

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Khider. Biskra.  
Faculté des sciences et science de l'ingénieur  
Département de génie mécanique

*Mémoire*

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère  
en génie mécanique

**Option:** *Construction Mécanique*

Par :

**MASRI Tahar**

*Ingénieur en génie mécanique. Université de Biskra. Algérie.  
DEA génie mécanique. Université de Toulouse. France.*

**Thème**

Contribution à la modélisation des phénomènes  
de rupture des matériaux composites

**Soutenu le :** 25 Juin 2006.

**Devant le jury composé de :**

- |   |             |        |            |                       |
|---|-------------|--------|------------|-----------------------|
| - | MOUMMI N.   | MC     | Président  | Université de Biskra. |
| - | HECINI M.   | MC     | Rapporteur | Université de Biskra. |
| - | ASSAS M.    | MC     | Examineur  | Université de Batna.  |
| - | BELOUNAR L. | MC     | Examineur  | Université de Biskra. |
| - | TATI A.     | M.A.CC | Invité     | Université de Biskra. |

*Année universitaire 2005/2006*

## Sommaire

<b>Introduction</b> .....	03
<b>Chapitre I : Les matériaux composites</b>	
I-1 Introduction .....	05
I-2 Matériaux Composites .....	05
I-2-1 Définition .....	05
I-2-2 Caractéristiques mécaniques d'un matériau composite .....	06
I-2-3 Domaine d'application .....	06
I-2-4 Matériaux composites structuraux .....	07
a) Monocouches .....	07
b) Stratifiés .....	07
c) Sandwichs .....	08
<b>Chapitre II : Rappel théorique sur la loi de comportement mécanique des matériaux composites.</b>	
II-1 Loi de comportement du matériau composite .....	09
II-1-1 Relation contrainte/déformation d'un composite unidirectionnel ...	09
a) Loi de Hooke en axes propres .....	09
b) Changement de base .....	11
II-2 Théorie simplifiée des stratifiés .....	12
II-2-1 Comportement en membrane .....	12
II-2-2 Comportement en flexion .....	15
II-3 Contraintes dans les plis .....	17
<b>Chapitre III : Application de la mécanique de rupture aux composites.</b>	
III-1 Application de la mécanique de rupture des composites au délaminage .....	18
III-2 Analyse de la rupture .....	18
III-3 Différentes modes de rupture .....	19
III-3-1 Mode I .....	20
III-3-2 Mode II .....	20
III-3-3 Mode III .....	20
III-4 Critères de rupture .....	20
III-4-1 Critère de contrainte .....	20
III-4-2 Critère énergétique .....	23
III-5 Détermination de taux de restitution d'énergie .....	24
III-5-1 Avec un pilotage de l'essai en effort .....	24
III-5-2 Avec un pilotage de l'essai en déplacement .....	25
III-6 Méthode de calcul de l'énergie critique Get la compliance C .....	26
III-6-1 Méthodes des poutres .....	26
III-6-2 Méthode de fermeture virtuelle de la fissure .....	30
<b>Chapitre IV : Milieu continu et éléments finis.</b>	
IV-1 Introduction .....	32
IV-2 Rappels des équations de la mécanique des solides .....	33
IV-2-1 Les relations et équations de champ .....	33
IV-2-2 Conditions aux limites .....	34
IV-2-3 Solution du problème de la mécanique des solides .....	35
IV-3 Milieu continu et structures discrètes : le concept d'élément fini .....	35

IV-4 Formulation matricielle « Niveau élémentaire et globale » .....	38
IV-4-1 La formulation élémentaire .....	38
IV-4-2 La formulation globale .....	39
IV-5 Application de la M.E.F au modèle utilisé .....	42
IV-5-1 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire .....	42
<b>Chapitre V : Modélisation 2D par E.F du délaminage en mode II.</b>	
V-1 Introduction .....	48
V-2 Procédure numérique et description du modèle .....	48
V-3 Modélisation du phénomène de rupture (Fissure) .....	50
V-4 Maillage de la structure .....	51
V-5 Calcul de l'énergie critique et la compliance .....	52
V-5-1 La compliance .....	52
V-5-2 L'énergie critique .....	53
V-6 Résultats et discussions .....	54
V-6-1 Force critique .....	54
V-6-2 La compliance .....	56
V-6-3 L'énergie critique de la rupture.....	58
<b>Conclusion et perspectives</b> .....	63
<b>Annexes</b> .....	65
<b>Références bibliographiques</b> .....	72

### *Remerciements*

Ce travail représente pour moi une riche expérience d'initiation à la recherche où j'ai pu renforcer mes connaissances et acquérir de nouvelles sur les matériaux composites.

Je tiens donc à remercier tous ceux qui ont contribué à ce bon déroulement.

Je voudrais remercier profondément Monsieur Mabrouk HECINI, maître de conférence et enseignant chercheur à l'université de Mohamed Kheider Biskra, pour son encadrement tout le long de ce travail.

Je remercie Monsieur Abdelwahab TATI, pour l'assistance et l'aide dont il m'a gratifié sans oublier Mr Belhi GUERIRA.

Je remercie infiniment Monsieur Lotfi TOUBAL, docteur à l'université Paul Sabatier de Toulouse pour son aide bibliographique.

Je remercie aussi toutes mes amis d'études et collègues de travail, Mounir, Yazid, Fayçal pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Je remercie vivement tout le personnel du département de génie mécanique de l'université Mohamed Kheider Biskra.

Enfin, j'exprime ma grande gratitude auprès de ma mère, mon père, mes frères, mes sœurs et toutes ma famille.

***T.MASRI***

Notations et caractères.

$E_i$ : module d'Young dans la direction $i$ du matériau	$U_S$ : Énergie de création de surface.
$\nu_{ij}$ : Coefficient de Poisson dans le plan $ij$ .	$\gamma_S$ : Énergie spécifique de création de surface.
$G_{ij}$ : Module de cisaillement dans le plan $ij$ .	$R$ : La résistance à la fissuration.
$\gamma_{ij}$ : Glissement de cisaillement dans le plan $ij$ .	$G$ : Le taux de restitution d'énergie dissipée.
$\sigma_i$ : Contrainte dans la direction $i$ .	$a$ : Longueur de la fissure.
$\tau_{ij}$ : Contrainte de cisaillement dans le plan $ij$ .	$P$ : Charge appliquée.
$[S_{ij}]$ : Matrice de souplesse.	$u$ : déplacement.
$[C_{ij}]$ : Matrice de Rigidité.	$C$ : Compliance.
$\varepsilon_i$ : déformation dans la direction $i$ .	$A$ : La surface.
$c$ : Cosinus.	$b$ : Largeur de l'éprouvette.
$s$ : Sinus.	$C_i$ : Compliance de mode $i$ .
$[T^{-1}]$ : La matrice de passage.	$\delta$ : Déplacement suivant $z$ (ouverture de la fissure).
$\theta$ : Angle.	$E$ : Module d'élasticité axiale.
$u_o, v_o$ : Composante du déplacement dans le plan moyen.	$\beta, \eta$ : Coefficients expérimentales du matériau et de géométrie respectivement.
$k_i$ : indice de chaque pli.	$G_{I,II,III}^i$ : Énergie de rupture pour chaque mode avec la méthode $i$ .
$\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \gamma_{0xy}$ : Les déformations dans le plan.	$L$ : Demi longueur de l'éprouvette.
$w$ : Déplacement suivant l'axe $z$ .	$E_f$ : Module de flexion.
$k_x, k_y, k_{xy}$ : Courbure du plan moyen.	$C_0$ : La compliance expérimentale.
$N_x$ : Efforts résultant dans la direction $x$ .	$\omega$ : Facteur de correction de cisaillement.
$N_y$ : Efforts résultant dans la direction $y$ .	$(d_{11})_{AB}, (d_{11})_{BC}$ : Paramètres de compliance dans les régions $AB$ et $BC$ respectivement
$T_{xy}$ : Cisaillement de membrane.	$(a_{55})_{AB}, (a_{55})_{BC}$ : Paramètres de la matrice de matrice de membrane dans les régions $AB$ et $BC$ respectivement.
$h$ : demi épaisseur de l'éprouvette.	$\Delta a$ : Longueur de l'élément.
$e_k$ : épaisseur de la $k^{ième}$ couche.	$F_i^j$ : Forces nodales de l'élément $j$ dans la direction $i$ .
$[A_{ij}]$ : Matrice de membrane.	$u^{i-1}, w^{i-1}$ : Déplacements de nœuds $(i-1)$ dans la direction $x$ et $z$ respectivement.
$[B_{ij}]$ : Matrice de couplage.	$F_{k_i}^j$ : Forces nodales dans le nœud $i$ de l'élément $i$ dans la direction $k$ .
$[D_{ij}]$ : Matrice de compliance.	$\bar{\Phi}_i$ : Forces de surface.
$M_i$ : Moment fléchissant d'axe $i$ .	$f_i$ : Forces de volume.
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ : Déformations et glissement du composite multicouche dans ses axes.	$q^e$ : Vecteur de déplacement élémentaire.
$[T(Q)_k]$ : Matrice de rotation de la couche considérée.	$K^e$ : Matrice de rigidité élémentaire.
$K_I, K_{II}, K_{III}$ : Facteur d'intensité de contrainte pour chaque mode de rupture.	$T_e$ : Travail des forces appliquées dans l'élément.
$r$ : Rayon.	$F^e$ : Vecteur des forces élémentaire équivalentes.
$u_i$ : déplacement suivant l'axe $i$ .	$U$ : Énergie de déformation.
$\nu$ : Coefficient de Poisson.	
$K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$ : Facteur d'intensité de contrainte critique pour chaque mode de rupture	
$U_C$ : Énergie cinétique du système.	

## Notations et caractères.

---

$W_r$  : Énergie disponible pour la propagation de la fissure.

$W_{ext}$  : Travail des forces extérieures.

$U_e$  : Énergie élastique et/ou plastique emmagasinée.

$P_C$  : Charge critique de la rupture.

$\varepsilon_{p_c}^i$  : erreur de calcul de la charge critique de la configuration i.

T : Travail des forces appliquées de la structure complète.

K : Matrice de rigidité de la structure (global).

F : Vecteur des forces équivalentes pour la structure complète.

$W_{int}$  : Travail interne.

t : épaisseur de l'élément.

$G_{IIc}$  : Énergie critique de rupture pour le mode II.

$\tau_{xy}^{rupture}$  : Contrainte de cisaillement critique de la rupture.

$\varepsilon_C^i$  : erreur de calcul de la compliance pour chaque méthode i.

$\varepsilon_G^i$  : erreur de calcul de l'énergie critique pour chaque méthode i.

*Les figures*

Les figures	Page
<b><u>Chapitre I :</u></b>	
Fig.(I-1) : Matériau composite. ....	06
Fig.(I-2) : Couche d'un composite. ....	07
Fig.(I-3) : Constitution d'un stratifié. ....	07
Fig.(I-4) : Sandwichs. ....	08
<b><u>Chapitre II :</u></b>	
Fig.(II-1) : Pli composite unidirectionnel. ....	09
Fig.(II-2) : Changement de base. ....	12
Fig.(II-3) : Efforts de membrane dans un stratifié. ....	13
Fig.(II-4) : Hypothèse en déplacement. ....	15
Fig.(II-5) : Moment fléchissant. ....	16
<b><u>Chapitre III :</u></b>	
Fig.(III-1) : Mécanisme de rupture. ....	19
Fig.(III-2) : Modes de rupture. ....	19
Fig.(III-3) : Plaque en traction suivant y. ....	22
Fig.(III-4) : La force en fonction de déplacement. ....	24
Fig.(III-5) : Géométrie de poutre ENF. ....	29
Fig.(III-6) : Force nodales dans les éléments. ....	30
Fig.(III-7) : Topologie de l'élément 2D pour le calcul de l'énergie critique. ....	31
<b><u>Chapitre IV :</u></b>	
Fig.(IV-1) : Caractère pluridisciplinaire de la M.E.F. ....	32
Fig.(IV-2) : Corps solide. ....	34
Fig.(IV-3) : Discrétisation d'un problème Continu d'élasticité plane par M.E.F... ..	36
Fig.(IV-4) :Éléments le plus fréquemment Employés. ....	37
Fig.(IV-5) : Synoptique de la formulation de la Méthode des déplacements. ....	40
Fig.(IV-6) : Organigramme simplifié de Traitement pour l'analyse statique ....	41
Fig.(IV-7) : Élément rectangulaire. ....	42
<b><u>Chapitre V :</u></b>	
Fig.(V-1) : Géométrie de l'éprouvette (essai ENF). ....	49
Fig.(V-2) : Élément de contact. ....	51
Fig.(V-3) : Modélisation de la fissure. ....	51
Fig.(V-4) : Maillage autour de tête de la fissure. ....	53
Fig.(V-5) : Topologie de l'élément 2D pour le calcul de l'énergie critique. ....	54
Fig.(V-6) : Diagramme force/déplacement d'essai ENF. ....	55
Fig.(V-7) : Comparaison de la force critique pour chaque configuration. ....	57
Fig.(V-8) : Diagramme de Compliance. ....	58
Fig.(V-9) : Erreur estimer de la compliance. ....	60
Fig.(V-10) : Comparaison de l'énergie critique. ....	61
Fig.(V-11) : Comparaison des résultats numériques ( $G_{IIc}^i$ et $^{Ref[11]}G_{IIc}^i$ ). ....	62
Fig.(V-12) : Erreurs de calculs de l'énergie critique. ....	62

*Les tableaux*

---

<b>Les tableaux</b>	<b>Page</b>
Tableau (IV-1) : Solution du problème de mécanique des solides. ....	35
Tableau (V-1) : Configurations des éprouvettes. ....	48
Tableau (V-2) : Propriétés mécaniques du quasi-unidirectionnel verre/polyester. ...	49
Tableau (V-3) : Propriétés mécaniques équivalentes des configurations. ....	49
Tableau (V-4) : Charges critiques et erreurs de calculs. ....	55
Tableau (V-5) : La compliance. ....	56
Tableau (V-6) : Erreurs de calculs de la compliance. ....	56
Tableau (V-7) : Énergies critiques.....	59
Tableau (V-8) : Erreurs de calculs pour chaque configuration.....	60



# Introduction

## **Introduction :**

La rupture est un problème auquel l'homme aura à faire face aussi longtemps qu'il construira des édifices ou fabriquera des structures. Ce problème est actuellement plus crucial avec le développement de structures complexes lié au progrès technologique. Les avancées dans la connaissance de la mécanique de la rupture permettent aujourd'hui est plus précisément depuis le milieu du 20<sup>ème</sup> siècle, de mieux prévenir le risque de rupture.

Cependant, beaucoup de mécanismes de rupture sont encore mal connus notamment lorsqu'on utilise de nouveaux matériaux (Matériaux composites) ou de nouveaux procédés. On distingue alors deux catégories de causes de rupture des structures :

- Soit une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure.
- Soit l'utilisation d'un nouveau matériaux ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue.

Dans le deuxième cas, la prévention de la rupture est plus délicate. Lorsque on utilise un nouveau matériau par exemple un composite ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne les maîtrise pas toujours car la mise en œuvre des nouvelles techniques, bien qu'elle procure des avantages, conduit inévitablement à des problèmes potentiels [01].

Depuis longtemps, l'homme à toujours essayé de trouver des matériaux qui peuvent satisfaire ses besoins de construction, il cherche à avoir les meilleures performances et qualités. De nos jours l'application des matériaux composites bien qu'ils aient été utilisés depuis longtemps à connu une grandes progression. Un remarquable gain de masse associé à une haute résistance et un haut module de rigidité, éléments essentiels pour les performances techniques et économiques, leur a permis d'occuper une part importante dans différentes branches industrielles où ils rivalisent avec les meilleurs aciers et alliages.

Malgré toutes ses qualités, ces matériaux hétérogènes et anisotropes sont sujets à différents types d'endommagements et de rupture.

Ce travail présente une étude de rupture en mode II des matériaux composites. Le premier et le deuxième chapitre représentent des généralités et des rappels théoriques sur la mécanique des stratifiées et leurs comportement mécanique, suivi de troisième chapitre, qui est consacré à la mécanique linéaire de la rupture et une application de la mécanique de la

## **Introduction.**

---

rupture aux composites qui détaille les différents modes de rupture et les méthodes de calculs de l'énergie critique de chaque mode.

Le quatrième chapitre est consacré à la mécanique des milieu continu et le calcul par éléments finis. Le dernier chapitre est l'étude de notre cas qui est la modélisation numérique de la rupture des matériaux composites en mode II.

# Chapitre I :

## Les Matériaux Composites

## **I- Les Matériaux composites :**

### **I-1- Introduction :**

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement non isotrope des propriétés mécaniques du matériau, tant sur les plans raideur que résistance, qui sont concentrées dans la direction des fibres, les propriétés transverses pouvant être de un à plusieurs ordres de grandeurs plus faibles. Or, si l'on excepte quelques cas particuliers tels les câbles ou les tirants, une structure doit être supporter des efforts dans plusieurs directions, et le matériau constitutif correspondant devra être obtenu par la mise en œuvre d'arrangements de couches soigneusement dimensionnées et orientées.

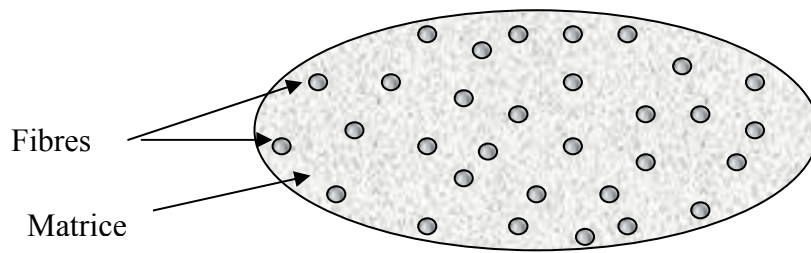
Les outils de calcul et d'analyse nécessaires pour dimensionner en statique une paroi composite multidirectionnelle répondants à une spécification donnée vont donc être les suivants [02] :

- estimation des caractéristiques mécaniques élémentaires de chacun des composites unidirectionnelle de bases utilisées ;
- établissement de la relation contrainte/déformation d'une paroi composite réalisée à partir d'assemblage des couches de propriétés, d'épaisseur et orientation diverses ;
- choix d'un critère de rupture.

## **II-2 Matériaux composites :**

### **I-2-1 Définition :**

Comme l'indique le terme, 'Matériaux composites' évoque un matériau différent des matériaux macroscopiquement homogènes habituels. On appelle maintenant de façon courante 'matériau composite' des arrangements de fibres—continues ou non- d'un matériau résistant (le renfort) qui sont noyées dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible (fig.I-1). La matrice conserve leur disposition aux fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce [03].



**Fig.(I-1):** Matériau composite.

### **I-2-2 Caractéristiques mécaniques d'un matériau composite :**

Les propriétés des matériaux composites dépendent de beaucoup de facteurs et sont différentes selon les divers types de matériaux composites. Les propriétés résultent :

- des propriétés, de la nature et de la quantité des matériaux constitutifs ;
- des constituants, de la géométrie et de la distribution du renfort ;
- de leurs interactions, de la nature de l'interface matrice/renfort, etc....

Les principales caractéristiques des pièces fabriquées en composites sont [04]:

- le gain de masse ;
- la bonne tenue en fatigue (durée de vie augmentée) ;
- l'absence de plasticité ;
- le vieillissement sous l'action de l'humidité et de la chaleur ;
- l'insensibilité à certains produits chimiques courants ;
- la tenue aux impacts et aux chocs très moyenne ;
- la très forte anisotropie.

### **I-2-3 Domaine d'application :**

Les excellentes performances mécaniques des matériaux composite fibres/résine en terme de caractéristiques spécifiques en font des matériaux attrayants pour l'utilisation dans les différents domaines ; bâtiment et travaux publics, transport routiers, maritimes, aériens et spatiaux, sports et loisirs et dans les instruments médicaux.

Les matériaux composites sont surtout utilisés pour des applications où une haute performance est recherchée et où le prix n'est pas le facteur primordial.

### I-2-4 Matériaux composites structuraux : [05] [06]

a) **Monocouches** : Les monocouches représentent

l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres courtes (fig.(I-2)).

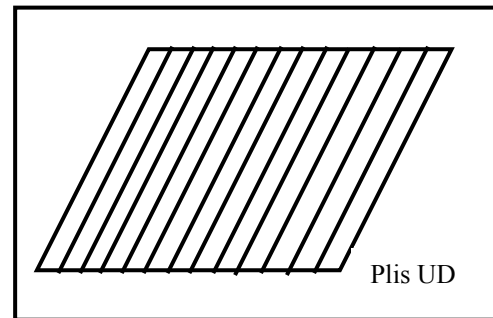


Fig.(I-2) : Couche d'un composite

b) **Stratifiés** : Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié [05]. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques (fig.(I-3)).

On pourra avoir des stratifiés de types :

- Équilibré : stratifié comportant autant de couche orienté suivant la direction  $+\theta$  que des couches orientées suivant  $-\theta$ .
- Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
- Orthogonal : comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .

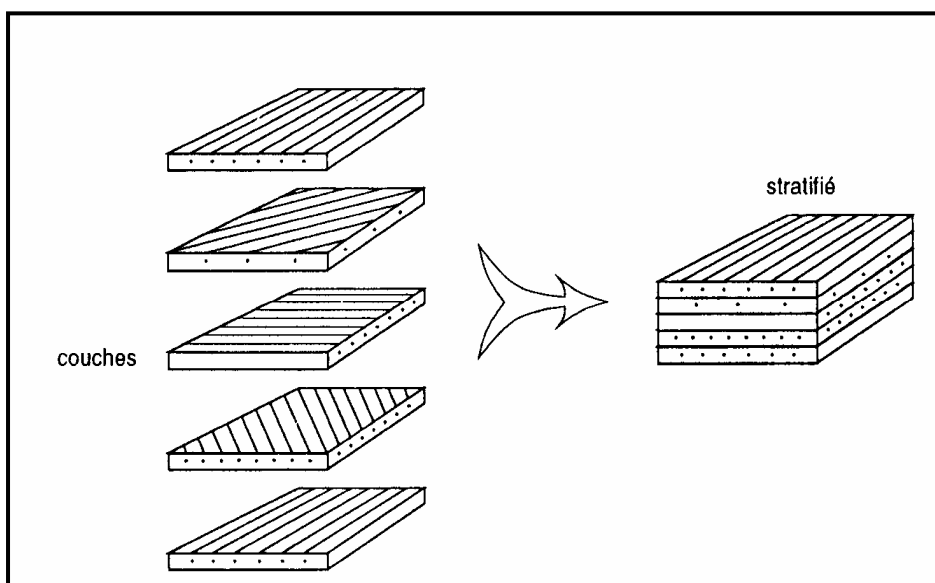
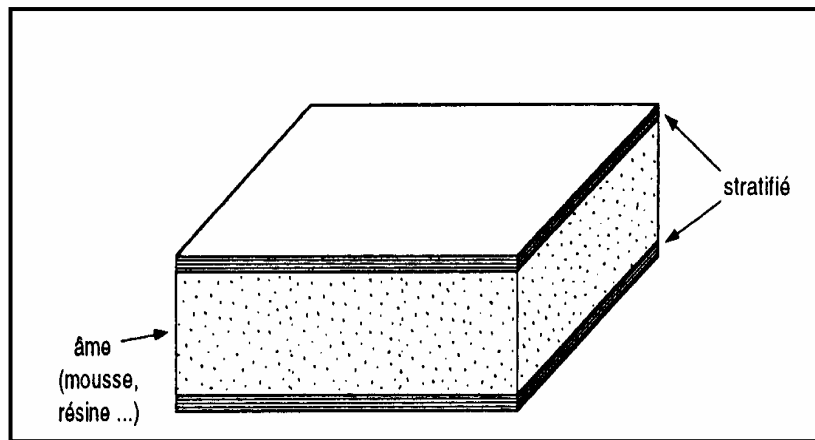


Fig.(I.3) : Constitution d'un stratifié

c) **Sandwichs** : Composés de deux semelles de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme de forte épaisseur et faible résistance (fig.(I-4)).



**Fig.(I.4)** : Sandwichs.



## Chapitre II :

### Rappel théorique sur la loi de comportement mécanique des matériaux composites

## II- Rappel théorique sur la loi de comportement mécanique des matériaux composites.

### II-1 Loi de comportement du matériau composite :

#### II-1-1 Relation contrainte/déformation d'un composite unidirectionnel :

##### a) Loi de Hooke en axes propres :

Le matériaux de base est constitué, dans les structures avancées, de fibres unidirectionnels dans une matrice de résine (fig.(II-1))

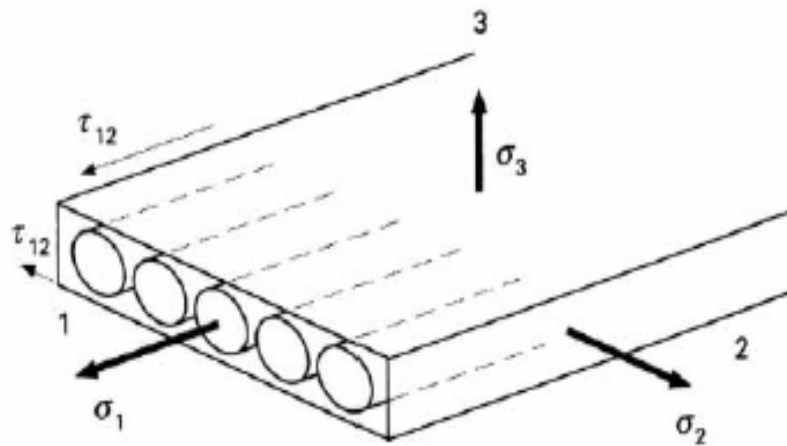


Fig.(II-1) : Pli composite unidirectionnel.

La loi de Hooke généralisée d'un tel matériau peut s'écrire sous la forme classique

[02] :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II} - 01)$$

avec :

$E_i$  : Module d'Young dans la direction  $i$  du matériau,

$\nu_{ij}$  : Coefficient de Poisson dans le plan correspondant,

$G_{ij}$  : Module de cisaillement dans le plan correspondant,

$\gamma_{ij}$  : Glissement de cisaillement dans le plan,

$\sigma_i$  : Contraintes dans la direction  $i$ ,

$\tau_{ij}$  : Contrainte de cisaillement dans le plan correspondant.

Avec, pour raison de symétrie :

$$\nu_{21}/E_2 = \nu_{12}/E_1 \qquad \nu_{23}/E_2 = \nu_{32}/E_3 \qquad \nu_{31}/E_3 = \nu_{13}/E_1 \qquad (II-02)$$

La matrice de la relation (II-1), qui permet d'obtenir les déformations relatives connaissant les contraintes, est généralement appelée matrice des souplesses, et noté  $[S_{ij}]$ . La matrice inverse, noté  $[C_{ij}]$ , est généralement appelée matrice de complaisance (ou des rigidités)  $[C_{ij}] = [S_{ij}]^{-1}$ . Elle permet d'obtenir les contraintes en fonction des déformations relatives.

Compte tenu de symétrie de la matrice, neuf constantes sont nécessaires pour décrire le matériau s'il n'est pas isotrope transverse. Dans la plupart des cas cependant, le matériau n'est utilisé que dans un plan, et sa relation de Hooke se simplifie grandement en [02] :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (II-03)$$

On inverse :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{12}E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (II-04)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{ij} \end{bmatrix} \qquad (II-05)$$

Les constantes qu'il est nécessaire de déterminer sont alors au nombre de quatre : le module de Young dans le sens des fibres  $E_1$ , le module de Young dans le sens transverse  $E_2$ , le coefficient de cisaillement  $G_{12}$ . Plusieurs méthodes peuvent être utilisées :

- La méthode expérimentale est en principe la meilleure ;
- De nombreux ouvrages fournissent des fourchettes classiques de propriétés pour les principaux composites utilisés dans l'industrie ;
- Les méthodes de calcul par homogénéisation ;
- Les méthodes d'estimation par formules approchées.

Quelques soit les méthodes retenues et leurs précision, il ne faut pas négliger un phénomène important qui peut se produire lorsque la structure est mise sous chargement extensif, la première fois lors d'un essai de réception par exemple, et ensuite au cours de sa vie opérationnelle : la microfissuration de la matrice, qui va apparaître au niveau des plis élémentaires en fonction des contraintes transverses et de cisaillement induites, généralement bien avant la ruine proprement dite de la structure.

Cette microfissuration va se traduire par une chute des valeurs des divers modules, faible pour le module de Young sens fibres, beaucoup plus importante pour les autres [02]. Cette remarque n'est cependant pas valable dans le cas de chargement compressifs, et ce même si la matrice s'est micro fissurée par ailleurs, ainsi que dans le cas des structures dimensionnées pour que la matrice ne se micro fissure pas.

**b) Changement de base : [02]**

Les contraintes ou les déformations dans les axes (x,y), faisant angle  $\theta$  avec les axes de référence (1,2) sont exprimés par les relations (fig.(II-2)):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II-06})$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} \quad (\text{II-07})$$

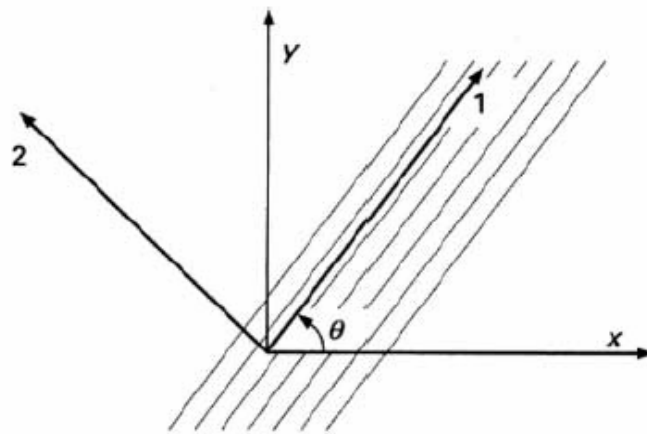
$$\text{Avec} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{array}$$

$T^{-1}$  la matrice de passage, si on pose  $[\overline{C}_{ij}] = T^{-1} \cdot [C_{ij}] \cdot T^{-t}$ , la nouvelle relation contrainte/déformation dans les axes (x,y) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\bar{C}_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (II-08)$$

On inverse :

$$[\bar{S}_{ij}] = [\bar{C}_{ij}]^{-1} \quad : \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\bar{S}_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (II-09)$$



1, 2 axes propres du composite  
 x, y axes quelconques  
 $\theta$  angle des axes

Fig.(II-2) : Changement de base.

## II-2 Théorie simplifiée des stratifiés :

On appelle stratifié ce qui résulte de l'empilement de plusieurs couches (ou plis), de nappes unidirectionnelles ou de tissus avec des orientations propres à chaque pli.

### II-2-1 Comportement en membrane :

Soit un stratifié à symétrie miroir (les empilements des plis de part et d'autres du plan moyen sont identiques  $(\pm\theta)_s$ ) [05].

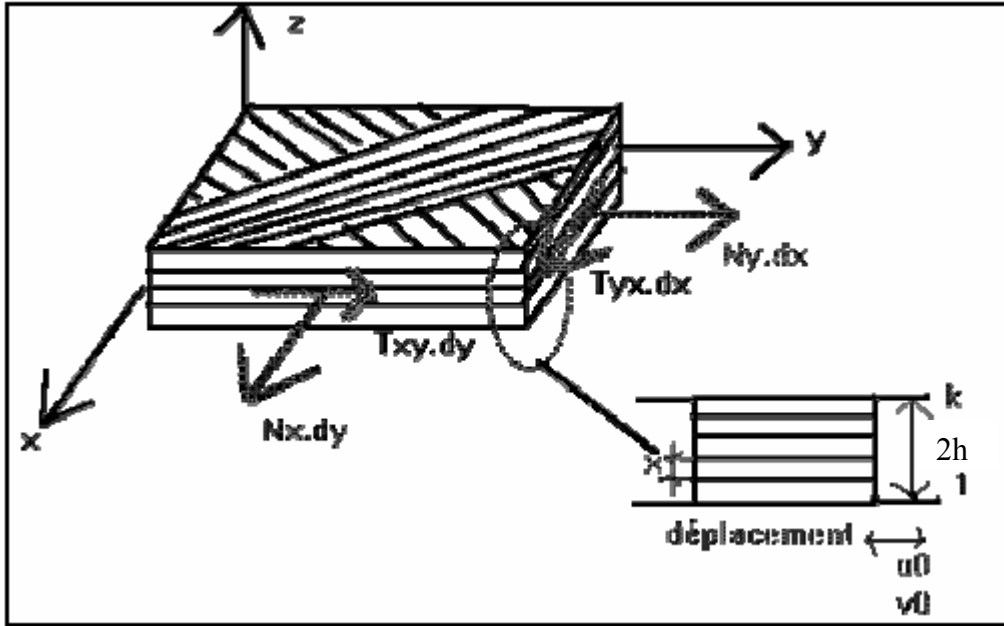


Fig.(II-3) : Efforts de membrane dans un stratifié.

$u_0, v_0$  : Composantes du déplacement dans le plan moyen, et  $k$  indice de chaque pli. Les déformations dans chaque direction sont données par [05] :

$$\varepsilon_{0x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{0y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{0xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (\text{II-10})$$

On est en hypothèse des petites déformations. On a alors une relation entre l'angle de rotation de la section et le déplacement suivant l'axe  $z$  notée  $w$  :  $\omega = \frac{\partial w}{\partial x}$ , pour un point se trouvant pas dans le plan moyen, on aura comme déformation :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

où :  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  représente la courbure de la plaque.

La déformation de cisaillement va s'écrire :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II-12})$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} k_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

Le tenseur des contraintes dans un pli du composite stratifié s'écrit sous la forme [05] :

$$[\sigma] = [\overline{C}_{ij}]_k \cdot [\varepsilon_0] + z [\overline{C}_{ij}]_k \cdot [k] \quad (\text{II-14})$$

Avec :  $[\overline{C}_{ij}]$  Matrice d'élasticité (Rigidité).

L'hypothèse suivante est considérée : le stratifié est uniquement soumis à des sollicitations dans son plan par unité de longueur :  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $T_{xy}$ , ce sont des efforts de membrane (fig.(II-3)).

$N_x$  : efforts résultant dans la direction  $x$ , par unité de longueur suivant la direction  $y$  ;

$N_y$  : efforts résultant dans la direction  $y$ , par unité de longueur suivant la direction  $x$  ;

$T_{xy} = T_{yx}$  : cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction  $y$ .

D'où :

$$N_x = \int_{-h}^h \sigma_x dz \quad , \quad N_y = \int_{-h}^h \sigma_y dz \quad , \quad T_{xy} = \int_{-h}^h \tau_{xy} dz \quad (\text{II-15})$$

$h$  : 1/2 épaisseur de la plaque

Les relations précédentes peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h}^h \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \cdot dz \quad (\text{II-16})$$

L'hypothèse utilisé pour intégrer sur l'épaisseur du stratifié et calculer un matériau homogène équivalent est l'homogénéité de la contrainte dans chaque pli ( $k_i$ ), ceci permet de discrétiser les intégrales et d'écrire des sommes finies, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \cdot dz \quad (II-17)$$

On introduit les relations de comportements on obtient :

$$[N] = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} ([\bar{C}_{ij}]_k [\varepsilon_0] + [\bar{C}_{ij}]_k [k] \cdot z) \cdot dz \quad (II-18)$$

$$[N] = [A] \cdot [\varepsilon_0] + [B] \cdot [k]$$

Avec :  $[A_{ij}] = \sum_{k=1}^n (\bar{C}_{ij})_k \cdot (z_k - z_{k-1})$  *Membrane.* (II-19)

$$[B_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{C}_{ij})_k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad \text{Couplage} \quad (II-20)$$

avec :  $(z_k - z_{k-1})$  les cotes de la couche par rapport au plan moyen.

Si le stratifié est équilibré (autant de plis dans une direction que dans l'autre), on a un découplage entre déplacements dans la traction et distorsion due au cisaillement, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{bmatrix} \quad (II-21)$$

### II-2-2 Comportement en flexion :

Hypothèse sur les déplacements : Les particules situées avant déformation sur une normale au feuillet moyen restent après déformation sur une normale au feuillet moyen déformé.

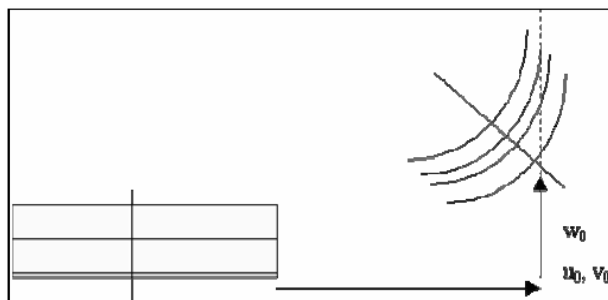


Fig.(II-4) : Hypothèse sur le déplacement.



Aux sollicitations  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $T_{xy}$  s'ajoutent par unité d'envergure :

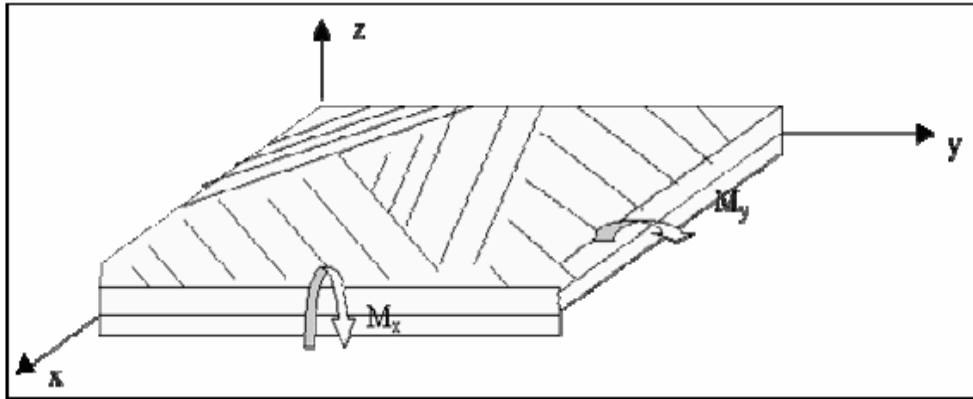


Fig.(II-5) : Moment fléchissant.

$M_x$  : Moment fléchissant d'axe y, dû aux contraintes  $\sigma_x$  par unité de largeur suivant la direction y .

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h}^h \sigma_x \cdot z \cdot dz \\ M_y &= \int_{-h}^h \sigma_y \cdot z \cdot dz \\ M_{xy} &= \int_{-h}^h \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \end{aligned} \quad (II-22)$$

Donc :

$$[M] = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\sigma] \cdot z \cdot dz \quad (II-23)$$

En introduisant la relation de comportement on obtient :

$$[M] = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{C}_{ij}] \cdot \varepsilon_0 \cdot z \cdot dz + [\bar{C}_{ij}] [k] \cdot z^2 \cdot dz \quad (II-24)$$

Après calcul des intégrales suivant z, [M] devient [05] :

$$[M] = [B] \cdot [\varepsilon_0] + [D] \cdot [k] \quad (II-25)$$

Avec

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{C}_{ij}]_k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad \text{traction / flexion} \quad (II-26)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{C}_{ij}]_k \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad \text{flexion} \quad (II-27)$$

L'expression générale reliant les contraintes et déformations globales qui représente l'équation fondamentale pour les stratifiés s'écrit [05]:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{II-28})$$

**Remarque :** Si le matériau est symétrie miroir le terme  $B_{ij} = 0$ .

### II-3 Contrainte dans les plis :

Une fois déterminée la relation contraintes/déformations de la structure, il est nécessaire de déterminer les contraintes induites à l'intérieur des plis individuels, afin de les comparer avec un critère de rupture. Cela peut être fait en calculant les déformations induites dans le composites équivalent par le chargement de la structure, qui sont les mêmes pour tous les plis. Les contraintes dans les axes propres du  $k^{ieme}$  pli seront ainsi déduites par [02] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T(Q_k)] \cdot [\bar{C}_{ij}]_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-29})$$

Avec :

$\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  : Contraintes et cisaillement dans les axes propres de la couche considérée,

$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  : Déformations et glissement du composite multicouche dans ses axes,

$[T(Q)_k]$  : Matrice de rotation de la couche considérée d'où :  $[T(Q)_k] = [T(-Q)]_k^{-1}$ .

## Chapitre III :

# Application de la mécanique de rupture aux composites

### **III- Application de la mécanique de rupture aux composites :**

Le but essentiel de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) est de caractériser la résistance d'un matériau à la rupture à partir d'un défaut. Elle permet ainsi de fournir des paramètres intrinsèques de rupture indépendants de la taille du défaut.

Les concepts de la MLER ont été formulés pour les matériaux métalliques, homogènes, isotropes à comportement élastique avec rupture fragile ou semi fragile.

La différence essentiel entre les matériaux métalliques et les matériaux composites est l'aspect de la zone endommagée au fond de fissure. Dans le premier cas elle se présente comme une zone plastique, tan disque dans le deuxième cas cette zone devient plus complexe par la présence des microfissures.

La deuxième difficulté présentée par la rupture des matériaux composites est la diversité des cas de rupture que A.Rotem et Z.Hashim [07] dénombrent pour un composite stratifié unidirectionnel en quatre cas [07] :

- Rupture de la matrice parallèle aux fibres,
- Rupture de la matrice perpendiculaire aux fibres,
- Rupture des fibres,
- Décollement de l'interface fibres/matrice.

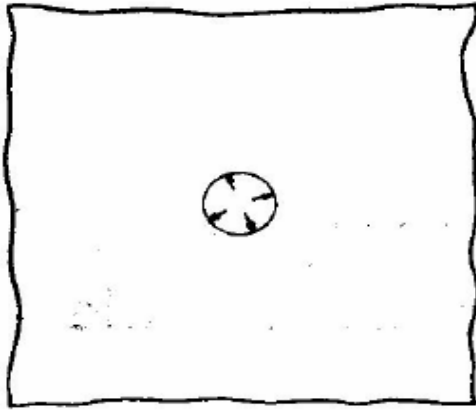
#### **III-1 Application de la mécanique de rupture des composites au délaminage :**

L'application des concepts de la MLER au délaminage des matériaux composites à été démontré avec succès [07], mais cette application est conditionnée par la connaissance de l'orientation de l'entaille et du plan de propagation du défaut par rapport aux axes principaux de symétrie du composite ainsi que le mode de sollicitation.

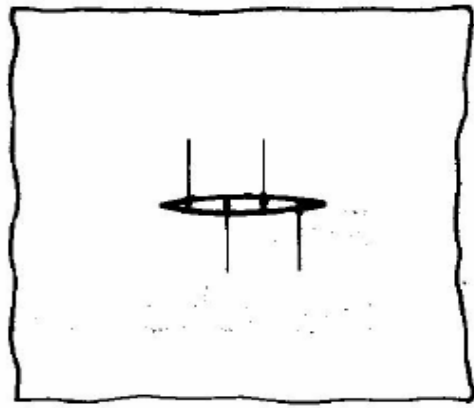
La MLER sous son aspect macroscopique considère les matériaux composites comme anisotropes homogènes en ignorant ainsi toute influence de l'hétérogénéité du matériau sur la croissance de la fissure [07].

#### **III-2 Analyse de la rupture :**

René LABBENS dans son ouvrage [08], reprend une analogie intéressante, qui est une bonne présentation du comportement d'une fissure (fig.(III-1)) :



Bulle de vapeur dans un liquide.



Fissure soumis à une pression.

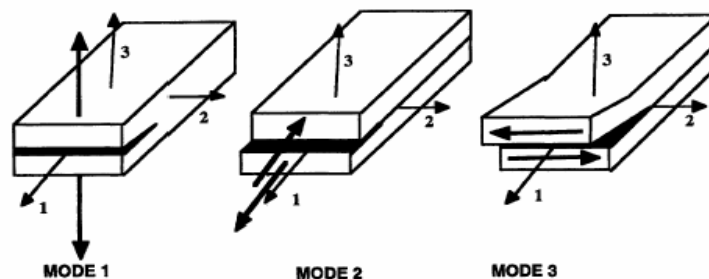
**Fig. (III-1) : Mécanisme de rupture.**

Dans un grand volume de liquide, on considère une bulle sphérique dans laquelle règne une tension de vapeur ; cette tension tend à faire croître la bulle, mais la tension superficielle du liquide s'y oppose et la bulle est en équilibre dans la masse du liquide. En chauffant, on fait croître la tension de vapeur et on peut arriver à l'instabilité des bulles qui est l'ébullition.

L'analogie en mécanique de la rupture est une fissure dans un solide infini, avec une pression sur les faces de la fissure ; la pression tend à ouvrir et à faire croître la fissure, mais le matériau oppose une résistance et la fissure reste en équilibre ; si la pression croît, l'équilibre peut être rompu et la fissure peut croître de façon instable [08].

### **III-3 Différentes modes de rupture :**

Tout déplacement des lèvres de la fissure se réduit à la combinaison de trois modes principaux, noté I,II et III (fig.III-2) [09].



**Fig.(III-2) : Modes de rupture**

### III-3-1 Mode I :

Un déplacement uniquement suivant  $y$  correspond à un problème plan particulier, désigné par le mode I. Ce mode est le plus souvent dangereux. Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation rectiligne coin parallèle au front de la fissure et dont le vecteur de burgers est parallèle à  $Oy$ .

### III-3-2 Mode II :

Il est engendré par un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle à l'axe  $Ox$ . Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation rectiligne coin parallèle au front de la fissure et dont le vecteur de burgers est parallèle à  $Ox$ .

### III-3-3 Mode III :

Il est produit par un cisaillement anti-plan, situé dans le plan de la fissure  $Oxz$  et parallèle à l'axe  $Oz$ . Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation vis parallèle au front de la fissure et dont le vecteur de Burgers est dirigé suivant  $Oz$ .

## III-4 Critères de rupture :

Selon le mode de sollicitation la mécanique de la rupture aborde les problèmes de fissuration en deux approches équivalentes ; l'une basée sur le facteur d'intensité de contrainte (critère de contrainte) et l'autre sur le taux de restitution d'énergie (critère énergétique) [07].

### III-4-1 Critère de contrainte :

Ce critère consiste à définir le tenseur de contrainte en avant de l'entaille. En utilisant les fonctions de H.M Westergard [07], G.R Irwin exprime ce tenseur en fonction des coordonnées polaires et du facteur d'intensité de contrainte, noté  $K_I, K_{II}$  ou  $K_{III}$  suivant le mode de sollicitation, et qui ne dépend que du chargement à l'infini et de la largeur relative de l'entaille [07].

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (\text{III} - 1)$$

❖ **Mode I :**

Le champs de contraintes et déplacements pour se mode sont données par [09] (fig.(III-3)):

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right] \quad (\text{III-2})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right] \quad (\text{III-3})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right] \quad (\text{III-4})$$

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\xi - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{III-5})$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\xi + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{III-6})$$

Avec :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{ déformation plane} \quad \xi = 3 - 4\nu \text{ déformation plane}$$

$$\sigma_{zz} = 0 \text{ contrainte plane} \quad \xi = \frac{3 - 4\nu}{1 - \nu} \text{ contrainte plane.}$$

$\theta$  : Angle entre le plan de la fissure et le rayon

$\nu$  : coefficient de poisson.

❖ **Mode II :**

Le champs de contraintes et déplacements sont données par [09] (fig(III-3)):

$$\sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left(-\sin \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}\right] \quad (\text{III-7})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}\right] \quad (\text{III-8})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right] \quad (\text{III-9})$$

$$u_x = \frac{K_{II}}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\xi + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{III-10})$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left(-\cos \frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\xi - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{III-11})$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{ déformation plane} \quad \xi = 3 - 4\nu \text{ déformation plane}$$

$$\sigma_{zz} = 0 \text{ contrainte plane}$$

$$\xi = \frac{3-4\nu}{1-\nu} \text{ contrainte plane.}$$

❖ **Mode III :**

Le champs de contraintes et déplacements sont données par [09] (fig.(III-3)):

$$\sigma_{zz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \left(-\sin \frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{III-12})$$

$$u_z = \frac{2K_{III}}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{III-13})$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{III-14})$$

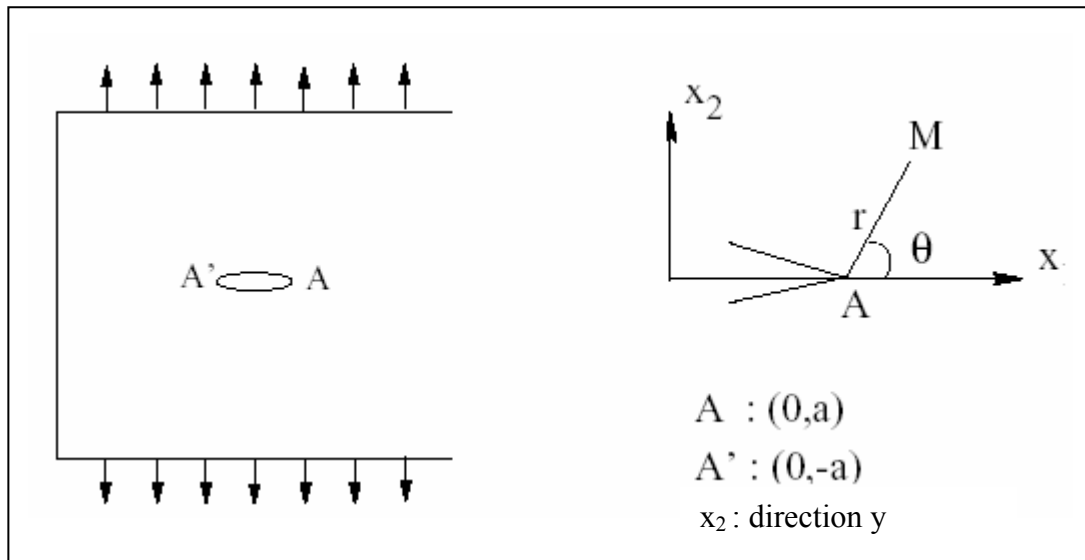
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{III-15})$$

Avec :  $\theta$  : est l'angle entre le plan de la fissure et le rayon de courbure ;

$K_i$  : facteur d'intensité de contrainte pour chaque mode ;

$\nu$  : coefficient de poisson ;

$r$  : rayon.



**Fig. (III-3) :** Plaque en traction suivant y.

A l'amorçage le facteur d'intensité de contrainte devient un paramètre intrinsèque au matériau, et prend la notation  $K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$  ou  $K_{IIIc}$ . La détermination du facteur  $K$  dans le cas des matériaux composites est difficile, c'est pour cette raison que le deuxième critère présente une meilleure application pour ce type de matériau [07].



### III-4-2 Critère énergétique :[08]

Une fissure se propage si l'énergie totale emmagasinée  $W_r$  est supérieur à l'énergie de création d'une nouvelle surface. La conservation de l'énergie potentielle totale  $U$  d'une structure fissurée en équilibre s'écrit :

$$dU = dU_C - dU_S + dW_r = 0 \quad (\text{III-16})$$

D'où :  $dU_C$  : l'énergie cinétique du système (négligeable en quasi-statique),

$dW_r = dW_{ext} - dU_e$  : l'énergie disponible pour la propagation de fissure,

$W_{ext}$  : travail des forces extérieures,

$U_e$  : l'énergie élastique et/ou plastique emmagasinée,

$dU_S = 2.dA\gamma_s$  : l'énergie de création de la surface  $dA$ , avec  $\gamma_s$  l'énergie spécifique de création de surface.

Le critère énergétique de Griffith s'écrit alors :

$$\frac{dU}{dA} < 0 \quad \text{La fissure est stable,}$$

$$\frac{dU}{dA} = 0 \quad \text{La fissure est en équilibre,}$$

$$\frac{dU}{dA} > 0 \quad \text{La fissure est instable.}$$

On définit la résistance à la fissuration comme l'énergie nécessaire à la création d'une nouvelle surface, on a :

$$R = - \frac{dU_s}{dA} = 2\gamma_s \quad (\text{III - 17})$$

et le taux de restitution d'énergie dissipée lors de l'avancée de la fissure est donné par:

$$G = \frac{dW_{ext}}{dA} - \frac{dU_e}{dA} \quad (\text{III - 18})$$

L'équation (III-16) devient :

$$G - R = \frac{dU_C}{dA} \quad (\text{III-19})$$

L'énergie cinétique due à la propagation de fissure étant négligeable dans le cas de sollicitation statique on obtient finalement :

$$G - R = 0 \quad (\text{III - 20})$$

Dans une extension virtuelle de la fissure de  $2a$  à  $2(a + da)$  et dans les deux cas de chargement (fig.III-4).

### III-5 Détermination de taux de restitution d'énergie :

#### III-5-1 Avec un pilotage de l'essai en effort :

$$\begin{aligned} dP \Big|_{f=\text{constante}} &= \text{tri } OB'A' - \text{tri } OBA - \text{rect } BB'AA' \\ &= -\text{tri } OA'A \end{aligned} \quad (III-21)$$

Le taux de restitution d'énergie par unité de largeur est donnée par la différence de variation entre le travail des efforts extérieurs à force constante  $P$  et du travail des efforts intérieurs lors de l'accroissement de fissure  $dA$ .

$$G = \frac{dW_{\text{ext}}}{dA} \Big|_{P=\text{constante}} - \frac{dU_e}{dA} = \int_S \vec{P} \cdot \frac{d\vec{U}}{dA} \cdot dS - \frac{1}{2} \frac{d}{dA} \int_S \left( \frac{d\vec{P}}{dA} \cdot \vec{u} + \vec{P} \cdot \frac{d\vec{U}}{dA} \right) \cdot dS \quad (III-22)$$

D'où :  $W_{\text{ext}}$  : l'énergie des forces extérieures,

$U_e$  : l'énergie interne.

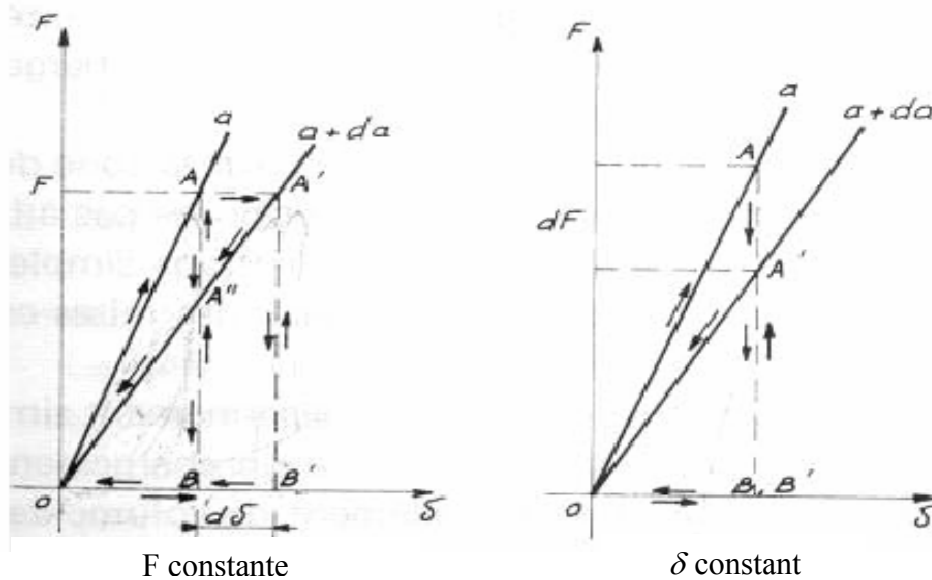


Fig.(III-4) : La force en fonction de déplacement.

L'énergie de déformation accumulée (pour une surface fissurée  $A$ ) est  $\frac{1}{2} P.u$  (l'air du triangle  $OA'A$ ). De même manière, l'énergie de déformation accumulée (pour une surface

après propagation ( $a + da$ ) est  $\frac{1}{2}P.(u + du)$  (l'air du triangle  $OA'B'$ ). L'énergie qui a été

nécessaire à l'avancée de fissure est donc : 
$$\frac{1}{2}P.du = dU_e \quad (III - 23)$$

L'effort appliqué s'est déplacé d'une distance de ( $du$ ) pendant l'avancée de la fissure.

Le travail des forces extérieures lors de l'avancée de la fissure est :  $Pdu = dW_{ext}$

Alors l'expression de  $G$  s'écrit :

$$G = -\frac{1}{2}P \cdot \frac{dU}{dA} + P \frac{dU}{dA} = \frac{1}{2}P \frac{dU}{dA} \quad (III - 24)$$

Si l'on exprime le déplacement  $u$  par la relation  $u = C.P$ . ou  $C$  est la compliance du système,

on obtient : 
$$G = \frac{1}{2}P \frac{d(C.P)}{dA} = \frac{1}{2} \frac{P}{dA} (P.dC + C.dP) \quad (III - 25)$$

La propagation s'effectuant à effort constant  $\frac{dP}{dA} = 0$ , on obtient finalement pour l'expression

de  $G$  par unité de largeur :

$$G = \frac{1}{2} P^2 \frac{dC}{dA} \quad (III - 26)$$

### III-5-2 Avec un pilotage de l'essai en déplacement :

Le travail extérieur est exprimé par :

$$dP \Big|_{\delta = \text{const}} = \text{tri } OBA' - \text{tri } OBA = -\text{tri } OA'A \quad G = \frac{dW_{ext}}{dA} \Big|_u = -\frac{dU_c}{dA} \quad (III - 27)$$

ici  $W_{ext} = 0$ , car il n'y a pas de déplacement de l'effort pour une avancée de fissure à déplacement constant.

L'énergie de déformation accumulée pour un effort  $P$  est égale avant propagation à  $\frac{1}{2}P.u$  (air du triangle  $OAA'$ ). L'énergie accumulée après propagation (surface  $A+da$ ) est égale à  $\frac{1}{2}(P - dP).u$  (air du triangle  $OA'B$ ). Alors l'énergie élastique nécessaire à l'avancée

de fissure est : 
$$dU_e = \left[ \frac{1}{2}.P.u - \frac{1}{2}(P - dP)u \right] = \frac{1}{2}.dP.u \quad (III - 28)$$

Alors l'expression de  $G$  s'écrit :

$$G = \frac{1}{2} \frac{(C.P).dP}{dA} = -\frac{1}{2} . C . P \left[ \frac{d\left(\frac{u}{C}\right)}{dA} \right] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{C^2} \cdot dA (C \cdot du - u dC) \quad (III - 29)$$

Comme la propagation se fait à déplacement constant, on obtient finalement pour l'expression de  $G$  par unité de largeur :

$$G = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{u}{C} \right)^2 \cdot \frac{dC}{dA} \quad (III - 30)$$

L'équation (III-26) et (III-30) sont identiques et indiquent que l'énergie libérée lors d'une avancée de fissure est indépendante des conditions de chargement.

Dans le cas où l'éprouvette considérée possède une largeur constante notée  $b$ , la surface fissurée dépend de la largeur  $b$  et de la longueur fissurée  $a$  c'est-à-dire :  $dA = b \cdot da$ .

### III-6 Méthodes de calcul de l'énergie critique $G$ et la compliance $C$ :

Dans la théorie on trouve deux méthodes principales pour le calcul de l'énergie critique pour chaque mode.

#### **III-6-1 Méthodes des poutres :**

##### ➤ **Mode I :**

L'analyse de la rupture en mode I (test DCB(Double Cantilever Beam)) avec la théorie simple des poutres donne la compliance  $C$  comme suite [10][11][12] :

$$C_1 = \frac{\delta}{P} = \frac{8.a^3}{b.h^3.E} \quad (III - 31)$$

avec :

$\delta$  : ouverture de la fissure (déplacement suivant  $z$  (fig.III.5)),  $P$  : charge appliquée,  
 $a$  : longueur de la fissure,  $b$  : largeur de l'éprouvette,  
 $2h$  : épaisseur,  $E$  : module d'élasticité axial.

L'énergie est exprimée alors :

$$G_I = \frac{P^2}{2.b} \cdot \frac{dC}{da} = \frac{P}{2b} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial a} \quad (III - 32)$$

De l'équation (III-31),  $G_I$  devient :

$$G_I = \frac{3.P.\delta}{2.a.b} \quad (III - 33)$$

Cette formule ne représente pas des conditions expérimentales, pour cela Berry à proposé une formule expérimentale pour le calcul de la compliance [10][08] :  $C = \beta a^n$ .

les coefficients  $\beta$  et  $n$  (fonction du matériau, de la géométrie de l'éprouvette et des conditions d'essais) sont déterminés expérimentalement. Le taux de restitution d'énergie est calculé par la formule :

$$G_I = \frac{n.P.\delta}{2.a.b} = \frac{n.\beta.P^2.a^{(n-1)}}{2.b} \quad (III - 34)$$

L'expression de  $G_I$  avec la théorie simple des poutres peut être exprimée par [13] :

$$G_I^{BT} = \frac{12.P^2.a^2}{E_1.b^2.(2h)^3} \quad (III - 35)$$

$E_1$  : Module de flexion,       $b$  : largeur de l'éprouvette,       $a$  : longueur de la fissure

$P$  : Charge appliquée       $2h$  : épaisseur de l'éprouvette.

Si on prend en considération le module de cisaillement transverse  $G_{13}$  (*The transverse shear deformation theory*), le taux de restitution d'énergie s'écrit alors avec cette théorie comme suite [13] :

$$G_I^{SH} = \frac{12.P^2}{E_1.b^2} \cdot \left[ \left( \frac{a}{2h} \right)^2 + \frac{1}{10} \cdot \left( \frac{E_1}{G_{13}} \right) \right] \quad (III-36)$$

Une correction de la théorie des poutres était proposée dans [13] en prenant en considération le module de cisaillement transverse et la singularité de la fissure (*The correction beam theory with consideration of transverse shear deformation and crack tip singularity*) :

$$G_I^\chi = 12 \cdot \frac{(a + \chi_1 \cdot 2h)^2}{b^2 \cdot E_1 \cdot (2h)^3} \quad (III-37)$$

Avec l'expression de facteur de correction  $\chi_1$  est :

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{\Omega_{66}}{18.\alpha.(\Omega_{11})}} \cdot \sqrt{3 - 2.\left(\frac{\Gamma}{\Gamma + 1}\right)^2}$$

$$\text{Avec :} \quad \Gamma = 1,18. \frac{\Omega_{66}}{\sqrt{\Omega_{11} \cdot \Omega_{33}}} \quad \Omega_{11} = \frac{1}{E_1} \quad \Omega_{33} = \frac{1}{E_3} \quad \Omega_{66} = \frac{1}{G_{13}}$$

$\alpha$  : fonction de coefficient de poisson.

➤ **Mode II :**

Pour l'essai de Mode II (ENF) (End Notched Flexure), la théorie des poutres donne la compliance [10][11][14] :

$$C_{II}^{BT} = \frac{2.L^3 + 3.a^3}{8.E.b.h^3} \quad (\text{III} - 38)$$

$\delta$  : le déplacement suivant z au centre de l'éprouvette,

L : demi-longueur de l'éprouvette,

2h : l'épaisseur de l'éprouvette.

L'énergie dans le mode II pure est donnée par :

$$G_{II}^{BT} = \frac{9.a^2.P^2}{16.b^2.h^3.E_f} \quad (\text{III} - 39) \quad \text{d'où} \quad E_f = \frac{L^3}{4.b.h^3.C_0} \quad (\text{III} - 40)$$

$E_f$  : Module de flexion [10] [11], avec  $E_f \approx E_{xx}$ .

$C_0$  : La compliance obtenue expérimentalement, si le déplacement au centre de l'éprouvette est calculé, l'expression de  $G_{II}$  est donc :

$$G_{II} = \frac{9.a^2.P.\delta}{2.b.(2L^3 + 3a^3)} \quad (\text{III} - 41)$$

E.E Theotokoglou et C.D Vrettos [11], on utilisé d'autre théorie pour le calcul de l'énergie critique en mode II en prenant en considération l'effet de module de cisaillement  $G_{xz}$  (*The transverse shear deformation theory*), la compliance est donnée par :

$$C_{II}^{SH} = C_{II}^{BT} + \frac{1,2L + 0,9a}{4.b.G_{xz}.h} \quad (III - 42)$$

Donc l'énergie :

$$G_{II}^{SH} = G_{II}^{BT} \left[ 1 + 0,2 \left( \frac{E_{xx}}{G_{xz}} \right) \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \quad (III - 43)$$

En prenant en considération la théorie des poutres et contenir la théorie de 1er ordre de cisaillement transverse (SBT), la compliance et l'énergie en mode II est donnée par :

$$C_{II}^{SBT} = \frac{L^3.(d_{11})_{BC}}{6b} + \frac{L(a_{55})_{BC}}{2.b.\omega} + \frac{a^3.[(d_{11})_{AB} - (d_{11})_{BC}] + a[(a_{55})_{AB} - (a_{55})_{BC}]}{12.b} + \frac{a[(a_{55})_{AB} - (a_{55})_{BC}]}{4.b.\omega} \quad (III - 44)$$

$$G_{II}^{SBT} = \frac{P^2}{8.b^2} \cdot \left\{ a^2 [(d_{11})_{AB} - [(d_{11})_{BC}] + \frac{(a_{55})_{AB} - (a_{55})_{BC}}{\omega}] \right\} \quad (III - 45)$$

Avec :  $\omega = \frac{5}{6}$  : facteur de correction de cisaillement,

AB : Section fissure (voir fig.III-5),

BC : Section qui ne contient pas de défaut (voir fig.III-5),

$(d_{11})_{AB}$  et  $(d_{11})_{BC}$  : Paramètres de compiance, d'où  $[d] = [[D] - [B] \cdot [A]^{-1} \cdot [B]]$ .

Pour le calcul de  $C_{II}^{SBT}$  et  $G_{II}^{SBT}$ , une théorie est proposé par F.Ozil et All [15] pour les calculs des paramètres  $(a_{55})_{AB}$ ,  $(a_{55})_{BC}$ ,  $(d_{11})_{AB}$  et  $(d_{11})_{BC}$ . Pour un comportement unidirectionnel  $(a_{55})_{AB} = (a_{55})_{BC}$ .

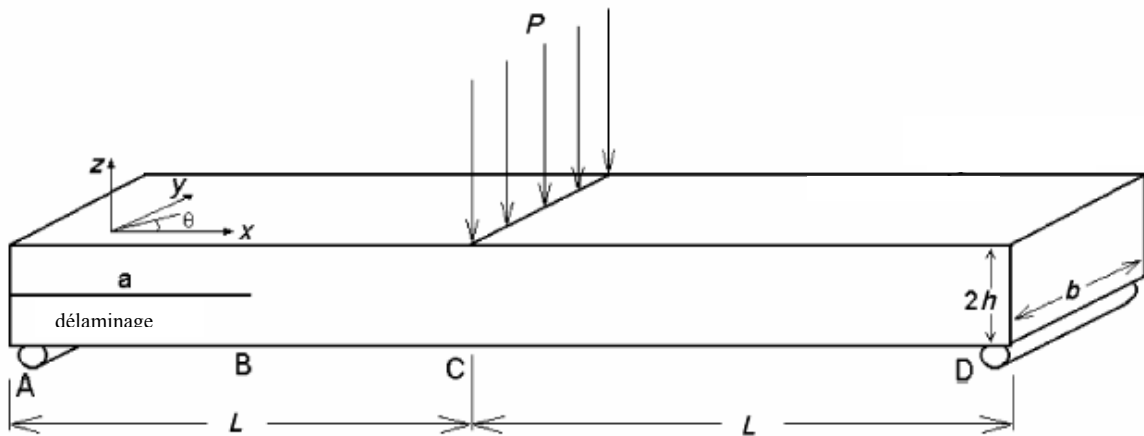


Fig. (III-5) : Géométrie de la poutre ENF.

III-6-2 Méthode de fermeture virtuelle de la fissure :

➤ Mode I et II :

La compliance pour le mode I et II est donnée par la relation suivante:

$$C^{EF} = \frac{\delta}{P}$$

avec  $\delta$  :déplacement suivant  $z$  au centre de l'éprouvette,

$P$  : force appliquée.

Pour le calcul de l'énergie critique en mode I et II avec la méthode de fermeture virtuelle de la fissure dans le cas bidimensionnel deux formules étaient données par Shun-Fa Hwang et Shu-Mei Huang [16] :

$$G_I^{EF} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cdot \Delta a} \cdot [F_z^i \{t_{11}(w_m - w_{m'}) + t_{12}(w_1 - w_{1'})\} + F_z^j \{t_{21}(w_m - w_{m'}) + t_{22}(w_1 - w_{1'})\} + F_z^k \{t_{31}(w_m - w_{m'}) + t_{32}(w_1 - w_{1'})\}] \quad (III-46)$$

$$G_{II}^{EF} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cdot \Delta a} \cdot [F_x^i \{t_{11}(u_m - u_{m'}) + t_{12}(u_1 - u_{1'})\} + F_x^j \{t_{21}(u_m - u_{m'}) + t_{22}(u_1 - u_{1'})\} + F_x^k \{t_{31}(u_m - u_{m'}) + t_{32}(u_1 - u_{1'})\}] \quad (III-47)$$

Avec :

$$t_{11} = 14 - \frac{33\pi}{8}, \quad t_{12} = -52 + \frac{33\pi}{2}, \quad t_{21} = -\frac{7}{2} + \frac{21\pi}{16}$$

$$t_{22} = 17 - \frac{21\pi}{4}, \quad t_{31} = 8 - \frac{21\pi}{8}, \quad t_{32} = -32 + \frac{21\pi}{2}$$

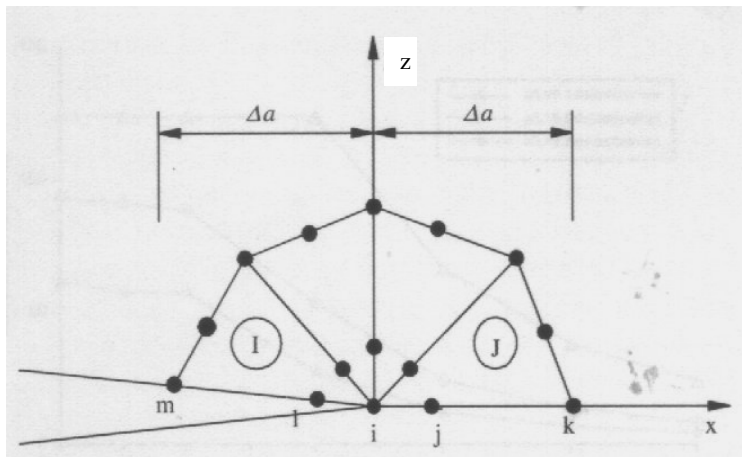


Fig.III-6: Forces nodales dans les éléments.



$F_i^j$  : force nodale de l'élément j dans la direction i..

u : déplacement suivant l'axe x,

w : déplacement suivant l'axe z,

m, m', l, l' : numéro du nœud.

R. Rikards [17] a utilisé deux formules plus simples que les deux formules précédentes :

$$G_I^{EF} = \frac{1}{b \cdot \Delta a} \cdot \frac{1}{2} \cdot [F_z^i(a) \cdot \Delta w^{i-1}(a)] \quad (III - 48)$$

$$G_{II}^{EF} = \frac{1}{b \cdot \Delta a} \cdot \frac{1}{2} \cdot [F_x^i(a) \cdot \Delta u^{i-1}] \quad (III - 49)$$

Avec :  $F_x^i$  et  $F_z^i$  : forces nodales dans le nœud i, dans la direction x et z respectivement,

$u^{i-1}$  et  $w^{i-1}$  : déplacement des nœuds (i-1) dans la direction x et z respectivement,

b : largeur de l'éprouvette.

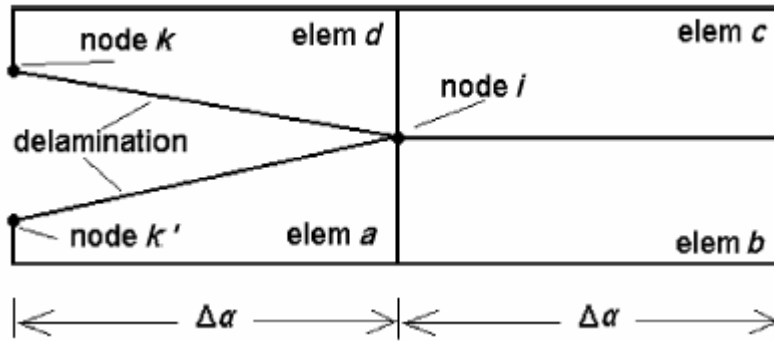


Fig.(III-7) : Topologie de l'élément 2D pour le calcul de l'énergie critique.

Pour le calcul des forces nodales ( $F_x^i$ ) une théorie est donnée dans [11], dans le cas

bidimensionnel :

$$F_x^i = \frac{1}{2} \left[ |F_{x_i}^a| + |F_{x_i}^b| + |F_{x_i}^c| + |F_{x_i}^d| \right] \quad (III - 50)$$

Dans le cas tridimensionnel :

$$F_{x_i} = \frac{1}{4} \sum |F_{x_i}^{\text{elements suivant la largeur}}| \quad (III - 51)$$

# Chapitre IV :

## Milieu continu et la méthode des éléments finis

## **IV- Milieu continu et la méthode des éléments finis.**

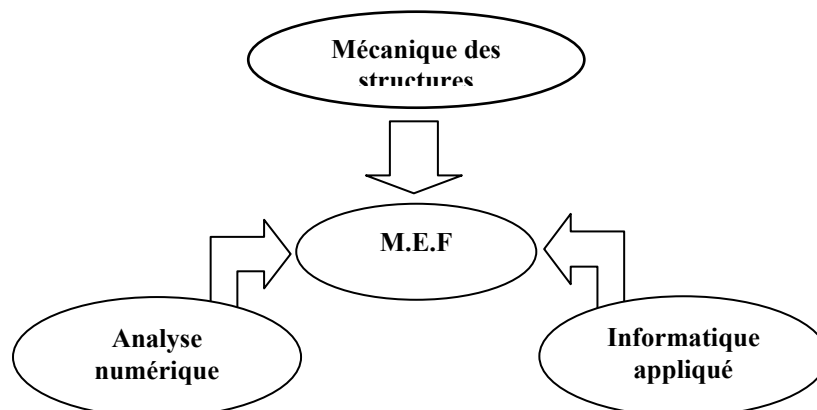
### **IV-I Introduction :**

Les techniques de calcul des structures ont connu ces vingt dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Ainsi la méthode des éléments finis (M.E.F) est-elle communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans les nombreux secteurs de l'industrie ; aérospatiale, nucléaire, génie civil, construction navale et mécanique etc.....

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la M.E.F appliquée au calcul des structures est une technique récente, à caractère pluridisciplinaire (Figure IV-1), car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- La mécanique des structures : élasticité, résistances des matériaux, dynamique, plasticités, etc.....
- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires, des problèmes aux valeurs propres.....
- L'informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance des grands logiciels.

On se propose, dans cette présentation générale, à des rappels des équations de la mécanique des solides et d'introduire les notions de base nécessaires à la compréhension au méthode des éléments finis[18].



**Fig.(IV-1) :** Caractère pluridisciplinaire de la M.E.F [18].

**IV-2 Rappels des équations de la mécanique des solides :**

Le problème type de la mécanique des solides revient à déterminer les deux champs inconnus : déplacements  $u_i$  et contraintes  $\sigma_{ij}$  sous l'effet des forces appliquées, forces de surface  $\bar{\Phi}_i$  et forces de volume  $f_i$ . Le phénomène de déformation des corps solides est régi par des équations de champ aux dérivées partielles avec des conditions aux limites mixtes. Deux démarches principales sont envisageables suivant que l'on formule complètement le problème en fonction de l'un des champs inconnus, soit le champ des déplacements  $u_i$ , soit le champ des contraintes  $\sigma_{ij}$ . La première approche en fonction des déplacements est appelée approche cinématique, l'autre approche en fonction des contraintes et appelée approche équilibre. Les équations de champ et conditions aux limites de la théorie de l'élasticité sont rappelées ci-dessous dans le cas générale et sont développées à titre d'exemple dans le cas des problèmes à deux dimensions (élasticité 2D)[18].

**IV-2-1 Les relations et équations de champ : [18]**

Définie dans le domaine solide  $V$  peuvent se classer en :

- ❖ Relations déformations déplacements ou relations cinématiques :

Dans le cas de la théorie linéaire de l'élasticité (déplacements et déformations

petits) on a :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{IV - 1}$$

En élasticité 2D :

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x, y) & u_2 &= v(x, y) \\ x_1 &= x & x_2 &= y \\ \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

- ❖ Équation d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{IV - 2}$$

- ❖ Équation de symétrie :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{IV - 3}$$

❖ Équation de compatibilité :

les équations de compatibilités sont les conditions d'intégrabilité des déformations qui assurent l'unicité des déplacements. Ces conditions d'intégrabilité sont obligatoires si l'on résout le problème d'élasticité en fonction des contraintes, c'est-à-dire dans le cas d'une approche équilibre. Si l'on effectue la résolution en fonction des déplacements c'est-à-dire dans le cas de l'approche cinématique, la compatibilité des déplacements est immédiate et les équations de compatibilité sont sans objet.

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{IV-4})$$

Cette équation générale permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

❖ Relations contraintes déformation ou relations d'élasticité :

Dans le cas de matériau à comportement élastique linéaire, on a de façon générale :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (\text{IV-5})$$

Avec  $C_{ijkl}$  composantes du tenseur d'élasticité.

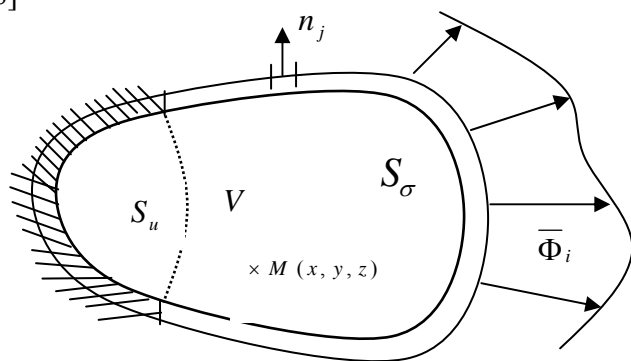
**IV-2-2 Conditions aux limites :** [18]

Sur un corps solide de surface extérieure  $S$ , ne peuvent exister que deux types de conditions aux limites :

a)- Sur une partie  $S_u \subset S$  sont

imposés des déplacements  $\bar{u}_i$  :

$$u_i = \bar{u}_i \quad \forall M \in S_u \quad (\text{IV-6})$$



**Fig.(IV-2) :** Corps solide.

Les conditions (IV – 6) sont dites conditions aux limites cinématiques sur  $S_u$  aucune composante du tenseur des contraintes n'est imposée.

b)- Sur la partie complémentaire  $S_\sigma$  ( $S_\sigma \subset S, S_u \cup S_\sigma = S, S_u \cap S_\sigma = \emptyset$ ) de  $S$ , sont imposés des efforts extérieurs  $\bar{\Phi}_i$  (ou l'absence d'efforts extérieurs  $\bar{\Phi}_i \equiv 0$ ). Ces efforts  $\bar{\Phi}_i$  imposent les valeurs de certaines composantes de tenseur des contraintes par les relations :

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{\Phi}_i \quad \forall M \in S_\sigma \quad (IV - 7)$$

### IV-2-3 Solution du problème de mécanique des solides :

La solution unique du problème de mécanique des solides satisfait les deux types de conditions suivantes [18]:

Condition de type $\rightarrow$	Cinématique	Équilibre
Portant sur les $\rightarrow$	(Déplacement)	(Contraintes)
Équation de champ dans V	Équation de compatibilité <sup>(1)</sup>	Équation d'équilibre $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ et $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
Conditions aux limites sur S	$u_i = \bar{u}_i$ sur $S_u$	$\sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{\Phi}_i$ sur $S_\sigma$
<i>(1) Remarque : Conditions d'intégrabilité nécessaires uniquement dans le cas d'une approche équilibre.</i>		

**Tableau (IV-1):** Solution du problème de mécanique des solides.

Avec les conditions subsidiaires suivantes :

- Relation cinématiques :  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
- Relation d'élasticité :  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$

### IV-3 Milieu continus et structures discrètes : Le concept d'élément fini

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses : barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la

théorie de l'élasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques). C'est à des assemblages de poutres que le concept de structure discrète a été appliqué tout d'abord. En effet, cette notion de modèle discret est évidente pour de telles structures car [18]:

- On dispose d'un modèle théorique simple à une dimension (théorie des poutres),
- La notion d'élément est intuitive et l'on peut caractériser de façon simple le comportement de chaque élément,
- Les interfaces entre éléments sont simples : ce sont les nœuds de l'assemblage,
- Les conditions de compatibilité et d'équilibre aux nœuds se formulent de façon simple.

Cependant, il est bien d'autres types de structures où l'opération de discrétisation n'est pas aussi immédiate ; pour les problèmes de coques ou de plaques par exemple. Il faut alors utiliser des techniques d'approximation appropriées. Dans le cadre de la M.E.F, on étudie un modèle discret du continuum. Ce modèle est basé sur une subdivision du domaine continu en sous domaine de forme géométrique simple que l'on appellera « éléments finis » interconnectés en des points remarquables appelés « nœuds ». De plus, on définit dans chaque élément une approximation adéquate de la solution permettant de résoudre le problème en fonction uniquement des valeurs de la solution aux nœuds. Cette notion de discrétisation géométrique est illustrée en figure IV-3 par le problème de l'ouverture circulaire dans une plaque rectangulaire sollicitée en traction uniforme. On y voit que les nœuds et éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière mais sont basés sur des conditions de précision de l'approximation. On voit que le concept d'élément fini permet d'unifier le traitement des problèmes milieux continus les plus divers[18].

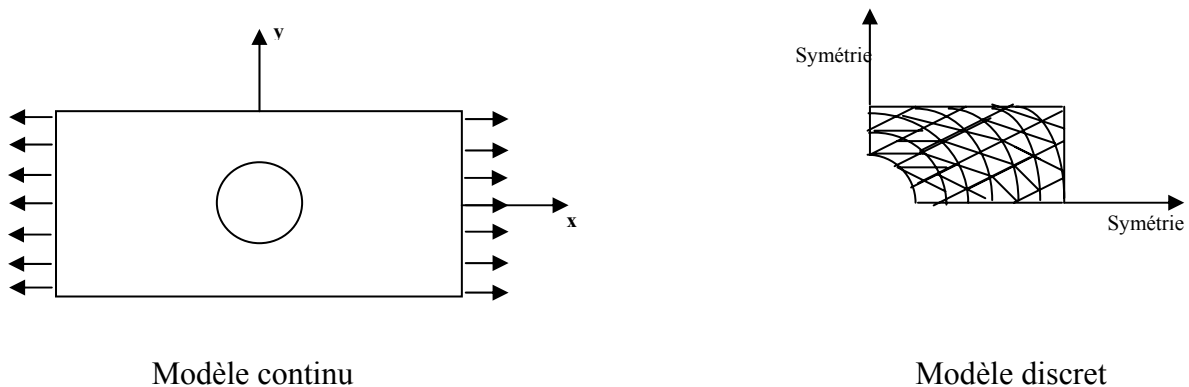


Fig.(IV-3) : Discrétisation d'un problème continu d'élasticité plane par M.E.F.

On peut classer, comme en figure IV-4, les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments peuvent être distinguées [18]:

- Les éléments unidimensionnels (1D) : barres, poutres rectilignes, ou courbés utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs ;
- Les éléments bidimensionnels (2D) : élasticité plane (déformation ou contrainte plane « plaques en membrane »), plaques en flexion, coques courbés, de forme triangulaire ou quadrangulaire ;
- Les éléments tridimensionnels (3D) : éléments de volume ou coques épaisses ;
- Les éléments axisymétriques qui constituent une classe bien particulière ; tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques coniques ou à méridienne courbe avec éventuellement un traitement en séries de Fourier suivant la coordonnée circonférentielle.

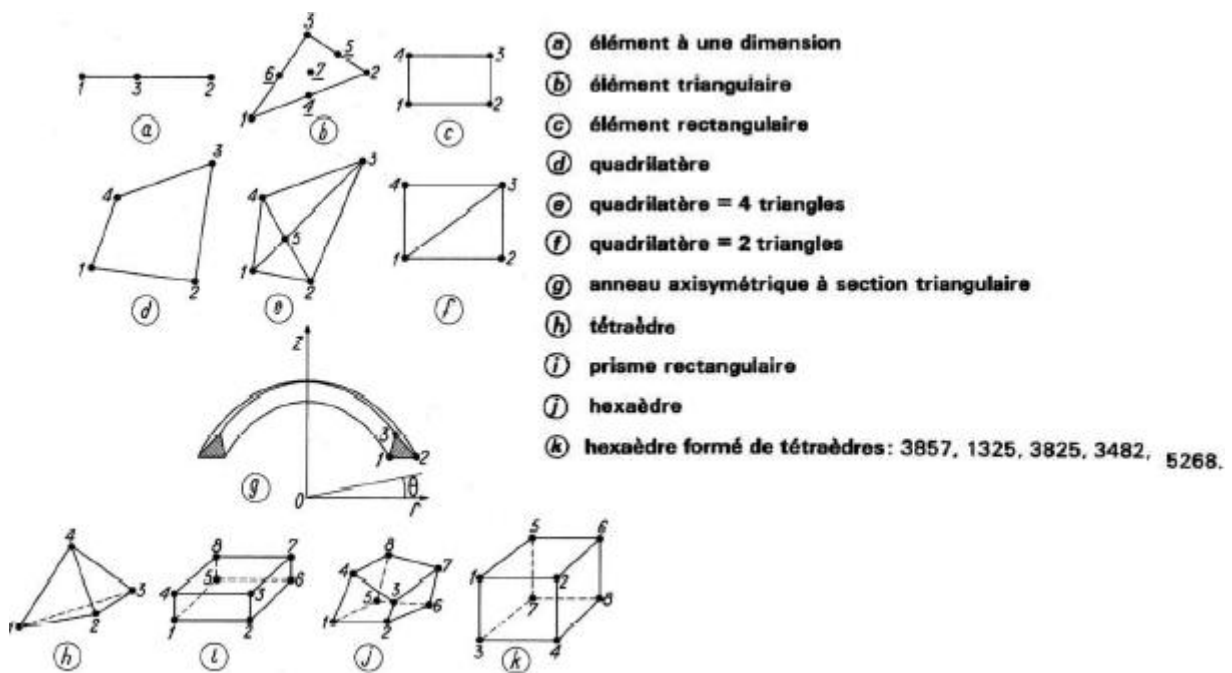


Fig.(IV-4) : Éléments le plus fréquemment employés.



#### **IV-4 Formulation matricielle «Niveau élémentaire et global » :**

Nous avons vu précédemment comment la M.E.F permettait de ramener les problèmes de milieux continus à des problèmes discrets à un nombre fini de paramètres inconnus qui sont déterminés pour application de critères énergétiques. Ces paramètres sont de nature différente selon la méthode employée. On peut distinguer deux classes de méthodes matricielles [18]:

- ⊕ La méthode des forces : dans laquelle les paramètres inconnus sont les contraintes ou les forces résultantes dans les éléments ;
- ⊕ La méthode des déplacements : dans laquelle les paramètres inconnus sont les déplacements (et éventuellement leurs dérivées) aux nœuds.

Lorsqu'on utilise ces techniques matricielles, on est amené successivement à s'intéresser à deux niveaux de formulation :

- La formulation élémentaire : au niveau de l'élément fini ;
- La formulation globale : au niveau de la structure complète.

Pour expliciter ces deux niveaux, nous prendrons l'exemple de la méthode des déplacements.

##### **IV-4-1 La formulation élémentaire :**

Consiste à rechercher pour chaque élément des expressions matricielle des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des inconnues élémentaires, ici déplacements aux nœuds de l'élément. Ceci nécessite le calcul de matrices caractéristiques de l'élément : matrice de rigidité, de masse, vecteurs de forces équivalentes. On a par exemple (voir figure IV-5) dans le cas de l'analyse statique, les expressions suivantes en fonction du vecteur  $q^e$  des déplacements aux nœuds de l'élément[18] :

- Énergie de déformation :  $U_e = \frac{1}{2} q^{eT} . K^e . q^e$  (IV – 8)

- Travail des forces appliquées :  $T_e = q^{eT} . F^e$  (IV – 9)

Avec :  $K^e$  : Matrice de rigidité élémentaire,

$F^e$  : Vecteur des forces équivalentes élémentaires.

#### IV-4-2 La formulation globale :

Consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité, de masse, vecteurs forces équivalentes) pour tous les éléments. Dans le cas de l'analyse statique, on a (voir figure IV-5) pour la structure complète, les expressions suivantes en fonction des vecteurs des déplacements aux nœuds de la structure complète[18] :

- Énergie de déformation :  $U = \frac{1}{2} q^T . K . q$  (IV – 10)

- Travail des forces appliquées :  $T = q^T . F$  (IV – 11)

Avec :  $K$  : Matrice de rigidité de la structure,

$F$  : Vecteur des forces équivalentes, pour la structure complète.

Ces expressions permettent d'obtenir par application directe du principe des travaux virtuels, le système des équations d'équilibre des nœuds. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta T \\ \delta . q^T . K . q &= \delta . q^T . F \end{aligned} \quad \forall \delta q \neq 0$$

D'où :  $K . q = F$  (IV – 12)

La résolution de ce système linéaire des équations d'équilibre permet de déterminer le vecteur  $q$  des déplacements inconnus.

On peut récapituler les considérations précédentes en concluant que la formulation globale à partir des caractéristiques élémentaires et d'autre part à déterminer les inconnues du problème (déplacements aux nœuds) par résolution des équations d'équilibre (ou du mouvement en dynamique).

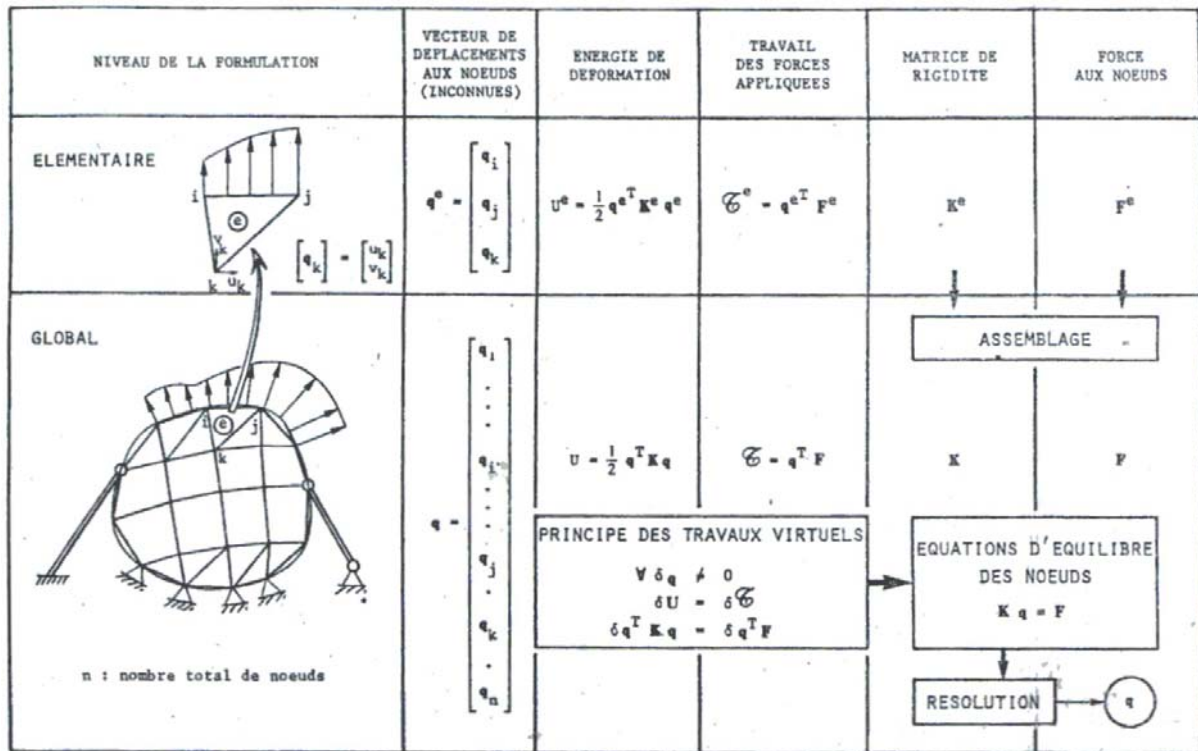


Fig.(IV-5) : Synoptique de la formulation de la méthode des déplacements.

On vient de voir précédemment que l'application de la M.E.F nécessitait :

- Des calculs matriciels élémentaires (1) (matrices de rigidité, de masse, forces équivalentes) pouvant être automatisés pour une grande variété de types éléments,
- Des calculs au niveau global (2) et (3),
  - ✓ (2) Assemblage de caractéristiques élémentaires,
  - ✓ (3) Résolution numérique du problème global
- Des calculs de restitution au niveau élémentaire (4) : calcul des contraintes dans les éléments par exemple.

Ainsi, quatre phases principales de calcul peuvent être mises en évidence. Ces phases sont illustrées en figure IV-6 dans un organigramme simplifié dans le cas de l'analyse statique linéaire. Ceci montre que les traitements numériques résultant de la M.E.F peuvent être fractionnés en phases et programmés de façon modulaire pour une grande variété de structures et de types de problèmes[18].

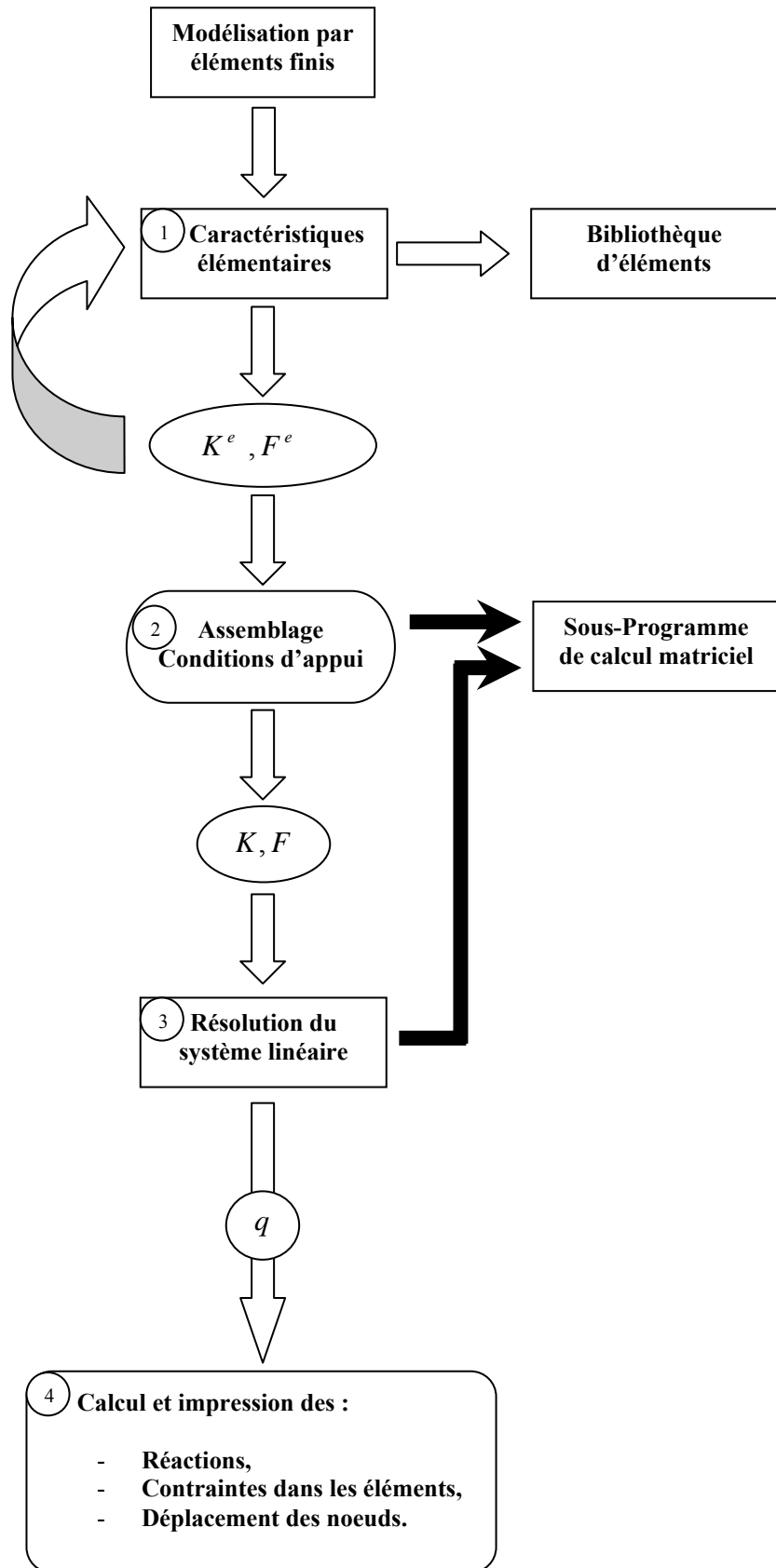


Fig.(IV-6) : Organigramme simplifié de traitement pour l'analyse statique  
(Méthode des déplacements.)

**IV-5 Application de la M.E.F au modèle utilisé : [19]**

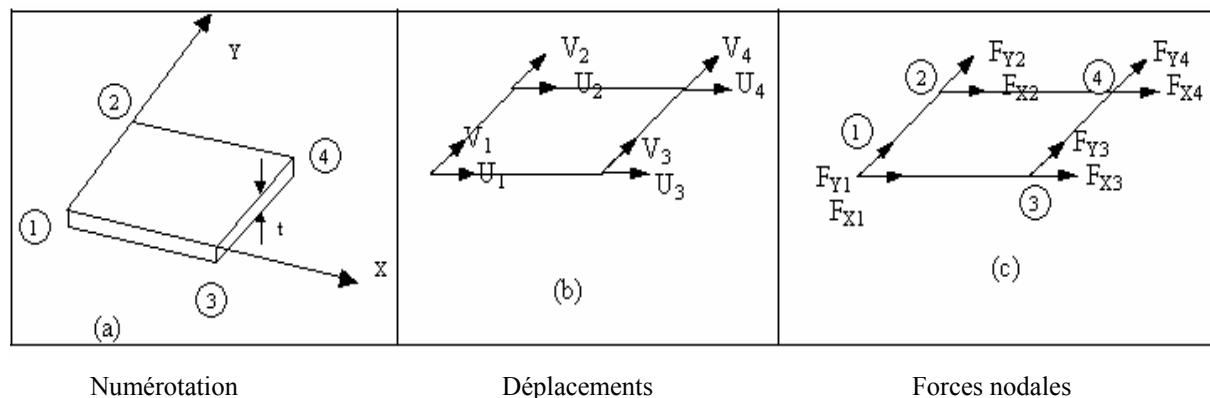
Le plus souvent, les champs interpolés sont ceux des déplacements ou des contraintes, plus rarement celui des déformations. Ces interpolations portent sur tout l'élément, ou une partie de celui-ci, l'intérieur ou la frontière. Selon la combinaison choisie, on peut créer divers, dits modèles d'éléments finis. Le modèle utilisé dans notre travail est le plus courant, il s'agit du modèle des déplacements.

Les éléments finis de cette catégorie sont basés sur une interpolation du champ des déplacements étendue à tout l'élément, il en résulte que les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, alors que les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières. Le modèle des déplacements est le plus populaire, le plus connu et le plus développé.

Dans ce modèle, les fonctions de déplacement sont choisies en utilisant le triangle de Pascal, de telle sorte que le nombre total de constantes indépendantes, soit égale au nombre total de degrés de liberté de l'élément, donc l'invariance géométrique est maintenue.

**IV-5-1 Calcul de la Matrice de rigidité élémentaire :**

L'élément utilisé est un élément rectangulaire de dimension  $a$  et  $b$  et d'épaisseur  $t$  (figure IV-7), possède à 4 nœuds à 2 D.D.L pour chaque nœuds (8 D.D.L/élément). Les déplacements et les forces nodales sont présentés dans les figures IV-7-a et IV-7-b respectivement.



**Fig.(IV-7) : Élément rectangulaire.**

Les vecteurs déplacements et forces pour l'élément, sont donnés par :

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \\ \{q_3\} \\ \{q_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ - \\ u_2 \\ v_2 \\ - \\ u_3 \\ v_3 \\ - \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (IV-13)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ - \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ - \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ - \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (IV-14)$$

D'où :  $F^e = K^e \cdot q^e$  (IV-15)

$K^e$  : Matrice de rigidité élémentaire.

Les fonctions d'interpolations sont données par :  $\{q(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$  avec :

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy \end{aligned} \quad (IV-16)$$

Sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \quad (IV-17)$$

Ce qui peut être résumé par l'équation générale :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\varphi\} \quad \text{avec} \quad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 18)$$

$$\{\mathbf{q}^e\} = \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \\ \{q_3\} \\ \{q_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q(x_1, y_1) \\ q(x_2, y_2) \\ q(x_3, y_3) \\ q(x_4, y_4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{Bmatrix} \{\varphi\} \quad (\text{IV} - 19)$$

En remplace les  $f(x_i, y_i)$  par leurs valeurs, on obtient :

$$\{\mathbf{q}^e\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \cdot \{\varphi\} \quad (\text{IV} - 20)$$

$$\{\mathbf{q}^e\} = [\Gamma] \cdot \{\varphi\} \quad (\text{IV} - 21)$$

$$\text{D'où :} \quad \{\varphi\} = [\Gamma^{-1}] \cdot \{\mathbf{q}^e\} \quad (\text{IV} - 22)$$

La résolution de ce système donne les valeurs des huit coefficients inconnus exprimées en fonction des déplacements  $u$  et  $v$  des nœuds.

En remplace IV-22 dans IV-18 on obtient :

$$[q(x, y)] = f(x, y) \cdot [\Gamma^{-1}] \cdot \{q^e\} \quad (\text{IV-23})$$

Pour les problèmes de contrainte ou déformation planes les déformations sont données par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad \text{d'où} \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \partial u / \partial x \\ \varepsilon_y = \partial v / \partial y \\ \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{array} \right\}$$

Alors :

$$[\varepsilon(x, y)] = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 + \alpha_4 \cdot y \\ \beta_3 + \beta_4 \cdot x \\ \alpha_3 + \alpha_4 \cdot x + \beta_2 + \beta_4 \cdot y \end{array} \right\} \quad (\text{IV-24})$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [\Psi] \cdot \{\varphi\} \quad \text{avec} \quad [\Psi] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \quad (\text{IV-25})$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [\Psi] \cdot [\Gamma]^{-1} \cdot \{q^e\} \quad (\text{IV-26})$$

$$\text{ou} \quad \{\varepsilon(x, y)\} = [\Omega] \cdot \{q^e\} \quad (\text{IV-27})$$

$$\text{Avec :} \quad [\Omega] = [\Psi] \cdot [\Gamma]^{-1}$$

$$\text{On a :} \quad \{\sigma(x, y)\} = [\Pi] \cdot [\varepsilon^e]$$

D'après IV-27 l'équation contraintes déplacements nodaux s'écrit :

$$\{\sigma(x, y)\} = [\Pi] \cdot [\Omega] \cdot \{q^e\} \quad (\text{IV-28})$$



Cette équation donne la relation entre les contraintes en tout point et les déplacements nodaux avec  $[\Pi]$  définie de façon suivante :

$$[\Pi] = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

On applique le principe des travaux virtuels, pour un déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes.

Soit :  $[q^*]$  vecteur de déplacement virtuel, et  $[F^e]$  vecteur de charge nodale alors le travail extérieur est donnée par :

$$W_{\text{ext}} = [q^*] \cdot [F^e] \quad (\text{IV-29})$$

$[\varepsilon(x, y)^*]$  déformation produite par les déplacements imposé. Le travail interne par unité de volume est donnée par :

$$W_{\text{int}} = [\varepsilon(x, y)^*]^T \cdot [\sigma(x, y)] \quad (\text{IV-30})$$

On intègre, le travail interne total sera :

$$\int_V W_{\text{int}} \cdot dV = \int_V [\varepsilon(x, y)^*]^T \cdot [\sigma(x, y)] \cdot dV = \int_V [\Omega]^T \cdot [q^*] \cdot [\Pi] \cdot [\Omega] \cdot [q^e] \cdot dV \quad (\text{IV-31})$$

De IV-29 et IV-31 et avec un déplacement virtuel égal à l'unité on obtient :

$$[F^e] = \left[ \int_V [\Omega]^T \cdot [\Pi] \cdot [\Omega] \cdot dV \right] \cdot [q^e] \quad (\text{IV-32})$$

De l'équation IV-15 on tire :

$$[K^e] = \int_V [\Omega]^T \cdot [\Pi] \cdot [\Omega] \cdot dV \quad (\text{IV-33})$$

pour un élément d'épaisseur constante  $t$  :

$$[K^e] = t \iint [\Omega]^T \cdot [\Pi] \cdot [\Omega] \cdot dx dy \quad (IV-34)$$

Le produit  $[\Omega]^T \cdot [\Pi] \cdot [\Omega]$  doit être évalué en premier, et les termes de la matrice qui en résultent doivent être intégrés sur la surface de l'élément.

On a résumé les parties essentielles pour la résolution complète d'un problème par la méthode des éléments finis avec un développement d'un programme en Fortran qui est bien détaillé dans l'organigramme (fig(IV-6)).

# Chapitre V :

## Modélisation 2D par E.F du délaminage en mode II

## **V- Modélisation 2D par E.F du délaminage en mode II :**

### **V-1 Introduction :**

Dans ce chapitre, une étude numérique est réalisée en utilisant la méthode des éléments finis. Un programme en fortran a été réalisé pour l'analyse des milieux continus par cette méthode (E.F).

Cette étude vise à maîtriser la modélisation par éléments finis de l'initiation ou l'amorçage de délaminage dans les structures composites stratifiées. Pour étudier le phénomène de délaminage en mode II établi, des essais du type mécanique de la rupture sont classiquement utilisés [essais ENF (End Notched Flexure)]. L'éprouvette d'essais considérée peut être alors assimilées à des poutres prés fissurées. Lors des essais; l'avancée de la fissure est suivie en fonction de la charge appliquée, ce qui permet de déterminer un taux de restitution d'énergie critique correspondant à l'énergie nécessaire pour faire croître le délaminage en mode II d'une surface unitaire.

Le travail présenté est une validation d'une étude expérimental de F.Ozil et all [15] et une comparaison avec l'étude numérique de E.Theotokoglou et C.D Vrettos [11]. L'objet de ce travail et de bien présenter la modélisation et la simulation par éléments finis d'essais d'initiation (amorçage) de délaminage en mode II afin de montrer la pertinence de l'approche retenue.

### **V-2 Procédure numérique et description du modèle :**

Ce travail concerne la simulation par E.F des essais ENF des poutres en verre/polyester. Les différentes configurations des éprouvettes sont détaillé dans le tableau (V-1) suivant [11][15]:

Configuration	Orientation	Nombre des couches	Epaisseur 2h (mm)
1	$[0^{\circ}]_6$	6	4.38
2	$[\pm 30^{\circ}]_5$	10	7.30
3	$[\pm 45^{\circ}]_5$	10	7.30

**Tableau V-1 : Configurations des éprouvettes**

La géométrie des configurations est montrée dans la figure (V-1). Les dimensions pour tout les configuration sont:  $2l=100$  mm     $a=25$  mm     $b=20$  mm , avec 2h l'épaisseur de l'éprouvette d'où l'épaisseur d'un pli égale à 0,73 mm.

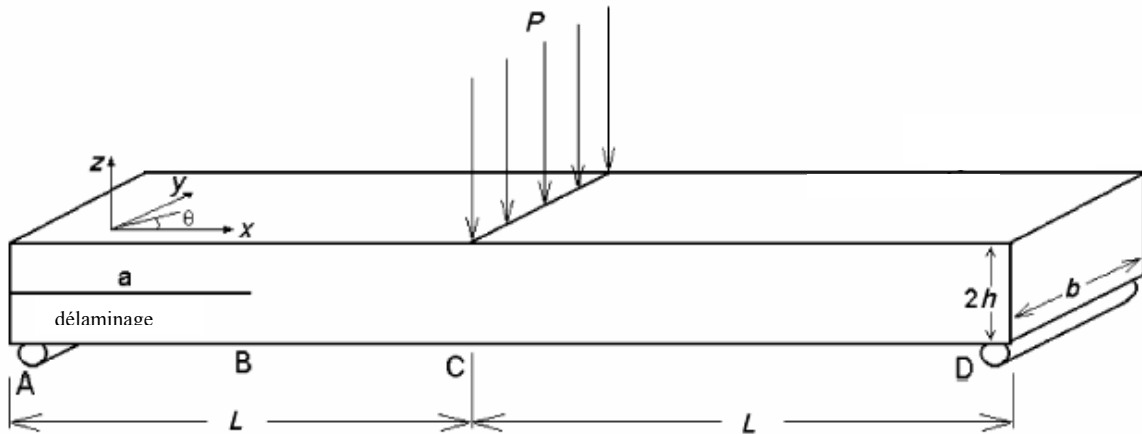


Fig. (V-1): Géométrie de l'éprouvette (Essai E.N.F).

Les propriétés mécaniques du matériau quasi-unidirectionnel sont données dans le tableau (V-2), avec 1,2 et 3 correspond à la direction longitudinale, transversal et l'épaisseur respectivement [11][15]. Le tableau (V-3) représente les propriétés mécaniques équivalentes du matériau dans le axes globale pour chaque configuration.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$
34.7	8.5	4.34	0.27	0.066
$E_2 = E_3$	$G_{13} = G_{12}$	$\nu_{13} = \nu_{12}$		

Tableau (V-2): Propriétés mécaniques du quasi-unidirectionnel verre/polyester [11][15].

Propriétés (GPa)	Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3
	$[0^\circ]_6$	$[\pm 30]_5$	$[\pm 45]_5$
$E_{xx}$	34.7	20.83	12.80
$E_{yy}$	8.5	9.51	12.80
$G_{xy}$	4.34	8.456	9.83
$\nu_{xy}$	0.27	0.5757	0.4741
$\nu_{yx}$	0.066	0.2692	0.4741

Tableau (V-3): Propriétés mécaniques équivalentes des configurations.

Dans cette étude on va calculer l'énergie critique de délaminage en mode II ( $G_{II}^c$ ) pour des configurations ayant les interfaces  $\theta/-\theta$ , pour cette raison on a poser les hypothèses suivantes:

- Le comportement mécanique est linéaire,
- On est dans le cas des contraintes planes,
- L'initiation de la propagation de la fissure (l'amorçage) commence dès que la contrainte de cisaillement atteint la contrainte de cisaillement de rupture  $\tau_{xy}^{rupture}$  de la résine [20][21].

Pour calculer l'énergie critique  $G_{IIc}$ , on vas d'abord trouver la force critique  $P_c$  en variant la force jusqu'à ou la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  atteint la valeur critique ( $\tau_{xy} = \tau_{xy}^{rupture}$ ). Les résultats (déplacement, forces nodales, force critique) sont utilisés pour le calcul de la compliance et l'énergie critique. La compliance  $C$  et l'énergie  $G_{IIc}$  seront calculée avec différentes méthodes, suffisamment détaillé dans le chapitre III.

### V-3 Modélisation du phénomène de rupture (Fissure):

Le plus important et le plus délicat dans la modélisation est de trouver une technique pour la modélisation du phénomène (fissure) et un maillage qui convient a une structure mécanique. Dans le domaine de rupture des matériaux composites, plusieurs techniques ont était appliqué pour la modélisation de la fissure. E.E Theotokoglou et C.D Vrettos [11] on utilisé des éléments de contact (CONTACT12)[11][14] rectangulaire à quatre nœuds (Contrainte plane, plane42) [11] (figure V-2).

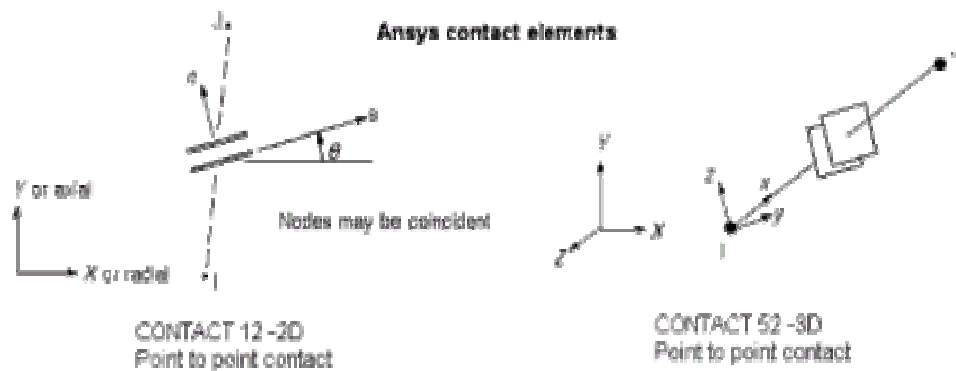


Fig. (V-2) : Eléments de contact [11].

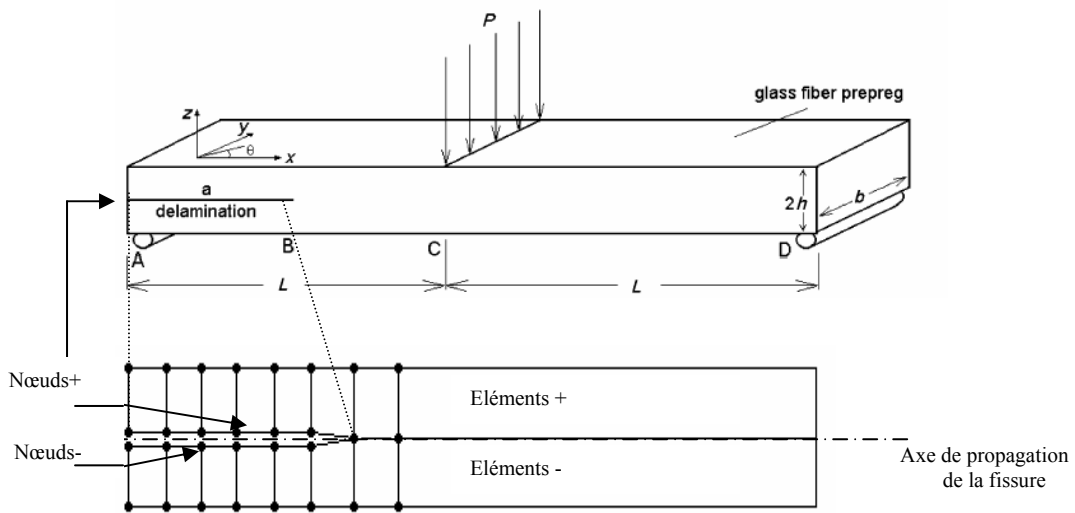
Dans notre études, la modélisation de la fissure est faite par des nœuds double superposés Nœuds( $\pm$ ) (même coordonnées x et y) au niveau de l'axe de propagation de la fissure, les nœuds(+) appartient aux éléments au dessus de l'axe de propagation de la fissure et les nœuds(-) appartient aux éléments au dessous de cet axe (figure V-3). Cette technique a

l'avantage de modéliser une fissure avec une ouverture nulle qui reste très difficile de la modéliser avec des logiciels et code de calcul éléments finis.

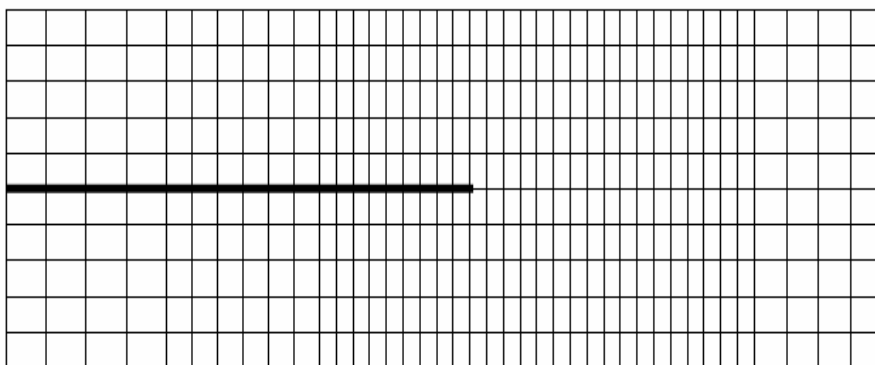
**V-4 Maillage de la structure:**

Il reste toujours difficile et délicat de trouver un maillage adopté pour une structure, surtout s'il s'agit d'un matériau non isotrope (composite) avec une modélisation d'un phénomène délicat qui est dans notre cas le délaminage.

Les essais expérimentaux de F.Ozil et all [15], nous aide à trouver la convergence en déplacement. La concentration de contrainte de cisaillement autour de la tête de fissure nous ramène à raffiné le maillage autour de cette dernière. Dans notre cas, le maillage de la structure est irrégulier avec 12 éléments très raffiné autour da la tête de la fissure avec  $\Delta a = 0.5mm$  (figure V-4).



**Fig. (V-3) : Modélisation de la fissure.**



**Fig.(V-4): Maillage autour de tête de la fissure**

**V-5 Calcul de l'énergie critique et la compliance :**

Déjà mentionnée dans le chapitre III, Le calcul de l'énergie critique  $G_{II}^c$  et la compliance  $C$  ce fais par les deux méthodes, méthode des poutres et méthode éléments finis (fermeture virtuelle de la fissure).

**V-5-1 la compliance :**

La compliance est calculée à l'aide de la méthode des éléments finis par la relation :

$$C_{II}^{EF} = \frac{\delta}{P} \quad (V-1)$$

avec :  $\delta$  déplacement suivant z au centre de l'éprouvette,

$P$  force appliquée,

On utilisant la méthode des poutres, et on prenant en considération l'effet de module de cisaillement (*The transverse shear deformation theory*) la compliance est donnée par :

$$C_{II}^{SH} = C_{II}^{BT} + \frac{1,2L + 0,9a}{4.b.G_{xz}.h} \quad (V-2) \quad \text{avec :} \quad C_{II}^{BT} = \frac{2.L^3 + 3.a^3}{8.E_{xx}.b.h^3} \quad (V-3)$$

$L$  :demi-longueur de l'éprouvette,

$a$  : longueur de la fissure,

$E_{xx}$  : Module de flexion,

$b$  : largeur de l'éprouvette,

$2h$  : l'épaisseur de l'éprouvette,

$G_{xz}$  : module de cisaillement.

En Prenant en considération la théorie des poutres et contenir la théorie de 1er ordre de cisaillement transverse (SBT), la complaisance est donnée par :

$$C_{II}^{SBT} = \frac{L^3.(d_{11})_{BC}}{6b} + \frac{L(a_{55})_{BC}}{2.b.\omega} + \frac{a^3.[(d_{11})_{AB} - (d_{11})_{BC}]}{12.b} + \frac{a[(a_{55})_{AB} - (a_{55})_{BC}]}{4.b.\omega} \quad (V-4)$$

Avec :  $\omega = \frac{5}{6}$  : facteur de correction de cisaillement,

AB : Section fissure (voir chapitre III, fig.III-5),

BC : Section qui ne contient pas de défaut (voir chapitre III, fig.III-5),

$(d_{11})_{AB}$  et  $(d_{11})_{BC}$  : Paramètres de compliance, d'où  $[d] = [[D] - [B] \cdot [A]^{-1} \cdot [B]]$ .



### V-5-2 L'énergie critique :

L'énergie critique est calculée à l'aide de la méthode de fermeture virtuelle de la fissure par la relation suivante :

$$G_{II}^{EF} = \frac{1}{b \cdot \Delta a} \cdot \frac{1}{2} \cdot [F_x^i(a) \cdot \Delta u^{i-1}] \quad (V-5)$$

Avec :  $F_x^i$  : forces nodales dans le nœud  $i$ , dans la direction  $x$ ,  
 $u^{i-1}$  : déplacement des nœuds  $(i-1)$  dans la direction  $x$ ,  
 $b$  : largeur de l'éprouvette.

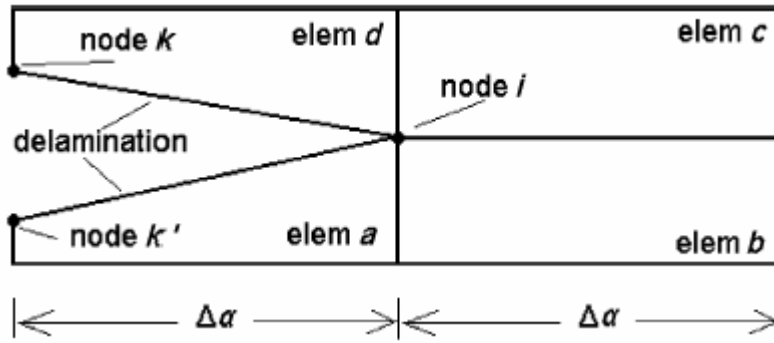


Fig.(V-5) : Topologie de l'élément 2D pour le calcul de l'énergie critique.

Pour le calcul des forces nodales ( $F_x^i$ ) une théorie est donnée dans [11], dans le cas bidimensionnel :

$$F_x^i = \frac{1}{2} \left[ |F_{x_i}^a| + |F_{x_i}^b| + |F_{x_i}^c| + |F_{x_i}^d| \right] \quad (V-6)$$

Pour l'essai de Mode II (ENF), la théorie des poutres (*The transverse shear deformation theory*) donne l'énergie critique par la relation :

$$G_{II}^{SH} = G_{II}^{BT} \left[ 1 + 0,2 \left( \frac{E_{xx}}{G_{xz}} \right) \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \quad (V-7) \text{ d'où } G_{II}^{BT} = \frac{9 \cdot a^2 \cdot P^2}{16 \cdot b^2 \cdot h^3 \cdot E_f} \quad (V-8)$$

$E_f$  : Module de flexion [10] [11], avec  $E_f \approx E_{xx}$ .

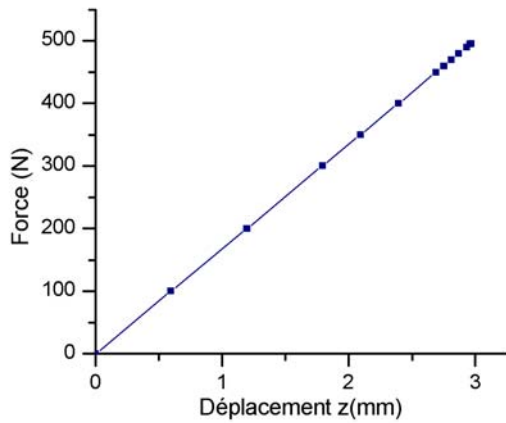
En Prenant en considération la théorie des poutres et contenir la théorie de 1er ordre de cisaillement transverse (SBT), l'énergie en mode II est donnée par :

$$G_{II}^{SBT} = \frac{P^2}{8 \cdot b^2} \cdot \left\{ a^2 [(d_{11})_{AB} - (d_{11})_{BC}] + \frac{(a_{55})_{AB} - (a_{55})_{BC}}{\omega} \right\} \quad (V-9)$$

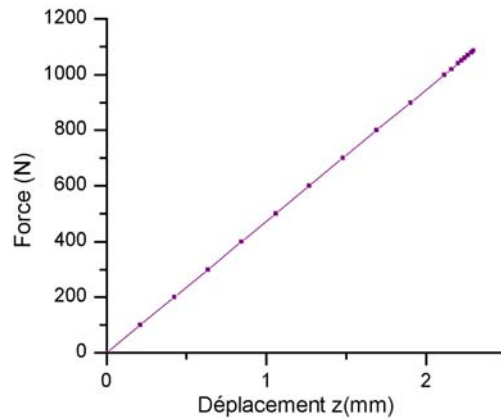
**V-6 Résultats et discussions:**

**V-6-1 Force critique:**

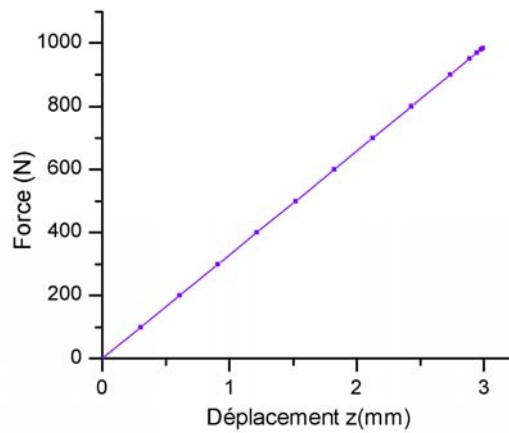
Dans notre étude, la charge a été appliquée jusqu'à une valeur critique  $P_c$ , les figures V-6-1, V-6-2 et V-6-3 montrent la variation du déplacement en fonction de la charge P pour chaque configuration.



1- Configuration  $[0^\circ]_6$



2- Configuration  $[\pm 30^\circ]_5$



3- Configuration  $[\pm 45^\circ]_5$

**Fig.(V-6):** Diagramme force/déplacement d'essais ENF.

Ses essais nous ont permis de comparer les valeurs critiques de la charge  $P_c$  de chaque configuration avec les résultats expérimentales de F.Ozil et all [15] (fig.(V-7)), ou on a trouver des bons résultats qui ont des erreurs de calcul très faible. Pour la première configuration  $[0^\circ]_6$  et la dernière  $[\pm 45^\circ]_5$ , l'erreurs estimée est de  $\varepsilon_{Pc}^1 = 3.869 \%$

$\varepsilon_{P_c}^3 = 3.577\%$  respectivement. Pour la deuxième configuration  $[\pm 30^\circ]_5$ , l'erreur est un peu plus grande  $\varepsilon_{P_c}^2 = 8.559\%$  par rapport à la valeur expérimentale d'où :

$$\varepsilon_{P_c}^i = \frac{\Delta P}{P_{\text{exp}}} = \frac{P_{\text{num}}^i - P_{\text{exp}}}{P_{\text{exp}}} \quad (V - 10)$$

i=numéro de la configuration.

i=1 : Configuration  $[0^\circ]_6$

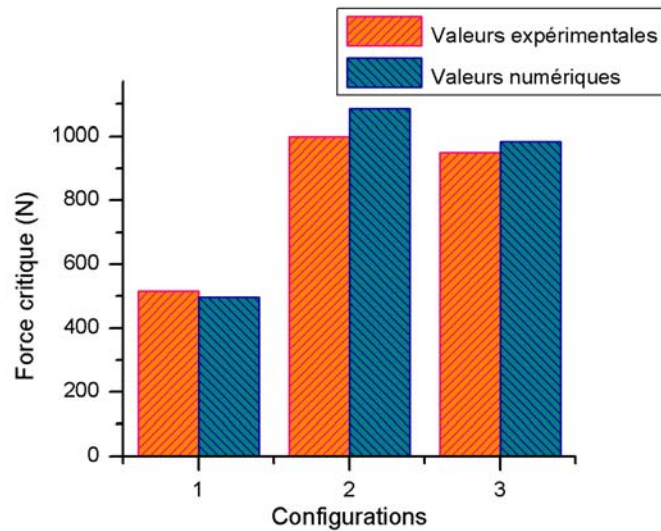
i=2 : Configuration  $[\pm 30^\circ]_5$

i=3 : Configuration  $[\pm 45^\circ]_5$

Les valeurs numériques de la charge critique  $P_c$  et expérimentales sont données dans le tableau (V-4).

Configurations	$P_c^{num} (N)$	$P_c^{exp} (N)$	$\varepsilon_{P_c} (\%)$
1	496,162	516.13	3.869
2	1085,59	1000	8.559
3	983,98	950	3.577

**Tableau (V-4) :** Charges critiques et erreurs de calculs.



**Fig.(V-7) :** Comparaison de la force critique pour chaque configuration.

**V-6-2 La compliance :**

Dans cette partie la compliance a été calculée avec plusieurs méthodes (Paragraphe V-5), ceci nous permet de comparer les résultats numériques avec les résultats expérimentale ( $C_{II}^{exp}$ ) [15] et les résultats numériques ( $^{Ref[11]}C_{II}^{EF,SH,SBT}$ ) de E.E. Thotokoglou et C.D. Vrettos [11].

Les résultats obtenues sont montrés dans le tableau suivant :

Config	$C_{II}^{EF}$ $10^{-6}(m/N)$	$C_{II}^{exp}$ $10^{-6}(m/N)$	$C_{II}^{SH}$ $10^{-6}(m/N)$	$C_{II}^{SBT}$ $10^{-6}(m/N)$	$^{Ref[11]}C_{II}^{EF}$ $10^{-6}(m/N)$	$^{Ref[11]}C_{II}^{SH}$ $10^{-6}(m/N)$	$^{Ref[11]}C_{II}^{SBT}$ $10^{-6}(m/N)$
1	5.980	$5.90 \pm 0.24$	5.20	7.80	5.219	5.20	5.13
2	2.115	$2.20 \pm 0.05$	1.86	2.30	1.541	1.85	1.92
3	3.039	$2.90 \pm 0.20$	3.00	3.67	2.194	2.94	3.07

**Tableau (V-5):** La compliance.

Config.	$\varepsilon_C^{EF}$ (%)	$\varepsilon_C^{SH}$ (%)	$\varepsilon_C^{SBT}$ (%)	$^{Ref[11]}\varepsilon_C^{EF}$ (%)	$^{Ref[11]}\varepsilon_C^{SH}$ (%)	$^{Ref[11]}\varepsilon_C^{SBT}$ (%)
1	1.35	11.86	32.20	11.54	11.86	13.05
2	3.86	15.36	4.54	29.95	15.91	12.73
3	4.79	3.45	26.55	24.34	1.38	5.86

**Tableau (V-6):** Erreurs de calculs de la compliance.

Les figures V-8-1, V-8-2 et V-8-3, montrent la comparaison entre les valeurs numériques de la compliance trouvées par rapport aux valeurs expérimentales [15] et numériques [11].

Dans le premier cas  $[0^\circ]_6$ , la compliance trouvée par la méthode des éléments finis  $C_{II}^{EF}$  (Fermeture virtuelle de la fissure) est très proche a la valeur expérimentale et beaucoup mieux que la valeur numérique trouver par E.E. Thotokoglou et C.D. Vrettos [11], par contre la méthode des poutres ( $C_{II}^{SH}, C_{II}^{SBT}$ ) nous donne des résultats un peu loin des résultats expérimentales avec des erreurs de calcul important.

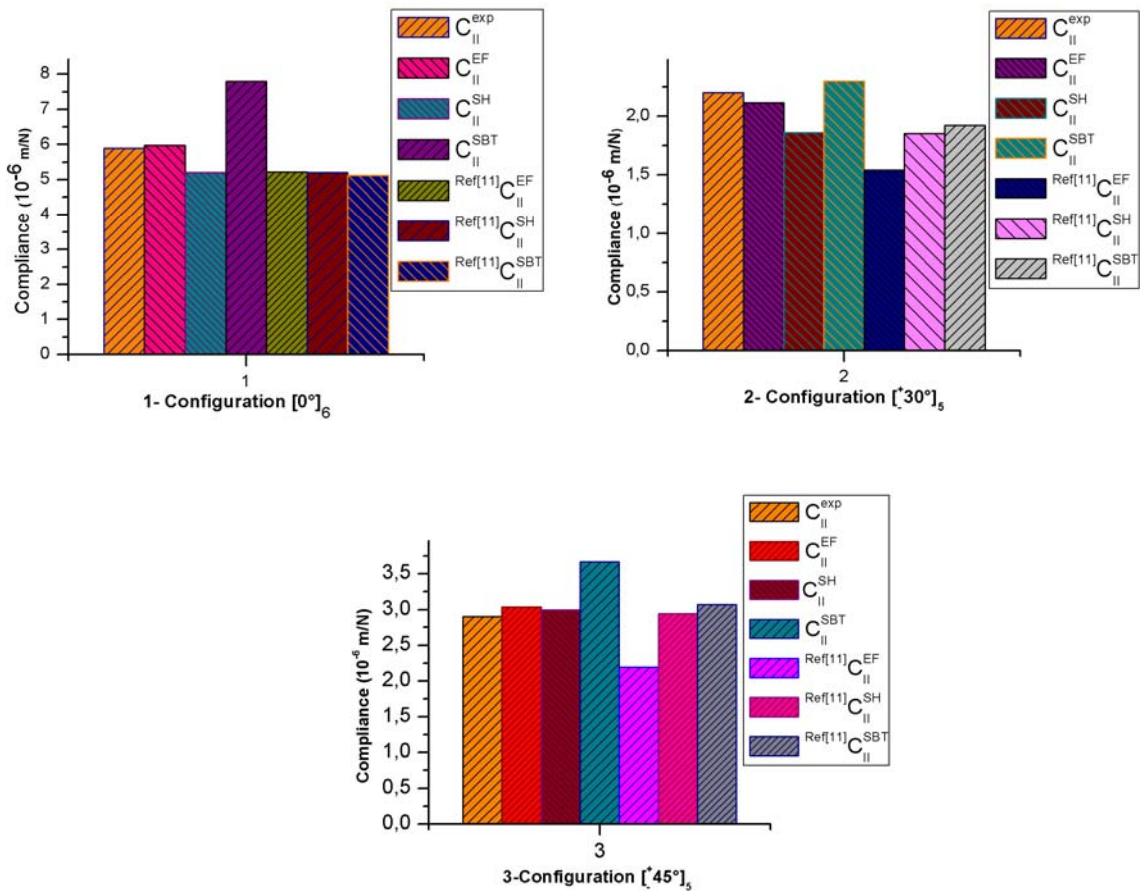


Fig.(V-8) : Diagramme de Compliance.

Pour la deuxième configuration  $[\pm 30]_5$ , on observe clairement que les résultats trouvés sont beaucoup mieux que celle de E.E. Thotokoglou et C.D. Vrettos [11], où l'erreur estimée est très faible si on utilise la méthode de fermeture virtuelle de la fissure  $C_{II}^{EF}$  et la deuxième méthode des poutres  $C_{II}^{SBT}$ .

Dans le dernier cas  $[\pm 45]_5$ , la deuxième méthode des poutres  $C_{II}^{SBT}$  nous donne une mauvaise résultats si on le compare avec le résultat numérique de E.E. Thotokoglou et C.D. Vrettos [11].

Une comparaison d'erreurs de calcul est faite entre les valeurs trouvées et les valeurs numériques de E.E. Thotokoglou et C.D. Vrettos [11]. D'après cette comparaison, on constate que l'erreur est très faible par rapport aux erreurs de E.E. Thotokoglou et C.D. Vrettos [11] (fig.(V-9)) ; donc des meilleurs résultats.

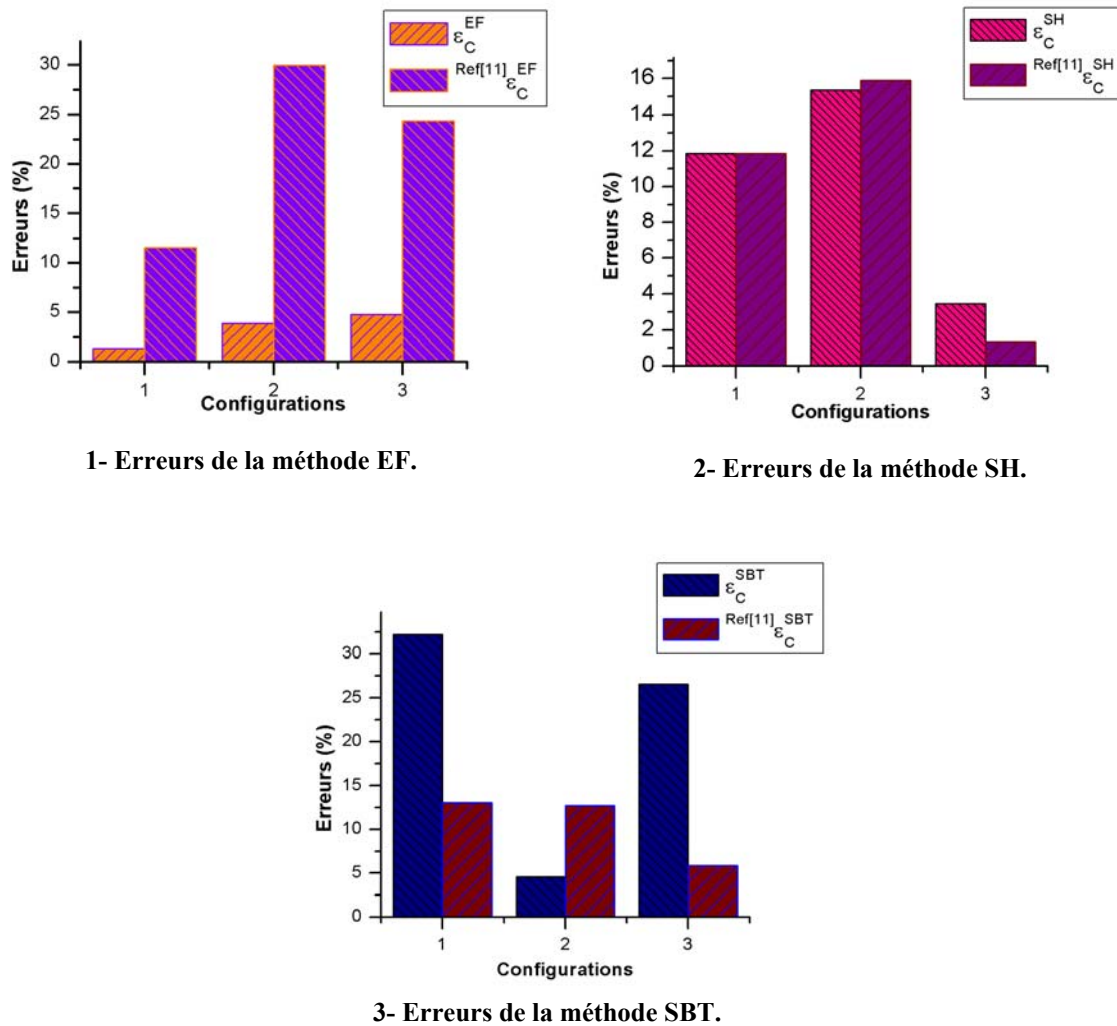


Fig.(V-9) : Erreur estimer de la compliance.

D'après ses résultats on distingue que la méthode de fermeture virtuelle de la fissure  $C_{II}^{EF}$  est plus performante et plus fiable que les autres méthodes

### V-6-3 L'énergie critique de la rupture :

Différentes méthodes sont utilisés pour les calculs de l'énergie critique de rupture, la méthode de fermeture virtuelle de la fissure et les méthodes des poutres. Les résultats sont comparés par les résultats expérimentales de F.Ozdil et all [15] et les résultats numériques de E.E Theotokoglou et C.D Vrettos [11].

- on note que les résultats expérimentales de l'énergie critique porte le terme (Exp) et les résultats numériques de E.E Theotokoglou et C.D Vrettos [11] porte le terme Ref[11].

Le tableau (V-7) montre les résultats trouvés par chaque méthode et pour chaque configuration. L'erreur estimée est calculée par la relation suivante :

$$\varepsilon_G^i = \frac{\Delta G}{G_{IIc}^{Exp}} = \frac{G_{IIc}^i - G_{IIc}^{Exp}}{G_{IIc}^{Exp}} \quad (V - 11)$$

i: les méthodes de calcul de  $G_{IIc}$  .

i= EF méthodes des éléments finis,

i= SH première méthode des poutres,

i= SBT deuxième méthode des poutres.

Énergie ( $J/m^2$ )	Configurations		
	1	2	3
	$[0^\circ]_6$	$[\pm 30^\circ]_5$	$[\pm 45^\circ]_5$
$G_{IIc}^{Exp}$	$496 \pm 135$	$976 \pm 71$	$1485 \pm 158$
$G_{IIc}^{EF}$	386.33	911.94	1490.98
$G_{IIc}^{SH}$	600.93	1022.64	1345
$G_{IIc}^{SBT}$	461.73	798.48	1067.5
$Re f [11] G_{IIc}^{EF}$	669.96	745.80	951.13
$Re f [11] G_{IIc}^{SH}$	650.25	867.73	1253.70
$Re f [11] G_{IIc}^{SBT}$	622.03	848.14	1262.25

**Tableau (V-7):** Energies critiques.

D'après le tableau (V-7) et les figures (V-10), on observe que; les résultats trouvées dans le deuxième et le troisième cas par la méthode de fermeture virtuelle de la fissure  $G_{IIc}^{EF}$  et la première méthode des poutres  $G_{IIc}^{SH}$  sont très proches aux valeurs expérimentales où l'erreur de calcul est très faible. Par contre, dans le premier sauf la deuxième méthode des poutres  $G_{IIc}^{SBT}$  qui nous donne une bonne résultat par rapport à la méthode des E.F ( $G_{IIc}^{EF}$ ) et la première méthode des poutres.

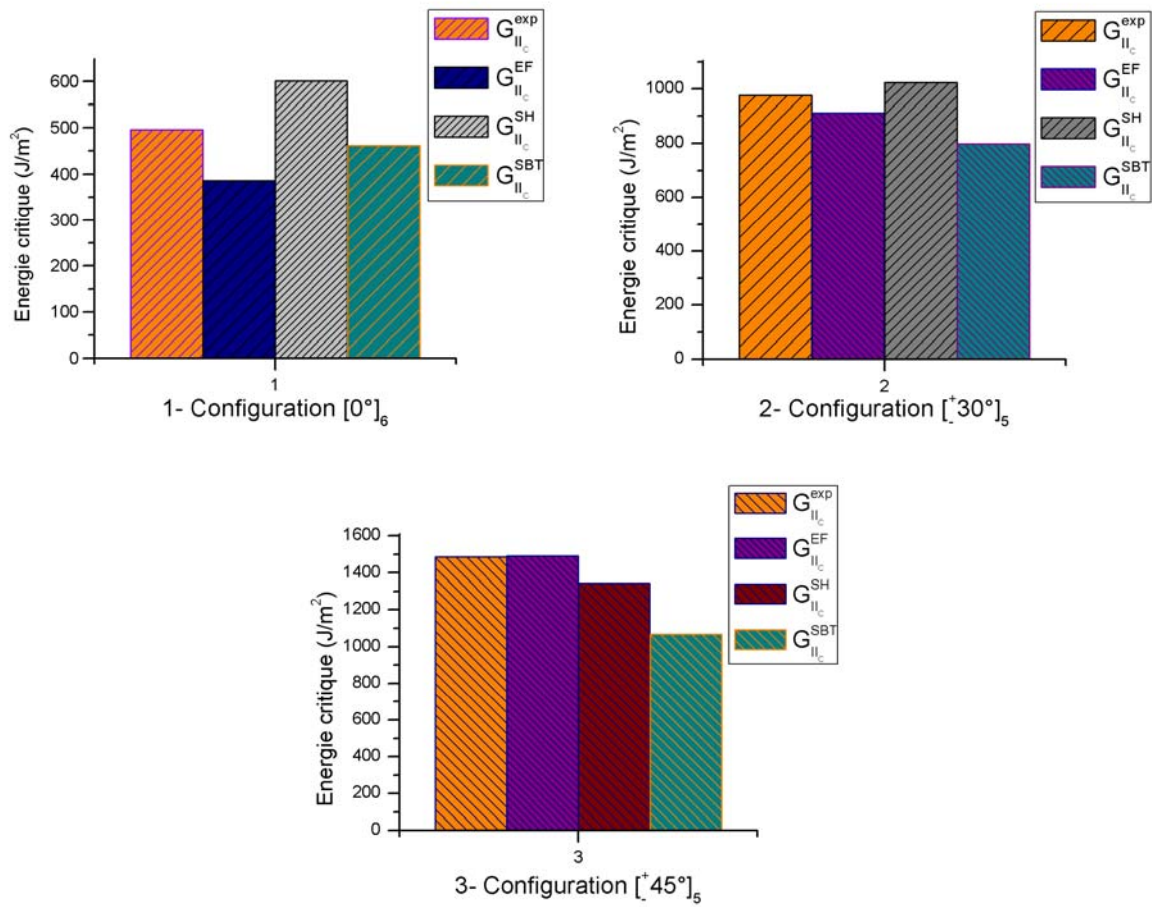


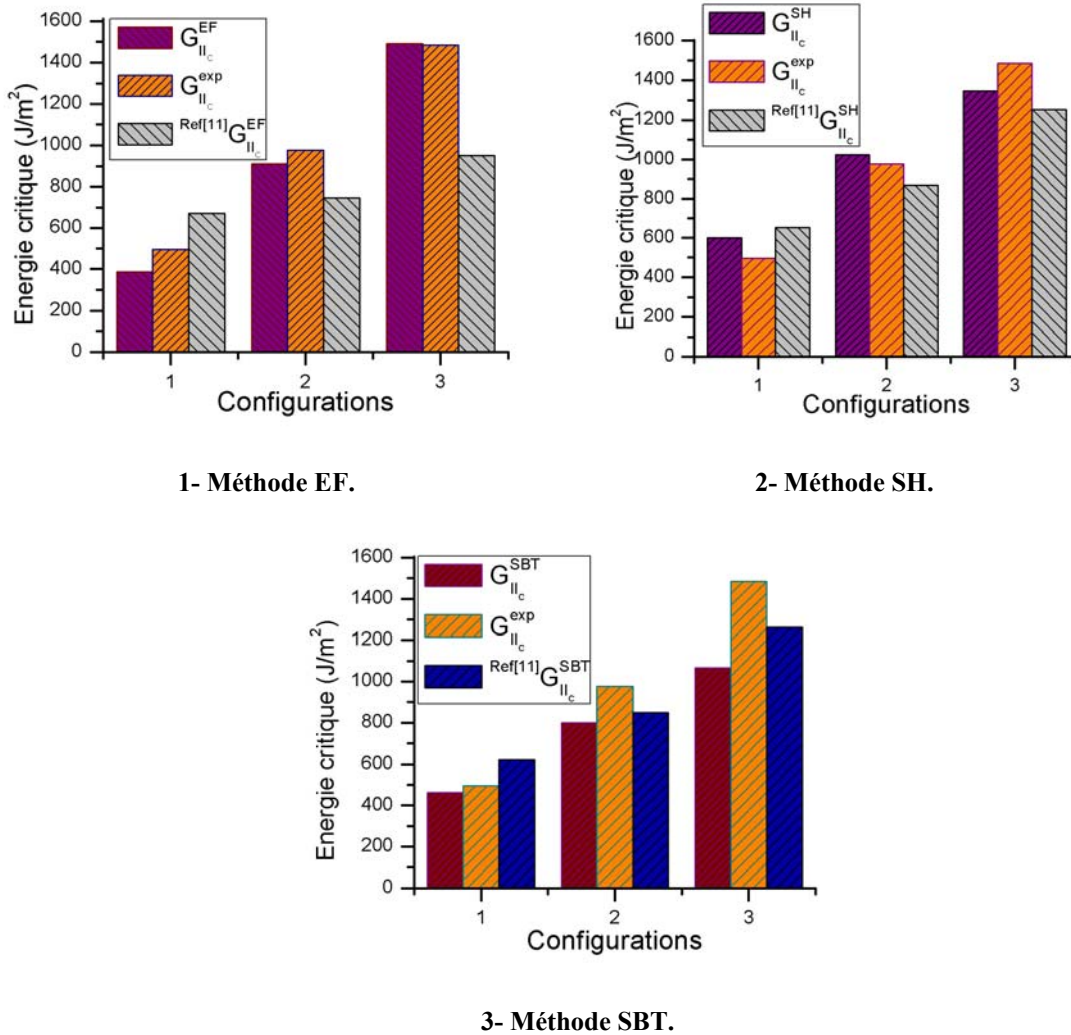
Fig.(V-10): Comparaison de l'énergie critique.

Configurations	1	2	3
erreurs (%)	$[0^\circ]_6$	$[\pm 30^\circ]_5$	$[\pm 45^\circ]_5$
$\mathcal{E}_G^{EF}$	22.11	6.56	0.40
$\mathcal{E}_G^{SH}$	21.15	4.78	9.43
$G_G^{SBT}$	6.91	18.19	28.11
$Re f[11]G_G^{EF}$	35.07	23.58	35.95
$Re f[11]G_G^{SH}$	31.10	11.09	15.57
$Re f[11]G_G^{SBT}$	25.41	13.10	15

Tableau (V-8): Erreurs de calcul pour chaque configuration.



Les figures (V-11) sont des comparaisons entre les résultats numériques trouvées et le les résultats numériques de E.E. Theotokoglou et C.D. Vrettos [11]. D'après ses figures, on observe que les résultats numériques trouvés sont beaucoup meilleures que les résultats numériques de E.E. Theotokoglou et C.D. Vrettos [11] sauf celle de la deuxième méthode  $G_{II_c}^{SBT}$  où nos valeurs sont un peu loin des valeurs expérimentales et valeurs de E.E. Theotokoglou et C.D. Vrettos [11].



**Fig.(V-11):** Comparaison des résultats numériques ( $G_{II_c}^i$  avec  $^{Ref[11]}G_{II_c}^i$ ).

Une comparaison d'erreurs de calcul a été faite avec les valeurs trouvés par E.E. Theotokoglou et C.D. Vrettos [11] (figure V-12).

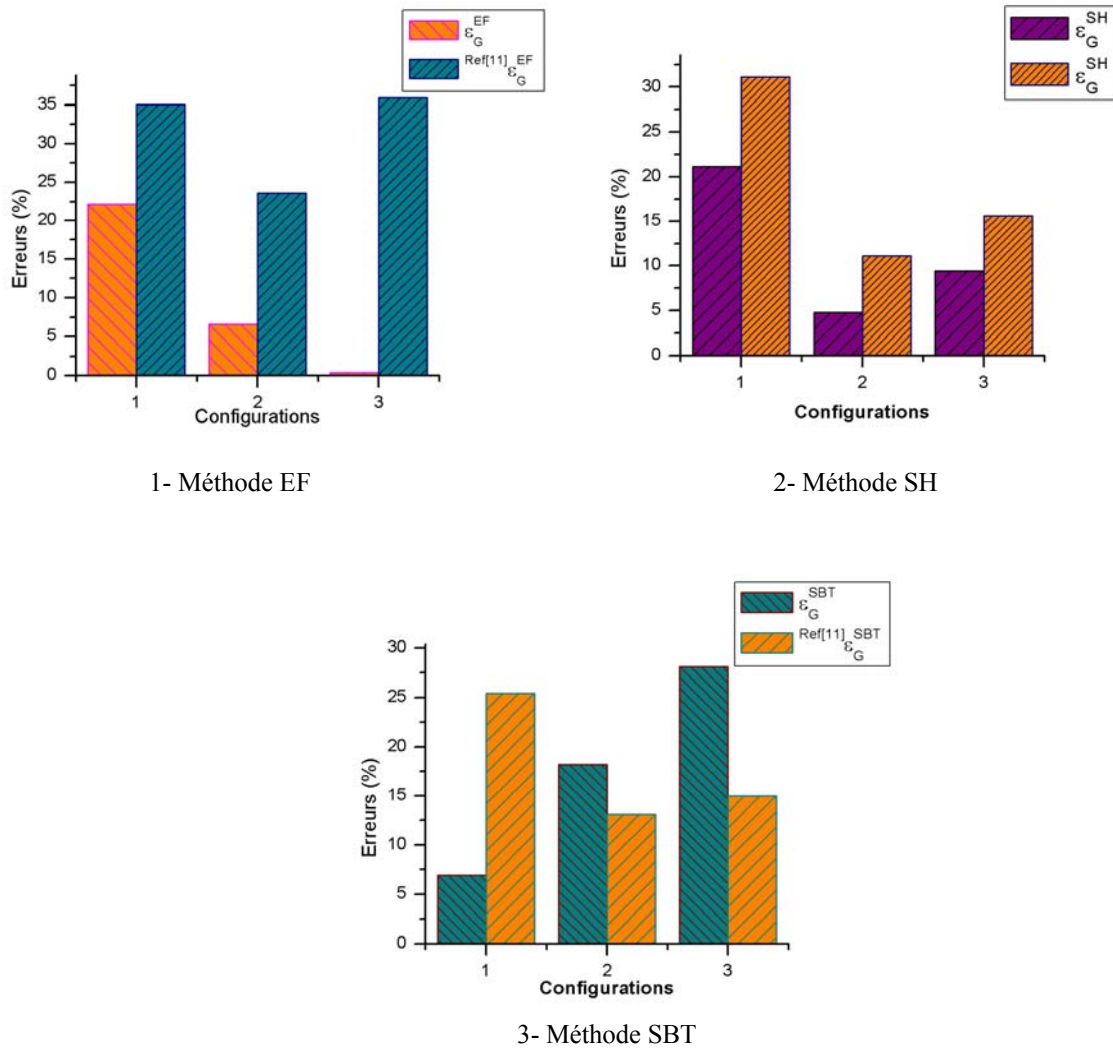


Fig.(V-12): Erreurs de calculs de l'énergie.

On distingue que la méthode de fermeture virtuelle de la fissure ( $G_{IIc}^{EF}$ ) et la première méthode des poutres  $G_{IIc}^{SH}$  nous donnent des résultats beaucoup précis que la deuxième méthode des poutres  $G_{IIc}^{SBT}$ . Si on fait les moyennes d'erreurs de calcul des trois méthodes ( $G_{IIc}^{EF}$ ,  $G_{IIc}^{SH}$ ,  $G_{IIc}^{SBT}$ ), on constate que la méthode de fermeture virtuelle de la fissure (E.F) est très précis et fiable que les autres.

# Conclusion et perspectives

### **Conclusion et perspectives :**

La bibliographie nous a permis de connaître les différentes méthodes de calcul de l'énergie critique de rupture et de la compliance des matériaux composites, et aussi les différentes techniques de modélisation de la fissure, et les appliquées afin de faire une comparaison, validation des résultats expérimentales et numériques.

Le but de ce travail était la modélisation en deux dimensions de délaminage en mode II par la méthode des éléments finis. La méthode utilisée est la méthode de déplacement où l'élément rectangulaire à quatre nœuds a été utilisé.

Ce travail est une validation d'une étude expérimentale [15] et comparaison avec une étude numérique [11]. Une technique de la modélisation de la fissure a été appliquée, la détermination de la force critique est faite par l'augmentation progressive de la charge appliquée. Différentes méthodes sont utilisées pour le calcul de l'énergie critique de la rupture et la compliance.

La technique utilisée pour la modélisation de la fissure nous a donnée des très bons résultats par rapport à la technique utilisée par E.Theotokoglou et C.D Vrettos [11]. Ses résultats valident les hypothèses posées, qui sont :

- ✓ Linéarité de système,
- ✓ Contraintes planes,
- ✓ La fissure se propage lorsque la contrainte de cisaillement atteint la contrainte critique de cisaillement de la résine.

De plus, les différentes méthodes appliquées montrent la performance de la méthode de fermeture virtuelle de la fissure par rapport aux méthodes des poutres.

Nous espérons que d'autres travaux de recherche seront faits sur le délaminage des matériaux composites :

- Soit en étudiant la modélisation 3D de mode II
- Soit la modélisation de mode I et II en 3D en utilisant d'autres éléments afin de comparer les résultats.
- Soit la modélisation mixte de délaminage (Mode I et II) en 2D et 3D.

- Soit on utilisant d'autres approches analytiques (théorie des plaques) [22], soit d'autres approches numériques (méthodes de la pénalisation) [22].

### **Théorie des plaques :**

Une plaque mince de composite stratifiée satisfaisant à l'hypothèse de petits déplacements et de petites déformations est sollicitée en flexion. Le champ de déplacement est d'écrit par la théorie des plaques classiques en respectant l'hypothèse de Kirchhoff [22].

### **Méthode de la pénalisation (P) :**

D'après Irwin, l'énergie nécessaire pour faire avancer la fissure d'une petite quantité  $\Delta a$  est égale au travail nécessaire pour refermer cette fissure d'une même quantité  $\Delta a$ . Alors Rybicki et Kanninen [22] ont proposé une méthode dite "méthode de pénalisation" dans le but de déterminer le taux de restitution d'énergie. Cette méthode consiste à :

- effectuer un calcul pour une longueur de fissure considérée,
- fermer la fissure au niveau de deux nœuds au front de la fissure en introduisant un élément de ressort rigide entre ces nœuds sans modifier les charges extérieures,
- répéter le calcul pour la longueur de la fissure  $(a - \Delta a)$ . Cela permet de déterminer la réaction du ressort rigide aux nœuds de front de la fissure ( $F_{ij}$ ), afin de connaître la force de fermeture de la fissure,
- déterminer la contribution de chaque mode par [22]:

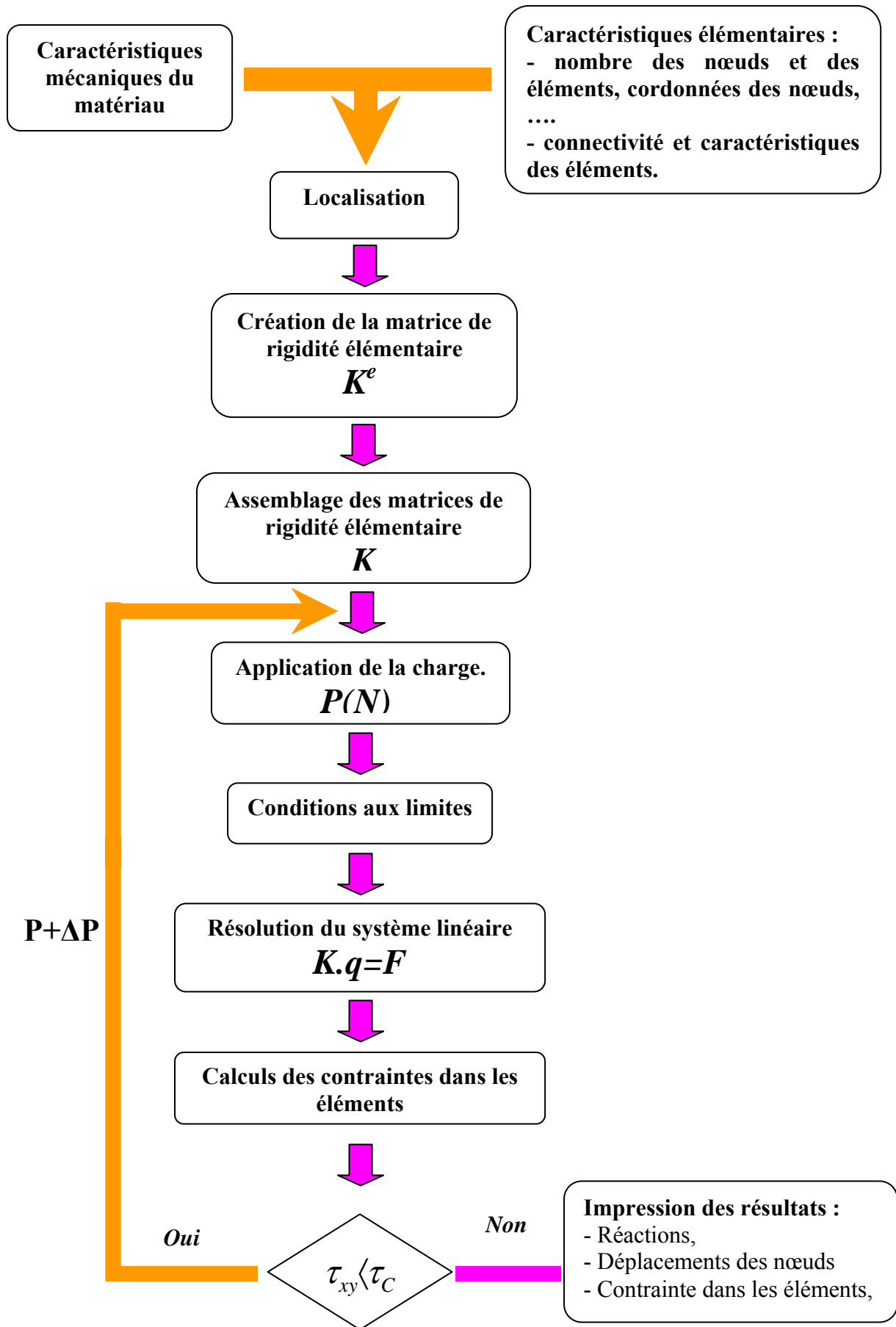
$$G_i = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{F_{ij}^i (U_i^i - U_j^i)}{2\Delta a} \quad (i = I, II, III)$$

Où  $i$  correspond à la direction du repère, et les modes de rupture.

La valeur totale de  $G$  s'obtient en additionnant les différents modes :

$$G_T = G_I + G_{II} + G_{III}.$$

# Annexes



Organigramme détaillé d'un Calcul éléments finis

*Fichier des données (\*.dat)*

Nombre des Noeuds

701

Nombre des éléments

610

Caractéristiques mécaniques du matériau

34700 8500 3440

0.27 0.3

Cordonnées (x,y) des noeuds

0 0

2.5 0

5 0

7.5 0

10 0

11.5 0

13 0

14.5 0

16 0

17.5 0

19 0

. .

. .

. .

. .

22.5 3.65

23 3.65

23.5 3.65

24 3.65

24.5 3.65

Conditions aux limites

0 1

0 0

0 0

0 0

0 0

. .

. .

. .

. .

0 0

0 0

0 0

0 0

0 0



Nombres des noeuds chargés

1

Nœud ou la charge a été appliquée.

657

Connectivité des éléments et orientation

1	124	2	123	-30
2	123	3	122	-30
3	122	4	121	-30
4	121	5	120	-30
5	120	6	119	-30
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
616	625	615	626	30
617	624	616	625	30
618	623	617	624	30
619	622	618	623	30
620	621	619	622	30

Largeur de la poutre.

20.000

Contrainte de rupture, élément,  $\Delta P$ , Valeur de la charge

-400 347 1 1085.59

*Fichier des résultats (\*.dat)*

La valeur de F = 1085.590000

## Déplacements des noeuds

DDL	U	V
1	.2380909000	.0000000000
2	.2358636000	.2845200000
3	.2312464000	.5587159000
4	.2243255000	.8262183000
5	.2146806000	1.0822800000
.	.	.
.	.	.
.	.	.
697	-.0472984600	2.0453800000
698	-.0416897000	2.0686510000
699	-.0357933800	2.0906150000
700	-.0294081800	2.1113980000
701	-.0220900400	2.1310710000

## Réactions dans les noeuds

noeud	Rx(N)	Ry(N)
1	.000	-488.142
62	.000	-504.427

element	1		
noeud	sigmax	sigmay	sigmaxy
1	-22.9097	29.6487	4.0430
2	-4.2787	30.8809	-.2768
3	-32.9587	-7.5700	10.2553
4	-14.3277	-6.3378	5.9356
element	2		
noeud	sigmax	sigmay	sigmaxy
1	-66.7340	-9.8038	-3.9505
2	-34.8803	-7.6971	-2.7849
3	-64.0225	.2387	6.6708
4	-32.1689	2.3454	7.8364
element	3		
noeud	sigmax	sigmay	sigmaxy
1	-96.5782	-1.9145	-2.5396
2	-58.6548	.5937	-2.5517
3	-96.6065	-2.0191	10.1057
4	-58.6830	.4891	10.0936

Annexes.

---

element 4  
noeud sigmax sigmay sigmaxy  
1 -135.1046 -4.5653 -5.6361  
2 -82.6434 -1.0956 -5.4195  
3 -134.6007 -2.6991 11.8567  
4 -82.1395 .7706 12.0733

element 5  
noeud sigmax sigmay sigmaxy  
1 -177.5056 -5.5367 -4.4280  
2 -103.2026 -.6224 -4.2025  
3 -177.1908 -4.3708 10.4374  
4 -102.8878 .5435 10.6630  
. . .  
. . .  
. . .

element 606  
noeud sigmax sigmay sigmaxy  
1 -.1019 -.0012 .0028  
2 -.1683 -.0056 .0028  
3 -.1019 -.0012 -.0105  
4 -.1683 -.0056 -.0105

element 607  
noeud sigmax sigmay sigmaxy  
1 -.0685 -.0045 .0044  
2 -.1157 -.0077 .0051  
3 -.0669 .0011 -.0113  
4 -.1142 -.0020 -.0107

element 608  
noeud sigmax sigmay sigmaxy  
1 -.0334 .0033 -.0041  
2 -.0570 .0018 -.0048  
3 -.0349 -.0023 -.0120  
4 -.0585 -.0039 -.0126

element 609  
noeud sigmax sigmay sigmaxy  
1 -.0136 -.0064 -.0049  
2 -.0015 -.0057 -.0036  
3 -.0105 .0049 -.0009  
4 .0015 .0057 .0005

element 610  
noeud sigmax sigmay sigmaxy  
1 .0004 -.0028 .0006  
2 .0045 -.0025 .0003  
3 -.0004 -.0056 .0020  
4 .0038 -.0053 .0017

element sigmax sigmay sigmaxy  
1 -18.6187 11.6555 4.9893

element sigmax sigmay sigmaxy  
2 -49.4514 -3.7292 1.9430

**Annexes.**

---

element	sigmax	sigmay	sigmaxy
3	-77.6306	-.7127	3.7770
element	sigmax	sigmay	sigmaxy
4	-108.6221	-1.8973	3.2186
element	sigmax	sigmay	sigmaxy
5	-140.1967	-2.4966	3.1175
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
element	sigmax	sigmay	sigmaxy
606	-.1351	-.0034	-.0039
element	sigmax	sigmay	sigmaxy
607	-.0913	-.0033	-.0031
element	sigmax	sigmay	sigmaxy
608	-.0459	-.0003	-.0084
element	sigmax	sigmay	sigmaxy
609	-.0060	-.0004	-.0022
element	sigmax	sigmay	sigmaxy
610	.0021	-.0040	.0012

nombre d'iterations = 1 F= 1085.590000

Forces nodales dans les noeuds de l'élément			1
Noeuds	fx	fy	
1	59.736110	-488.143400	
2	212.096300	415.298900	
3	-309.201100	-94.632060	
4	37.367890	167.474300	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			2
Noeuds	fx	fy	
1	395.435200	122.303800	
2	326.559800	-150.675300	
3	-492.579900	64.154450	
4	-229.409700	-35.787280	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			3
Noeuds	fx	fy	
1	571.111000	-10.211510	
2	562.300200	-44.939820	
3	-759.959100	45.839040	
4	-373.448900	9.298027	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			4
Noeuds	fx	fy	
1	849.185800	31.963260	
2	736.690900	-78.976990	
3	-1010.121000	62.877110	
4	-575.758100	-15.895280	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			5
Noeuds	fx	fy	
1	1104.242000	17.884360	
2	942.629900	-63.400760	

Annexes.

---

3	-1197.765000	57.014690	
4	-849.105500	-11.487470	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			606
Noeuds	fx	fy	
1	9.284186E-01	5.112766E-02	
2	1.038426	-3.228687E-02	
3	-8.177232E-01	2.061318E-02	
4	-1.154981	-7.100533E-02	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			607
Noeuds	fx	fy	
1	6.193455E-01	1.090870E-01	
2	7.054458E-01	-1.283996E-01	
3	-4.661880E-01	3.383222E-02	
4	-8.654393E-01	-9.317407E-02	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			608
Noeuds	fx	fy	
1	4.872461E-01	1.961477E-02	
2	1.923573E-01	8.859961E-02	
3	-6.442760E-02	-5.376706E-02	
4	-6.044336E-01	-7.047954E-02	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			609
Noeuds	fx	fy	
1	1.356250E-01	3.694809E-02	
2	-4.267905E-02	-5.552968E-02	
3	-2.470377E-02	-7.968238E-02	
4	-6.531247E-02	-1.139619E-02	
Forces nodales dans les noeuds de l'élément			610
Noeuds	fx	fy	
1	-3.159505E-02	6.893162E-02	
2	3.975752E-03	-1.134913E-01	
3	-2.448356E-02	1.041348E-01	
4	5.503255E-02	-1.066132E-01	

# Références Bibliographiques

## Références Bibliographiques.

---

- [01] A.ZEGHLOUL; Conceptions fondamentaux de la mécanique de la rupture, Note de DEA Mécanique-Matériaux-Structures-Procédés, Université de Metz, France, 2004.
- [02] P.ODRU, Calcul et Conception des structures composites, Technique de l'ingénieur, partie A 7 792.
- [03] D.GAY, Matériaux composites, HERMS, Paris, 1989.
- [04] J.LEMAITRE et J.L.CHABOCHE, Mécanique des matériaux solides, Dunod, Paris, 1985.
- [05] N.BAHLOULI, Comportement mécanique en température du pli élémentaire d'un composite stratifié carbone/époxy, Thèse de doctorat, université de strass burg, Janvier 1994.
- [06] Y.DJEBLOUN, Etude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites, mémoire de Magistère, Université Mohamed Khider, Biskra, 2004.
- [07] M.HECINI, Etude des mécanismes de délaminage dans les composites stratifiés carbone/époxy, Mémoire de DEA, université de Compiègne, 1988.
- [08] L.TOUBAL, Influence de l'orientation des plis et de la direction de propagation sur les seuils de taux de restitutions d'énergie en mode I et II, Mémoire de DEA, Université de Toulouse, 2001.
- [09] D.FRANÇOIS, A.PINEAU et A.ZAOUI, Comportement mécanique des matériaux, HERMES, Paris, 1995.
- [10] F.DUCEPT, P.DAVIES et D.GAMBY, An experimental study to validate tests used to determine mixed mode failure criteria of glass/epoxy composite, Composite part A 28A (1997) 719-729.
- [11] E.E.THEOTOKOGLU, C.D.VRETTOS, A finite element analysis of angle ply laminate end notched flexure specimens, Composite structures, 2005.
- [12] B.R.K.BLACKMAN, A.J.KINLOCH et M.PARASCHI, The determination of the mode II adhesive fracture resistance  $G_{IIc}$  of structural adhesive joints: an effective crack length approach, Engineering fracture mechanics, Part 72 (2005) 877-897.
- [13] A.AGRAWAL, P.Y.BENJAR, Analysis of specimen thickness effect on interlaminar fracture toughness of fibre composites using finite element models, Composites science and technology, Part 63 (2003) 1393-1402.

## Références Bibliographiques.

---

- [14] H.MIYAGAWA, C.SATO et K.IKEGAMI, Mode II interlaminar fracture toughness of multidirectional carbon fiber reinforced plastics cracking on 0//0 interface by Raman spectroscopy, *Materials science and engineering, Part A* 308 (2001) 200-208.
- [15] F.OZDIL, L.A.CARLSSON et P.DAVIES, Beam analysis of angle ply laminate end notched flexure specimens, *Composites science and technology, Part 58* (1998) 1929-1938.
- [16] S.F.HWANG, S.M. HUANG, Post buckling behavior of composite laminate with two delaminations under uniaxial compression, *Composite structures, Part 68* (2005) 157-165.
- [17] R.RIKARDS, Interlaminar fracture behavior of laminated composites, *Computers and structures, Part 76* (2000) 11-18.
- [18] J.F.IMBERT, *Analyse des structures par éléments fins*, CEPADUES, 1984.
- [19] A.BRIBECHE, *Analyse par la méthode des éléments finis du délaminage des matériaux composites stratifiés*, mémoire de Magistère, Université de Batna, 2002.
- [20] Y.CHEVALIER, *Critère de rupture des composites*, technique de l'ingénieur, Partie A 7 755.
- [21] J.F.CARON, R.P.CARREIRA et A.D.DIAZ, *Critère d'initiation de délaminage dans les stratifiés*, *Mécanique des solides et des structures, Série II b p* 1291-1296, 1999.
- [22] XIAO-JING GONG, *Rupture interlaminaire en mode mixte I+II de composites stratifiés unidirectionnels et multidirectionnels verre/époxy*. Thèse de doctorat, université de technologie de Compiègne, Mars 1992.



## **Résumé :**

L'excellent comportement des matériaux composites sous sollicitation mécanique, fait un sérieux concurrent face aux matériaux traditionnels. Néanmoins le type de matériau ne peut échapper aux différentes causes de dégradation qui provoquent son endommagement progressif jusqu'à la défaillance totale de la structure. Les défauts interlaminaires induits au cours de la mise en œuvre ou pendant la sollicitation constituent la principale source de ses dégradations et limitent ainsi l'utilisation des ces matériaux performants. Ces défauts provoquent des ruptures interlaminaires qui se traduisent par une séparation des couches connues sous le nom « le délaminage ».

Dans cette étude une analyse de délaminage en mode II d'un composite stratifié a été présentée. Une technique de modélisation de la fissure a été successivement appliqué dans l'essai ENF ( End Notched Flexure) pour le calcul de la compliance et l'énergie critique de rupture dans les interfaces  $\theta/-\theta$ . Cette analyse est basée sur deux théories, la théorie des poutres et la théorie de la fermeture virtuelle de la fissure (EF). La performance de la méthode des éléments finis a été montrée avec succès dans une étude de validation des résultats expérimentales et une comparaison avec des résultats numérique de la bibliographie.

**Mots Cles :** Matériaux composites, Comportement des matériaux composites, Mode de rupture, Délaminage, Calcul de l'énergie critique, Compliance, Méthode des Éléments finis, Essai End Notched Flexure, Modélisation de délaminage.

## **Abstract:**

The excellent behaviour of the composite materials under mechanical solicitation faced a serious competitor the traditional materials. Nevertheless the type of material cannot escape the different reasons of deterioration that provoke its progressive damage until the total failing of the structure. The shortcomings induced inter laminar during the setting in work or during the solicitation constitute the main source of its deteriorations and limit the use of these effective materials. These shortcomings provoke the fracture inter laminar that results in a separation of the layers knew under the name «the delamination».

In this study an analysis of delamination in Mode II of a composite laminate has been presented. A technique of modelling of the crack has been applied successively in the ENF test (End Notched Flexure) for the calculation of the compliance and the energy release rate of fracture at the  $\theta/-\theta$  interfaces. This analysis is based on two theories, the beams the theory and the virtual crack closure theory (FE). The performance of the finite elements method (FE) has been shown with success in a study of validation of the experimental results and a comparison with numerical results of the bibliography.

**Keywords:** Composite materials, Behaviour of the composite materials, Fracture mode, Delamination, Calculation of the critical energy, Compliance, finite elements method, End Notched Flexure specimen, Modelling of delamination.

## **ملخص:**

إن التصرف الممتاز للمعادن المختلطة تحت تأثير قوى ميكانيكية يشكل منافسة جديّة مع المعادن التقليدية. إلا أن هذا النوع من المعادن لا يمكنه التخلص من أسباب التقهقر المختلفة التي تتسبب في ضرره التدريجي حتى التآكل الكلي للهيكلة. إن العيوب المتواجدة بين الصفائح و الناتجة عن التصنيع أو خلال التعرض لقوي، تشكل المنبع الرئيسي لهذا التقهقر و الذي في حد ذاته ينفص و يحدد من استعمالات هذه المعادن الجيدة. هذه العيوب تسبب التآكل بين الصفائح و التي يتم عن طريق فصلها. تسمى هذه الظاهرة " التآكل بالتورق".

في هذه الدراسة، تحليل للتآكل بالتورق بالكيفية الثانية للمعادن المختلطة وضحت، تقنية لتشكيل الشق طبقت بنجاح في تجربة ENF لحساب الصلابة و الطاقة الحرجة للتآكل بين الصفائح  $\theta/-\theta$ . ركزت هذه الدراسة على نظريتين: نظرية العوارض و طريقة الانغلاق المطلق للشق (طريقة العناصر المنتهية). إن دقة طريقة العناصر المنتهية قدمت بنجاح في دراسة إثبات للنتائج التجريبية و مقارنة لنتائج رقمية من المراجع.