministes (Cf A.V. Skorohod [33], N. El Karoui et J.P. Lepeltier [9], B. Grigelionis [16]).

Théorème 1-5-1 : *Soit $(q_t(da))_{t\geq 0}$ une famille prévisible des mesures aléatoires $\sigma-$finie, définie sur un espace de Lusin (E,ξ).*

On considère aussi un espace de Lusin $(U,\mathcal{U})$ et une mesure diffuse déterministe $\sigma-$finie λ sur U qui vérifie :

$$q_t(E) \leq \lambda(U), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall w \in \Omega.$$

Alors il existe un processus prévisible $\varphi(t,u)$, avec des valeurs dans $E \cup \{\delta\}$, (δ est le point cimetière), tel que :

$$q_t(A) = \int_U 1_A(\varphi(t,u))\lambda(du), \quad \forall A \in \xi, \quad \forall w \in \Omega, \tag{1.5}$$

et un noyau prévisible de E dans U, $\phi(t,a,du)$ qui vérifie :

$$\int_U 1_B(u) f(\varphi(t,u))\lambda(du) = \int_E f(a)\phi(t,a,B)q_t(da) \tag{1.6}$$

$$\forall w \in \Omega, \quad \forall f \text{ mesurable positive}, \quad \forall B \in \mathcal{U}.$$

Le noyau $\phi(t,a,.)$ est la loi conditionnelle de u par rapport à la $\sigma-$algèbre engendrée par φ.

Selon ce théorème, l'existence d'une mesure martingale continue avec intensité $q_t(da)dK_t$, suivra immédiatement de l'existence d'un bruit blanc. Quand K_t est déterministe, la mesure martingale est donnée comme mesure image de bruit blanc, et le cas général suit d'employer le changé de temps.

Théorème 1-5-2 : *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace filtré et γ une mesure aléatoire positive continue $\sigma-$finie, vérifie :*

$$\gamma(da,dt) = q_t(da)dK_t, \qquad (K_t) \text{ continue et croissant.}$$
$$(q_t) \text{ prévisible.}$$

Elle existe dans une extension :

$$\hat{\Omega} = (\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}}, (\mathcal{F}_t \otimes \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, P \otimes \tilde{P})$$

une mesure martingale continue N avec intensité γ, obtenu comme mesure image changé de temps de bruit blanc.

De plus, N est orthogonale à tout mesure martingale $(\mathcal{F}_t, P)$ continue M.

Preuve

i) On suppose que K_t est déterministe.

On peut construire dans un espace auxiliaire $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$ un bruit blanc B avec intensité $\lambda(du)dK_t$, où λ vérifie les suppositions de théorème 1-5-1. Dans l'extension

$$(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \hat{P}) = (\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}}, (\mathcal{F}_t \otimes \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, P \otimes \tilde{P}),$$

B est une mesure martingale continue avec intensité déterministe et alors un $\hat{\mathcal{F}}_t-$bruit blanc (Proposition 1-3-3). Soit $\varphi(t,u)$ un processus prévisible vérifiant (1.5). Il est clair que φ est $\hat{\mathcal{P}} \otimes \mathcal{U}$ mesurable, $\hat{\mathcal{P}}-$été le $\sigma-$champ prévisible dans l'extension $\hat{\Omega}$.

Par l'exemple 1-3-4 et (1.5), la famille

$$N_t(w,\grave{w},A) = \int_0^t \int_U 1_A(\varphi(w,s,u))B(\grave{w},ds,dw), \quad A \in \xi$$

est une mesure martingale continue avec intensité :

$$\begin{aligned} \langle N(w,\grave{w},A)\rangle_t &= \int_{(0,t]} \int_E 1_A(\varphi(w,s,u)) \langle B(\grave{w},ds,w)\rangle \\ &= \int_{(0,t]} \int_E 1_A(\varphi(w,s,u))\lambda(du)dK_s \\ &= \gamma((0,t] \times A). \end{aligned}$$

De plus, B et tout $(\mathcal{F}_t, P)$ mesure martingale M sont orthogonales (par construction, M est encore dans une $\hat{\mathcal{F}}_t-$mesure martingale). Nous vérifions cela pour chaque fonction étagé prévisible h, les mesures martingales

$$\int_0^t \int_U h\left(\varphi\left(s,u\right)\right) B\left(ds,du\right)$$

et M sont orthogonales, et que cet propriété est plus généralement vérifie pour h dans $L^2(dP \otimes q_t(da)dK_t)$. Qui implique immédiatement l'orthogonalité de M et N.

ii) Si K_t n'est pas déterministe, on considère :

$$\eta_t = \inf\left\{s > 0, \quad K_s \geq t\right\}.$$

η_t est alors l'inverse croissant de K_t : On peut considère la mesure aléatoire $\sigma-$finie

$$\gamma(dt,da) = q_{\eta_t}(da)dt,$$

où q_{η_t} est prévisible (pour la filtration $\mathcal{F}_{\eta_t}$).

Selon à i), on peut construit un bruit blanc B avec intensité $\lambda(du)dt$, φ un processus prévisible (pour $\mathcal{F}_{\eta_t}$), tels que :

$$N_t(A) = \int_0^t \int_U 1_A(\varphi(w,s,u))B(ds,du) \quad \text{définie pour } t \geq 0, A \in \xi,$$

est une $\mathcal{F}_{\eta_t}-$mesure martingale, avec intensité $\gamma(dt,da)$.

On considère maintenant la $\mathcal{F}_t-$mesure martingale

$$\{M_t(A), \quad A \in \mathcal{A}, t \geq 0\}$$

définie par $M_t(A) = N_{K_t}(A)$. L'intensité de M est alors $q_t(da)dK_t$, puis que :

$$\begin{aligned} \langle M(A) \rangle_t &= \int_0^{K_t} \int_E 1_A(a) q_{\eta_s}(da) ds \\ &= \int_0^t \int_E 1_A(a) q_u(da) dK_u \end{aligned}$$

1.6 Résultat d'extension

Nous pouvons décrire toutes les mesures martingales pendant que le temps changeait des mesures d'images de bruits blancs. Pour obtiennent cette propriété, il est nécessaire d'utilisé un résultat d'extension, (cette idée est due à Funaki [14]), et le théorème suivant est ainsi fondamental.

Théorème 1-6-1 : *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace filtré, E et $\tilde{E}$ deux espaces de Lusins et M une mesure martingale continue avec intensité $q_t(da)dK_t$ sur $\mathbb{R}_+ \times E$, où K_t est un processus continue croissant et $(q_t(da))_{t \geq 0}$ est une famille $\mathcal{F}_t-$prévisible des mesures aléatoires.*

Soit $r_t(a, d\tilde{a})$ un noyau prévisible de probabilité de transition de E dans $\tilde{E}$ et définie la mesure prévisible $\sigma-$finie $P_t(da, d\tilde{a})$ dans $\mathbb{R}_+ \times E \times \tilde{E}$ comme suivante :

$$P_t(da, d\tilde{a}) = q_t(da) r_t(a, d\tilde{a}).$$

Alors elle existe dans une extension

$$(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}}, P \otimes \tilde{P})$$

une mesure martingale continue $\tilde{M}_t(da, d\tilde{a})$ avec intensité

$$dK_t P_t(da, d\tilde{a})$$

et dont la projection sur $\mathbb{R}_+ \times E$ est M, i.e.

$$\tilde{M}_t(A \times \tilde{E}, (w, \tilde{w})) = M_t(A, w), \quad \forall A \in \mathcal{A}, (w, \tilde{w}) \in \Omega \times \tilde{\Omega}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve Soit N une mesure martingale continue sur $E \times \tilde{E}$, construit dans un espace auxiliaire $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \tilde{P}\right)$ avec intensité

$$dK_t P_t(da, d\tilde{a})$$

tels que N et chacun $\mathcal{F}_t-$mesure martingale sont orthogonales (théorème 1-5-4).

a- On considère :

$$\tilde{M}_t(C) = \int_0^t \int_E r_s(a,C) M(ds,da) + \int_0^t \int_{E\times\tilde{E}} (1_C(a,\tilde{a}) - r_s(a,C)) N(ds,da,d\tilde{a})$$

$$\forall C \in \xi \otimes \tilde{\xi}, \text{ où } \quad r_s(a,C) = \int_{\tilde{E}} 1_C(a,\tilde{a}) r_s(a,d\tilde{a})$$

Les deux termes de droite de l'égalité ci-dessus sont des mesures martingales continues orthogonales. $\left\{\tilde{M}_t(C), \quad C \in \xi \otimes \tilde{\xi}, t \geq 0\right\}$ est alors une mesure martingale continue avec intensité donnée par :

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{M}(C) \right\rangle_t &= \left\langle \begin{array}{c} \displaystyle\int_0^t \int_E r_s(a,C) M(ds,da) \\ \displaystyle + \int_0^t \int_{E\times\tilde{E}} (1_C(a,\tilde{a}) - r_s(a,C)) N(ds,da,d\tilde{a}) \end{array} \right\rangle \\
&= \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s^2(a,C) q_s(da) \\
&\quad + \int_{(0,t]} dK_t \int_{E\times\tilde{E}} \left(1_C(a,\tilde{a}) - r_s(a,C)\right)^2 P_s(da,d\tilde{a})
\end{aligned}$$

puis que M et N sont orthogonales, alors :

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tilde{M}(C) \right\rangle_t &= \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s^2(a,C) q_s(da) \\
&\quad + \int_{(0,t]} dK_t \int_{E\times\tilde{E}} \left[\begin{array}{c} 1_C(a,\tilde{a}) + r_s^2(a,C) \\ \\ -2 r_s(a,C) 1_C(a,\tilde{a}) \end{array} \right] q_s(da) r_s(a,d\tilde{a}) \\
&= \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s^2(a,C) q_s(da) \\
&\quad + \int_{(0,t]} dK_t \int_{E\times\tilde{E}} 1_C(a,\tilde{a}) r_s(a,d\tilde{a}) q_s(da) \\
&\quad -2 \int_{(0,t]} dK_t \int_{E\times\tilde{E}} r_s(a,C) 1_C(a,\tilde{a}) r_s(a,d\tilde{a}) q_s(da) \\
&\quad + \int_{(0,t]} dK_t \int_{E\times\tilde{E}} r_s^2(a,C) r_s(a,d\tilde{a}) q_s(da) \\
&= \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s^2(a,C) q_s(da) + \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s(a,C) q_s(da) \\
&\quad -2 \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s(a,C) r_s(a,C) q_s(da) \\
&\quad + \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s^2(a,C) r_s(a,\tilde{E}) q_s(da)
\end{aligned}
$$

$r_s(a,.)$ est une probabilité

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tilde{M}(C) \right\rangle_t &= \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s^2(a,C) q_s(da) + \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s(a,C) q_s(da) \\
&\quad -2 \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s^2(a,C) q_s(da) + \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s^2(a,C) q_s(da) \\
&= \int_{(0,t]} dK_t \int_E r_s(a,C) q_s(da) \\
&= \int_{(0,t]} dK_t \int_E P_s(da,C) \\
&= \int_{(0,t]} dK_t P_s(E,C) \\
&= \int_{(0,t]} dK_t P_s(C)
\end{aligned}
$$

b- On suppose que C est dans ξ

$$1_C(a) - \int_{\tilde{E}} r_s(a, d\tilde{a}) 1_C(a) = 1_C(a) - 1_C(a)[r_s(a, E)] = 0$$

et alors :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_t(C) &= \int_0^t \int_E r_s(a, C) M(ds, da) \\ &= M_t(C) \end{aligned}$$

On peut applique cet résultat à les martingales carrés intégrables, par les interprétés comme des mesures martingales dégénéres.◀

Chapitre 2

Approximation des mesures martingales. Application au contrôle de diffusion

2.1 Introduction

Soit γ une intensité se désintègrant sous la forme :

$$\gamma(da, dt) = q_t(da)dK_t,$$

où (K_t) est un processus prévisible croissant, (q_t) est une mesure de probabilité estimé processus prévisible. La mesure martingale M est alors continue. On aura supposé de plus que $K_T = 1$.

Par des construction analogues à l'intégrale d'Itô, avec plus de définitions pour une fonction $\mathcal{P}\otimes\xi-$mesurable F définie sur $\Omega\times\mathbb{R}_+\times E$, ($\mathcal{P}$ est le $\sigma-$champ prévisible sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$), et appartient à $L^2(dP\otimes d\gamma)$, l'intégrale stochastique de F par rapport à M, dénoté par $M(F)$.

On considère dorénavant les mesures martingales orthogonales localement de carré intégrable.

Le théorème principal de ce chapitre est le résultat de stabilité de l'espace des mesures martingales. La motivation est d'abord un problème d'approximation dans le contrôle des diffusions, quand non seulement la dérive, mais aussi les variances sont contrôlées. Ce problème sera étudié en détails dans la dernière partie de ce chapitre.

Théorème 2-1-1 : *Soit M une mesure martingale orthogonale continue définie sur $\Omega\times[0,T]\times E$, avec intensité :*

$$\gamma(da, dt) = q_t(da)dK_t.$$

On considère une suite des mesures aléatoires prévisibles $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers γ sur $E\times[0,T]$ P-p.s, tel que :

$$\gamma^n(E\times .) = \gamma(E\times .) \quad P-p.s.$$

Alors elle existe sur une extension de l'espace de probabilité, une suite des mesures martingales continues orthogonales M^n définie sur $E \times [0,T]$, avec intensité γ^n, tel que :

Pour tout fonction bornée prévisible φ de $\Omega \times [0,T] \times E$ vers $\mathbb{R}$, continue dans les $E-$variables,

$$\lim_{n \to +\infty} E\left[(M_t^n(\varphi) - M_t(\varphi))^2 \right] = 0.$$

Puis que $\gamma^n(E \times .) = \gamma(E \times .)$, γ^n peut être décomposé,

$$\gamma^n(da, dt) = q_t^n(da) dK_t,$$

où : $q_t^n(E) = 1$.

Pour obtenir, ce théorème, on l'aura grâce à la généralisation de théorème de représentation de Skorohod l'existence d'une suite des mesures aléatoires m^n sur $E \times E \times [0,T]$ vérifie :

$$\begin{aligned} m^n(dx, dy, dt) &= m_t^{-n}(dx, dy) dK_t; \\ m_t^{-n}(dx, E) &= q_t^n(dx); \\ m_t^{-n}(E, dy) &= q_t(dy), \end{aligned}$$

et converge faiblement vers une mesure portée seulement par le diagonal. Alors, la méthode suivante a été détaillée dans le chapitre 1, on aura construit sur une extension de l'espace de probabilité une suite des mesures martingales $\hat{M}^n$ avec intensité la projection dual prévisible de m^n, avec première martingale M^n et deuxième martingale M ; la suite (M^n) serait l'approximation de M.

Une application amusante de ce théorème est la suivante : Si E est un ensemble compact, chacun mesure martingale continue peut être obtenu comme une limite dans $L^2(\Omega)$ d'une suite des intégrales stochastiques changés de temps par rapport au mouvement Brownien singulier.

Plus précisément, on a :

Théorème 2-1-2 : *On suppose que l'espace de Lusin E est un espace compact.*

Soit M une mesure martingale continue orthogonale avec intensité $q_t(da)dt$ sur $E \times [0,1]$.

Alors elle existe une suite des processus prévisibles $E-$estimé $(u^k(.))_{k \in \mathbb{N}}$, et un mouvement Brownien B définie sur une extension de l'espace de probabilité Ω, tels que :

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall \phi \text{ une fonction bornée continue de } E \text{ vers } \mathbb{R},$$

$$\lim_{k\to+\infty} E\left[\left(M_t(\phi)-\int_0^t \phi(u^k(s))dB_s\right)^2\right]=0.$$

Ce théorème est dérivé de théorème 2-1-1 et une lemme d'approximation fondamentale obtenu premièrement pour des mesures déterministes et alors généralise les mesures aléatoires [11] , [8], connu sur le nom de chattering lemma.

Un résultat semblable pour une intensité plus générale

$$q_t(da)dK_t,$$

[K est continue] peut être déduit par changement de temps.

Chattering lemma 2-1-3 : Soit (q_t) un processus prévisible, avec des valeurs dans l'espace des mesures de probabilités sur E. Elle existe une suite des processus prévisibles $(u^k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ tel que la suite des mesures aléatoires

$$(\delta_{u_t^k}(da)dt)$$

converge faiblement sur $E\times[0,1]$ vers :

$$q_t(da)dt \quad P-p.s, \quad \text{quand } k\to+\infty.$$

Ce lemme laisse d'obtenir une intégration très satisfaisant de l'ensemble $\mathcal{U}$ des processus prévisible $E-$estimé (u_t) dans l'espace $\mathcal{R}$ des mesures de probabilités sur $E\times[0,1]$ qui se désintègre dans la forme

$$q_t(da)dt,$$

q_t est une probabilité de transition de $\mathbb{R}_+$ dans E, par l'application :

$$\psi: u\to\psi(u)(da,dt)=\delta_{u_t}(da)dt.$$

Alors on montre l'intérêt des théorèmes 2-1-1 et 2-1-2 pour le contrôle optimal d'un processus de diffusion (dégénéré).

La diffusion contrôlé à la représentation stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t^u=b(t,X_t^u,u_t)dt+\sigma(t,X_t^u,u_t)dB_t \\ X_0^u=z, \end{cases} \tag{2.1}$$

où u est un processus prévisible $E-$estimé (E été un ensemble compact), et on veut optimiser sur les valeurs du processus u une fonction de coût dépend de X et u. Une politique optimale n'existe pas nécessairement dans $\mathcal{U}$, l'ensemble $\mathcal{U}$ des processus prévisibles n'étant pas doté avec une topologie compact. L'idée usuelle dans le théorie de contrôle [13], [12], [7], [17], est d'intégrer cet ensemble dans $\mathcal{R}$, qui est compact (pour la topologie faible) si E est compact, utilisant un- par- un l'application ψ définie auparavant. Dans ce théorème de contrôle les éléments de $\mathcal{R}$ sont appelés des contrôles relaxés.

On doit généraliser la notion du processus X^u de diffusion contrôlé par un processus u de $\mathcal{U}$ à celui du processus X^q de diffusion contrôlé par le contrôle relaxé $q_t(da)dt$. Le générateur $\mathcal{L}^q$ de la dernier serait naturelle et définie linéairement par rapport à le générateur $\mathcal{L}^a$ de X^a, $a \in E$, par apport :

$$\mathcal{L}^q f(t,x) = \int_E \mathcal{L}^a f(t,x) q_t(da).$$

Dans [10], il est montré qu'une solution de processus continue du problème de martingale s'est associée à ce générateur peut être représenté comme une solution d'équation différentielle stochastique :

$$dX_t^q = \int_E b(t, X_t^q, a) q_t(da) dt + \int_E \sigma(t, X_t^q, a) M(da, dt), \tag{2.2}$$

où M est une mesure martingale continue avec intensité le contrôle relaxé $q_t(da)dt$.

Le chois de M est bien sur n'est pas unique.

Le problème de contrôle relaxé [associé avec un de ses diffusions] est alors plus facile à résoudre, grâce à la compacité de l'ensemble $\mathcal{R}$, et l'existence d'un contrôle optimal pour ce problème a été prouvé dans [7]. Grâce à la représentation de diffusion contrôlée comme solution d'une équation différentielle stochastique, au chattering lemma et au théorème de stabilité étudié au dessus, nous sommes capable de comparer le problème relaxé par le problème initiale. En particulier on prouve que X^q est obtenu comme une limite dans $L^2(\Omega)$ d'une suite (X^{u^n}) des processus contrôlés, solutions de (2.1), et montrer que la suite des fonctions de coûts de ces diffusions converges vers la fonction de coût associé à la diffusion relaxé X^q.

Les résultats de la convergence en lois ont été déjà obtenus dans [7], [17] et [23], par des arguments de tension, sous les hypothèses d'unicité en lois des équations contrôlées. Là, on obtient avec des arguments simples une convergence dans $L^2(\Omega)$, sous des suppositions usuelles sur les coefficients des équations contrôles.

2.2 Théorème de stabilité pour les mesures martingales

Lemme 2-2-1 : Sous les hypothèses de théorème 2-1-1, pour presque tout w, elle existe une suite des mesures de probabilités aléatoires sur $E \times E \times [0, T]$,

$$m^n(w, da, d\grave{a}, dt),$$

vérifient :

$$m^n(w, E, d\grave{a}, dt) = \gamma(w, d\grave{a}, dt) = q_t(w, d\grave{a})dK_t \tag{2.3}$$

$$m^n(w, da, E, dt) = \gamma^n(w, da, dt) = q_t^n(w, da)dK_t \tag{2.4}$$

et converge faiblement vers une mesure de probabilité aléatoire $m(w, da, d\grave{a}, dt)$ sur $E \times E \times [0, T]$, tel que :

$$m(w, da, d\grave{a}, dt) = \gamma(w, da, dt)\delta_a(d\grave{a}).$$

Preuve Fixons $w \in \Omega$ tels que :

$$(q_t^n(w, da)dK_t)$$

converges faiblement vers :

$$q_t(w, da)dK_t, \quad \text{sur } E \times [0, T].$$

Grâce à la généralisation de théorème de représentation de Skorohod [26], on peut construire un espace de probabilité auxiliaire $\tilde{\Omega}$ et des variables aléatoires

$$X_w^n(\tilde{w}), X_w^\infty(\tilde{w}), T_w(\tilde{w})$$

avec des valeurs respectivement dans E, E, $[0, T]$, mesurablement dépend sur w, tels que :

$$(X_w^n(\tilde{w}), T_w(\tilde{w})) \quad \text{a de loi } q_t^n(w, da)dK_t,$$

$$(X_w^\infty(\tilde{w}), T_w(\tilde{w})) \quad \text{a de loi } q_t(w, da)dK_t,$$

et :

$$(X_w^n(\tilde{w})) \quad \text{converge pour tout } \tilde{w} \text{ de } \tilde{\Omega} \text{ vers } X_w^\infty(\tilde{w})$$

Alors :

$$(X_w^n(\tilde{w}), X_w^\infty(\tilde{w}), T_w(\tilde{w})) \quad \text{converge (partout) vers } (X_w^\infty(\tilde{w}), X_w^\infty(\tilde{w}), T_w(\tilde{w})).$$

La loi m^n de (X_w^n, X_w^∞, T_w) répond au problème.◄

Remarque 2-2-2 : La marginale en temps de m^n est la mesure prévisible dK_t, la projection duale prévisible de m^n peut être disintégré sous la forme

$$Q_t^n(da, d\grave{a})dK_t,$$

où Q^n est un noyau prévisible. (Il suffit pour appliquer le théorème désintégration pour les projections prévisibles duales des mesures aléatoires [21]).

Nous prendrons alors pour chaque fonction $\mathcal{P} \otimes \xi \otimes \xi-$mesurable f définie sur $\Omega \times [0,T] \times E \times E$,

$$E\left[\int_{[0,T]\times E^2} f(s,a,\grave{a})m^n(da,d\grave{a},ds)\right] = E\left[\int_{[0,t]\times E^2} f(s,a,\grave{a})Q_s^n(da,d\grave{a})dK_s\right]. \quad (2.5)$$

De plus, la seconde martingale de m^n est le processus prévisible (q_t),

$$Q_t^n(E, d\grave{a}) = q_t(d\grave{a}) \quad dK_t \otimes P - p.s.$$

Dans le même sens, la mesure prévisible m est disintégrée sous la forme :

$$Q_t(da, d\grave{a})dK_t,$$

où Q est un noyau prévisible.

Lemme 2-2-3 : Soit n fixé dans $\mathbb{N}$. Donnent une mesure aléatoire prévisible $Q_t^n(da, d\grave{a})dK_t$ sur $E \times E \times [0,T]$, elle existe sur une extension de l'espace de probabilité :

$$\left(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_t \otimes \tilde{\mathcal{F}}_t, P \otimes \tilde{P}\right)$$

une mesure martingale continue orthogonale $\hat{M}^n$ définie sur $E \times E \times [0,T]$, avec intensité

$$Q_t^n(da, d\grave{a})dK_t,$$

et avec deuxième martingale égale à M.

Preuve Ce résultat est exactement le théorème 1-6-1 de chapitre 1. On a supposé que :

$$Q_t^n(da, d\grave{a})dK_t = \hat{Q}_t^n(da, \grave{a})q_t(d\grave{a})dK_t \quad P - p.s,$$

est le noyau qui construit la mesure martingale $\hat{M}^n$, (sur une extension de Ω), et :

$$\hat{M}_t^n(f) = \int_0^t \int_E \hat{Q}_s^n(f, \grave{a})M(d\grave{a}, ds) + \int_0^t \int_{E\times E} (f(a, \grave{a}) - \hat{Q}_s^n(f, \grave{a}))R^n(da, d\grave{a}, ds)$$

où :

$$\hat{Q}_s^n(f, \grave{a}) = \int_E f(a, \grave{a})\hat{Q}_s^n(da, d\grave{a}). \blacktriangleleft$$

Preuve de théorème 2-1-1 On utilise naturellement la mesure martingale $\hat{M}^n$ construite précédemment.

La première mesure martingale de $\hat{M}^n$ définie une mesure martingale continue orthogonale M^n sur $E \times [0, T]$ comme suivant :

$$\forall A \in \xi, \quad \forall t \in [0, 1] :$$

$$M_t^n(A) = \int_0^t \int_E \hat{Q}_s^n(A, \grave{a})M(d\grave{a}, ds) + \int_0^t \int_{E\times E} (1_A(a) - \hat{Q}_s^n(A, \grave{a}))R^n(da, d\grave{a}, ds).$$

La suite des mesures martingales (M^n) approxime la mesure martingale M dans le sens de théorème 2-1-1 :

Considérez d'abord une fonction bornée φ définie sur E.

Selon les résultats ci-dessus, on a :

$$M_t^n(\varphi) = \int_0^t \int_{E\times E} \varphi(a)\hat{M}^n(da, d\grave{a}, ds) \quad \text{premier mesure martingale de } \hat{M}^n.$$

$$M_t(\varphi) = \int_0^t \int_{E\times E} \varphi(\grave{a})\hat{M}^n(da, d\grave{a}, ds) \quad \text{deuxième mesure martingale de } \hat{M}^n$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
E[(M_t^n(\varphi) - M_t(\varphi))^2] &= E\left[\left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^t \int_{E\times E} \varphi(a)\hat{M}^n(da, d\grave{a}, ds) \\ \displaystyle -\int_0^t \int_{E\times E} \varphi(\grave{a})\hat{M}^n(da, d\grave{a}, ds) \end{array}\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^t \int\limits_{E\times E} [\varphi(a) - \varphi(\grave{a})]\hat{M}^n(da, d\grave{a}, ds)\right)^2\right] \\
&= E\left[\int_0^t \int_{E\times E} [\varphi(a) - \varphi(\grave{a})]^2 \left\langle \hat{M}^n(da, d\grave{a}, ds)\right\rangle\right] \\
&= E\left[\int_0^t \int_{E\times E} [\varphi(a) - \varphi(\grave{a})]^2 Q_s^n(da, d\grave{a}, ds)\right] \\
&= E\left[\int_0^t \int_{E\times E} [\varphi(a) - \varphi(\grave{a})]^2 m^n(da, d\grave{a}, ds)\right]
\end{aligned}
$$

par la définition de la duel projection prévisible de m^n (2.5).

Selon au lemme 2-2-1, il tends vers 0 quand n tends vers l'infinie, utilisant la bornétude de φ et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.◀

La généralisation de ce résultat à la fonction prévisible ϕ continue dans $E-$variable est obtenu grâce au résultat suivant : il est prouvé dans [19] que la topologie faible sur $\mathcal{R}$ (espace des mesures aléatoires sur $E \times [0,T]$ ses projections sur $[0,T]$ est la mesure de Lebesgue) est le même comme la topologie stable, i.e. la topologie où la convergence est nécessite pour des fonctions mesurables bornées continues dans le $E-$variable.

Remarque 2-2-4 : De plus, par l'inégalité de Doob, on obtient que :

$$
E\left[\left(\sup_{t\le T}\left(M_t^n(\varphi) - M_t(\varphi)\right)\right)^2\right] \to 0, \quad \text{quand } n \to +\infty.
$$

Remarque 2-2-5 : La construction précédent implique en particulier que :

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,T] : \quad M_t^n(E) = M_t(E).
$$

2.3 Approximation par l'intégrale stochastique d'un mouvement Brownien

Soit M une mesure martingale continue orthogonale avec intensité $q_t(da)dt$, définie sur $E \times [0,1]$, où E est un ensemble compact. On a vu (chattering lemma) que la mesure aléatoire $q_t(da)dt$ définie sur $\Omega \times E \times [0,1]$ est approximé par une suite des mesures atomiques de la forme $\delta_{u^k(t)}(da)dt$, pour la topologie faible sur l'espace des mesures sur $E \times [0,1]$, et ce être vrai pour presque tout w de Ω.

Par théorème 2-1-1, elle existe une suite des mesures martingales continues orthogonales M^k avec intensité $\delta_{u^k(t)}(da)dt$ qui converge vers M.

Les mesures martingales M^k peut être représenté comme des intégrales stochastiques par rapport au même mouvement Brownien. Vraiment, on peut montré [proposition 1-3-1 chapitre 1] que pour chacun évènement A de E,

$$M_t^k(A) = \int_0^t 1_A(u_s^k)dm_s^k,$$

où m_s^k est une martingale continue définie par :

$$m_t^k = M_t^k(E).$$

Mais on a noté dans (remarque 2-2-5) que pour chaque :

$$k \in \mathbb{N}, \quad M_t^k(E) = M_t(E).$$

$M_.(E)$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale continue avec processus à variation quadratique t, ainsi est un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien (indépendant de k) qu'on aura dénoté par B.

On a finalement obtenu que pour une fonction continue bornée φ,

$$\forall t \in [0,1], \quad M_t^k(\varphi) = \int_0^t \varphi(u_s^k)dB_s,$$

et que :

$$\lim_{k\to+\infty} E\left[\left(\int_0^t \varphi(u_s^k)dB_s - M_t(\varphi)\right)^2\right] = 0.$$

Remarque 2-3-1 : Puis que, pour chacun fonction φ, $M_.(\varphi)$ est une martingale continue avec processus croissant

$$\int_0^t \left[\int_E \varphi^2(a)q_s(da)\right] ds,$$

$M_{.}(\varphi)$ peut être représenté comme une intégrale stochastique par rapport à le mouvement Brownien W^{φ} sous la forme :

$$\begin{aligned} M_t(\varphi) &= \int_0^t V_s^{\varphi} dW_s^{\varphi}, \\ \text{où} \quad V_s^{\varphi} &= \left(\int_E \varphi^2(a) q_s(da) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Il est clair que V^{φ} est non linéaire dans φ et ainsi le mouvement Brownien W^{φ} dépend sur φ.

L'intéressant de théorème 2-1-2 est de donné une approximation de $M_t(\varphi)$ dans $L^2(\Omega)$ par des intégrales stochastiques par rapport à un mouvement Brownien "canonique", qui est : non dépendu sur la fonction φ.

Remarque 2-3-2 : Dans le cas où le temps marginale de l'intensité de la mesure martingale n'est pas une mesure de Lebesgue, mais la mesure aléatoire dK_t, K est continue et croissant, le résultat semblable peut être obtenu grâce au changé de temps. On considère l'inverse de K_t :

$$\eta_t = \inf \{ s > 0, \quad K_s \geq t \},$$

η_t est continue et croissant de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

La fonction aléatoire N définie sur $\Omega \times \xi \times [0,1]$ par :

$$N_t(A) = M_{\eta_t}(A)$$

est alors une $\mathcal{F}_{\eta_t}-$mesure martingale avec intensité $q_{\eta_t}(da)dt$.

Selon au théorème 2-1-2, on peut définie un $\mathcal{F}_{\eta_t}-$mouvement Brownien $\tilde{B}$ et une suite des processus prévisibles $E-$estimé $(\tilde{u}^k)$ (pour la filtration $\mathcal{F}_{\eta_t}$) tel que pour chaque événement $A \in \xi$, la suite :

$$\int_0^t 1_A(\tilde{u}_s^k) d\tilde{B}_s$$

converge (pour chaque t) dans $L^2(\Omega)$ vers $N_t(A)$.

On déduire de cela que pour chaque fonction bornée continue φ,

$$\lim_{k \to +\infty} E\left[\left(\int_0^{k_t} \varphi(\tilde{u}_s^k) d\tilde{B}_s - M_t(\varphi) \right)^2 \right] = 0.$$

2.4 Application au contrôle optimal d'une diffusion avec coefficient de diffusion contrôlé

On étudie dans cette section l'existence d'un contrôle optimal pour une diffusion qui est solution de l'équation :

$$\begin{cases} dX_t^u = b(t, X_t^u, u_t)dt + \sigma(t, X_t^u, u_t)dB_t, \\ X_0^u = z \end{cases} \tag{2.6}$$

où B est un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien, b et σ sont des fonctions continues bornées, respectivement de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times E$ dans $\mathbb{R}^d$ et de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times E$ dans l'espace de $(d \times k)$ matrice, b et σ étaient uniformément Lipschitziennes continues sur $\mathbb{R}^d$ variable (on n'a pas besoin de la supposition de non dégénération sur σ), $z \in \mathbb{R}^d$, et le processus de contrôle u est $\mathcal{F}_t-$prévisible avec valeur dans l'ensemble métrique compact E. [On dénoté ensuit par $\mathcal{U}$ l'ensemble de chacun processus].

La fonction de coût J sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ est donné par :

$$J(z, u) = E\left[\int_0^1 h(s, X_s^u, u_s)ds + g(X_1^u)\right]$$

où les fonctions g et h sont supposé mesurables et bornées respectivement de $\mathbb{R}^d$ et de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times E$ vers $\mathbb{R}$. (On considère l'intervalle de temps $[0, 1]$ dans l'ordre d'appliqué directement le théorème 2-1-2, mais le résultat peut être généralisé évidemment pour tout intervalle de temps $[0, T]$).

L'objectif du contrôle est d'optimiser cette fonction de coût du processus u sur $\mathcal{U}$. On appelle : *fonction de valeur* la fonction :

$$V(z) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(z, u),$$

et *contrôle optimal* un contrôle qui réalise cet infinimum.

On va relaxer le modèle de contrôle, comme s'était expliqué dans l'introduction de [26]. Dans le chapitre 3 et [7], l'existence d'un contrôle optimal relaxé est prouvé plutôt facilement grâce à la compacité (pour la topologie faible) de l'ensemble des contrôles relaxés. Il est de plus montré que l'ensemble des lois des variables aléatoires $(dt\delta_{u_t}(da), X^u)$ est dense (quand $u \in \mathcal{U}$) dans l'ensemble des lois des variables aléatoires $(q_t(da)dt, X^q)$ sur $\mathcal{R} \times C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, sous les hypothèses d'unicités faibles des solutions des équations contrôles. L'égalité des fonctions de valeurs pour les problèmes des contrôles initiales et relaxés est alors obtenu. On remarque que aucune condition simple n'assure cette unicité en loi.

Grâce à la représentation trajectorielle des diffusions associée avec le modèle relaxé (dans des termes des mesures martingales), on verra obtenu unicité fort pour les solutions de l'équation contrôlé sous les hypothèses usuelles (continuité Lipschitzienne des coefficients) et verra donné un résultat d'approximation dans $L^2(\Omega)$ pour la diffusion relaxé X^q par une suite des diffusions contrôles X^{u^n} (modèle initiale), et la convergence des fonctions de coûts associées.

2.4.1 Description d'un modèle relaxé

On sait qu'en théorie de contrôle stochastique de diffusion et en absence des hypothèses supplémentaires de convexité sur les coefficients b et σ, le problème de contrôle stochastique optimal, en générale, ne possède pas de solution optimale.

Pour cela on injecte l'espace des contrôles admissibles $\mathcal{U}$ dans un espace plus large qui possède de bonnes propriétés de compacité et de convexité, cet espace est celui des contrôles relaxés noté $\mathcal{R}$, qu'on va définir.

Position du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré, $[0,T] \subset \bar{\mathbb{R}}_+$ est l'ensemble d'indices et $\mathcal{U}$ l'ensemble des contrôles admissibles à valeurs dans l'espace A, dont ce dernier est supposé d'être compact.

Soit $\mathcal{P}([0,T] \times A)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur $[0,T] \times A$, dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, dt. Cet ensemble muni de la topologie de la convergence faible des mesures, est un espace maîtrisable compact.

L'espace des contrôles relaxés $\mathcal{R}$

Définition 2-4-1 : *On appelle contrôle relaxé toute application mesurable :*

$$\begin{aligned} \mu(., da, dt) :\ & \Omega \rightarrow \mathcal{P}([0,T] \times A) \\ & w \mapsto \mu(w, da, dt) = \mu(da, dt). \end{aligned}$$

Notation ***2-4-2 :*** Dans tout la suite, on notera l'ensemble des contrôles relaxés par $\mathcal{R}$.

Définition 2-4-3 : *Le processus $(q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, définie pour tout $t \in [0,T]$ par :*

$$\begin{aligned} q_t :\ & \mathcal{R} \rightarrow P(A) \\ & \mu \mapsto q_t(\mu) = \mu_t, \end{aligned}$$

est appelé le processus canonique sur $\mathcal{R}$, et la filtration $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ définie par :

$$\gamma_t = \sigma(q_s, s \leq t),$$

pour tout $t \in [0,T]$, est dit la filtration canonique.

La topologie de l'espace des contrôles relaxés $\mathcal{R}$

L'espace $\mathcal{R}$ comme un ensemble de mesure est classiquement équipé de la topologie faible. On donne la définition de la convergence faible (ou convergence étroite).

Définition 2-4-4 : *Une suite des contrôles relaxés $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ est dit convergente vers $u \in \mathcal{R}$, si pour toute fonction continue à support compact sur $[0,T] \times A$ notée f, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,T]\times A} f(t,a)\mu^n(dt,da) = \int_{[0,T]\times A} f(t,a)\mu(dt,da).$$

Cependant, et comme tous les élément de $\mathcal{R}$ ont la même martingale sur $[0,T]$; qui est la mesure de Lebesgue, il est possible de modifier considérablement la convergence faible et d'affaiblir les hypothèses sur f en obtenant un autre genre de convergence, qui est la convergence stable, comme suit :

Proposition 2-4-5 : Supposons que (μ^n) converge vers μ dans $\mathcal{R}$. Alors, pour toute fonction mesurable :

$$f : [0,T] \times A \to \mathbb{R},$$

telle que pour tout $t \in [0,T]$, l'application :

$$\begin{aligned} f(t,.) : \quad & A \to \mathbb{R} \\ & a \mapsto f(t,a) \quad \text{est continue,} \end{aligned}$$

on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,T]\times A} f(t,a)\mu^n(dt,da) = \int_{[0,T]\times A} f(t,a)\mu(dt,da),$$

et ce genre de convergence est appelée : $<$*convergence stable*$>$.

La description d'un modèle relaxé

On verra relaxé le modèle par fait la dépendance dans les dynamiques linéaires sur le contrôle (dans un certaine sens, le modèle devenu simple) : l'opérateur de la diffusion contrôlé X^q (q est un contrôle relaxé : $q_t(da)dt \in \mathcal{R}$), est donné par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t^q f(X) &= \int_E \mathcal{L}_t^a f(X) q_t(da) \\ &= \int_E \left[\sum_{i=1}^d f'_{x_i}(X) b_i(t,X,a) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d f''_{x_i,x_j}(X) a_{ij}(t,X,a)\right] q_t(da)\end{aligned}$$

où : $a(t,X,a) = \sigma(t,X,a)\sigma^*(t,X,a)$.

Soit $(C, \mathfrak{C})$ l'espace des fonctions contiues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$ doté avec la filtration naturelle $(\mathfrak{C}_t)$, et on considère l'extension de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ définie par :

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times C; \quad \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathfrak{C}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_s = \cap_{s>t}(\mathcal{F}_s \otimes \mathfrak{C}_s).$$

Soit X_t un processus canonique sur C.

Par suivant Jacod-Memin [20], nous appellerons la solution du problème de martingale associée avec $\mathcal{L}^q$ une mesure de probabilité $\tilde{P}$ définie sur $\tilde{\Omega}$ tel que :

$$\forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^d); \quad f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \int_E \mathcal{L}_s^a f(X_s) q_s(w, da) ds \qquad (\mathcal{P})$$

est une $\tilde{P}$ martingale.

Si l'espace E [où le processus u prend ces valeurs] est un ensemble des points fini, $E = \{a_1, \ldots, a_N\}$ alors :

$$q_t(da) = \sum q_t^j \delta_{\{a_j\}},$$

où pour chaque t,

$$1 \geq q_t^j \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum q_t^j = 1.$$

On peut alors facilement prouvé que $\tilde{P}$ est un loi de processus X solution de l'E.D.S :

$$dX_t = \sum_{j=1}^N b(t, X_t, a_j) q_t^j dt + \sum_{j=1}^N \sigma(t, X_t, a_j)(q_t^j)^{\frac{1}{2}} dW_t^j,$$

où $(W^j)_{j=1}^N$ est un mouvement Brownien $N-$dimensionnale définie sur une extension de l'espace $\tilde{\Omega}$. (Cf : [23], [7], chapitre 3).

Le processus M définie par :

$$M(A \times [0,t]) = \sum_{j=1}^N \int_0^t (q_s^j)^{\frac{1}{2}} 1_{\{a_j \in A\}} dW_s^j$$

peut être vu comme une mesure martingale et cette notion nous permet de donné une représentation trajectorielle des solutions de $(\mathcal{P})$.

Le suivant résultat est prouvé dans ([10] théorème IV2) :

Théorème 2-4-6 :

1) *$\tilde{P}$ est la loi d'un processus adapté $d-$dimensionnale et continue X sur une extension de l'espace $\tilde{\Omega}$, solution de l'E.D.S :*

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{1, ..., d\}\,; \\ &dX_t^i = \sum\nolimits_{k=1}^{d} \int_E \sigma_{ik}(t, X_t, a) M^k(da, dt) + \int_E b_i(t, X_t, a) q_t(da) dt \qquad (E') \\ &X_0 = Z \end{aligned}$$

où $M = (M^k)_{k=1}^d$ est une famille de $d-$mesures martingales continues fortements orthogonales avec intensité $q_t(da)dt$.

2) *Si les fonctions $\sigma(t, X, a)$ et $b(t, X, a)$ sont continues Lipschitziennes sur X, uniformément en (t, a), on a l'existence fort et l'unicité pour les solutions de $(\grave{E})$, dans le sens que l'existence et l'unicité trajectorielle sont obtenu pour donné une mesure martingale M.*

2.4.2 Approximation d'un modèle relaxé

Les théorèmes que nous allons énonces maintenant, nous affirme que le problème de contrôle relaxé est vraiment une extension du problème de contrôle ordinaire et ceci en démontrant que l'infinimum de la fonction de coût pris permis tous les contrôles relaxés $q \in \mathcal{R}$, est le même que celui pris permis tous les contrôles ordinaires $u \in \mathcal{U}$.

Lemme 2-4-7 (*chattering lemma*) **:** Soit q un contrôle relaxé, alors elle existe une suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des contrôles ordinaires admissibles $((u^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U})$ telle que :

$$q_t^n(da)dt \quad \text{converge vers} \quad q_t(da)dt,$$

et ceci en posant : $q_t^n(da)dt = \delta_{u_t^n}(da)dt.$

En d'autre termes, pour toute fonction f telle que :

$$\begin{aligned} f :\ & [0, T] \times \mathbb{R}^m \times P(A) \to \mathbb{R} \\ & (t, X, q_t) \mapsto f(t, X, q_t) \end{aligned}$$

est continue sur $[0, T] \times P(A)$ et linéaire en q_t, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t f(s,X_s,q_s^n)ds=\int_0^t f(s,X_s,q_s)ds \quad \text{uniformément en } t\in[0,T].$$

Preuve : voir fleming [11].◄

Théorèmes d'approximation d'un modèle relaxé

Soit q un contrôle relaxé et M une mesure martingale continue $d-$dimensionnale avec intensité q. On dénoté par $X=X^q$ la solution de l'E.D.S associé $(\grave{E})$.

Soit (u^n) une suite des processus prévisibles $E-$estimé définie dans le lemme 2-4-7.

On verra prouvé le théorème d'approximation suivant :

Théorème 2-4-8 : *Elle existe une suite des diffusions* (X^n) *solutions des E.D.S* (2.6) *associée respectivement avec les contrôles* u^n *tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[\sup_{t\in[0,1]}(X_t^n-X_t)^2\right]=0.$$

Preuve Dans le théorème 2-1-2, il était prouvé que la suite des mesures martingales $d-$dimensionnelle M^n définie par :

$$M_t^n(A)=\int_0^t 1_A(u_s^n)dB_s,$$

où B est un mouvement Brownien standard $d-$dimensionnale, converge vers M dans $L^2(\Omega)$.

On introduire le processus X^n solutions des E.D.S (È) associée par M^n.
On montre la convergence dans $L^2(\Omega)$ pour chacun coordonné de processus .i.e.

$$\forall i\in\{1,...,d\}: \quad X_t^{n,i}=\sum_{k=1}^d\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s^n,a)M^{n,k}(da,ds)$$
$$+\int_0^t\int_E b_i(s,X_s^n,a)\delta_{u_s^n}(da)ds.$$

et :

$$X_t^i=\sum_{k=1}^d\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s,a)M^k(da,ds)$$
$$+\int_0^t\int_E b_i(s,X_s,a)q_s(da)ds.$$

Donc, soit $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
E\left[\left(X_t^{n,i}-X_t^i\right)^2\right] &= E\left[\left(\begin{array}{c}\sum_{k=1}^{d}\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s^n,a)M^{n,k}(da,ds)\\ +\int_0^t\int_E b_i(s,X_s^n,a)\delta_{u_s^n}(da)ds\\ -\sum_{k=1}^{d}\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s,a)M^{k}(da,ds)\\ -\int_0^t\int_E b_i(s,X_s,a)q_s(da)ds\end{array}\right)^2\right]\\
&\leq 2E\left\{\left[\sum_{k=1}^{d}\left(\begin{array}{c}\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s^n,a)M^{n,k}(da,ds)\\ -\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s,a)M^{k}(da,ds)\end{array}\right)\right]^2\right\}\\
&\quad +2E\left[\left(\begin{array}{c}\int_0^t\int_E b_i(s,X_s^n,a)\delta_{u_s^n}(da)ds\\ -\int_0^t\int_E b_i(s,X_s,a)q_s(da)ds\end{array}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$,

$$\begin{aligned}
E\left[\left(X_t^{n,i}-X_t^i\right)^2\right] &\leq 2d\sum_{k=1}^{d}E\left[\left(\begin{array}{c}\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s^n,a)M^{n,k}(da,ds)\\ -\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s,a)M^{k}(da,ds)\end{array}\right)^2\right]\\
&\quad +2E\left[\left(\begin{array}{c}\int_0^t\int_E b_i(s,X_s^n,a)\delta_{u_s^n}(da)ds\\ -\int_0^t\int_E b_i(s,X_s,a)q_s(da)ds\end{array}\right)^2\right] \qquad (*)
\end{aligned}$$

En ajoutant et en retranche les termes :

$$\int_0^t \int_E \sigma_{ik}(s, X_s, a) M^{n,k}(da, ds)$$

dans le première terme de droit, et :

$$\int_0^t \int_E b_i(s, X_s, a)\delta_{u_s^n}(da)ds = \int_0^t b_i(s, X_s, u_s^n)ds$$

dans le deuxième terme de droit, et on utilise :

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2;$$

alors (*) devient :

$$E\left[\left(X_t^{n,i} - X_t^i\right)^2\right] \leq K \sum_{k=1}^d E\left[\begin{pmatrix} \int_0^t \int_E \sigma_{ik}(s, X_s^n, a) M^{n,k}(da, ds) \\ -\int_0^t \int_E \sigma_{ik}(s, X_s, a) M^{n,k}(da, ds) \end{pmatrix}^2\right]$$

$$+K \sum_{k=1}^d E\left[\begin{pmatrix} \int_0^t \int_E \sigma_{ik}(s, X_s, a) M^{n,k}(da, ds) \\ -\int_0^t \int_E \sigma_{ik}(s, X_s, a) M^{k}(da, ds) \end{pmatrix}^2\right]$$

$$+KE\left[\begin{pmatrix} \int_0^t \int_E b_i(s, X_s^n, a)\delta_{u_s^n}(da)ds \\ -\int_0^t b_i(s, X_s, u_s^n)ds \end{pmatrix}^2\right]$$

$$+KE\left[\begin{pmatrix} \int_0^t b_i(s, X_s, u_s^n)ds \\ -\int_0^t \int_E b_i(s, X_s, a) q_s(da)ds \end{pmatrix}^2\right]$$

En pose :

$$E\left[\left(X_t^{n,i}-X_t^i\right)^2\right] \leq K\left\{\sum_{k=1}^{d}\{T_1+T_2\}+T_3+T_4\right\}.$$

où K est une constant change de ligne à l'autre.

$$\begin{aligned}
T_1 &= E\left[\left(\begin{array}{c} \int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s^n,a)M^{n,k}(da,ds) \\ -\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s,a)M^{n,k}(da,ds) \end{array}\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^t\int_E \left[\sigma_{ik}(s,X_s^n,a)-\sigma_{ik}(s,X_s,a)\right]M^{n,k}(da,ds)\right)^2\right] \\
&= E\left[\int_0^t\int_E \left[\sigma_{ik}(s,X_s^n,a)-\sigma_{ik}(s,X_s,a)\right]^2 \delta_{u_s^n}(da)ds\right]
\end{aligned}$$

puis que $\delta_{u_s^n}(da)ds$ est l'intensité de $M^{n;k}$.

$$T_1 \leq K_\sigma^2\int_0^t E\left[(X_s^n-X_s)^2\right]ds$$

où K_σ est une constant Lipschitzienne de σ.

$$T_2 = E\left[\left(\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s,a)M^{n,k}(da,ds)-\int_0^t\int_E \sigma_{ik}(s,X_s,a)M^{k}(da,ds)\right)^2\right]$$

T_2 tends alors vers 0 quand n tends vers l'infinie, par définition des mesures martingales M^n.

$$\begin{aligned}
T_3 &= E\left[\left(\int_0^t\int_E b_i(s,X_s^n,a)\delta_{u_s^n}(da)ds-\int_0^t\int_E b_i(s,X_s,a)\delta_{u_s^n}(da)ds\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^t b_i(s,X_s^n,u_s^n)ds-\int_0^t b_i(s,X_s,u_s^n)ds\right)^2\right] \\
&\leq K_b^2\int_0^t E\left(X_s^n-X_s\right)^2 ds
\end{aligned}$$

où K_b est une constant Lipschitzienne de b.

$$T_4 = E\left[\left(\int_0^t \int_E b_i(s, X_s, a)\delta_{u_s^n}(da)ds - \int_0^t \int_E b_i(s, X_s, a)q_s(da)ds\right)^2\right]$$

utilisons la convergence dominée, T_4 tends vers 0 ; quand n tends vers l'infinie, puis que $\delta_{u_s^n}(da)ds$ tends vers $q_s(da)ds$ prèsque sûrement et b bornée "lemme 2-4-7".

On a montre finallement que :

$$\begin{aligned} E\left[\left(X_t^{n,i} - X_t^i\right)^2\right] &\leq K\left[\tilde{K}\int_0^t E\left[(X_s^n - X_s)^2\right] ds + K_n\right] \\ \forall i &\in \{1, ..., d\}, \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} K_n = 0 \\ \text{et } \tilde{K} &= \max(K_\sigma^2, K_b^2) \end{aligned}$$

<u>Lemme de Gronwall</u> : Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$g(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t g(s)ds, \quad \text{avec } \alpha \geq 0 \quad \text{et } \beta \geq 0$$

où α et β sont des constantes.

Alors :

$$g(t) \leq \alpha \exp(\beta t). \blacktriangleleft$$

Alors :

$$E\left[\left(X_t^{n,i} - X_t^i\right)^2\right] \leq K \times K_n \exp(K.\tilde{K}t)$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} E\left[(X_t^n - X_t)^2\right] = 0.$$

Par l'inégalité de Doob et remarque 2-2-4, on peut de plus obtenir la convergence uniforme sur $t \in [0, 1]$:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\in[0,1]} (X_t^n - X_t)^2\right] = 0. \blacktriangleleft$$

Théorème 2-4-9 : *Soit (J_n) la suit des fonctions de coûts associées avec (X^{u^n}) :*

$$J_n(z,u) = E\left[\int_0^1 h(s, X_s^{u^n}, u_s^n)ds + g(X_1^{u^n})\right]$$

les fonctions h et g sont supposés continues et bornées respectivement sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times E$ et sur $\mathbb{R}^d$.

Alors elle existe une sous-suite (J_{n_k}) de la suite (J_n) qui converge vers J quand n tends vers l'infinie, où J est la fonction de coût associée avec la diffusion relaxé :

$$J(z,q) = E\left[\int_0^1 \int_E h(s, X_s^q, a) q_s(da) ds + g(X_1^q)\right].$$

Preuve Puis que X_t^n converge vers X_t dans $L^2(\Omega)$, uniformément dans $t \in [0,1]$, elle existe une sous-suite $X_t^{n_k}$ qui converge vers X_t pour chaque $t \in [0,1]$, presque sûrement sur w :

$$\begin{aligned}
|J_{n_k}(z,u) - J(z,u)| &= \left| E\left[\begin{array}{c} \int_0^1 h(s, X_s^{n_k}, u_s^{n_k}) ds - \int_0^1 \int_E h(s, X_s, a) q_s(da) ds \\ + g(X_1^{n_k}) - g(X_1) \end{array} \right] \right| \\
&\leq E\left[\left| \begin{array}{c} \int_0^1 \int_E h(s, X_s^{n_k}, a) \delta_{u_s^{n_k}}(da) ds \\ - \int_0^1 \int_E h(s, X_s, a) q_s(da) ds + g(X_1^{n_k}) - g(X_1) \end{array} \right| \right]
\end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant :

$$\int_0^1 \int_E h(s, X_s, a) \delta_{u_s^{n_k}}(da) ds = \int_0^1 h(s, X_s, u_s^{n_k}) ds$$

$$|J_{n_k}(z,u) - J(z,u)| \leq E\left[\left| \begin{array}{c} \int_0^1 \int_E \left[h(s, X_s^{n_k}, a) - h(s, X_s, a)\right] \delta_{u_s^{n_k}}(da) ds \\ + \int_0^1 \int_E h(s, X_s, a) \delta_{u_s^{n_k}}(da) ds \\ - \int_0^1 \int_E h(s, X_s, a) q_s(da) ds + g(X_1^{n_k}) - g(X_1) \end{array} \right| \right]$$

$$|J_{n_k}(z,u)-J(z,u)| \leq \quad E\left[\int_0^1\int_E |h(s,X_s^{n_k},a)-h(s,X_s,a)|\,\delta_{u_s^{n_k}}(da)ds\right]$$

$$+E\left[\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1\int_E h(s,X_s,a)\delta_{u_s^{n_k}}(da)ds \\ \displaystyle-\int_0^1\int_E h(s,X_s,a)q_s(da)ds\end{array}\right|\right]$$

$$+E\left[|g(X_1^{n_k})-g(X_1)|\right]$$

Le première (resp : le troisième) partie de terme droit tends vers 0, par la continuité

et la bornétude de la fonction h (resp : de la fonction g), le deuxième partie tends vers 0 par la définition de la suite u^{n_k} (h était borné, on utilise la convergence dominée).◄

Remarque 2-4-10 : L'égalité des fonctions de valeurs pour les problèmes de contrôle initiale et relaxé est alors un corollairement immédiate de théorème 2-4-9.

Chapitre 3

Méthodes de compactification dans le contrôle des diffusions dégénérées : Existence d'un contrôle optimal

3.1 Introduction à la notion de contrôle relaxé

On présente une généralisation de la notion de contrôle. Bien sûr, un problème de contrôle n'a pas nécessairement de solution. On commence par un exemple célèbre [6].

3.1.1 Un exemple

Considérons $U = \{-1, 1\}$ et des fonctions continues par morceau $u : [0, 1] \to U$ (les contrôles).

Le dynamique du problème est donnée par l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_t^u}{dt} = u_t \\ x_0^u = 0 \end{cases}$$

et le coût associé au problème est : $J(u) = \displaystyle\int_0^1 (x_t^u)^2 \, dt.$

A) $\inf\limits_u J(u) = 0.$

Considérons un entie $n \in \mathbb{N}^*$ et prenons :

$$u_n = (-1)^k \quad \text{si} \quad \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Alors, clairement, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\frac{dx_t^{u_n}}{dt} = u_n(t) \iff x_t^{u_n} - x_0^{u_n} = \int_0^t u_n(s) \, ds$$

et puis que $x_0^{u_n} = 0$, alors :

$$x_t^{u_n} = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (-1)^k \, ds = (-1)^k \frac{1}{n}.$$

Donc :

$$|x_t^{u_n}| = \left| (-1)^k \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{puis que} \quad \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

et alors $J(u) \leq \dfrac{1}{n^2}$.

B) Il n'y a pas un u tel que $J(u) = 0$.

Il est évident puis qu'il implique que $x_t^u = 0$, $\forall t$ et alors $u_t = 0$ qu'est impossible.

Si on analyse l'exemple précédent, on peut comprendre où est la difficulté : est le fait que la suite (u_n) manque de limite dans l'espace des contrôles, la limite qu'il faut être le candidat naturel d'optimalité. Alors on cherche un espace où elle existe cette limite. Identifier $u_n(t)$ avec la mesure de Dirac sur U : $\delta_{u_n(t)}(du)$. Mettre :

$$q_n(dt, du) = \delta_{u_n(t)}(du) \, dt$$

q_n est une mesure sur l'espace $[0,1] \times U$.

Lemme 3-1-1 : q_n converge faiblement vers :

$$\tilde{q}(dt, du) = \frac{1}{2} [\delta_{-1} + \delta_1] (du) \, dt.$$

Preuve Prendre f une fonction continue sur $[0,1] \times U$ (bien sûr seulement la continuité sur $[0,1]$ qui est significatif).

On a :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times U} f(t,u) \, q_n(dt, du) &= \int_{[0,1]\times U} f(t,u) \, \delta_{u_n(t)}(du) \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(t, (-1)^k\right) dt. \end{aligned}$$

Supposé premièrement que n est paire : $n = 2m$.

Quand $t \to f(t,1)$ et $t \to f(t,-1)$ sont continues sur $[0,1]$, donc uniforméments continues. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un $M > 0$ tels que :

$$\forall m \geq M; \quad |f(t,u) - f(s,u)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |t-s| < \frac{1}{m},$$

où u est n'importe le quel 1 ou -1.

Fixé $m \geq M$.

Alors, pour chaque $\quad j = 0, ..., m-1$,

$$\left| \int_{\frac{2j}{2m}}^{\frac{2j+1}{2m}} f(t,u)\, dt - \int_{\frac{2j+1}{2m}}^{\frac{2j+2}{2m}} f(t,u)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{2j}{2m}}^{\frac{2j+1}{2m}} f(t,u)\, dt + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{2j+1}{2m}}^{\frac{2j+2}{2m}} f(t,u)\, dt &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{2j}{2m}}^{\frac{2j+2}{2m}} f(t,u)\, dt \\ &= \int_0^1 f(t,u)\, dt \end{aligned}$$

et :

$$\left| \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{2j}{2m}}^{\frac{2j+1}{2m}} f(t,u)\, dt - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{2j+1}{2m}}^{\frac{2j+2}{2m}} f(t,u)\, dt \right| < \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2m}.m = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$\left| \sum\nolimits_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{2j}{2m}}^{\frac{2j+1}{2m}} f(t,u)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t,u)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{et} \quad \left| \sum\nolimits_{j=0}^{m-1} \int_{\frac{2j+1}{2m}}^{\frac{2j+2}{2m}} f(t,u)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t,u)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors :

$$\left| \sum_{j=0}^{2m-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(t, (-1)^k\right) dt - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f(t,1)\, dt + \int_0^1 f(t,-1)\, dt \right] \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

i.e

$$\left| \int_{[0,1]\times U} f(t,u)\, q_n(dt,du) - \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \int_{[0,1]\times U} f(t,u)\, \delta_1(du)\, dt \\ + \int_{[0,1]\times U} f(t,-1)\, \delta_{-1}(du)\, dt \end{array} \right] \right| < \varepsilon.$$

Le cas n impair est marché dans le même sens.◄

Maintenant, on peut définie un "nouvel" problème de contrôle associé à une tell mesure q, qui est appelé un contrôle relaxé.

Considérons le dynamique :

$$x_t^q = x_0 + \int_0^t \int_U u.q\,(ds,du)$$

et le coût associé est, comme précédent :

$$J(q) = \int_0^1 \left(x_t^q\right)^2 dt.$$

Alors il est clair que le précédent problème de contrôle est généralisé par le problème présenté par prendre des mesures q de la forme :

$$q(dt,du) = \delta_{u_t}(du)\, dt.$$

De plus, si :

$$\tilde{q}(dt,du) = \frac{1}{2}\left[\delta_{-1}(du) + \delta_1(du)\right] dt$$

on a : $J(\tilde{q}) = 0$ et aussi le nouvel problème a $\tilde{q}$ comme une solution optimale.

3.1.2 Contrôles relaxés

On peut prendre comme contrôle tout les mesures $q(dt,du)$. De plus pour notre propos qui est de prouver l'existence d'un contrôle optimal, on a dans l'esprit de restrictif à l'espace compact contenir les contrôles "classiques" (par le cas d'identification de [25] section 1).

Définition 3-1-2 *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$. Un contrôle relaxé avec des valeurs dans U est une mesure q sur $[0,T] \times U$ tel que la projection sur $[0,T]$ est la mesure de Lebesgue.*

S'il existe $u : [0,T] \to U$ tel que :

$$q(dt, du) = \delta_{u_t}(du)\, dt$$

q est identifié avec (u_t) et d'être un contrôle de processus.

Proposition 3-1-3 : Soit q un contrôle relaxé avec des valeurs dans U. Alors, pour tout $t \in [0,T]$, elle existe une mesure de probabilité q_t sur U tel que :

$$q(dt, du) = dtq_t(du).$$

La preuve est une application du théorème de Fubini. La précédent proposition (3-1-3) nous parmi d'interprète mieux que ce qu'est un contrôle relaxé.

Dans le contrôle de processus, au temps t, on assignons le valeur u_t. Dans le contrôle relaxé, le valeur "aléatoire" choisir sur l'espace U avec la distribution de probabilité $q_t(du)$.

Un autre intéresse de proposition (3-1-3) est qu'on peut introduire une décomposition canonique des contrôles relaxés.

Définition 3-1-4 : *Soit $\mathcal{R}$ l'espace des contrôles relaxés sur U. Soit $\alpha \in \mathcal{R}$. Il existe par proposition (3-1-3) un processus (α_s) avec valeurs dans l'ensemble des mesures de probabilités dans U et tel que :*

$$\alpha(ds, du) = ds\alpha_s(du).$$

Le processus (q_t) définie sur $\mathcal{R}$, qui associé le processus (α_t) à α est dit le processus canonique sur $\mathcal{R}$.

La filtration $\mathcal{V}_t = \sigma(q_s, s \leq t)$ est dit la filtration canonique.

Remarque 3-1-5 : Il n'est pas dur de voir que $\mathcal{V}_t$ est généralisé par des contrôles relaxés tel que :

$$q_{[t,T]\times U}(dt, du) = \delta_{u_0}(du)\, dt$$

où u_0 est un point fixé arbitraire dans U.

3.1.3 Topologie sur l'espace $\mathcal{R}$

$\mathcal{R}$, comme ensemble des mesures, est classiquement équipé avec la topologie faible.

Définition 3-1-6 : *Une suite (q_n) dans $\mathcal{R}$ est dit converge vers $q \in \mathcal{R}$ si pour tout fonction continue avec support compact f sur $[0,T] \times \mathcal{R}$,*

$$\int f(t,u)\, q_n(dt,du) \to \int f(t,u)\, q(dt,du).$$

Cette convergence est par définition valide seulement pour les fonctions continues. Cependant, comme toutes les mesures sur $\mathcal{R}$ ont les mêmes martingales sur $[0,T]$ (mesure de Lebesgue), il est possible de l'améliorer considérablement.

Proposition 3-1-7 : Supposé $q_n \to q$ dans $\mathcal{R}$.

Alors, pour tout fonction mesurable $f(t,u)$ tels que $\forall t \in [0,T]$, $u \to f(t,u)$ est continue, on a :

$$\int f(t,u)\, q_n(dt,du) \to \int f(t,u)\, q(dt,du)$$

"Convergence stable".

Pour la preuve, voir [19]. ◄

Le suivant résultat nous montrons que l'ensemble des contrôles relaxés a des propriétés de compacités intéressants.

Proposition 3-1-8 : Supposé U est un ensemble compact. Alors $\mathcal{R}$ est compact.

3.2 Solution faibles des E.D.S. et les problèmes de martingales

Quand on étude le problème de contrôle, on a besoin d'estimé le coût qui est une fonction des processus (u_t) et (x_t), donc, seulement la distribution du processus (u_t, x_t) est important. Alors, la formulation qu'on aura utilisé seulement ses distributions doit être plus s'approprier à notre but. Et, en fait, les solutions faibles sont des solutions "en distributions". Il y a aussi une autre raison moins immédiate.

Considérons une équation contrôlée de la forme générale :

$$dX_t^u = b(t, u_t, X_t)\, dt + \sigma(t, u_t, X_t)\, dB_t.$$

Observons que cet cas inclura le cas déterministe (où $\sigma = 0$). On a vu que tel problème (avec un coût donné comme précédent) n'à pas nécessairement une solution. En cas déterministe, on a introduit les contrôles relaxés qui sont des contrôles à valeurs mesurés, et l'équation d'état devient :

$$dX_t^q = \left[\int_U b\left(t, a, X_t\right) q_t\left(da\right)\right] dt.$$

Si on veut faire aussi avec l'équation stochastique, on a un problème par ce que nous non connu pas comment l'accorder avec l'intégrale stochastique. Si on essayons le chois "naturel" et écrites un expression tel que :

$$\left[\int_U \sigma\left(t, a, X_t\right) q_t\left(da\right)\right] dB_t$$

supposé qu'il vérifie les conditions de mesurabilités nécessites, apaiser bientôt qu'on peut pas faire aucun chose avec au. Vraiment supposé que $q^n\left(dt, da\right)$ converge vers $q\left(dt, da\right)$. On a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
& E\left(\left[\int_0^T \int_U \sigma\left(t, a, X_t\right) q_t\left(da\right) dB_t - \int_0^T \int_U \sigma\left(t, a, X_t\right) q_t^n\left(da\right) dB_t\right]^2\right) \\
= \; & E\left(\left[\int_0^T \int_U \sigma\left(t, a, X_t\right)\left(q_t\left(da\right) - q_t^n\left(da\right)\right) dB_t\right]^2\right) \\
= \; & E\left(\int_0^T \left[\int_U \sigma\left(t, a, X_t\right)\left(q_t\left(da\right) - q_t^n\left(da\right)\right)\right]^2 \left(dB_t\right)^2\right) \\
= \; & E\left(\int_0^T \left[\int_U \sigma\left(t, a, X_t\right)\left(q_t\left(da\right) - q_t^n\left(da\right)\right)\right]^2 dt\right)
\end{aligned}$$

et nous somme pas capable de dite aucun chose supplémentaire. On vois que la formulation n'est pas satisfait. Donc, il est intéressé d'être capable de formuler le problème sans utiliser aucune intégrale stochastique. Il sera le rôle du problème de martingale.

3.2.1 Solution faible d'équation différentielle stochastique

On considère deux fonctions $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables et $z \in \mathbb{R}$.

Définition 3-2-1 : *Une solution faible d'une équation différentielle stochastique (formule)*

$$(EDS)\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dW_t \\ X_0 = z \end{cases}$$

est un élément $\left(\Omega, \left(\mathcal{F}_t\right), P, \left(B_t\right)_{t\geq 0}, \left(X_t\right)_{t\geq o}\right)$ *où :*

i) $\left(\Omega, \left(\mathcal{F}_t\right), P\right)$ *est un espace filtré.*

ii) $\left(B_t\right)_{t\geq 0}$ *est un* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ *mouvement Brownien sur* Ω.

iii) $\left(X_t\right)_{t\geq o}$ *est une solution fort de l'équation :*

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t \\ X_0 = z. \end{cases}$$

Une paraître immédiatement qu'en solution faible l'espace de probabilité ni le mouvement Brownien sont prescrits. La solution est donc l'élément d'ensemble

$$\left(\Omega, \left(\mathcal{F}_t\right), P, \left(B_t\right)_{t\geq 0}, \left(X_t\right)_{t\geq o}\right).$$

Bien sûr, tout solution fort d'une équation est une solution faible : l'espace et le mouvement Brownien restent juste les même.

L'intéresse de cette notion est que l'inverse n'est pas juste : il y a des équations qui ont des solutions faibles mais non fort (voir [18]). Ceci n'étonne pas vraiment, comme condition sur les coefficients de l'équation (notamment Lipschitzienne) sont tout à fait restrictif pour obtenir une solution forte.

Théorème 3-2-2 : *Supposé que* b *et* σ *sont des fonctions bornées mesurables, continues en* x *pour chaque* $t \geq 0$.

Alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$, *elle existe une solution faible de l'équation (EDS).*

Pour la preuve, voir [34], thm 6.1.7 ou [18].◄

3.2.2 Espaces canoniques et problèmes de martingales

La formulation précédente est quelque peu désagréable par ce que nous ne savons pas rechercher l'espace Ω et le mouvement Brownien (B_t) défini là-dessus. En fait, ce qui est réellement d'intérêt à nous est seulement (X_t) (ou même meilleur, la distribution de (X_t)). Ainsi, il pourrait être fait par des problèmes de martingales.

On introduit le générateur associé au précédents fonctions bornées continues b et σ. Et l'opérateur :

$$Lf(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + b(t,x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

où f est une fonction de $C_b^{1,2}$.

On peut facilement vérifié par la formule d'Itô que si

$$\left(\Omega, (\mathcal{F}_t), P, (B_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq o}\right)$$

est une solution faible de (EDS), alors pour tout $f \in C_b^{1,2}$

$$f(t, X_t) - \int_0^t Lf(s, X_s)\, ds$$

est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

Définition 3-2-3 : *L'espace canonique* $\boldsymbol{C}$ *est l'ensemble des fonctions continues de* $\mathbb{R}_+$ *vers* $\mathbb{R}$.

(x_t) le processus canonique sur $\boldsymbol{C}$ est définie par $x_t(f) = f(t)$. La filtration canonique est $\mathcal{C}_t = \sigma(x_s, s \leq t)$.

La distribution de (X_t) est donc une mesure de probabilité sur $\boldsymbol{C}$.

Et, si $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t), P, (B_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq o}\right)$ est une solution faible de (EDS), alors la distribution R de (X_t) et tel que pour tout $f \in C_b^{1,2}$, le processus définie sur $\boldsymbol{C}$ par :

$$f(t, x_t) - \int_0^t Lf(s, x_s)\, ds$$

est une $\mathcal{C}_t-$martingale sous la probabilité R. Il est la réécriture de la précédente propriété de martingale.

On introduit la définition suivante :

Définition 3-2-4 : *Une mesure de probabilité R sur $\boldsymbol{C}$ est dit une solution de problème de martingale associé avec l'opérateur L si $\forall f \in C_b^{1,2}$, sous R*

$$f(t, x_t) - \int_0^t Lf(s, x_s)\, ds \quad \textit{est une } \mathcal{C}_t - \textit{martingale.}$$

Nous avons juste vu que cela à n'importe quelle solution faible d'(EDS) est naturellement associé une solution au problème de martingale. En fait, l'inverse est également vrai et il y a une correspondance un- à- un entre les solutions faibles et les solutions du problème de martingale.

Théorème 3-2-5 : *Supposé que R est une solution du prolème de martingale. Alors elle existe une solution $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t), P, (B_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq o}\right)$ de (EDS) tel que X_t a de distribution R.*

Pour la preuve voir [18] thm 2.7.1.◄

La raison pour laquelle la formulation de problème de martingale est très plaisante est qu'elle permet d'obtenir des résultats de limite facilement. Au-dessous est donné un résultat de convaincant de cette manière.

Proposition 3-2-6 : Supposons que b et σ sont bornées et continues en x. Alors l'ensemble des solutions du problème de martingale est fermé.

Preuve Soit (R_n) une suite des solutions du problème de martingale, converge vers R. On a prouvé que sous R, pour tout $f \in C_b^{1,2}$;

$$f(t, x_t) - \int_0^t Lf(s, x_s)\, ds \quad \text{est une martingale.}$$

Soit $r < t$.
Prend h une fonction continue bornée $\mathcal{C}_r$ mesurable sur ***C.***
Alors, pour tout n,

$$R_n\left(\left[f(t, x_t) - \int_0^t Lf(s, x_s)\, ds\right] h\right) = R_n\left(\left[f(r, x_r) - \int_0^r Lf(s, x_s)\, ds\right] h\right).$$

Maintenant, comme $\left[f(u, x_u) - \int_0^u Lf(s, x_s)\, ds\right] h$ est une fonction bornée continue sur ***C,*** le précédent égalité tends vers la limite avec remplacé R_n par R et ce qu'on voulons.◄

Théorème 3-2-7 : *Supposons que b et σ sont bornées, continues en x, alors la solution du problème de martingale définie un ensemble compact des mesures de probabilités sur **C.***

3.3 Notations et hypothèses

On concerne la par le contrôle de la solution d'une équation stochastique de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b\,(t, x_t, u_t)\, dt + \sigma\,(t, x_t, u_t)\, dB_t, \quad \text{si} \quad t > r \\ x_r = z, \quad \text{si} \quad t \leq r \end{cases} \tag{E^0}$$

Que nous exigeons le processus de contrôle (u_t) pour être $A-$estimé, A étant un espace métrique compact donné, appelé *l/espace d/action*.

L'objet est de *maximiser un coût* [1]de la forme :

$$J\,(r, z, u) = E \int_r^T h\,(s, x_s, u_s)\, ds + g(x_T);$$

où le temps terminal T est fixe. La fonction h est le coût instantané, et la fonction g est le coût terminal.

Nous donnons maintenant toutes les propriétés des fonctions à employer. Ces hypothèses ne sont pas les plus faibles, mais elles nous permettons d'établir sans trop de difficulté la plupart des résultats.

Dans toute cette partie, nous faisons les prétentions suivantes sur les fonctions données :

$$\begin{aligned} &\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times A \to (d \times k) \quad \text{matrice} \\ &b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d \\ &h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R} \\ &g : \qquad \mathbb{R}^d \qquad \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

sont des fonctions bornées mesurables.

(3.3.1) σ et b sont toujoure continues par rapport au couple (x, a).

(3.3.2) On utilise le générateur infinitésimal associé avec l'équation stochastique (E^0) défine sur l'espace $C_b^{1,2}$, i.e. l'ensemble de

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

tel que f a un premier dérivé de temps continue borné, et des dérivations spatiaux continues bornés d'ordre moins ou égale à deux, par :

[1]le maximiser s'il s'agit d'un gain.

$$Lf(t,x,a) := \left(\frac{1}{2}\sum a_{i,j}D_{i,j}f + \sum b_iD_if + D_tf\right)(t,x,a),$$

où D_i (respectivement $D_{i,j}$, D_t) est l'opérateur de dérivation par rapport à x_i (respectivement x_ix_j; t) et $a_{i,j}(t,x,a)$ est le terme générique de matrice $d\times d$ symétrique $\sigma\sigma^*(t,x,a)$. Alors, $a_{i,j}$ est une fonction mesurable, bornée, continue par rapport au couple (x,a).

Nous soulignons que nous n'avons pas besoin de l'hypothèse que l'opérateur L n'est pas dégénéré. Par conséquent, nous généralisons le cas déterministe.

Théorème 3-3-3 : *Soit $\mathcal{U}$ un contrôle relaxé $\mathcal{U} = (\Omega, \mathcal{F}_t, x_t, q_t, P, r, z)$.*

a- *Elle existe une matrice $s(t,x,m)$ qui est uniformément continue dans $(x,m)\in\mathbb{R}^d\times\wp(A)$ et ce qui disparaît quand m est une mesure de Dirac, et un mouvement Brownien (Y_t,B_t) sur un plus grand espace $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}}_t,\tilde{P}\right)$ tels que :*

$$(i) \quad \left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}}_t,\tilde{P}\right) \text{ est une extension naturelle de } (\Omega,\mathcal{F}_t,P)$$

$$(ii) \quad \begin{cases} dx_t = b(t,x_t,q_t)\,dt + \sigma(t,x_t,q_t)\,dY_t + s(t,x_t,q_t)\,dB_t. \\ x_t = z \quad \text{pour} \quad t\leq r. \end{cases} \tag{E$_q$}$$

b- *On suppose que A est fini $A=\{a_1,...,a_k\}$ et on dénote par $(q_t^i)_{i\leq k}$ le vecteur $(q_t\{a_i\})_{i\leq k}$.*

Alors, il existe

$$(W_1,...,W_k) \quad K-\textit{mouvements Browniens indépendants,}$$

qui sont $\mathbb{R}^k-$estimé et construit sur un plus grand espace $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}}_t,\tilde{P}\right)$ tels que :

$$(i) \quad \left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}}_t,\tilde{P}\right) \text{ est une extension naturelle de } (\Omega,\mathcal{F}_t,P).$$

$$(ii) \quad dx_t = \sum b(t,x_t,a_i)\,q_t^i dt + \sum\sqrt{q_t^i}\sigma(t,x_t,a_i)\,dW_t^i.$$

Remarque 3-3-4 :

1- La mesure aléatoire

$$M(dt, da) = \sum \sqrt{q_t^i} \delta_{a_i}(da)\, dW_t^i$$

est une mesure martingale, avec processus croissant égale à

$$\sum q_t^i \delta_{a_i}(da)\, dt \times I_k,$$

où I_k est la matrice d'identité sur $\mathbb{R}^k$.

2- Quand $q_t(da)$ est une mesure de Dirac $\delta_{u_s}(da)$, alors $q_t^i = 1_{\{u_t = a_i\}}$ et la représentation standard de (a) peuvent être déduits de (b) avec la formule :

$$dY_t = \sum 1_{\{u_t = a_i\}} dW_t^i.$$

Preuve Dans les deux cas, nous devons construire une "bonne racine carrée" de la matrice symétrique :

$$a_{i,j}(t, x, m) = \sum_l \int_A \sigma_{i,l}(t, x, a)\, \sigma_{l,j}(t, x, a)\, m(da)$$

a- Soit $\sigma(t, x, m)$ une matrice avec un terme général

$$\sigma_{i,j}(t, x, m) = \int_A \sigma_{i,j}(t, x, a)\, m(da).$$

La matrice carrée symétrique liée à $\sigma(t, x, m)$ est la matrice $\alpha(t, x, m)$ définie par :

$$\begin{aligned} \alpha(t, x, m) &= \sigma(t, x, m)\, \sigma^*(t, x, m) \\ \alpha_{i,j}(t, x, m) &= \sum_l \sigma_{i,l}(t, x, m)\, \sigma_{j,l}(t, x, m) \\ &= \sum \int_A \sigma_{i,l}(t, x, a)\, m(da) \int_A \sigma_{j,l}(t, x, a)\, m(da) \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice $a(t, x, m) - \alpha(t, x, m)$ a une limite générale sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \sum \int \sigma_{i,l}(t,x,a)\,\sigma_{j,l}(t,x,a)\,m(da) - \int \sigma_{i,l}(t,x,a)\,m(da) \int \sigma_{j,l}(t,x,a)\,m(da) \\
= \ & \sum_l cov\ m\left(\sigma_{i,l}(t,x,.)\,,\sigma_{l,j}(t,x,.)\right).
\end{aligned}$$

Les termes diagonaux de cette matrice sont égaux à :

$$\sum_l var\ q\left(\sigma_{i,l}\right)(t,x) > 0.$$

La matrice $a(t,x,m) - \alpha(t,x,m)$ est une matrice symétrique qui est défini positif.

Nous pouvons choisir une racine carrée $s(t,x,m)$ de cette matrice, i.e. $ss^* = a - \alpha$ tels que s est uniformément continue sur (x,m).

Soit $\bar{\sigma}(t,x,m)$ la matrice $\left[\begin{array}{cc} \sigma(t,x,m) & s(t,x,m) \end{array}\right]$.

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}(t,x,m)\,\bar{\sigma}^*(t,x,m) &= \left[\begin{array}{cc} \sigma(t,x,m) & s(t,x,m) \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \sigma(t,x,m) & s(t,x,m) \end{array}\right]^* \\
&= \left[\begin{array}{cc} \sigma(t,x,m) & s(t,x,m) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \sigma^*(t,x,m) \\ s^*(t,x,m) \end{array}\right] \\
&= \sigma(t,x,m)\,\sigma^*(t,x,m) + s(t,x,m)\,s^*(t,x,m) \\
&= \alpha(t,x,m) + \left[a(t,x,m) - \alpha(t,x,m)\right] \\
&= a(t,x,m)
\end{aligned}$$

Il suit immédiatement de la définition que $a(t,x,m) - \alpha(t,x,m) = 0$ si m est une mesure de Dirac.

La représentation comme équations D.S est une conséquence facile du théorème de représentation de la solution à un problème de martingale, utilisé dans la preuve de la proposition 1.5 de [7].

b- On suppose que A est fini. Alors :

$$a_{i,j}(t,x,m) = \sum_l \sum_s \sigma_{i,l}(t,x,a_s)\,\sigma_{j,l}(t,x,a_s)\,m_s$$

où $m_s = m(\{a_s\})$, et

$$[\sqrt{q_1}\sigma(t,x,a_1)\,,\sqrt{q_2}\sigma(t,x,a_2)\,,...,\sqrt{q_k}\sigma(t,x,a_k)]$$

est $d \times k \times k$ racine carré de $a(t,x,q)$.

Nous concluons comme dans (a).◄

Proposition 3-3-5 : Soit $\mathcal{U} = (\Omega, \mathcal{F}_t, P, x_t, q, r, z)$ un contrôle relaxé et $\mathcal{G}_t$ une sous-filtration de $\mathcal{F}_t$, par raport à tout x_t est adapté.

Alors, elle existe une variable aléatoire $\mathcal{R}-$estimé, $\mathcal{G}_t-$adapté $\hat{q}$ telle que :

$$\ddot{\mathcal{U}} = (\Omega, \mathcal{G}_t, P, x_t, \hat{q}, r, z)$$

est un contrôle relaxé avec le même gain que $\mathcal{U}$.

Preuve L'idée est de construit la mesure

$$\hat{q}\,(ds, da) = ds\ \hat{q}\,(s, da)$$

d'une projection $\hat{q}\,(s, da)$ sur la filtration $\mathcal{G}_s$ de la mesure $q\,(s, da)$ tels que :

$$\hat{q}\,(s, \psi) = P\,(q\,(s, \psi)\,|\mathcal{G}_s)$$

pour chaque fonction borélien positif ψ. Puis que A est un espace compact, nous pouvons affiné facilement une "mesure"-version de ces espérances conditionnelles, grâce à la notion du probabilité conditionnelle régulier. Utilisons le fait que x_t est $\mathcal{G}_t-$adapté, nous pouvons écrire, pour $A \in \mathcal{G}_s$:

$$\begin{aligned}
0 &= P\left\{1_{A_s}\left(C_t\,(f, q) - C_s\,(f, q)\right)\right\} \\
&= P\left\{1_{A_s}\left(f\,(t, x_t) - f\,(s, x_s) - \int_s^t \int_A Lf\,(\alpha, x_\alpha, a)\, q\,(\alpha, da)\, d\alpha\right)\right\} \\
&= P\left\{1_{A_s}\left(f\,(t, x_t) - f\,(s, x_s) - \int_s^t \int_A Lf\,(\alpha, x_\alpha, a)\, \hat{q}\,(\alpha, da)\, d\alpha\right)\right\} \\
&= P\left\{1_{A_s}\left(C_t\,(f, \hat{q}) - C_s\,(f, \hat{q})\right)\right\}.
\end{aligned}$$

L'égalité des coûts est évidente.◄

Remarque 3-3-6 :

a) Si q est $\mathcal{R}^{0}$[2]$-$estimé, $\hat{q}$ (comme défini ci-dessus) est en général $\mathcal{R}-$estimé.

b) Si q est $\mathcal{G}_t-$adapté, les mesures q et $\hat{q}$ sont identiques. Par conséquent, le problème du contrôle demeure sans changement si nous limitons à la filtration $\mathcal{F}_t^{x,q}$ généré par :

$$\left\{x_s \text{ et } 1_{]0,s]}q; \quad s \leq t\right\}.$$

[2] $\mathcal{R}^0$ est l'espace des contrôles relaxés tel que : $q\,(ds, da) = ds\delta_{\psi(s)}\,(da)$.

3.4 Règles des contrôles. Règles optimales

Au moyen "d'un espace canonique" nous pouvons donner une formulation du problème d'optimisation dans l'arrangement compact convexe. Dans tout ce paragraphe l'état initial (r, z) est fixe. Nous ne l'indiquerons pas.

Notation 3-4-1 : Soit $(\mathfrak{X}, \dddot{\mathfrak{X}}_t)$ l'espace canonique des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}^d$ avec ses filtrations naturelles, continues à droits. Un point de $\mathfrak{X}$ est dénoté par $x_.$, où (x_t), où $[x]$.

L'espace produit $\bar{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \times \mathcal{R}$ s'appelle l'espace canonique pour le problème de contrôle relaxé. Un point de $\bar{\mathfrak{X}}$ est dénoté par (x, q). $\bar{\mathfrak{X}}$ est doté de la filtration continue à droit

$$\bar{\not{X}}_t = \cap_{s>t} \left(\dddot{\mathfrak{X}}_s \otimes \mathcal{V}_s\right).$$

Pour tout $f \in C_b^{1,2}$, la fonction définie sur $\bar{\mathfrak{X}}$ par :

$$C_t\left(f, x, q\right) = f\left(t, x_t\right) - f\left(r, x_r\right) - \int_r^t Lf\left(s, x_s, q_s\right) ds \tag{3.1}$$

est $(x_., q)$ continue, puis que $Lf\,(s, x, a)$ est une fonction (x, a) continue (hypothèses 3.3.1).

Dans le même sens, la fonction

$$\Gamma\left(x, q\right) := \int_r^T \int_A h\left(s, x_s, a\right) q\left(ds, da\right) + g\left(x_T\right) \tag{3.2}$$

est (x, q) mesurable ; elle est (x, q) continue si h (resp g) sont (x, a) continues (resp x continues).

Définition 3-4-2 : *Une règle de contrôle (plus brièvement une règle) est une mesure de probabilité R sur $\bar{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \times \mathcal{R}$ tels que le système :*

$$\Re = \left(\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\not{X}}_t, R, x_t, q, r, z\right)$$

est un contrôle relaxé (avec l'état initial (r, z)).

Le coût est $J\,(r, z, R) = R\,(\Gamma)$ [3].

On dénote par $\Re\,(r, z)$ *l'espace des règles de contrôles* avec condition initial (r, z). $\Re^0$ sont les règles R^0 tel que $R^0\left(\mathfrak{X} \times \mathcal{R}^0\right) = 1$, c'est-à-dire $R^0 \in \Re^0\,(r, z)$ si et seulement

[3] $R\,(\phi) := \int \phi\,(\omega)\, P\,(d\omega)$, tel que P est une mesure de probabilité et ϕ une fonction positive ou intégrable.

s'il existe un processus $\bar{\mathcal{X}}_t-$adapté u tels que $q\left(ds,da\right)$ a une désintégration avec la forme $\delta_{u_s}\left(da\right)ds,\ R^0-p.s.$

Le problème d'optimisation peut être décrivent complètement par l'espace des règles de contrôles :

Proposition 3-4-3 : Soit $\mathcal{U}=\left(\Omega,\mathcal{F}_t,x_t,q,P,r,z\right)$ le contrôle relaxé de $\mathcal{A}\left(r,z\right).$

Alors, elle existe une règle R de $\Re\left(r,z\right)$ tel que :

$$J\left(r,z,\mathcal{U}\right)=J\left(r,z,R\right).$$

Si le contrôle $\mathcal{U}$ est un processus de contrôle, R appartient à $\Re^0\left(r,z\right).$

Preuve L'application ϕ de Ω vers $\bar{\mathfrak{X}}$ défini par :

$$\phi\left(\omega\right)=\left(x_.\left(\omega\right),q\left(ds,da\right)\left(\omega\right)\right)$$

est mesurable. D'ailleurs, la $\sigma-$algèbre $\phi^{-1}\left(\bar{\mathcal{X}}_t\right)$ est la même $\sigma-$algèbre que $\mathcal{F}_t^{x,q}$ jusqu' à une régularisation à droit. Puisque $\left(\Omega,\phi^{-1}\left(\bar{\mathcal{X}}_t\right),x_t,q,P\right)$ est un contrôle relaxé avec le même coût. D'ailleurs, la règle de transitivité des lois d'images preuve que $\Re=\left(\bar{\mathfrak{X}},\bar{\mathcal{X}}_t,x_t,q,R\right)$ où $R=P\circ\phi^{-1}$ est également un contrôle relaxé avec le même coût.◄

Remarque 3-4-4 : Nous avons vu qu'il existe au moins un contrôle (non-relaxé). Par conséquent, l'espace $\Re^0\left(r,z\right)$ est non vide.

Nous étudions maintenant le problème de maximiser le coût $R\left(\Gamma\right)$ dans $\Re\left(r,z\right)$, c.-à-d. le problème d'optimisation d'un forme linéaire défini dans un ensemble compact des mesures. Nous d'abord montrons la compacité de cet espace.

L'existence d'une règle optimale par un argument de compacité est prouvée dans [2] et [11], par utiliser la notion du contrôle relaxé. La preuve emploie le théorème de Skorohod et le fait que n'est aucun contrôle dans le coefficient de diffusion. Quand l'ensemble d'application-estimé $l\left(t,x,a\right)$[4] est convexe, compact estimé, Kushner [23] et Haussmann [17] montrent l'existence d'une règle optimale en $\Re^0\left(r,z\right)$. Dans le modèle de Kushner, n'est aucun contrôle dans la coefficient de diffusion. On remarque que l'utilisation du contrôle relaxé nous mène à travailler à la partie convexe compact de $l\left(t,x,A\right)$, indiquent $\overline{col}\left(t,x,A\right)$. Cependant, il est plus facile d'étudier ces questions en dotant l'ensemble des contrôles avec une topologie, qui s'élève à l'utilisation le fait que $\overline{col}\left(t,x,A\right)$ est un ensemble d'application-estimé paramétré dans la signification de ([1] p.47).

[4] $l\left(t,x,a\right)=\{a_{ij}(t,x,a),b_k(t,x,a),h(t,x,a);i,j\in\{1,...,d\}\}$

Théorème 3-4-5 :

a- *L'ensemble* $\Re(r,z)$ *des règles sur* $\bar{\mathfrak{X}}$*, doté avec la topologie faible est non vide, convexe et compact.*

b- *Si les fonctions h et g sont semi-continues supérieurement (S.C.S), elle existe une règle optimale* R^* *telles que :*

$$\begin{aligned} J(r,z,R^*) &= \sup\{J(r,z,R);\quad R\in\Re(r,z)\}. \\ &= \sup\{J(r,z,\mathcal{U});\quad \mathcal{U}\in\mathcal{A}(r,z)\}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\Re^*(r,z)$ *des règles optimales est non vide, convexe, compact.*

Preuve Nous omettons l'indice (r,z) dans toute la preuve.

a- On montre premièrement que $\Re$ est précompact dans l'espace de mesure de probabilité sur $\mathfrak{X}\times\mathcal{R}$. Il est suffisant de preuver que :

$$\{R|_{\mathcal{R}};\quad R\in\Re\} \text{ et } \{R|_{\mathsf{X}};\quad R\in\Re\}$$

sont serrés dans l'espace des probabilités sur $\mathcal{R}$ (resp. sur $\mathfrak{X}$). Puisque $\mathcal{R}$ est compact, $\{R|_{\mathcal{R}};\quad R\in\Re\}$ est compact.

Pour montrer que $\{R|_{\mathsf{X}};\quad R\in\Re\}$ est serré, nous employons le théorème 1.4.6. de [34], en prouvant que, pour chaque $f\in C_b^{1,2}$ positif, elle existe une constante A_f tels que $f(r+t,z+x_t)+A_ft$ est un supermartingale pour tout $R\in\Re$ et (r,z). Soit A_f égal au :

$$\sup\left\{|Lf(t,x,a)|;\quad (t,x,a)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times A\right\}.$$

A_f est fini puisque les coefficients de L sont bornées. Pour chaque $R\in\Re$, $C_t(f,x,q)$ est une martingale, ainsi $f(r+t,z+x_t)+A_ft$ est une supermartingale positive.

Laissez nous montré que $\Re$ est fermé.

Soit R_n une suite de $\Re$ qui converge faiblement vers R. Pour chacune fonction (x,q)-continue, $\bar{\mathcal{X}}_s-$mesurable h,

$$R_n[h(C_t(f,x,q)-C_s(f,x,q))]$$

convergent vers :

$$R[h(C_t(f,x,q)-C_s(f,x,q))]$$

Le premier terme est égal à zéro, par conséquent la limite est également égale à zéro. C'est à dire $C_t(f,x,q)$ est une R martingale.

b- Si $(x,q) \to \Gamma(x,q)$ est S.C.S., l'application $R \to R(\Gamma)$ est aussi S.C.S. Par conséquent il atteint son maximum sur le compact $\Re$.

L'ensemble $\Re^*$ des règles optimales est évidement non vide, convexe et compact ; en effet si R_n^* est une suite des règles optimales qui converge vers R^*, alors :

$$\sup\{R(\Gamma)\,;\quad R \in \Re\} = \lim R_n^*(\Gamma) \leq R^*(\Gamma) \leq \sup\{R(\Gamma)\,;\quad R \in \Re\} \blacktriangleleft$$

Remarque 3-4-6 : L'application $R \to R(\Gamma)$ est linéaire et S.C.S., par conséquent il atteint son maximum à un point extrême d'ensemble convexe compact $\Re$. Ces points extrêmes n'ont aucune caractérisation facile.

Nous avons vu que chaque contrôle relaxé est équivalent à un contrôle qui complique seulement la distribution du x. Plus avec précision :

Corollaire 3-4-7 : Soit $\Re_f^*$ l'ensemble des lois de dynamiques optimales, c.-à-d. $\Re_f^* = \{R|_{\mathsf{X}};\quad R \in \Re^*\}$.

Alors $\Re_f^*$ est un ensemble compact (pour f la fonction feed-back).

Preuve Soit P un élément de $\Re_f^*$. Par définition, il existe $R \in \Re^*$ tels que $P = R|_{\mathsf{X}}$. Du théorème 2.7 de [7], il existe q^f tels que $\left(\mathfrak{X}, P, x_t, q^f\right)$ est un contrôle relaxé avec le même coût que R ; donc q^f est optimal. Evidemment, $\Re_f^*$ est précompact.

Soit P_n une suite de $\Re_f^*$ qui converge à P^*. La suite des règles optimales R_f^n définies par :

$$R_f^n = P_n \otimes \delta_{q_n^f}$$

est un sous-ensemble serré de $\Re^*$. Par conséquent il a une sous-suite qui converge vers une règle optimale R_f^*. La restriction de R_f^* à $\mathfrak{X}$ est égal à P^*, et P^* appartiennent à R_f^*. $\blacktriangleleft$

Dans le cas où l'ensemble d'application-estimé $l(t,x,A)$ (Thm 2.9 [7]) est convexe compact-estimé, nous avons un meilleur résultat :

Corollaire 3-4-8 : Si $l(t,x,A)$ est convexe compact-estimé, alors pour chaque $P^* \in \Re_f^*$, il existe un processus $\dddot{\mathfrak{X}}_t$−adapté u^f tels que $\left(\mathfrak{X}, \dddot{\mathfrak{X}}_t, x_t, P^*, u^f\right)$ est un contrôle optimal.

3.5 Comparaison entre les problèmes de contrôles

Dans cette étude, nous approchons un contrôle relaxé arbitraire par les contrôles relaxé d'étape qui ont un support fini. Ces approximations sont très importantes dans les travaux de Nisio [30] et Krylov [22]. Cependant, dans le travail de Krylov, les contrôles sont non relaxés.

Quand il n'y a aucun contrôle dans le terme de diffusion, nous pouvons construire une suite d'approximation du "processus contrôlé" comme dans Fleming-Nisio [13], à l'aide d'un prétendu "chattering lemma" ([15], [11]).

Dans un cas général, cette approximation est plus difficile, puisqu'elle est reliée à l'approximation des mesures martingales.

Définition 3-5-1 : *Soit $\mathfrak{B} = (\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré équipé d'un mouvement Brownien $m-$dimensionnels z_t, et $g(t, \omega, x)$, $h(t, \omega, x)$ soient deux processus bornés adaptés qui sont $d \times m$ (resp. d) dimensionnels.*

Soit K_t un processus continue à droit avec une limite à gauche (nous employons souvent $K_t = z1_{t \leq r}$ comme condition initial).

a- *Une solution fort de l'E.D.S sur $\mathfrak{B}$ est un procesus $\mathcal{F}_t-$adapté continue x_t tel que :*

$$x_t = K_t + \int_0^t h(s, \omega, x_s)\, ds + \int_0^t g(s, \omega, x_s)\, dz_s. \tag{E}$$

L'unicité trajectorielle (ou fort) est la propriété suivante : deux solution forte $x_.$ et $x'_.$ de (E) sont indistinguable.

b- *Soit*

$$\bar{\Omega} = \Omega \times \mathfrak{X}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes \ddot{\ddot{\mathfrak{X}}}, \quad \mathcal{F}_t = \cap_{s>t} (\mathcal{F}_s \otimes \ddot{\ddot{\mathfrak{X}}}_s)$$

et (x_t) le processus canonique sur $\mathfrak{X}$.

Une solusion faible de (E) sur $\mathfrak{B}$ est une mesure de probabilité $\bar{P}$ dans $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}_t)$ tels que :

(i) $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}_t, \bar{P})$ *est une extension naturelle de $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$,*

(ii) *Le processus canonique (x_t)est une solution de (E).*

S'il existe tout au plus une solution faible de (E), nous disons que l'unicité faible se tient.

Remarque 3-5-2 : Une solution faible peut être associée à une solution forte x_t par la formule :

$$\bar{P}(d\omega, d[x]) = P(d\omega)\ \delta_{X(\omega)}(d[x]).$$

Du théorème 2.25 de Jacod-Memin, l'unicité trajectorielle implique l'unicité faible.

Pellaumail ([32] Th 9 p 577) et Jacod-Memin (Th 3.2.4) ont prouvé le suivant résultat :

Théorème 3-5-3 : *Supposez que, pour tout* (ω, t) *les applications :*

$$x \to (g(t,\omega,x), h(t,\omega,x))$$

sont uniformément continues et bornées (indépendamment sur (ω, t) *).*

Alors, elle existe une solution faible de (E).

Remarque 3-5-4 : Le problème de l'unicité est plus difficile, puisque les coefficients dépendent de x d'une manière aléatoire. Le seul critère qui être facilement appliqué est celui qui donne une unicité trajectorielle et qui est relié à la propriété lipschitzien des coefficients : par exemple, si $h(t,\omega,x)$ et $g(t,\omega,x)$ sont uniformément lipschitziennes dans (t,ω) par rapport à x, alors l'unicité faible se tient. Krylov et Nisio assument souvent cette condition pour l'E.D.S contrôlé.

Jacod-Memin donnent les résultats de la stabilité qui sont utiles dans cette étude :

Théorème 3-5-5 : *Soit*

$$\Lambda(t,\omega,x) = \{h(t,\omega,x), \quad g(t,\omega,x), \quad K_t(\omega)\}$$

et on dénote par $\Lambda F(t,\omega,[x])$ *l'opérateur elliptique sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ *définie par :*

$$\begin{aligned}\Lambda F(t,\omega,[x]) &= \sum (gg^*)_{i,j}(t,\omega,x_t) D_{x_i x_j} F(t,x_t,z_t) \\ &+ \sum h_j(t,\omega,x_t) D_{x_j} F(t,x_t,z_t) + \frac{1}{2}\sum D_{z_i^2} F(t,x_t,z_t) \\ &+ \sum g_{i,j}(t,\omega,x_t) D_{x_i z_j} F(t,x_t,z_t).\end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{B} = (\Omega, \mathcal{F}_t, P, Z_t)$ *une base stochastique. Nous avons équipé l'ensemble de probabilité sur* $\bar{\Omega} = \Omega \times \mathfrak{X}$ *de la topologie stable, c.-à-d. la topologie la plus brute pour laquelle tous les applications* $\bar{P} \to \bar{P}(v)$ *sont continues, où* $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ *est bornée, mesurable et* $v(\omega,.)$ *est continue sur* $\mathfrak{X}$.

Soit $(\Lambda^n(t,\omega,x))_{n\in\mathbb{N}\cup\infty}$ *une suite des fonctions qui sont bornées et uniformément continues par rapport à* x, *et* $(\overline{P}^n)$ *une suite des solutions faibles de l'équation stochastique* (E^n) *avec des coefficients sur* Λ^n.

a- *Si* $\sup_{s\leq t}|K_s^n - K_s^\infty|$ *converge en* $P-$*mesure vers zero, si, pour tout* F *appartient à* $C_b^{1,2}\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m\right)$, *on a :*

$$\lim \overline{P}^n \int_0^T |\Lambda^n F(t,\omega,[x]) - \Lambda^\infty F(t,\omega,[x])|\, dt = 0$$

alors, la suite $\left(\overline{P}^n\right)$ *est relativement compact et tout ces limites sont des solutions faibles de* (E^∞).

b- *Les acceptations de* (a) *sont vraies si* $\Lambda^n(t,\omega,x)$ *converge uniformément vers* $\Lambda(t,\omega,x)$ *par rapport à* $x \in \mathbb{R}^d$.

Nous appliquons maintenant ces résultats aux équations différentielles stochastiques contrôlées que nous avons présentées dans le théorème 3-3-3.

Définition 3-5-6 : *Nous disons que l'unicité faible pour des équations différentielles contrôlées tient quand elle existe une racine carrée* $\bar{\sigma}(t,x,m)$ *de* $a(t,x,m)$, *uniformément continue par rapport au paire* (x,m) *(où* $m \in \wp(A)$ *) tels que pour n'importe quel système* $(\Omega, \mathcal{F}_t, P, q_t, Z_t)$ *(où* Z_t *est un mouvement Brownien) la propriété de l'unicité faible se tient pour l'E.D.S.*

$$dx_t = b(t,x_t,q_t)\,dt + \bar{\sigma}(t,x_t,q_t)\,dZ_t. \qquad (\mathrm{E}_q)$$

Remarque 3-5-7 : On note par $\bar{\Lambda}(t,x,m)$ le système des coefficients de (E_q).

Nous commençons en prouvant que nous pouvons considérer seulement le cas où l'espace d'action A est fini.

Proposition 3-5-8 : Supposez que l'unicité faible pour des équations contrôlées tient.

Les règles associés avec des contrôles relaxés qui ont leur support dans un sous-ensemble fini de A sont denses dans $\Re(r,z)$.

Preuve

a- L'espace A étant métrique compact, nous choisissons une partition

$$(B_k^n, k = 1, ..., k(n))$$

dans des boréliens avec une distance moins que $\frac{1}{n}$, et on dénote par a_k^n un point de B_k^n.

Soit m^n défini par :

$$m^n = \sum_k m\left(B_k^n\right)\delta_{a_k^n} \quad \text{et} \quad \bar{\Lambda}^n\left(t,x,m\right) = \bar{\Lambda}\left(t,x,m^n\right).$$

Pour n'importe quelle fonction h dans Λ, linéaire dans m, il est clair que :

$$\left|h^n\left(t,x,m\right) - h\left(t,x,m\right)\right| \leq \sum_k \int_{B_k^n} \left|h\left(t,x,a\right) - h\left(t,x,a_k^n\right)\right| q\left(da\right)$$

est majoré par $\omega_h\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où ω_h est le module de continuité de h par rapport à a (uniformément sur (t,x)).

La matrice $\bar{\sigma}\left(t,x,m\right)$ soit (uniformément sur (t,x)) continue par rapport à m, la suite $\bar{\sigma}^n\left(t,x,m\right) = \bar{\sigma}\left(t,x,m^n\right)$ converge uniformément vers $\bar{\sigma}\left(t,x,m\right)$ sur x.

b- On peut appliqué le théorème 3-5-5 :

Soient $\left(\Omega,\mathcal{F}_t,x_t,q_t,Z_t,P,r,z\right) = \mathfrak{B}$ une solution faible de (E_q) et $\overline{P}^n$ une solution faible de $\mathfrak{B}$ associé par les coefficients

$$\Lambda^n\left(t,\omega,x\right) = \bar{\Lambda}^n\left(t,x,q_t\left(\omega\right)\right).$$

De théorème 3-5-5 (b), la suite $\overline{P}^n$ a des points limites qui sont des solutions faibles de (E_q) sur le système $\mathfrak{B}$.

Puis que l'unicité faible tient, les distributions de (Z_t,q_t,x_t) pour le point limite ou pour la probabilité P sont les même.◄

Maintenant, nous présentons l'approximation avec des contrôles d'étape.

Proposition 3-5-9 : Supposez que l'unicité faible pour des équations contrôlées tient.

Soit R une règle associer avec un contrôle relaxé qui à son support dans un sous-ensemble fini de $A = \{a_1,...,a_k\}$.

Elle existe une suite R^n des règles associé aux contrôles relaxés par étape, qui convergent à R.

Preuve Soit $\mathfrak{B} = (\Omega, \mathcal{F}_t, Z_t, q_t, x_t, P, r, z)$ une solution de (E_q) tel que la distribution de $((x_t), q_t dt)$ est la règle R.

Puis que $q_t(dt)$ a un support finie $\{a_1, ..., a_k\}$, ces probabilités sont déterminées par les processus :

$$q_t^i = q_t(\{a_i\}) \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., k$$

qui sont $\mathcal{F}_t$−adaptés et qui satisfont au $\sum q_t^i = 1$. Nous définissons ces processus pour $t \leq 0$ par $q_t^i = q_0^i$.

Du lemme 4.4 de Lipster-Shiryayev [24] (où du IV 45 dans [5]) il existe un nombre s et une suite n' tels que :

$$\forall i = 1, ..., k, \quad \lim_{n \to \infty} P \int_r^T \left| q_t^i(\omega) - q_{K(n',t-s)+s}^i(\omega) \right|^2 dt = 0$$

$$\text{où} \quad K(n,t) = j2^{-n} \quad \text{pour} \quad j2^{-n} \leq t < (j+1)\, 2^{-n}.$$

On dénote par $q_t^{-i,n}$ une sous-suite des processus d'étapes bornés $q_{K(n',t-s)+s}^i$ qui converge $dt \times dP \quad p.s.$ vers q_t^i, et par :

$$q_t^{-n} = \sum_i q_t^{-i,n} \delta_{a_i}.$$

Maintenant, soit $\tilde{P}^n$ une solution faible du système $\mathfrak{B}$ d'E.D.S. (E^n) avec des coefficients :

$$\Lambda^n(t, x_t, q_t) = \Lambda\left(t, x_t, q_t^{-n}\right).$$

Nous devons montrer cela, par exemple,

$$\tilde{P}^n \int_r^T \left| h\left(t, x_t, q_t^{-n}\right) - h(t, x_t, q_t) \right| dt \to 0$$

pour tout fonction h dans Λ :

*– Quand h est linéaire sur q, c'est claire depuis

$$\begin{aligned} \tilde{P}^n \int_r^T \left| h\left(s, x_s, q_s^{-n}\right) - h(s, x_s, q_s) \right| ds &\leq K\tilde{P}^n \int_r^T \sum \left| q_s^{-i,n} - q_s^i \right| ds \\ &= KP \int_r^T \sum \left| q_s^{-i,n} - q_s^i \right| ds. \end{aligned}$$

*– Quand h a la forme $\bar{\sigma}_{i,j}(t, x_t, q_t^n)$, l'uniformément continuité de $\bar{\sigma}_{i,j}(t, x, q)$ rapport à :

$$\partial^n(t) \ := \ \sup |\bar{\sigma}_{i,j}(t, x, q_t^n) - \bar{\sigma}_{i,j}(t, x, q_t)| \rightarrow 0 \quad dP \times dt \quad p.s.;$$

alors :

$$\tilde{P}^n \int_r^T \left|\bar{\sigma}_{i,j}\left(t, x_t, q_t^{-n}\right) - \bar{\sigma}_{i,j}(t, x_t, q_t)\right| dt \leq \tilde{P}^n \int_r^T \partial^n(t)\, dt = P \int_r^T \partial^n(t)\, dt \rightarrow 0.$$

Le résultat suit du théorème 3-5-5 (a) et de l'acceptation de l'unicité faible.◀

Nous pouvons maintenant considérer seulement les règles qui sont associées aux contrôles relaxés par étape et dont le support est fini, c-à-d $q_t(da) = \sum q_t^i \delta_{a_i}$, et où les processus (q_t^i) sont constants sur les intervalles $]\theta_i, \theta_{i+1}]$ d'une subdivision dyadique de $[0, T]$.

On ordre d'approximé ce mesure de probabilité avec des mesures de Dirac, nous employons un prétendu "chattering lemma" (Ghouila-Houri [15], Fleming [11]).

Lemme 3-5-10 : Soit $(q_t^i)_{i=1}^k$ un processus d'étape mesurable sur $[0, T]$ tels que :

$$0 \leq q_t^i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum q_t^i = 1 \quad dt\ p.s.$$

Alors elle existe une suite des sous-ensembles mesurables U_n^i telle que :

(i) $\sum_i 1_{U_n^i}(t) = 1 \quad dt\ p.s.$

(ii) Pour tout fonction continue f qui admet ω_f comme module de continuité[5]

$$\sum \left| \int_0^T f(t) \left(q_t^i - 1_{U_n^i}(t)\right) dt \right| \leq 2k\ \omega_f\left(2^{-n}\right).$$

[5] $\omega_f(\varepsilon) = \sup\limits_{|x-y|<\varepsilon} |f(x) - f(y)|$

Preuve Pour simplicité, on suppose que $T=1$.

Soit $I^n = \{0, ..., k2^{-n}, ..., 1\}$ la subdivision dyadique de $[0,1]$ avec longueur 2^{-n}. Le $(j+1)^{eme}$ intervalle est dénoté par :

$$T_j^n = \left]j2^{-n}, (j+1)\,2^{-n}\right].$$

Et on partage tout intervalle T_j^n en k intervalles $T_{j,k}^n$ avec longueur $\left(q_{j2^{-n}}^k\right)2^{-n}$, et on introduit l'ensemble $U_n^k = \cup_j T_{j,k}^n$.

La définition de ces ensembles montres que (i) est vérifié, puis que on a :

$$\begin{aligned}\sum_k 1_{U_n^k} &= \sum_k 1_{\cup_j T_{j,k}^n} = 1_{\cup_k\left(\cup_j T_{j,k}^n\right)} = 1_{\cup_j\left(\cup_k T_{j,k}^n\right)} \\ &= 1_{\cup_j T_j^n} = 1_{[0,1]} = 1.\end{aligned}$$

De plus, si f est une fonction continue quelconque :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\left(q_t^i - 1_{U_n^i}(t)\right)dt\right| &= \left|\begin{array}{l}\sum_j \int_{T_j^n} f(t)\left(q_t^i - 1_{U_n^i}(t)\right)dt \\ \\ +\sum_j \int_{T_j^n} \left[f\left(j2^{-n}\right) - f\left(j2^{-n}\right)\right]\left(q_t^i - 1_{U_n^i}(t)\right)dt\end{array}\right| \\ &\leq \sum_j \int_{T_j^n} \left|f(t) - f\left(j2^{-n}\right)\right|\left|q_t^i - 1_{U_n^i}(t)\right|dt \\ &\quad + \sum_j \left|f\left(j2^{-n}\right)\int_{T_j^n}\left(q_t^i - 1_{U_n^i}(t)\right)dt\right|.\end{aligned}$$

Puis que q_t^i est un processus d'étape sur $((\Theta_i)\,;\ \Theta_i =]\theta_i, \theta_{i+1}])$, il montre que q_t^i est égale à $q_{j2^{-n}}^i$ sur l'intervalle T_j^n, d'où :

$$\int_{T_j^n}\left(q_t^i - 1_{U_n^i}(t)\right)dt = 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f(t) \left(q_t^i - 1_{U_n^i}(t) \right) dt \right| &\leq \sum_j \int_{T_j^n} \left| f(t) - f\left(j2^{-n}\right) \right| \left| q_t^i - 1_{U_n^i}(t) \right| dt \\
&\leq \sum_j \int_{T_j^n} \left| f(t) - f\left(j2^{-n}\right) \right| \left[\left| q_t^i \right| + \left| 1_{U_n^i}(t) \right| \right] dt \\
&\leq \sum_j \int_{T_j^n} w_f\left(2^{-n}\right) [2k] \, dt \\
&\leq 2k \int_0^1 w_f\left(2^{-n}\right) dt = 2k \; \omega_f\left(2^{-n}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi le lemme est prouvé.◄

Quand il n'y a aucun contrôle dans le terme stochastique $\sigma(t, x_t) \, dB_t$, on construit une suite avec des processus d'étape qui sont une bonne approximation de contrôle relaxé d'étape : nous procédons comme dans Fleming-Nisio au moyen du chattering lemma

Théorème 3-5-11 : *Supposez que l'unicité faible pour des équations contrôlées se tient.*

Supposez également qu'il n'y a aucun contrôle dans le terme de diffusion.

Soit $\mathfrak{B} = (\Omega, \mathcal{F}_t, x_t, q_t, Y_t, P, r, z)$ *une solution de l'E.D.S.*

$$dx_t = b(t, x_t, q_t) \, dt + \sigma(t, x_t) \, dY_t, \tag{E$_q$}$$

où :

$$q_t(da) = \sum q_t^i \delta_{\{a_i\}}(da),$$

(q_t^i) *soient des processus d'étapes sur la subdivision* $(\theta_0, ..., \theta_p)$ *qui sont positives et tel que* $\sum q_t^i = 1$.

La distribution de la paire $((x_t), q_t(da) \, dt)$ *est dénotée par* R.

Elle existe une suite des règles R^n *associé au processus de contrôle d'étape qui converges vers la règle* R.

Preuve Soit U_n^i l'ensemble associé avec (q_t^i) dans le lemme 3-5-10.

Les processus $\sum b(t, x_t, a_i) 1_{U_n^i}(t)$ et $\sigma(t, x_t)$ sont continues par rapport à $[x]$. De proposition 3-5-3, elle existe une solution faible $\tilde{P}^n$ sur $\Omega \times \mathfrak{X}$ de l'E.D.S :

$$dx_t = \sum b(t, x_t, a_i) 1_{U_n^i}(t) dt + \sigma(t, x_t) dY_t. \qquad (\tilde{\mathrm{E}}_n)$$

Soit $\tilde{R}^n$ la loi de probabilité de $\left(Y_t, \sum 1_{U_n^i}(t) \delta_{a_i} dt, x_t\right)$ sous $\tilde{P}^n$.

Ces lois sont des règles pour le problème de contrôle avec l'espace d'état (x_t, Y_t) et l'opérateur elliptique sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ donnée par $\Lambda F(t, x_t, Y_t, q_t)$ où :

$$\Lambda(t, x, m) = (b(t, x, m), \sigma(t, x))$$

(Cf théorème 3-5-5).

La suite $\tilde{R}^n$ est relativement compact et tout ces points limites $\tilde{R}^\infty$ sont des solutions de problème de martingale associé à ΛF.

De plus, puis que les contrôles $\sum 1_{U_n^i}(t) \delta_{a_i}$ converges vers $q_t(da) dt \quad P - p.s$ pour tout point limite $\tilde{R}^\infty$, la paire de processus $((Y_t), q_t(da) dt)$ a la même loi de probabilité que S sur $\mathfrak{X} \times \mathcal{R}$, et $\tilde{R}^\infty$ est une solution faible de l'E.D.S. (E_q) dans la base :

$$(\mathfrak{X} \times \mathcal{R}, q_t(da) dt, (Y_t), S).$$

Dans l'acceptation de l'unicité faible de l'équation contrôlée, $\tilde{R}^\infty$ est la loi de

$$(x_t, q_t(da) dt, Y_t)$$

qui est également une solution faible de (E_q) sur

$$(\mathfrak{X} \times \mathcal{R}, q_t(da) dt, Y_t, S). \blacktriangleleft$$

Quand les coefficients de la diffusion sont contrôlés, il est plus difficile de construire une suite approximatif avec une règle donnée, parce que cette construction est reliée à une "bonne" approximation des mesures martingales.

Puisque nous pouvons considérer seulement les contrôles relaxés par étape avec un espace fini, nous résolvons cette difficulté :

Théorème 3-5-12 : *Soit* $\mathfrak{B} = (\Omega, \mathcal{F}_t, x_t, W_t^i, (q_t^i), P)$ la *solution de l'E.D.S.*

$$\begin{cases} dx_t = \sum b(t, x_t, a_i)\, q_t^i dt + \sum \sqrt{q_t^i}\sigma(t, x_t, a_i)\, dW_t^i, \\ x_t = z \quad pour \quad t \leq r \end{cases} \qquad (\tilde{\mathrm{E}}_q)$$

où (q_t^i) *est un processus d'étape adapté sur la subdivision* (Θ).

On supposez que l'unicité faible pour l'E.D.S contrôlé $\left(\tilde{E}_q\right)$ *se tient.*

Alors elle existe une suite (R^n) *des règles associé au processus de contrôle qui converge à la loi* R *de la paire* $((x_t), \sum_i q_t^i \delta_{a_i} dt)$.

Preuve Nous souhaitons d'approximé les martingales $\sqrt{q_t^i}dW_t^i$ avec les martingales qui ont un processus croissant sous la forme $\int_0^t 1_{U_n^i}(s)\, ds$, où U_n^i sont les sous-ensembles présentés dans chattering lemma 3-5-10.

Soit $(\theta_j)_{j=1}^p$ la subdivision dyadique de $[0, T]$, telle que :

$$q_t^i = \sum_{j=1}^p q_j^i 1_{]\theta_j, \theta_{j+1}]}(t)$$

où q_j^i est $\mathcal{F}_{\theta_j}-$mesurable.

La martingale $M_t^i = \int_0^t \sqrt{q_s^i}dW_s^i$ a la décomposition en :

$$\begin{aligned} M_t^i &= \sum_{j=1}^p M_{t\wedge\theta_{j+1}}^i - M_{t\wedge\theta_j}^i \\ &= \sum_j \sqrt{q_j^i} \int_0^t 1_{]\theta_j, \theta_{j+1}]}(s)\, dW_s^i \\ &= \sum_j \sqrt{q_j^i} W_t^{(i,j)}. \end{aligned}$$

Soit $I_n^{i,j} = U_n^i \cap]\theta_j, \theta_{j+1}]$.

Nous présentons le processus croissant

$$
{}^{n}A_{t}^{i,j}=\begin{cases}\theta_{j}+\left(q_{j}^{i}\right)^{-1}\displaystyle\int_{\theta_{j}}^{\theta_{j}\vee t}1_{I_{n}^{i,j}}\left(s\right)ds & \text{pour } q_{j}^{i}\neq0,\\ \theta_{j}\quad\text{pour}\quad q_{j}^{i}=0. & \end{cases}
$$

Ces processus sont $\mathcal{F}_{\theta_j}-$mesurables, bornés par $\theta_j \vee t$. Quand n tend à l'infini, ${}^{n}A_{t}^{i,j}$ converge vers :

$$
\begin{cases}\theta_{j}\vee t & \text{si}\quad q_{j}^{i}\neq0\\ \theta_{j} & \text{pour}\quad q_{j}^{i}=0.\end{cases}
$$

De plus, ${}^{n}A_{t}^{i,j}$ est un $\mathcal{F}_t-$temps d'arrêt.

Maintenant, soit ${}^{n}M_{t}^{i}$ le processus $\mathcal{F}_t-$adapté définie par :

$$
{}^{n}M_{t}^{i}=\sum_{j}\sqrt{q_{j}^{i}}W_{{}^{n}A_{t}^{i,j}}^{i,j}.
$$

De la définition, ${}^{n}M_{t}^{i}$ converges vers M_t^i.

Dans l'autre droit, les processus $({}^{n}M_{t}^{i})$ sont les martingales orthogonales par rapport à leurs filtrations naturelles

$$
\mathcal{F}_{t}^{n}=\sigma\left({}^{n}M_{s}^{i};\quad s\leq t,i\leq k\right),
$$

et ont un processus croissante égale à $\displaystyle\int_{0}^{t}1_{U_{n}^{i}}\left(s\right)ds$: en ordre de montrer cette propriété, il est assez pour vérifier que n'importe quel processus d'étape déterministe (H_t^i), le variable :

$$
\exp\int_{0}^{T}\sum_{i}H_{s}^{i}d^{n}M_{s}^{i}-\frac{1}{2}\int_{0}^{T}\sum_{i}\left|H_{s}^{i}\right|^{2}1_{U_{n}^{i}}\left(s\right)ds
$$

a une espérance égale à un (corollaire 1-2-7 de chapitre 1).

Maintenant on construit une solution faible $\tilde{P}^n$ de l'équation :

$$
dx_{t}=\sum_{i=1}^{k}b\left(t,x_{t},a_{i}\right)1_{U_{n}^{i}}\left(t\right)dt+\sum_{i=1}^{k}\sigma\left(t,x_{t},a_{i}\right)d^{n}M_{t}^{i}
$$

sur l'espace $(\Omega,\mathcal{F}_t^n,P)$.

Avec le même argument que nous avons employé plus tôt, les processus

$$\left((x_t) , \sum_i 1_{U_n^i} \delta_{a_i} dt,^n M_t^i \right)$$

sont des solutions au problème de martingale associé à un opérateur elliptique avec des coefficients continues.

Pour la simplicité, nous supposent que $d = k = 1$.

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} F \left(t, x, y_1, ..., y_k, q \right) &= \frac{1}{2} \left(\sum_i \sigma^2 \left(t, x_t, a_i \right) q^i \right) F''_x \left(t, x, y_1, ..., y_k \right) \\ &+ \sum_i b \left(t, x_t, a_i \right) q^i F'_x \left(t, x, y_1, ..., y_k \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum q^i F''_{y_i} \left(t, x, y_1, ..., y_k \right) + F'_t \left(t, x, y_1, ..., y_k \right) \\ &+ \sum_i \sigma \left(t, x_t, a_i \right) q^i F''_{x,y_i} \left(t, x, y_1, ..., y_k \right) . \end{aligned}$$

Soit $\left(\tilde{R}^n \right)$ une suite des lois de probabilités de

$$\left(x_t, \sum_i 1_{U_n^i} \delta_{a_i} dt,^n M_t^i \right) .$$

La suite $\left(\tilde{R}^n \right)$ est relativement compact et tout ces points limites sont aussi solutions de problème de martingale associé avec $\tilde{\Lambda}$.

Pour la probabilité P,

$$\sum 1_{U_n^i} \delta_{a_i} \quad \text{et} \quad {}^n M^i \text{ converge} \quad \text{p.s} \quad \text{vers} \sum q_t^i \delta_{a_i} \quad \text{et} \quad M_t^i,$$

donc, pour chaque point limite $\tilde{R}^\infty$, ce paire de processus a une distribution donnée égale à S. Par conséquent $\tilde{R}^\infty$ est une solution faible à (E_q) au-dessus de l'espace $\left(\mathfrak{C} \left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n \times k \times k} \right) \times \mathcal{R}, S \right)$. La loi de $\left(x_t, \sum q_t^i \delta_{a_i} dt, M_t^i \right)$ a également cette propriété. Sous la supposition de l'unicité faible, toutes ces mesures de probabilités sont égaux.

Nous notons que la martingale ${}^{n}M^{i}$ a une représentation sous la forme

$$d^{n}M_{t}^{i}=1_{U_{n}^{i}}(t)\,d\overline{W}_{t}^{i},$$

où $\overline{W}^{i}$ sont des mouvements Browniens indépendants, puisque ${}^{n}M_{t}^{i}$ sont des martingales orthogonales avec un processus croissante égale à $\int_{0}^{t}1_{U_{n}^{i}}(s)\,ds.$ ◄

Théorème 3-5-13 : *On suppose que l'unicité faible d'équation contrôlée se tient et que $b(t,x,a)$, $\sigma(t,x,a)$ sont uniformément lipschitziennes.*

Soit $(q_{t}^{i}([x]))$ un contrôle relaxé de feed-back sur $A=\{a_{1},...,a_{k}\}$.

Soit $(\Omega,\mathcal{F}_{t},P)$ un espace de probabilité filtré équipé avec des mouvements Browniens indépendants (W_{t}^{i}).

a- *L'E.D.S.*

$$dx_{t}=\sum b(t,x_{t},a_{i})\,q_{t}^{i}([x])\,dt+\sum\sqrt{q_{t}^{i}([x])}\sigma(t,x_{t},a_{i})\,dW_{t}^{i} \qquad (\mathrm{E}^{f})$$

a une solution fort unique.

b- *On peut construit sur $(\Omega,\mathcal{F}_{t},P)$ une suite d'état $\left(x_{t}^{n},1_{U_{n}^{i}}(t)\,\delta_{a_{i}}dt\right)$ et des processus contrôlés des dont les lois convergent à la loi de $((x_{t}),q_{t}^{i}([x])\,\delta_{a_{i}}dt)$.*

Preuve

a- Puis que $q_{t}^{i}([x])$ est un processus d'étape et finissez tenir compte du caractère lipschitzien des coefficients, il est connu que l'E.D.S $\left(E^{f}\right)$ a une solution forte unique.

b- Nous travaillons comme dans la preuve du théorème 3-5-12 : soit $[x]$ la solution de $\left(E^{f}\right)$. Le processus de contrôle $q_{y}^{i}=q_{t}^{i}([x])$ est $\mathcal{F}_{t}-$adapté.

Les processus ${}^{n}M_{t}^{i}$ et la solution ${}^{n}x_{t}$ peut être construite sur $(\Omega,\mathcal{F}_{t},P)$ et la propriété de semi-martingale est satisfaite par rapport à la sous-filtration $\mathcal{F}_{t}^{n}$ de $\mathcal{F}_{t}$. ◄

Si les termes de diffusions ne sont pas contrôlés, cette construction est valide par rapport à $\mathcal{F}_{t}$.

Nous concluons la présente partie en recueillant ensemble tous ces résultats :

Théorème 3-5-14 : *Supposez que l'unicité faible pour des équations contrôlées se tient.*

a- *Si les fonctions h et g sont uniforméments continues, le problèmé initiel et le problème relaxé ont la même fonction de valeur :*

$$\begin{aligned}\sup\left\{J\left(r,z,R^0\right); \quad R^0\in\Re^0\right\} &= \sup\left\{J\left(r,z,R\right); \quad R\in\Re\right\} \\ &= \sup\left\{J\left(r,z,\mathcal{U}\right); \quad \mathcal{U}\in\mathcal{A}^0\left(r,z\right)\right\}\end{aligned}$$

b- *Si les coefficients $b\left(t,x,a\right)$ et $\sigma\left(t,x,a\right)$ sont (uniformément sur $\left(t,a\right)$) lipschitziennes par rapport à x, le problème fort et le problème relaxé faible ont la même fonction de valeur.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de contrôle optimal pour des systèmes d'équations différentielles stochastiques dirigées par une mesure martingale. En particulier, nous avons étudié les définitions et des propriétés concernant ces mesures martingales et quelques résultats très importants pour les problèmes d'E.D.S dirigées par des mesures martingales.

Il s'avère que sans hypothèses de convexité, on ne peut montrer l'existence d'une solution optimale dans l'espace des contrôles stricts. L'idée est d'injecter l'espace des contrôles admissibles dans un espace de mesures appelé espace des contrôles relaxés. Pour cet espace on montre qu'il existe un contrôle réalisant le minimum sans hypothèses supplémentaires sur les coefficients. On doit souligner que le théorème d'existence est démontré pour les problèmes de contrôle faible.

Le deuxième aspect du contrôle stochastique que nous avons étudié est d'approximer les intégrales stochastiques des mesures martingales par des intégrales stochastiques par rapport au mouvement Brownien au sens de L^2.

L'autre approche concerne les problèmes de contrôle faible. On utilise la distribution de la paire (contrôle et trajectoire) d'une E.D.S. L'existence d'une distribution (exactement une règle de contrôle) implique l'existence d'un contrôle optimal relaxé faiblement dans le cas fini.

Bibliographie

[1] Aubin. J.P., Celina. A. : *Differential inclusions*, Springer Verlag (1984).

[2] Becker. H., Mandrekar. V. : *On the existence of optimal random controls.* J. of Math. And Mech. Vol 18. 12 (1969) 1151-1166.

[3] Bahlali. S. : *Thèse de Doctorat*, Université de Batna, (2002).

[4] Bahlali. S., Mezerdi. B., Djehiche. B. : *Existence and optimality necessary conditions in relaxed stochastic control problems.* Preprint (2005).

[5] Dellacherie. C., Meyer. P.A. : *Probabilités et potentiel.* Paris : Hermann (1976).

[6] Ekeland. I. : *Suites minimisantes et solutions optimales de certains problèmes de contrôle*, Cahier IRIA 4, mars (1971).

[7] El Karoui. N., Huù Nguyen. D., Jeanblanc-Picqué. M. : *Compactifications methods in the control of degenerate diffusions : existence of an optimal control*, Stochastic, 20, (1987), pp. 169-219.

[8] El Karoui. N., Huù Nguyen. D., Jeanblanc-Picqué. M. : *Existence of an optimal markovian filter for the control under partial observation*, SIAM J. of control and Optimisation, 26 n^0 4 (1988), pp. 1025-1061.

[9] El Karoui. N., Lepeltier. J.P. : *Représentation des processus ponctuels multivariés à l'aide d'un processus de Poisson.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 39, 111-133 (1977).

[10] El Karoui. N., Méléard. S. : *Martingale measures and stochastic calculus*, Probability theory and Related Fields 84, (1990), pp. 83-101.

[11] Fleming. W.H. : *Generalized solutions in optimal stochastic control : Differential games and control theory* 2 (Kingston Conf. 1976), L.N. in Pure and Appl. Math. 30, (1978), Dekker.

[12] Fleming. W.H., Nisio. M. : *On stochastic relaxed control for partially observed diffusions*, Nagoya Math. Journal 93 (1984), pp. 71-108.

[13] Fleming. W.H., Nisio. M. : *On the existence of optimal stochastic controls*, J. Math. Mech. 15 (1966),pp. 777-794.

[14] Funaki. T. : *A certain class of diffusion processes associated with non linear parabolic equations.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 67, 133-384 (1984).

[15] Ghouila-Houri. A. : *Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable*. RIRO 1 année 4 (1967) 7-32.

[16] Grigelionic. B. : *On the representation of integer valued measures by means of stochastic integrals with respect to Poisson measures*. Litov. Mat. Sb. 11, 93-108 (1971).

[17] Haussmann. U. G., Lepeltier, J. P. : *On the existence of optimal controls*, SIAM J. Control and Optimization, 28, (1990), pp. 851-902.

[18] Ikeda. N., Watanabe. S. : *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Amsterdam/ Kodansha : North Holland Mathematical Library (1981).

[19] Jacod. J., Mémin. J. : *Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité*. Séminaire de Probabilités XV,L.N. n^0 850, (1980), Springer.

[20] Jacod. J., Mémin. J. : *Weak and strong solutions of stochastic differential equations : existence and stability.* In : Proc. Durham Symp. (1980) (Lect. Notes Math., vol. 851) Berlin Heidelberg New York : Springer (1981).

[21] Jacod. J., Shiryaev. A.N. : *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer.

[22] Krylov. N.V. : *Controlled diffusion processes.* Springer Verlag. (1980).

[23] Kushner. H.J. : *Numerical methods for stochastic controls problems in continuous time*, preprint.

[24] Lipster. R.S., Shiryayev. A.N. : *Statistics of random processes.* Springer-Verlag.

[25] Mazliak. L. : *An introduction to probabilistic methods in stochastic control*, Lectures at Pescara University, April (1996).

[26] Méléard. S. : *Martingale measure approximations, Application to the control of diffusions*, prépublication n^0 69 de laboratoire de probabilités de l'Université Paris VI, mars (1991).

[27] Mezerdi. B., Bahlali. S. : *Approximation in optimal control of diffusion processes ; Random Operat. and Stoch. Equ.,* Vol. 8, $n^0$4, pp. 365-372 (2000).

[28] Mezerdi. B., Bahlali. S. : *Necessary conditions for optimality in relaxed stochastic control problems. Stochastics and Stochastic Reports,* Vol. 73, $n^0$3, pp. 201-218 (2002).

[29] Neveu. J. : *Processus aléatoires gaussiens* : Séminaire de Mathématiques supérieurs-(1968), Presses de l'Université de Montréal.

[30] Nisio. N. : *Stochastic control theory.* Tata Institute ISI Lect. Notes 9 Macmillan. India (1981).

[31] Øksendal. B. : *Stochastic differential equations : an introduction with applications*, 5th Edition, Springer verlag.

[32] Pellaumail. J. : *Solutions faibles et semi-martingales.* Séminaire de Strasbourg 15 561-586 Lect. Notes in Math. 851. Springer.

[33] Skorohod. A .V. : *Studies in the theory of random processes.* Reading, Mass. : Addison Wesley (1965).

[34] Stroock. D.W., Varadhan. S.R.S. : *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer, (1979).

[35] Walsh. J.B. : *An introduction to stochastic partial differential equations.* In : Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XIV-1984. Berlin Heidelberg New York : Springer (1986).