

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER- BISKRA
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté par
Abdesselam SOUKEUR

pour l'obtention du Diplôme de Magister en Mathématiques
Spécialité Analyse et modèles aléatoires

Sur l'aspect numérique des solutions des équations intégrales de Volterra linéaires et non linéaires au moyen d'une nouvelle méthode quadratique intégrale généralisée (QIG)

Soutenu le : 08/11/2004
devant le jury composé de :

M ^r B. Mezerdi,	Professeur (Université de Biskra):	Président
M ^r A. Necir,	Maître de Conf (Université de Biskra) :	Examineur
M ^r L. Melkemi,	Maître de Conf (Université de Biskra) :	Examineur
M ^r A. Zerarka,	Professeur (Université de Biskra) :	Rapporteur

DEDICACE

Ce travail est particulièrement dédié à:

Mes parents, tout spécialement ma très chère mère et mon père.

Mes frères.

Ma femme et mes enfants.

Toute ma famille.

Tous mes amis, et à tous ceux qui aiment l'humanité qui en ce monde on se prive davantage.

**”C’est par la logique que nous prouvons,
c’est par l’intuition que nous inventons”**

REMERCIEMENTS

J'ai eu la chance de rencontrer le Professeur A. Zerarka alors que j'étais encore en possession du DEA de Mathématiques et c'est lui qui est à l'origine de mon orientation vers les équations intégrales. Ce thème m'a passionné et je le remercie donc vivement de m'avoir poussé à m'engager dans cette voie. J'ai pu par la suite apprécier ses remarquables qualités humaines et son action comme directeur d'une équipe de recherche dans laquelle évoluent un certains nombres de candidats dont les compétences sont irréprochables et ils ont imposé leurs résultats de recherche ayant un impact dans la scène internationale. Pour toutes ces raisons, c'est une grande joie pour moi qu'il ait accepté de diriger ce travail.

Je tiens donc d'abord à exprimer mes plus chaleureux remerciements au Professeur A. Zerarka qui m'a proposé ce sujet de taille et m'a accompagné tout au long de sa réalisation avec beaucoup d'intérêt et de disponibilité.

Je voudrais également remercier monsieur B. Labed de l'Université de Biskra de m'avoir aidé partiellement par sa sympathie et pour toutes les discussions constructives sur le domaine des équations intégrales. Je tiens à présenter toute ma gratitude à monsieur D. Meraghni pour son aide scientifique. Je voudrais aussi remercier le Professeur B. Mezerdi pour avoir accepté de présider le jury. Je remercie monsieur A. Necir et monsieur L. Melkemi d'avoir accepté la lourde tâche d'être des membres de jury. Je remercie M. M. Soukeur d'avoir répondu à mes questions avec beaucoup de disponibilité et de gentillesse. Je voudrais également remercier ma famille, qui m'a toujours apporté son soutien. Je tiens également à exprimer toute mon amitié à toute l'équipe du Laboratoire de recherche de physique dont le responsable le Professeur A. Zerarka par excellence et l'accueil qui m'a été réservé.

Mes remerciements s'adressent également à mes amis. Ils n'ont jamais compté leurs temps, ce qui m'a permis d'en abuser. Ce travail doit beaucoup à leurs soutiens et à leurs constants encouragements.

Ce travail doit aussi à l'effort permanent des doctorants formés par le Professeur A. Zerarka que j'ai eu le plaisir d'entreprendre avec eux des discussions scientifiques très captivantes.

TABLE DES MATIERES

Introduction	1
CHAPITRE 1: <i>Introduction générale sur les équations intégrales</i>	9
CHAPITRE 2: <i>Les équations intégrales: Développement</i>	15
2.1 Introduction	15
2.2 Classification des équations intégrales	18
CHAPITRE 3: <i>Notions sur le Polynôme de Lagrange</i>	22
3.1 Introduction	22
3.2 Formule d'interpolation de Lagrange: Position du problème	22
3.3 Calcul des coefficients de Lagrange	24
3.4 Erreur de la formule de Lagrange	26
CHAPITRE 4: <i>Equations intégrales de Volterra</i>	30
4.1 Existence de la solution	32
4.2 Unicité de la solution	33
CHAPITRE 5: <i>Méthode quadratique intégrale généralisée</i>	35
5.1 Introduction	35
5.2 Formulation	36
5.3 Description de l'algorithme pour évaluer la fonction inconnue	40
5.4 Test numérique	41
CHAPITRE 6: <i>Généralisation à l'équation intégrale de Volterra au cas non linéaire</i>	46
6.1 Mise en oeuvre numérique	48
6.2 Discussion et conclusion	49
Article: Publié dans Elsevier	51

CONCLUSION GENERALE	63
Références	65

INTRODUCTION GENERALE

Cette thèse s'inscrit dans un courant d'études mathématiques et numériques pour les équations intégrales appliquées en physique et chimie quantiques qui se développent au Laboratoire dirigé par le Professeur A. Zerarka depuis quelques années, principalement sous l'impulsion de nombreuse contribution et collaboration avec des Laboratoires de Mathématiques à l'Université de Biskra et quelques autres Laboratoires en France et en Allemagne. Notre contribution se distingue toutefois des travaux antérieurs par trois aspects :

- Construction d'une méthode générale aux cas des équations intégrales linéaires et non linéaires.
- Cette méthode est extensible aux cas multidimensionnels.
- La manipulation de la présente méthode peut également être utilisée avec soin aux problèmes singuliers.

Une fois les équations et leurs conditions aux limites établies, l'une des premières tâches du mathématicien consiste à formuler le problème en termes rigoureux et à démontrer que les équations ont une solution, et que si c'est le cas, la solution doit être évidemment unique sinon on dira que le problème est mal posé, et que la modélisation ou la construction du système lui même est incomplet. Une telle synthèse peut être ardue, et on ne sait pas toujours la conduire à terme ; mais elle permet de s'assurer que l'on ne se lancera pas vainement dans les manipulations des calculs dans un chemin hasardeux.

Il s'agit ensuite de proposer des méthodes efficaces pour résoudre, avec une précision relativement acceptable et suffisante, le problème posé. La résolution dite analytique ou dite encore exacte est généralement , exprimée par une formule compacte, est dans tout état de cause hors de portée, sauf cas exceptionnels et très simples. Le scientifique est obligé ainsi de se contenter d'une résolution numérique souvent réal-

isée par ordinateur car les calculs mis en oeuvre sont très volumineux. Les résultats obtenus sont aussi valables avec une certaine approximation.

Si la condition n'est pas simple à imposer numériquement, l'une des solutions proposées consiste à transformer l'équation aux dérivées partielles d'origine en une équation intégrale (équation où les fonctions inconnues apparaissent dans des intégrales) ; l'avantage de cette formulation est qu'elle satisfait automatiquement quelques conditions possibles sur la fonction inconnue.

C'est dans les années 1960 qu'ont été écrits les premiers programmes informatiques de résolution par équations intégrales. Ils ne permettaient de calculer que la diffraction par des objets petits par rapport à la longueur d'onde ; de plus, ils donnaient souvent des résultats aberrants, faute d'une analyse mathématique suffisante.

Les progrès dans le domaine des équations dans laquelle la fonction est supposée inconnue ont permis en particulier d'essayer de caractériser quelques propriétés intrinsèques d'une variété de méthodes à l'aide de la connaissance de certains algorithmes des opérateurs formulant les diverses équations en général. L'intérêt pour la physique par exemple découle bien sûr du fait que de nombreux systèmes de la nature sont décrits par des équations aux dérivées partielles et que l'étude de ces dernières se fait souvent à l'aide de l'analyse spectrale des opérateurs différentiels correspondants ou par l'intermédiaire d'une élaboration profonde d'une théorie adoptée à une situation particulière donnée.

Il est intéressant de noter que de très nombreuses méthodes numériques sont employées pour résoudre les problèmes issus des équations intégrales. Cela éventuellement peut dépendre souvent implicitement des géométries mises en oeuvre, de l'aspect particulier de type périodique ou de manière naturellement arbitraire, etc... Néanmoins, toutes ces applications ont subi d'énorme progrès dans la construction des réponses, notamment à cause de l'apparition et l'amélioration de nouvelles formulations ou de nouvelles méthodes numériques. Ceux-ci sont dus peut être à l'augmen-

tation de la taille de mémoire des ordinateurs qui ont déclenché ce bouleversement scientifique important.

On verra par la suite que notre méthode développée a conduit au problème de résolution d'un système linéaire ou non linéaire dont la matrice est pleine (ou simplement triangulaire) et peut être selon le problème envisagé d'une taille relativement modérée.

Les méthodes intégrales s'appuient sur une autre formulation couramment utilisée dans les systèmes physiques ou entre autre la modélisation mathématique susceptible de s'adapter à une situation concrète et réelle. Par exemple les EDP peuvent être remplacées par des équations intégrales qui épousent alternativement le problème posé. Ainsi ces équations intégrales sont alors résolues par un choix convenable de calcul numérique ou une construction d'une méthode adaptée adéquate.

CHAPITRE 1

Introduction générale sur les équations intégrales

La théorie des équations intégrales [1, 2] porte sur deux types principaux, les équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm, et les équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra.

Cette vaste théorie a commencé avec les travaux célèbres d'Ivar Fredholm [3, 4] où il a construit la théorie des équations intégrales de seconde espèce et établi quelques théorèmes fondamentaux (les théorèmes de l'alternative) relatifs à ces équations et résolu enfin les problèmes aux limites de Dirichlet et de Neumann relatifs à l'équation de Laplace.

C'est en fait une généralisation étendue de la théorie des systèmes algébriques linéaires, puisque les équations intégrales de Fredholm [5-7] sont liées à ces derniers par leurs propriétés.

L'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce est sous la forme suivante

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt, \quad a \leq x \leq b \quad (1.1)$$

f est la fonction inconnue, K et g sont des fonctions données et λ un paramètre numérique. Il convient de noter

$$\int_a^b K(x, t) f(t) dt = Kf(x) \quad (1.2)$$

On définit une nouvelle fonction Kf ; K s'appelle un opérateur intégral, la fonction $K(x, t)$ est le noyau de cet opérateur, ou bien le noyau de l'équation intégrale.

Fredholm a proposé d'approcher l'intégrale par des sommes finies. Il a utilisé les déterminants qui portent son nom, le déterminant de Fredholm $D_K(\lambda)$ associé au noyau $K(x, t)$, et $D_K(\lambda)$ est de la forme d'une série entière suivant les puissances de λ [8, 9].

Par ailleurs E. Schmidt a ouvert une nouvelle voie aux théoriciens des équations intégrales de seconde espèce, son idée principale est de représenter le noyau de l'équation intégrale par la somme d'un noyau dégénéré et d'un noyau petit pour une valeur absolue.

Un noyau $K(x, t)$ d'une équation intégrale est dit dégénéré s'il est de la forme:

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \quad (1.3)$$

où les fonctions $a_k(x)$ et $b_k(t)$ sont supposées continues dans le carré $a \leq x, t \leq b$. et linéairement indépendantes, ce noyau est dit symétrique si : $K(x, t) = K(t, x)$ dans le cas réel. Cette classe d'équations intégrales à noyau dégénéré se ramènent facilement aux équations algébriques linéaires.

F. Riesz a formulé les théorèmes de Fredholm pour une classe d'équations fonctionnelles de nature fort générale avec la seule notion d'opérateur complètement continu (compact). J. Schauder et d'autres mathématiciens l'ont suivi.

La théorie abstraite des équations fonctionnelles de Riesz s'étend à de nombreux domaines, en particulier aux opérateurs dans les espaces de Banach et les espaces localement convexes. Elle comprend la plupart des résultats de Fredholm.

On trouve les éléments de cette théorie dans plusieurs ouvrages d'analyse fonctionnelle [9]. Presque tous les manuels d'analyse fonctionnelle qui traitent aujourd'hui dans telle ou telle mesure les équations de Fredholm, les considèrent comme application de la théorie des opérateurs compacts selon Riesz.

D.Hilbert et E.Schmidt ont formulé la théorie des équations intégrales linéaires de Fredholm à noyau symétrique qui a été développée par T.Carleman, F. Riesz, et J.Neumann [9].

Les équations intégrales de Volterra peuvent être considérées comme un cas spécial d'équations de Fredholm c'est-à-dire si on suppose dans l'équation intégrale de Fredholm que le noyau

$$K(x, t) = 0, \quad \text{si } t > x$$

on obtient alors l'équation suivante:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)f(t)dt, \quad a \leq t \leq x \leq b \quad (1.4)$$

qu'on appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce suivante

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)f(t)dt, \quad (1.5)$$

peut être cherché par la méthode de Fredholm, c'est une méthode de calcul explicite des solutions de l'équation de Fredholm de seconde espèce limitée au cas unidimensionnel, la formule de la solution est:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda)g(t) dt \quad (1.6)$$

où la fonction $R(x, t; \lambda)$, dite la résolvante de Fredholm de l'équation, est définie par l'égalité

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} \quad (1.7)$$

sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x, t; \lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissance de λ :

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n \quad (1.8)$$

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n$$

avec les coefficients ainsi définis:

$$B_n(x, t) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \left\| \begin{array}{cccc} K(x, t) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t) & K(t_2, t_1) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{array} \right\| dt_1 \dots dt_n \quad (1.9)$$

et

$$C_n = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \left\| \begin{array}{cccc} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n) \\ K(t_3, t_1) & K(t_3, t_2) & \dots & K(t_3, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n) \end{array} \right\| dt_1 \dots dt_n \quad (1.10)$$

Les fonctions $D(\lambda)$ et $D(x, t; \lambda)$ sont respectivement le déterminant et le mineur de Fredholm. Si le noyau $K(x, t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b K(x, t) dx dt$$

est finie, les séries de fonctions $D(\lambda)$ et $D(x, t; \lambda)$ convergent $\forall \lambda$ et sont donc des fonctions analytiques entières de λ [8, 9].

L'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales de Volterra de seconde espèce (1.4) sont assurées dans des hypothèses plus larges sur la fonction $g(x)$ et le noyau $K(x, t)$ que leur continuité, c'est-à-dire l'équation intégrale suivante

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) f(t) dt \quad (1.11)$$

dont le noyau $K \in L^2([0, T] \times [0, T])$ et la fonction $g \in L^2([0, T])$, admet une solution et une seule dans $L^2([0, T])$ [8].

Indiquons quelques méthodes classiques de résolution numérique des équations intégrales, pour des données assez régulières, en suite on prend la formule de quadrature suivante:

$$\int_a^b \phi(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j \phi(x_j) \quad (1.12)$$

donc l'idée est de remplacer l'intégrale par une somme finie, avec une subdivision de $[a, b] = \{x_j, j = 1, 2, \dots, n\}$, et A_1, \dots, A_n sont des coefficients indépendants de la forme de la fonction ϕ , on pose $x = x_j$ dans l'équation (1.1) et en utilisant la formule quadratique précédente, on obtient l'équation suivante

$$f(x_j) = g(x_j) + \lambda \sum_{i=1}^n A_i K(x_j, x_i) f(x_i), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.13)$$

Il s'agit donc d'un système linéaire algébrique de n équations à n inconnues et $f(x_j)$ $j = 1, 2, \dots, n$, sont les valeurs approchées de la solution $f(x)$. Les coefficients A_i sont déterminés par l'une des formules suivantes:

1) La formule des rectangles

pour les points $x_j = a + (j - 1)h$; $j = 1, \dots, n$, on a $A_1 = A_2 = \dots = A_n = h$, où $h = \frac{b-a}{n}$.

2) La formule des trapèzes

pour les points $x_j = a + (j - 1)h$; $j = 1, \dots, n$, on a $A_1 = A_n = \frac{h}{2}$, $A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h$, où $h = \frac{b-a}{n-1}$.

3) La formule de Simpson ($n = 2m + 1$)

pour les points $x_{2j+1} = a + 2jh$, $j = 0, \dots, m$; $A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}$, $A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{3}$,

$A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}$, où $h = \frac{b-a}{2m}$.

On peut prendre comme solution approchée de l'équation intégrale (1.1) sur $[a, b]$

la fonction suivante [8]

$$\bar{f}(x) = g(x) + \lambda \sum_{m=1}^n A_m K(x, x_m) f(x_m) \quad (1.14)$$

Dans ce travail on s'intéresse à une nouvelle méthode numérique pour la résolution des équations intégrales de Volterra, puisque les méthodes exactes de résolution ne sont possible que si les noyaux présentent certaines formes, généralement ne sont pas vérifiées dans un grand nombre de problèmes pratiques, les méthodes numériques sont donc conseillées. On dispose en effet des moyens rapides de calcul, par exemple le traitement par ordinateur ou bien le calcul par machine parallèle ou vectorielle.

Le traitement des équations intégrales linéaires aussi bien le traitement des équations intégrales non- linéaires sont développées dans ce travail. Des exemples numériques sont également présentés.

CHAPITRE 2

Les équations intégrales: Développement

2.1 Introduction

Toute équation fonctionnelle, où la fonction inconnue intervient sous le signe d'intégration s'appelle équation intégrale. Le sujet des équations fonctionnelles est très vaste puisque contenant les thèmes suivants; les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles, les équations intégrales, et le calcul des variations. Notre étude va se borner sur le thème des équations intégrales.

Les besoins de la physique mathématique ont conduit à la création de la théorie des équations intégrales linéaires ou non linéaires [10-19]. Cette discipline importante des mathématiques a aujourd'hui de nombreuses applications en théorie des équations différentielles, en physique mathématique classique et moderne.

Notons une liaison forte entre les équations différentielles linéaires à coefficients continus et les équations intégrales. En d'autre terme, le problème de Cauchy pour les équations différentielles se ramène à une équation intégrale (appelée équation intégrale de Volterra de seconde espèce), c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients continus dans un voisinage du point $x = 0$ correspond exactement au problème d'existence et d'unicité pour l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce .

Le problème aux limites pour les équations différentielles se ramène à une équation intégrale (appelée équation intégrale de Fredholm de seconde espèce) au moyen de la fonction de Green:

i) Considérons un exemple relatif au problème de Cauchy :

$$PC1 \begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2} + a(x) \frac{df}{dx} + b(x) f(x) = g(x) \\ f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \beta \end{cases} \quad (2.1)$$

les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ sont continues; α et β des constantes quelconques, posons :

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \varphi(x) \quad (2.2)$$

en utilisant les conditions initiales, on obtient

$$\frac{df}{dx}(x) = \beta + \int_0^x \varphi(t) dt \quad (2.3)$$

et

$$f(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x \left(\int_0^t \varphi(z) dz \right) dt = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt \quad (2.4)$$

en reportant dans le $PC1$ on voit que φ est solution de :

$$\begin{aligned} g(x) &= \varphi(x) + \beta a(x) + \int_0^x a(x) \varphi(t) dt + \alpha b(x) \\ &\quad + \beta x b(x) + \int_0^x (x-t) \varphi(t) b(x) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

posons:

$$-(a(x) + b(x)(x-t)) = K(x, t) \quad (2.6)$$

et

$$g(x) - \beta a(x) - \alpha b(x) - \beta x b(x) = G(x) \quad (2.7)$$

l'équation (2.5) devient :

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt + G(x) \quad (2.8)$$

cette équation intégrale est du type Volterra de seconde espèce .

Inversement , la résolution de l'équation intégrale (2.8) se ramène à la résolution du problème de Cauchy, avec K et G définis par les formules précédentes. On obtiendrait le même résultat à partir d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients continus

$$\begin{cases} f^{(n)}(x) + a_1(x) f^{(n-1)}(x) + a_2(x) f^{(n-2)}(x) + \dots + a_n(x) f(x) = g(x) \\ f^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2.9)$$

en posant:

$$\varphi(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \quad (2.10)$$

et on utilise la formule suivante pour toute fonction continue φ on a:

$$\underbrace{\int_0^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x}_{n \text{ fois}} \varphi(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt. \quad (2.11)$$

ii) Considérons un exemple sur le problème aux conditions limites:

Ramenons le problème aux conditions limites suivant à une équation intégrale,

$$PL2 \begin{cases} y^{(2)} + \lambda y = x \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

la fonction de Green associée au problème homogène est donnée par

$$G(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}t - 1\right) x, & 0 \leq x \leq t \\ \left(\frac{2}{\pi}x - 1\right) t, & t \leq x \leq \frac{2}{\pi} \end{cases} \quad (2.13)$$

la solution du problème aux limites $PL2$ est donnée par

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} G(x, t)y(t)dt \quad (2.14)$$

$$\text{où } f(x) = \int_0^{\pi/2} G(x, t)t dt$$

cette équation est du type Fredholm, ainsi la résolution du problème aux conditions limites se ramène à celle d'une équation intégrale du type Fredholm.

2.2 Classification des équations intégrales

En théorie classique, on distingue une différence entre équation intégrale de Volterra et équation intégrale de Fredholm. Dans l'équation intégrale de Fredholm les bornes d'intégration sont fixées, tandis que dans l'équation intégrale de Volterra les bornes d'intégration sont variables. Par analogie aux équations différentielles la distinction se fait sentir au niveau du problème aux conditions initiales et du problème aux conditions limites [20, 21].

L'équation intégrale suivante :

$$cy(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s, y(s)) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (2.15)$$

est un exemple d'une équation intégrale de Fredholm, et l'équation intégrale suivante :

$$cy(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, y(s)) ds, \quad a \leq t \quad (2.16)$$

est un exemple d'une équation intégrale de Volterra, où $f(t)$ et $K(t, s, y(s))$ sont des fonctions connues, $y(t)$ est la fonction inconnue, $c \in \{0, 1\}$, et λ un paramètre numérique .

Si $c = 0$, dans (2.15) ou (2.16), l'équation intégrale obtenue est appelée équation

intégrale de première espèce.

Si $c = 1$ dans (2.15) ou (2.16), l'équation intégrale obtenue est appelée équation intégrale de seconde espèce .

Si $K(t, s, y(s)) = K(t, s)y(s)$ les équations (2.15) et (2.16) sont dites linéaires, autrement sont dites non linéaires. Une équation linéaire avec un noyau symétrique si $k(x, t) = k(t, x)$, cette propriété joue un rôle important dans les équations intégrales de Fredholm.

Si $f(t) = 0$ dans (2.15) ou (2.16) l'équation intégrale obtenue est appelée équation intégrale homogène.

L'équation intégrale de Volterra peut se transformer aussi en une équation non linéaire du type de Hammerstein [22]

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^t K(x, t) Y(t, y(t)) dt \quad (2.17)$$

- Equations intégrales à noyau dégénéré:

Le noyau d'une équation intégrale linéaire est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions de x seul par des fonctions de t seul, c'est-à-dire il est de la forme

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(t); \quad (2.18)$$

les fonctions $a_j(x)$ et $b_j(t)$ seront supposées continues dans le carré $[a, b] \times [a, b]$, et linéairement indépendantes.

- Equations intégrales du type convolution

Sont des équations intégrales linéaires dont le noyau $K(x, t)$ dépendant que de la différence des arguments c'est-à-dire $K(x, t) = K(x - t)$, donc l'équation

intégrale du type convolution est de la forme suivante

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)y(t) dt \quad (2.19)$$

cette classe d'équations comprend par exemple l'équation d'Abel généralisée.

- Equations intégrales singulières

Une équation intégrale [23, 24] est dite singulière si:

i) l'intervalle d'intégration n'est pas borné c-à-d, il est de l'une des formes suivantes

$$]-\infty, b]; [a, +\infty[;]-\infty, +\infty[\text{ ou;}$$

ii) le noyau est singulier (n'est pas régulier), ou bien le noyau est discontinu.

iii) le noyau de l'équation intégrale $K(x, t) = \frac{P(x,t)}{(x-t)^\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$, et $P(x, t)$ une fonction continue dans le carré $[a, b] \times [a, b]$, l'équation suivante:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (2.20)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $f(x)$ une fonction donnée, est un exemple d'une équation intégrale singulière est appelée équation intégrale d'Abel; et la solution exacte s'écrit:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (2.21)$$

On appelle également équation d'Abel généralisée une équation de la forme:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt \text{ où } \alpha \text{ une constante, telle que } 0 < \alpha < 1 \quad (2.22)$$

pour le changement de variable suivant $y = t + r(x-t)$ et compte tenu de la valeur

$$\int_0^1 \frac{y^{-\alpha} dy}{(1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\sin \pi x}{\pi} \quad (2.23)$$

la solution exacte de l'équation (2.13) est donnée par :

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (2.24)$$

REMARQUE 2.1 *L'équation intégrale d'Abel est souvent déduite du problème de mécanique.*

CHAPITRE 3

Notions sur le Polynôme de Lagrange

3.1 Introduction

Les polynômes sont des fonctions simples, faciles à évaluer; donc pour représenter une fonction f par une fonction simple c'est en général faire approcher f par un polynôme, et cette approximation est toujours possible; puisque toute fonction peut être approchée, en un sens ou un autre par des polynômes, d'après le théorème d'approximation de Weierstrass [25].

Il existe plusieurs méthodes d'approximation, mais nous allons aborder uniquement une méthode d'approximation dite la méthode d'interpolation de Lagrange.

3.2 Formule d'interpolation de Lagrange: Position du problème

Soient une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, les points x_0, x_1, \dots, x_n s'appellent points d'interpolation.

On note par \mathbb{P}_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n ; $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$. Le problème d'interpolation de la fonction f par la formule de Lagrange consiste à déterminer un polynôme $P \in \mathbb{P}_n$ qui coïncide avec la fonction f aux points $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$. Ce polynôme est-il unique? et quelle erreur commet-on si on remplace $f(x)$ par $p(x)$? en d'autres termes calculons la quantité suivante $R(x) = f(x) - p(x)$.

THEOREME 3.1 Pour tout choix de $(n + 1)$ points de la subdivision de $[a, b]$ et pour toute donnée $(f(x_0), \dots; f(x_n))$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{P}_n$ qui vérifie:

$$P(x_j) = f(x_j), \forall j = 0, 1, \dots, n \quad (3.1)$$

PREUVE 3.1 Pour chercher une solution dans \mathbb{P}_m , on doit déterminer $m + 1$ points inconnus qui sont les coefficients de P , soit

$$P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k; \quad (3.2)$$

alors les équations qui doivent être satisfaites sont

$$\sum_{k=0}^m a_k x_j^k = f(x_j) \quad \forall j = 0, 1, \dots, n \quad (3.3)$$

on a ainsi $n + 1$ équations à $m + 1$ inconnus, il est naturel de prendre $m = n$ et de résoudre le problème d'interpolation dans l'espace vectoriel \mathbb{P}_n . A partir de la formule (3.3) on obtient le système linéaire suivant

$$(S) : \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases} \quad (3.4)$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

i.e

$$DA = F$$

avec

$$D \in M_{n+1}(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

puisque $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, on a:

$$\det D = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0 \quad (3.5)$$

(déterminant de Vandermonde), donc le système (S) possède une solution (a_0, a_1, \dots, a_n) unique. Désignons par $L_n(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange. ■

3.3 Calcul des coefficients de Lagrange

COROLLAIRE 3.1 *Pour tout choix de $n + 1$ points de la subdivision $[a, b]$ et $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$; il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n satisfaisant:*

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.6)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.7)$$

D'abord, nous calculons explicitement les

$$\Phi_i(x)$$

pour $i \neq j$, $\Phi_i(x_j) = 0$ et pour $i = j$, $\Phi_i(x_i) = 1$, on a donc :

$$\Phi_i(x) = c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad (3.8)$$

où c est une constante à déterminer et comme

$$\Phi_i(x_i) = 1 = c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \quad (3.9)$$

alors

$$c = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (3.10)$$

ainsi on déduit que

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad (3.11)$$

Le polynôme

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \Phi_i(x) \quad (3.12)$$

coïncide avec le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points x_i . Comme il est de degré inférieur ou égal à n , il est donc égal à ce polynôme d'interpolation. D'après le théorème précédent on peut donc écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange sous la forme :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Phi_i(x) \quad (3.13)$$

posant:

$$\prod_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \quad (3.14)$$

et en dérivant ce produit par rapport à x on obtient:

$$\prod'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad (3.15)$$

Pour $x = x_i$ il vient

$$\prod'_{n+1}(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \quad (3.16)$$

il s'ensuit que la formule d'interpolation du polynôme de Lagrange peut-être écrite sous la forme suivante:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x - x_i) \prod'_{n+1}(x)} f(x_i) \quad (3.17)$$

on pose :

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x - x_i) \prod'_{n+1}(x)} \quad (3.18)$$

sont dits aussi les coefficients de Lagrange, alors la formule de Lagrange s'écrit :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i^{(n)}(x) f(x_i) \quad (3.19)$$

3.4 Erreur de la formule de Lagrange

THEOREME 3.2 Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et $L_n(x)$ son polynôme d'interpolation de Lagrange en $n + 1$ points x_0, x_1, \dots, x_n dans $[a, b]$, alors quelque soit $x \in [a, b]$, il existe un nombre $\xi_x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x) \quad (3.20)$$

PREUVE 3.2 On pose:

$$u(x) = f(x) - L_n(x) - k \prod_{n+1}(x) \quad (3.21)$$

k est une constante qui sera choisie par la suite. Remarquons que $u(x)$ possède $n + 1$ racines aux points x_0, x_1, \dots, x_n . Choisissons maintenant k de sorte que $u(x)$ ait une $(n + 2)$ - ième racines en un point quelconque \bar{x} fixé dans $[a, b]$, $\bar{x} \neq x_i \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$. A cet effet il suffit de poser :

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - k \prod_{n+1}(\bar{x}) = 0 \quad (3.22)$$

d'où

$$k = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\prod_{n+1}(\bar{x})} \quad (3.23)$$

pour cette valeur de la constante k la fonction $u(x)$ a $n + 1$ racines sur $[a, b]$ et s'annule aux extrémités de chaque intervalle compact, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_i, \bar{x}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. En appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle pour la fonction $u(x)$, on voit que $u'(x)$ a au moins $n + 1$ racines sur l'intervalle $[a, b]$, et on procède de la même façon jusqu'à la dérivée d'ordre n on pouvait finalement remarquer que la fonction $u^{(n+1)}(x)$ possède au moins une racine dans l'intervalle $[a, b]$ c-à-d : $\exists \xi \in]a, b[$ tel que $u^{(n+1)}(\xi) = 0$. Comme la dérivée d'ordre $n + 1$ de $L_n(x)$ égale à 0 c-à-d :

$$L_n^{(n+1)}(x) = 0$$

et

$$\prod_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$$

l'équation (3.21) entraîne la relation suivante:

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n + 1)! \quad (3.24)$$

pour

$$x = \xi$$

on obtient:

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \quad (3.25)$$

la comparaison des deux formules (3.23) et (3.25) de la valeur k donne :

$$\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\prod_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (3.26)$$

c'est-à-dire:

$$f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(\bar{x}) \quad (3.27)$$

Puisque \bar{x} est quelconque cette formule peut s'écrire:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x) \quad (3.28)$$

où $x, \xi \in [a, b]$ et ξ dépend de x . On désigne par:

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \quad (3.29)$$

on obtient l'estimation suivante de l'erreur absolue de la formule d'interpolation de Lagrange.

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{\prod_{n+1}(x)}{(n+1)!} \quad (3.30)$$

■

REMARQUE 3.1 L'erreur $R_n(x)$ (3.28) de la formule de Lagrange est, à une constante numérique près, le produit de deux facteurs, dont l'un, $f^{(n+1)}(x)$, dépend des propriétés de la fonction f et ne se prête pas à l'ajustage, alors que l'autre facteur

$$\prod_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

n'est déterminé que par le choix des points d'interpolation. Dans le cas d'une mauvaise répartition des points d'interpolation $\{x_j, j = 0, \dots, n\}$, la borne supérieure de la valeur absolue de l'erreur $R_n(x)$ peut être très grande. Le choix des points d'interpolation $\{x_j, j = 0, \dots, n\}$ doit être donc le meilleur pour que le polynôme

$$\prod_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

soit sur le segment $[a, b]$ minimale. Ce problème a été résolu par P.Tchébychev qui a

montré que dans ce sens le meilleur choix des points d'interpolation est donné par la formule. $x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \left(-\cos \frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$. Dans ce cas on a [22]:

$$\left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| \leq 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1} \quad (3.31)$$

CHAPITRE 4

Equations intégrales de Volterra

Les équations intégrales sont utilisées le plus souvent pour obtenir la solution de problèmes issus d'un modèle différentiel . La transformation vers le modèle intégral s'appelle "méthode intégrale". L'idée de base de quelques équations différentielles est de rechercher la solution sous forme d'une représentation intégrale. Cette note introductive s'attache plus particulièrement aux aspects usuels de la méthode, à la compréhension des problèmes physiques et mathématiques sous-jacents, afin de donner une capacité de saisir les éléments de base à bon escient, et de les mettre en oeuvre. Les aspects théoriques seront présentés plus brièvement.

DEFINITION 4.1 On appelle opérateur intégral associé à la fonction $K \in (C[a, b])^2$, l'opérateur linéaire borné de $C[a, b]$ dans lui-même défini par:

$$Kf(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt \quad (4.1)$$

la fonction $K(x, t)$ s'appelle le noyau de cet opérateur, sa norme est notée

$$\| K \| = \sup_{\|f\|=1} \| Kf \| \quad (4.2)$$

DEFINITION 4.2 Soit $K(x, t)$ le noyau de l'opérateur K , les opérateurs suivants K_1, K_2, \dots, K_n définis par:

$$K_1 f = K, \quad K_2 f = K(K_1 f), \quad \dots, \quad K_n f = K(K_{n-1} f)$$

s'appellent opérateurs (noyaux) itérés, le noyau de K_n est donné par

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= K(x, t) \\ K_n(x, t) &= \int_a^b k(x, y) K_{n-1}(y, t) dy \quad \text{pour } n \geq 2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

DEFINITION 4.3 Le noyau de Volterra sur un intervalle borné $[a, b]$ est une fonction

$K(x, t)$ telle que $K(x, t) = 0$ si $t > x$.

Soient K un noyau de Volterra continu sur $[a, b] \times [a, x]$, f une fonction continue sur $[a, b]$ et λ un paramètre numérique. On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce l'équation suivante:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (4.4)$$

où φ est la fonction inconnue.

THEOREME 4.1 L'équation (4.4) admet une solution unique et continue, cette solution est donnée par:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x H(x, t; \lambda) f(t) dt \\ \text{où } H(x, t; \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ou

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) + \lambda K f(x) + \dots + \lambda^n K_n f(x)) \quad (4.6)$$

Si $\lambda = 0$ $\varphi(x) = f(x)$ solution triviale, on suppose par la suite $\lambda \neq 0$.

Au noyau $K(x, t)$ on associe un opérateur K dans l'espace $C[a, b]$, et l'équation (4.4) s'écrit

$$(I - \lambda K) \varphi = f \quad (4.7)$$

D'après un théorème d'analyse fonctionnelle si

$$|\lambda| < \frac{1}{\|K\|} \quad (4.8)$$

alors l'opérateur inverse

$$(I - \lambda K)^{-1} \quad (4.9)$$

existe et égal à

$$I + \lambda K + (\lambda K)^2 + \dots + (\lambda K)^n + \dots \quad (4.10)$$

4.1 Existence de la solution

En cherchant donc la solution de l'équation (4.4) sous la forme d'une série entière suivant les puissances de λ comme:

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots \quad (4.11)$$

et en portant formellement cette série dans l'équation (4.4) il vient:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) \left(\sum_{n \geq 0} \lambda^n \varphi_n(x) \right) dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) (\varphi_0(t) + \lambda \varphi_1(t) + \dots + \lambda^n \varphi_n(t) + \dots) dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

en identifiant les coefficients on obtient:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_1(x) &= \int_a^x K(x,t) \varphi_0(t) dt = \int_a^x K(x,t) f(t) dt \\ \varphi_2(x) &= \int_a^x K(x,t) \varphi_1(t) dt = \int_a^x K(x,t) \left[\int_a^t K(t,z) f(z) dz \right] dt = \\ &= \int_a^x K_2(x,t) f(t) dt \quad \text{où } K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z) K(z,t) dz \\ \varphi_n(x) &= \int_a^x K(x,t) \varphi_{n-1}(t) dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $K(x, t)$, on démontre que la série

$\sum_{n=0} \lambda^n \varphi_n(x)$ dont les coefficients sont donnés par (4.13) constitue effectivement une solution de l'équation (4.4), ainsi on pose

$$\sup_x |f(x)| = M \quad , \quad \sup_{(x,t)} |K(x, t)| = N \quad (4.14)$$

on a alors

$$|\varphi_0(x)| \leq M \quad , \quad |\varphi_1(x)| \leq MN(x - a) \quad (4.15)$$

et

$$|\varphi_2(x)| = \left| \int_a^x K(x, t) \varphi_1(t) dt \right| \leq MN^2 \frac{(x - a)^2}{2!} \quad (4.16)$$

en poursuivant de cette manière, on peut démontrer par récurrence que:

$$|\varphi_n(x)| \leq MN^n \frac{(x - a)^n}{n!} \quad (4.17)$$

ainsi la série de terme général $\lambda^n \varphi_n(x)$ converge pour toute valeur de λ , cette convergence est absolue et aussi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Il résulte que la solution obtenue formellement est effectivement une solution de l'équation intégrale (4.4).

4.2 Unicité de la solution

Supposons que l'équation (4.4) admette deux solutions φ_1 et φ_2 posons leur différence Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \\ &= \lambda \int_a^x K(x, t) \Psi(t) dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$|\Psi(x)| \leq |\lambda| N \int_a^x |\Psi(t)| dt \quad (4.19)$$

d'après le lemme de Gronwall, on déduit que $\Psi(x) = 0$, donc la solution est unique.

DEFINITION 4.4 Soit $K(x, t)$ un noyau de Volterra sur $([a, b])^2$, l'équation de-

Volterra de première espèce est une équation de la forme:

$$\int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt = f(x) \quad (4.20)$$

Cette équation en général est plus difficile à résoudre que celle de seconde espèce sauf si les fonctions f et K sont assez régulières, dans ce cas l'équation (4.7) peut-être ramenée à une équation de seconde espèce.

THEOREME 4.2 Sous les hypothèses suivantes

- i) f de classe $C^1[a, b]$ et $f(a) = 0$.
 - ii) $K(x, t)$ et $K_x(x, t) = \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ sont continues dans l'intervalle $0 \leq t \leq x \leq b$
 - iii) $K(x, x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- l'équation (4.7) se ramène alors à une équation de seconde espèce.

PREUVE 4.1 En dérivant l'équation (4.7) par rapport à x on obtient:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f_x(x)}{k(x, x)} - \int_a^x \frac{K_x(x, t)}{K(x, x)} \varphi(t) dt \\ \varphi(x) &= F(x) + \gamma \int_a^x \Gamma(x, t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $F(x) = \frac{f_x(x)}{k(x, x)}$, $\Gamma(x, t) = \frac{K_x(x, t)}{K(x, x)}$ et $\gamma = -1$. ■

REMARQUE 4.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'équation (4.7) est équivalente à (4.4) donc l'équation (4.7) possède une solution continue et une seule sur $[a, b]$. Toute solution φ continue sur $[a, b]$ de l'équation (4.7) vérifie évidemment l'équation (4.4). Inversement, toute solution continue sur $[a, b]$ l'équation (4.4) vérifie l'équation (4.7) [25].*

CHAPITRE 5

Méthode quadratique intégrale généralisée

Cette partie est consacrée à l'étude numérique des solutions des équations intégrales de Volterra linéaires basées essentiellement sur la méthode quadratique intégrale généralisée (*QIG*).

5.1 Introduction

Les équations intégrales de Volterra interviennent dans de nombreuses disciplines scientifiques [26] dont les applications telles que, l'électromagnétisme, la mécanique des solides, la mécanique des fluides, ect ..., d'une part et d'autre part, d'extensives études théoriques et numériques ont été largement développées dans ces dernières années [27].

Généralement les différents types de ces équations intégrales de Volterra apparaissant de façon naturelle en relation avec les modèles physiques représentés par les systèmes d'équations différentielles ordinaires *EDO* et d'équations aux dérivées partielles *EDP*, lesquels peuvent se ramener à des équations intégrales de différents types [8, 22, 25, 28].

En effet un grand nombre d'algorithmes pour les *EDO* sont valables pour l'équation intégrale de Volterra, et réciproquement. En pratique il est arrivé souvent que l'efficacité des solutions des équations intégrales de Volterra est contrebalancée par les systèmes de ces équations. Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre les équations intégrales de Volterra linéaires et non linéaires [29, 30].

5.2 Formulation

Considérons l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce avec un noyau non singulier

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq T \quad (5.1a)$$

où λ est un paramètre numérique, $\varphi : x \rightarrow \varphi(x)$ est une fonction donnée, et $K(x,t)$ est le noyau de l'équation intégrale. Les fonctions dans (5.1a) sont supposées assez régulières, le terme de la borne supérieure de l'intégrale est non constant. Si on posait:

$$U(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt \quad (5.2)$$

alors

$$U(x_m) = \int_0^{x_m} K(x_m,t)f(t)dt \quad (5.3a)$$

et peut-être approximée par

$$U(x_m) = \sum_{j=0}^N C_{mj}K(x_m, x_j)f(x_j) \quad (5.4a)$$

La fonction f est supposée identifiable par interpolation au moyen d'un polynôme de Lagrange de degré inférieur ou égal à N , alors il vient

$$f(x_j) = P_{N,k}(x_j) \quad (5.5)$$

avec

$$P_{N,k}(x) = \frac{G_N(x)}{(x - x_k) G_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (5.6)$$

où $G_N(x) = \prod_{j=0}^N (x - x_j)$ et $G_N^{(1)}(x_k) = \frac{\partial G_N(x_k)}{\partial x} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N (x_k - x_j)$

On obtient à partir de (5.4a) et (5.5) l'équation suivante

$$U_k(x_m) = \sum_{j=0}^N C_{mj} K(x_m, x_j) P_{N,k}(x_j) \quad (5.7)$$

où $x_j = \frac{T}{2} [1 - \cos(\frac{2j+1}{2N+2}\pi)]$, $j = 0, 1, \dots, N$ sont les points d'interpolation, les C_{mj} représentent les coefficients ou poids de l'intégrale simple et sont des inconnus à déterminer, et $P_{N,k}(x_j)$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange associés avec la base de points discrets $\{x_j\}$, et $P_{N,k}(x_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$ et par suite

$$C_{mj} = K^{-1}(x_m, x_j) U_j(x_m) \quad (5.8)$$

de (5.6) et (5.8) C_{mj} peut-être écrit sous la forme suivante:

$$C_{mj} = K^{-1}(x_m, x_j) \int_0^{x_m} K^{-1}(x_m, t) P_{N,j}(t) dt \quad (5.9)$$

Dans le but de trouver une expression simple pour le polynôme $P_{N,k}(t)$, on écrit

$$P_{N,k}(t) = (t - x_0) Q(N, l, k; t), \quad N \geq 1 \quad (5.10)$$

$$P_{N,k}(t) = (t - x_0) \frac{\prod_{j=1}^N (t - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N (x_k - x_j)} \quad (5.11)$$

il s'ensuit alors

$$Q(N, l, k; t) = b_{0,k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (t - x_j) \quad (5.12)$$

$$Q(N, l, k; t) = \sum_{l=0}^N b_{N-l,k} t^l, \quad N \geq 1 \quad (5.13)$$

où les coefficients $b_{l,k}$ sont liés par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N x_j &= -\frac{b_{1,k}}{b_{0,k}} \\ \sum_{\substack{i < j \\ i \neq k, j \neq k}}^N x_i x_j &= \frac{b_{2,k}}{b_{0,k}} \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N x_j &= (-1)^N \frac{b_{N,k}}{b_{0,k}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Les premiers membres des égalités (5.14) sont les sommes des combinaisons une à une, deux à deux, etc...des racines du polynôme $Q(N, l, k, x)$ et $b_{0,k} \neq 0$ est identifié comme:

$$b_{0,k} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N (x_k - x_j)} \quad (5.15)$$

et par conséquent les C_{mj} peuvent prendre la forme suivante:

$$C_{mj} = K^{-1}(x_m, x_j) \sum_{l=0}^N b_{N-l,k} \int_0^{x_m} K(x_m, s) t^l dt, \quad m = 0, \dots, N \quad (5.16)$$

Dans les calculs pratiques, au lieu d'utiliser (5.16) pour évaluer C_{ii} d'autres relations peuvent-être établies pour obtenir C_{ii} . Par conséquent les relations (5.7) et (5.9) ensemble avec (5.16) donnent

$$\sum_{j=0}^N C_{mj} K(x_m, x_j) = \int_0^{x_m} K(x_m, t) dt, \quad \text{pour } m = 0, \dots, N \quad (5.17)$$

ainsi les coefficients C_{ii} peuvent-être calculés par :

$$C_{ii} = \int_0^{x_i} \bar{K}(x_i, t) dt - \sum_{j=0, j \neq i}^N C_{ij} \bar{K}(x_i, x_j), \quad \text{pour } i = 0, \dots, N \quad (5.18)$$

où $\bar{K}(x_m, t) = \frac{K(x_m, t)}{K(x_m, x_m)}$.

REMARQUE 5.1 *L'inconvénient de la technique d'interpolation polynomiale de Lagrange, c'est qu'on ne sait pas quel degré du polynôme on devrait utiliser; si le degré du polynôme est trop bas, alors le polynôme ne donne pas de bonnes estimations pour la fonction, si le degré du polynôme est trop haut, il peut y avoir d'indésirables oscillations dans les valeurs du polynôme. Pour cela, on peut adopter une stratégie de choix des points utilisés dans la construction des polynômes d'interpolation.*

REMARQUE 5.2 *Le point essentiel concernant les applications de cette méthode (QIG) est comment déterminé de manière efficace les coefficients ou poids nécessaires à une bonne estimation de la fonction inconnue. On peut voir que (5.16) et (5.18) sont de très simples expressions algébriques pour C_{ij} , et il n'y a pas de restriction dans le choix des points d'interpolation, sauf dans des situations qui ne sont pas favorisantes.*

REMARQUE 5.3 *Si on sait à priori que la fonction est régulière, un polynôme de degré petit est utilisé et peut fournir de bons résultats. Les expressions (5.16) et (5.18) constituent des formules complètes pour la détermination des coefficients du poids, ceci veut dire qu'il n'est pas nécessaire de résoudre un système d'équations algébriques linéaires qui peut-être mal conditionné quand le nombre de points d'interpolation est raisonnablement grand, et il n'y a pas de restriction sur les points (x_i) . De plus les expressions du calcul des coefficients sont simples et faciles à mettre en oeuvre numériquement, cependant, ceci veut dire qu'on n'a même pas besoin d'écrire un système d'équations algébriques, mais de résoudre le problème pas à pas par rapport à x . Une fois les valeurs de la fonction en tous les points d'interpolation (x_i) sont obtenues, il est alors facile de déterminer les valeurs dans tous le domaine par*

l'intermédiaire de l'approximation polynomiale, telle que

$$f(x) = \sum_{j=0}^N f(x_j) P_{N,j}(x) \quad (5.19)$$

où $P_{N,j}(x)$ sont les polynômes d'interpolation de Lagrange donnés par (5.6).

5.3 Description de l'algorithme pour évaluer la fonction inconnue

On écrit l'équation (5.1a) sous la forme suivante:

$$f_p = \varphi_p + \lambda \sum_{j=0}^p C_{pj} K_{pj} f_j, \quad p = 0, \dots, N \quad (5.20)$$

où f_i , φ_i et K_{pj} sont des quantités pour $f(x_i)$, $\varphi(x_i)$ et $K(x_p, x_j)$ respectivement. L'équation (5.20) peut être écrite en abrégée sous forme matricielle, donc il s'agit d'un système d'équations algébriques linéaires c'est-à-dire:

$$(I - \lambda R) F = \Phi \quad (5.21)$$

où les composantes de F et Φ sont f_p et φ_p respectivement, $R = CK$ où $R_{ij} = C_{ij} K_{ij}$ et les composantes C_{ij} sont données par (5.16) et (5.18). D'un point de vue théorique la solution de l'équation (5.20) nécessite un coût de calcul d'ordre $O((N+1)^2)$ d'opérations.

Si nous considérons l'équation (5.1a) comme équation vectorielle, pour le vecteur $f(t)$ de M fonctions, alors le noyau $K(x, t)$ est une matrice d'ordre M^2 . L'équation (5.20) peut être considérée comme équation vectorielle. Pour chaque $p = 0, 1, \dots, M$, alors on cherche la solution de $(M+1) \times (M+1)$ ensemble d'équations algébriques linéaires.

Soit $TOLV$ la valeur de tolérance, alors pour deux itérations consécutives, la

condition suivante sera prise en considération pour chaque point de maillage $\|f^{(i)} - f^{(i-1)}\| \leq TOLV$, $i \geq 2$.

Etape 1: On donne les points d'interpolation (x_i) , ensuite on construit le polynôme d'interpolation $P_{N,k}(x)$ défini par (5.6) avec le système (5.14), les points d'interpolation peuvent être calculés comme suit: on pose $x_i = ih$ $i = 0, 1, \dots, N$ où h désigne le pas fixé, mais il est utile d'utiliser les points de Tchebycheff donnés dans la section "formulation".

Etape 2: Comme le noyau $K(x, t)$ est une fonction donnée, alors on calcule les coefficients C_{ik} en utilisant

l'équation (5.16), pour $i = 0, 1, \dots, N$ et $k = 0, 1, \dots, N$ avec $i \neq k$, et pour les coefficients C_{ii} , en utilisant l'équation (5.18) pour $i = 0, 1, \dots, N$.

Etape 3: Comme $\varphi : x \rightarrow \varphi(x)$ est une fonction donnée, on calcule les φ_i pour $i = 0, 1, \dots, N$. Pour la valeur $x = 0$, la fonction f est supposée identifiable à φ .

Etape 4: Cherchons la solution du système par le processus itératif en utilisant la méthode itérative de Gauss-Seidel dont le dernier terme s'écrit

$$f_p^{(k+1)} = \varphi_p + \sum_{j=0}^{p-1} C_{pj} K_{pj} f_j^{(k+1)} + C_{pp} K_{pp} f_p^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad p = \{i\}_{i=0}^N \quad (5.22)$$

où l'approximation initiale est $F^{(0)} = \Phi$.

Etape 5: On construit la fonction f en utilisant l'expression (5.19).

5.4 Test numérique

Du point de vue pédagogique et principalement scientifique, il est d'usage de procéder à la vérification de l'efficacité de la méthode développée dans la section précédente, nous allons donc, essayer de présenter quelques résultats de solutions numériques et les comparer avec les solutions analytiques exactes.

EXEMPLE 5.1 Soit l'équation intégrale de Volterra suivante:

$$f(x) = x + \int_0^x (t - x) f(t) dt \quad (5.23)$$

La solution analytique de cette équation est $f(x) = \sin(x)$. Pour les solutions numériques $TOLV = 10^{-3}$ dans $0 < x < 5$ et pour des points d'interpolation $N = 8$ sont utilisés. On trouve que la solution numérique et la solution analytique sont presque identiques et les résultats sont très satisfaisants. (Figure 1)

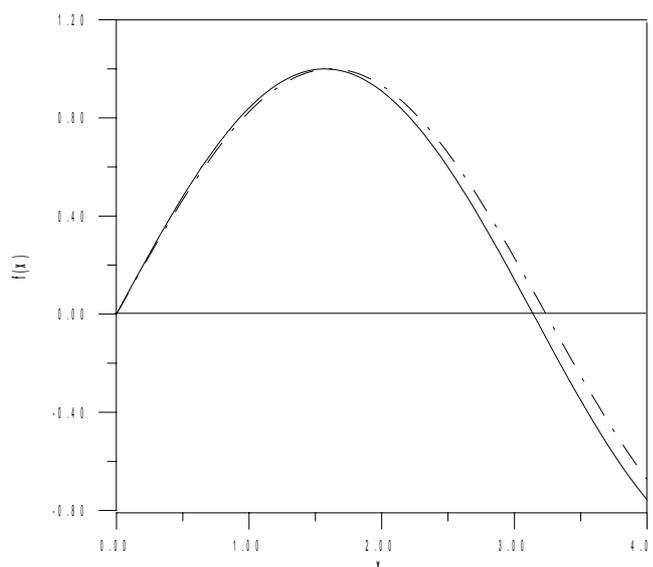


Figure 1: Résultat analytique: trait en plein, présente méthode: trait en tiret-point.

EXEMPLE 5.2 Soit l'équation intégrale de Volterra suivante:

$$f(x) = x^2 + \lambda \int_0^x (x - t) f(t) dt, \quad \lambda \neq 0 \quad (5.24)$$

La solution exacte de cette équation est $f(x) = \frac{2}{\lambda} (ch\sqrt{\lambda}x - 1)$ pour $\lambda = 1$, et $\lambda = 4$ on procède de la même manière, avec une erreur de tolérance $TOLV = 10^{-3}$ pour $0 \leq x \leq 3$ et un polynôme d'interpolation d'ordre 8. Comme l'exemple précédent les solutions numériques et analytiques sont presque semblables et les résultats sont très encourageants. (Figure2)

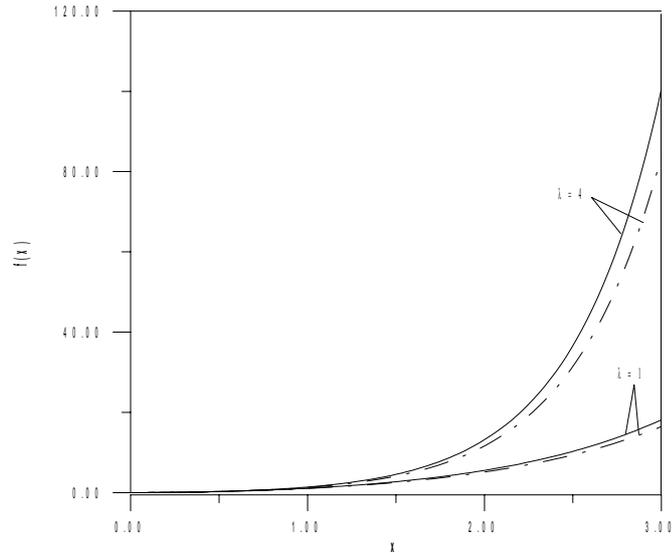


Figure 2: Résultat analytique: trait en plein, présente méthode: trait en tiret-point.

EXEMPLE 5.3 Dans cet exemple , on considère une équation intégrale de Volterra linéaire avec un noyau faiblement singulier [29]:

$$f(x) = 1 - \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (5.25)$$

La solution exacte de cette équation est $f(x) = \exp(\pi x) \operatorname{erfc}(\sqrt{\pi x})$, où $\operatorname{erfc}(\sqrt{\pi x}) = 1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\pi x})$. Dans l'équation (5.25) la singularité peut être évitée par le changement de variable suivant en posant $u = \sqrt{x-t}$, l'équation (5.25) devient

$$f(x) = 1 - 2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x-u^2) du \quad (5.26)$$

pour les solutions numériques de cette équation on applique la méthode pour une valeur de tolérance $TOLV = 10^{-3}$ et un polynôme d'interpolation d'ordre $N = 8$ sur $[0, 12]$. On constate que les solutions numériques et analytiques sont presque identiques dans le début de l'intervalle, c'est-à-dire dans $[0, 10]$. Mais la solution décroît rapidement sur $[10, 12]$ et le résultat est relativement moins bon. En pareil cas on prend un polynôme d'interpolation d'ordre $N = 12$ dans l'intervalle $[10, 12]$ et on constate une nette amélioration de la solution numérique qui est presque confondue avec la solution analytique. (Figures 3(a, b))

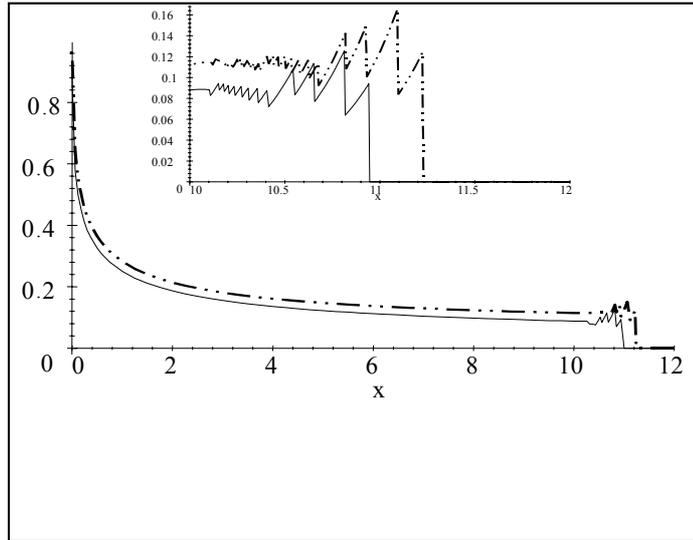


Figure 3a: Résultat analytique: trait en plein, présente méthode: trait en tiret- point-point.

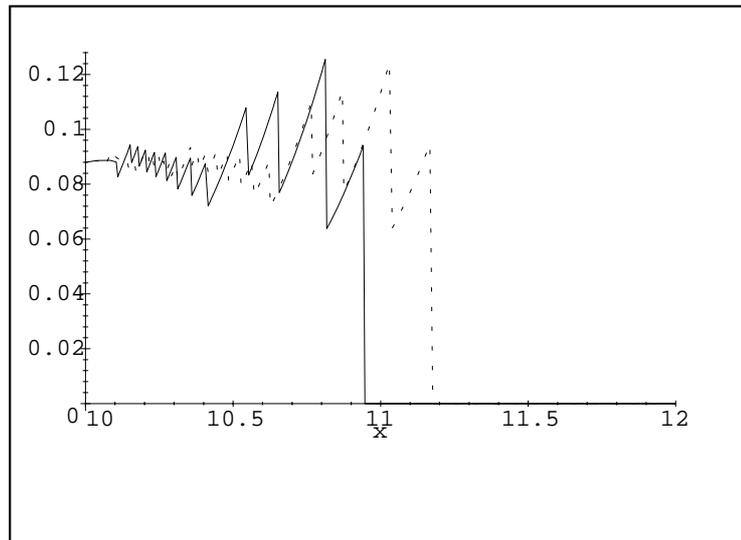


Figure 3b: Résultat analytique: trait en plein, présente méthode: trait en point rond.

REMARQUE 5.4 *La méthode précédente, peut être appliquée dans le cas de l'équation intégrale de Volterra de première espèce, avec quelques modifications. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées:*

- i) $K(x, t)$ et $K_x(x, t) = \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ sont continues dans $0 \leq t \leq x \leq T$.
- ii) $K(x, x) \neq 0$ pour tout x .
- iii) $\varphi \in C^1([0, T])$ et $\varphi(0) = 0$.

Alors l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_0^x K(x, t) f(t) dt = \varphi(x) \tag{5.27}$$

se ramène à une équation intégrale de Volterra de seconde espèce. En effet, en dérivant cette égalité par rapport à x , on obtient l'équation suivante:

$$f(x) = \Phi(x) + \gamma \int_0^x \kappa(x, t) f(t) dt \quad (5.28)$$

où $\Phi(x) = \frac{\varphi_x(x)}{K(x,x)}$, $\kappa(x, t) = \frac{K_x(x,t)}{K(x,x)}$ et $\gamma = -1$. L'équation (5.28) est une équation intégrale de Volterra de seconde espèce et est équivalente à (5.1a).

CHAPITRE 6

Généralisation à l'équation intégrale de Volterra au cas non linéaire

Soit l'équation intégrale de Volterra non linéaire :

$$f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \Gamma(t, f(t)) dt = 0 \quad (6.1)$$

Pour l'existence et l'unicité des solutions de cette équation (6.1), on sait que la résolution d'une équation différentielle ordinaire pour des conditions initiales données peut se ramener à la résolution d'une équation intégrale de Volterra non linéaire [29].

Considérons des équations plus générales de la forme:

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x F(x, t, f(t)) dt \quad (6.2)$$

THEOREME 6.1 Sous les hypothèses suivantes, la fonction F continue dans le domaine $[0, T] \times [0, T] \times [0, T]$ et satisfait à la condition de Lipschitz

$$|F(x, y, z_1) - F(x, y, z_2)| \leq L |z_1 - z_2|, \quad (6.3)$$

par rapport à z .

La fonction f est continue dans $[0, T]$, s'annule au point $x = 0$, et elle satisfait à la condition de Lipschitz

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq l |x_1 - x_2|, \quad (6.4)$$

Soit Ω le domaine défini par, $|x| \leq T'$, avec $T' = \min\left(T, \frac{T}{l+M}\right)$, $M = \sup F(x, y, z)$.

Alors l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce (6.2) possède une solution et une seule dans Ω [22, 29, 31]. Donc l'équation (6.1) admet une solution unique est cette solution peut être cherchée par la méthode des approximations successives.

Dans le but d'appliquer la méthode précédente, on écrit l'équation (6.1) sous la forme suivante:

$$f + \lambda \mathbb{k} \Psi f = 0 \quad (6.5)$$

dans cette relation \mathbb{k} est l'opérateur linéaire engendré par le noyau $K(., .)$ i.e.

$$(\mathbb{k}g)(x) = \int_0^x K(x, t) g(t) dt \quad (6.6)$$

et l'opérateur Ψ est l'opérateur de Nemychii pour Γ , i.e

$$(\Psi f)(t) = \Gamma(t, f(t)) \quad (6.7)$$

Dans la perspective de la recherche des solutions approximatives f de l'équation intégrale (6.1), nous allons essayer d'appliquer les résultats du chapitre précédent, l'équation (6.1) devient

$$f(x_m) + \lambda \sum_{j=0}^N C_{mj} K(x_m, x_j) \Gamma(x_j, f(x_j)) = 0, \quad m = 0, \dots, N \quad (6.8)$$

où les coefficients C_{ij} sont exprimés par :

$$\begin{aligned} (\mathbb{k}F)_k(x_m) &= C_{mk} K(x_m, x_k) \Gamma(x_k, 1) \\ &\quad + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N C_{mj} K(x_m, x_j) \Gamma(x_j, 0), \\ k &= 0, \dots, N \end{aligned} \quad (6.9)$$

et

$$(\mathbb{k}F)_k(x_m) = \int_0^{x_m} K(x_m, y) \Gamma(y, P_{N,k}(y)) dy \quad (6.10)$$

A ce stade on est arrivé à pouvoir généraliser les résultats de la méthode quadratique intégrale généralisée dans le cas des équations intégrales non linéaires.

La relation (6.9) est un système réel de $M \times M$ équations à $M \times M$ coefficients inconnus où $M = N + 1$. La relation (6.8) est un système d'équations algébriques non linéaire qui peut être résolu par des algorithmes non linéaires par exemple la méthode Newton-Raphson [32].

6.1 Mise en oeuvre numérique

Dans l'article [29] une méthode de décomposition est donnée pour la solution des équations intégrales aléatoires de Volterra. Malheureusement, il n'y a pas de confrontation numérique, cette méthode est basée sur la décomposition de la fonction $U(t, \omega)$ comme $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$, où ω est un paramètre.

Westreich et Cahlon [33] ont analysé plusieurs méthodes différentes pour la résolution numérique des équations intégrales de Volterra non linéaires, une des méthodes recommandées est paratiquement basée sur la méthode d'interpolation polynomiale quadratique discrète pour $\Gamma(x, t, f(t))$, en tous les points.

Les résultats précédents peuvent être appliqués à l'équation intégrale aléatoire de Volterra, avec une légère modification [34].

EXEMPLE 6.1 Cas non linéaire:

Afin d'effectuer un examen de cette méthode au cas non-linéaire, considérons comme exemple d'illustration l'équation intégrale de Volterra non linéaire suivante:

$$f(x) - \int_0^x e^{(-x+t)} (f(t) + e^{-t} + \exp(-f(t) - e^{-t})) dt = 0 \quad (6.11)$$

c'est-à-dire dans l'équation (6.1), on pose $\lambda = -1$, $K(x, t) = \exp(-x + t)$ et $\Gamma(t, f(t)) = f(t) + e^{-t} + \exp(-f(t) - e^{-t})$, la solution exacte est de la forme: $f(x) = -\exp(-x) + \log(x + e)$.

Dans cet exemple l'interpolation polynomiale de Lagrange d'ordre 8 est employée pour résoudre ce problème avec $TOLV = 10^{-4}$. Le système d'équations non linéaires (6.8) est résolu par la méthode de Newton-Raphson. Les solutions numériques

et analytiques sont identiques et les résultats sont satisfaisants. (Figure 4)

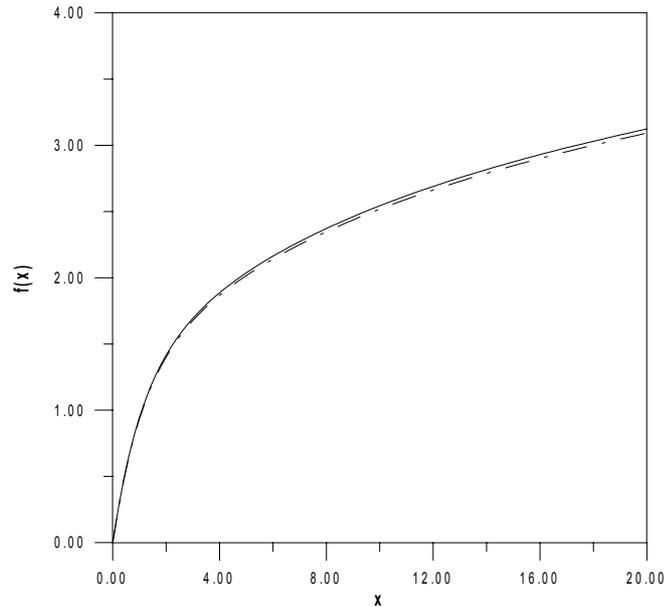


Figure 4: Résultat analytique: trait en plein, présente méthode: trait en tiret- point.

6.2 Discussion et conclusion

Dans ce présent travail, nous nous sommes intéressés aux solutions numériques des équations intégrales du type Volterra de première et seconde espèce, en utilisant une nouvelle méthode quadratique intégrale généralisée. Nous avons dégagé les principes de base de la construction des solutions dans le cas linéaire et non-linéaire.

Cette méthode de résolution numérique consiste à chercher les solutions par voie de construction de la fonction inconnue en utilisant l'interpolation polynomiale de Lagrange et de manière très différente, en la comparant avec les autres méthodes d'interpolations standards. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, sous certaines conditions mathématiques imposées à la fonction inconnue, autrement dit si la fonction inconnue se laisse approcher au moyen des polynômes.

Cette nouvelle méthode quadratique intégrale généralisée proposée dans ce travail est basée essentiellement sur la construction de la fonction inconnue c'est-à-dire, l'é-

valuation des solutions des équations intégrales du type Volterra dans les deux cas linéaires et non-linéaires, en utilisant la formule d'interpolation polynomiale de Lagrange mais avec une nouvelle approche.

Cette méthode va nous permettre de dégager deux expressions pour les solutions numériques des équations intégrales de Volterra et sont d'un grand intérêt pratique.

Pour l'exemple 3, les résultats ne sont pas vraiment très bons puisque dans l'intervalle $[10, 12]$ les solutions décroissent rapidement, et présentent quelques fortes oscillations.

Dans de telle situation on essaie de résoudre l'équation (5.19) en premier lieu avec une subdivision (des points d'interpolation) standard de l'intervalle $[0, 10]$, et pour la deuxième étape nous nous insistons beaucoup sur le choix des points d'interpolation de l'intervalle $[10, 12]$ avec l'interpolation polynomiale de Lagrange correspondante et le maillage doit être raffiné. Le nombre de points nécessaire est $N = 12$, et le nombre moyen d'itérations de la méthode Gauss-Seidel sur l'intervalle $[10, 12]$ est $k = 42$.

En général nous fournissons une valeur de tolérance $TOLV$ modérée puisque la précision exigée ne peut être jamais réalisée pour une valeur de tolérance $TOLV$ très petite. La précision peut être contrôlée en faisant changer la valeur de tolérance $TOLV$.

Notre souci de discussion concerne également les problèmes de calcul, quand un traitement parallèle est disponible, peut accélérer la vitesse de calcul des aspects numériques, comme il est indiqué par exemple dans les formules (5.14), (5.16) et (5.18), des sommes et des produits ou la combinaison des deux, dans le cas échéant les moyens qui sont à notre disposition sont vainement utilisés.

Article: Publié dans Elsevier

CONCLUSION GENERALE

La méthode quadratique intégrale généralisée est une technique numérique qui permet de résoudre de manière approchée les équations différentielles [35] ou les équations intégrales quelles que soient les conditions aux limites que l'on impose. Elle consiste plus précisément à transformer le système différentiel [36] ou intégral en un système d'équations linéaires qui présente l'avantage d'être triangulaire ou plein ou encore dans des situations particulières symétrique. Dans cette méthode dite quadratique intégrale, seule la discrétisation de l'intégrale par une séquence de points est nécessaire. En contre partie, les systèmes matriciels formés sont pleins et non symétriques dans le cas de l'équation intégrale de Volterra que nous avons proposé son élaboration. Il est aussi permis de traiter le même problème en passant à une forme triangulaire, mais les calculs testés par un cas élémentaire ont montré un résultat moins satisfaisant comparé avec le cas plein. Ce traitement a été abandonné prématurément.

Il faut noter également que l'équation intégrale quand elle fait intervenir un noyau singulier, et à ce stade d'évaluation, souvent l'introduction de la valeur principal de Cauchy par des techniques numériques spécifiques sont souhaitables, mais le temps de calcul est augmenté considérablement. Cette considération ne fournit pas toujours des résultats acceptables surtout quand le temps d'exécution est non limité et la situation numérique devient trop coûteuse. Dans un prochain article, nous pensons introduire dans le cas échéant le concept de la transformée d'Abel dans laquelle l'existence et l'unicité de la solution sont toujours assurées.

Pour conclure, l'équation intégrale se révèle être couramment utilisable dans la recherche des nombreux problèmes issus du champs mathématique. La résolution numérique de l'équation intégrale par son implémentation en un système d'équation linéaire à coefficients constants a autorisé de réaliser de modèles mathématiques de taille aussi bien dans le cas des systèmes à géométrie simple que dans le cas de ceux

de forme arbitraire.

Références

- [1] M.H. Fahmy, M.A. Abdou and M.A. Darwish, Integral equations and potential-theoretic type integrals of orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* 106 (2) (1999), 245-254.
- [2] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products Fifth Edition* (Academic Press, Inc., 1994).
- [3] I. Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution des problèmes de Dirchelet*, *Kong. Vetenskaps-Academiens Förth*, Stockholm, 1900, S. 39-46.
- [4] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, *Acta Math.*, 1903, v. 27, pp. 365-390.
- [5] M.A. Abdou, Fredholm integral equation of the second kind with potential kernel. *J. Comput. Appl. Math.* 72 (1) (1996) 161-167.
- [6] M.A. Abdou and N.Y. Ezzeldin, Krein's method with certain singular kernel for solving the integral equation of the first kind, *Periodica Mathematica Hungarica* 28(2) (1994) 143-149.
- [7] S.M. Mkhitarian and M.A. Abdou, On different methods for solving the Fredholm integral equation of the first kind with logarithmic kernel, *Dakl. Acad. Nauk. Armenia* 90 (1989) 1-10.
- [8] M. Krasnov, A. Kisséleve, G. Mkarenko; *Equations intégrales*. Editions Mir, 1976.
- [9] I. Pétrovsky; *Théorie des équations différentielles et des équations intégrales*. Edi-

tions Mir,1988.

- [10] R.P. Kanwal, Linear Integral Equations, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [11] A.D. Polyanin and A.V. Manzhirov, Hand Book of Integral Equations, CRC Press, 1998.
- [12] G.Ya. Popov, On a method of solving axisymmetric contact problems of elasticity theory, PMM 25(1) (1961).
- [13] G. Ya. Popov, Contact Problems for a Linearly Deformable Base (Kiev, Odessa, 1982).
- [14] H. Contopanagos, B. Dembart, M. Epton, J.J. Ottusch, V. Rokhlin, J. Visher, S. Wandzura : Well-conditioned boundary integral equations for three-dimensional electromagnetic scattering ; Res. Rep. YALEU/DCS/RR-1198, June 15th 2000.
- [15] M.A. Hamdi : Une formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution de l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites mixtes ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, Vol. 292, No. 1, p. 17-20, 1981.
- [16] G.C. Hsiao, R.E. Kleinman : Mathematical foundations of error estimates in numerical solutions of integral equations in electromagnetics; IEEETrans. Ant. Prop., Vol. 47, No. 3, p. 316-328, 1997.
- [17] D. Levadoux : Etude d'une équation intégrale adaptée à la résolution hautes fréquences de l'équation d'Helmholtz ; Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 2000.
- [18] A. Buffa, S.H. Christiansen : The Electric Field Integral Equation on Lipschitz screens : definitions and numerical approximation ; Tech. Rep. 1216 (submitted September

2001), Institute of Numerical Analysis C.N.R. Pavia, July 2001.

- [19] S.H. Christiansen, J.-C. Nédélec : Des préconditionneurs pour la résolution numérique des équations intégrales de frontière de l'électromagnétisme ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., Vol. 331, No. 9, p. 733-738, 2000.
- [20] M. Costabel : Boundary integral operators on Lipschitz domains : elementary results ; SIAM J. Math. Anal., Vol. 19, No. 3, p. 613-626, 1988.
- [21] W. McLean, O. Steinbach : Boundary element preconditioners for a hyper-singular integral equation on an interval ; Adv. Comput. Math., Vol. 11, No. 4, p. 271-286, 1999.
- [22] B. Démidovitch , I.Maron, *Eléments de calcul numérique*. Editions Mir,1979.
- [23] N.I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations* , Dover Publ., New York, 1992 (Russian edition: Moscow, 1946).
- [24] Karlin, V., Maz'ya, V. G., Movchan A. B., Willis, J. R. & Bullough R., 2000, Numerical solution of nonlinear hypersingular integral equations of the Peierls type in dislocation theory, SIAM Journal on Applied Mathematics, 60, 664–678.
- [25] H. Reinhard; *Equations différentielles fondements et applications*. gauthier-villars Paris, 1982.
- [26] Hermann Brunner, Qiya Hu, and Qun Lin. Geometric meshes in collocation methods for Volterra integral equations with proportional delays. IMA Journal of Numerical Analysis Vol 21, Issue 4 (2001) 783-798.

- [27] K. E. Atkinson, *Survey of numerical methods for the solutions of Fredholm integral equations of the second kind*. SIAM, Philadelphia, 1976.
- [28] K. Yosida ; *Equations différentielles et intégrales*. Dunod, Paris 1971.
- [29] R. K. Miller, A. Feldstein. smoothness of solutions of Volterra integral equation with weakly singular kernels. *SIAM J. Math. Anal.* 2, 242-258, 1971
- [30] D. Westreich, B. Cahlon, *Numerical solution of Volterra integral equations with continuous or discontinuous terms*, *J. Inst. Maths Applics*, 26, 175-186, 1980.
- [31] R. Hammer, M. Hocks, U. Kulisch, D. Ratz, *Numerical Toolbox for verified Computing I*. Springer verlag, Berlin , (1995).
- [32] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1986.
- [33] M. Schatzman ; *Analyse numérique*, 1991, interEdition, Paris.
- [34] G. Adomain, *Random Volterra Integral Equation*, *Mathl. Comput. Modelling Vol.* 22, No.8 (1995) 101-102.
- [35] A. Zerarka, S. Hassouni, H. Saidi and Y. Boumedjane. *Com. Non. Sc. Non. Sim.* (2004) in press, Elsevier.
- [36] A. Zerarka, V. G. Foester. *Com. Non. Sc. Non. Sim.* (2004) in press, Elsevier.