



**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MOHAMED KHEIDER -BISKRA**  
**FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR**  
**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

## ***MEMOIRE***

Présenté pour L'obtention du Diplôme de

## ***MAGISTER***

**Spécialité: Mécanique**

**Option :Construction Mécanique**

**PAR**

**BOUSSEM FAYCAL**

**INVESTIGATION DE L'APPROCHE EN DEFORMATION  
DANS LA MODELISATION DES STRUCTURES**

**Soutenu le :12/12/2005**

**Devant le jury :**

<b>Prof. BENMEBAREK. S</b>	<b>Prof</b>	<b>Président</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr. BELOUNAR .L</b>	<b>M.C</b>	<b>Rapporteur</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr . HECINI . M</b>	<b>M.C</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr . BELARBI .M.T</b>	<b>M.C</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Biskra</b>

## **REMERCIEMENTS**

J'exprime ma profonde reconnaissance à mon encadreur Monsieur :L. Belounar pour leur soutien constant et leur aide qu'il m'a apporté tout le long de cette étude.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur S.Benmebarek pour avoir présider le jury ainsi que les membres :Dr . Hecini et Dr . Belarbi pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude en acceptant de participer à ce jury.

Je remercie Mr. Boukerche Hichem pour son aide et ses encouragements durant mes études.

# DEDICACE

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents

Mes frères et mes sœurs

Toute ma famille .

Tous mes amis surtout de Rouached.

# TABLE DES MATIERES

## Chapitre 1.

### Introduction Générale

<b>1.1. Introduction</b> .....	01
<b>1.2. L'objectif et plan du mémoire</b> .....	04

## Chapitre 2.

### Généralités sur la méthode des éléments finis

<b>2.1. Introduction</b> .....	06
<b>2.2. Rappel des notions de la mécanique des milieux continus</b> .....	06
2.2.1. Définitions.....	06
2.2.2. Les équations de compatibilité.....	08
2.2.3. Loi de comportement - Loi de Hooke .....	09
2.2.4. Matériau isotrope.....	09
<b>2.3. Procédure d'analyse par éléments finis</b> .....	09
2.3.1. Formulation de la matrice de rigidité élémentaire.....	10
<b>2.4. Forces nodales équivalentes</b> .....	18
<b>2.5. Classification des traitements</b> .....	19
2.5.1. Problème linéaire.....	19
<b>2.6. Modèles d'éléments finis</b> .....	20
2.6.1. Champs interpolés.....	20
2.6.2. Modèle déplacement.....	20
2.6.3. Modèle équilibre ou contrainte.....	20
2.6.4. Modèle mixte.....	21
2.6.5. Modèle hybride.....	21
2.6.6. Modèle déformation.....	22
2.6.6.1. Avantage du modèle en déformation.....	22
2.6.6.2. Des éléments finis basés sur le modèle en déformation.....	24

<b>2.7. Critères de convergence</b> .....	26
2.7.1. Introduction.....	26
2.7.2. La convergence h.....	26
2.7.3. Convergence p.....	26
2.7.4. Critères de convergence – Point de vue physique.....	27
2.7.4.1. Critère 1 : continuité, conformité ou compatibilité cinématique.....	28
2.7.4.2. Critère 2 : Des déformations constantes ou de complétude.....	29
2.7.5. Assouplissement des critères et Patch test.....	29
2.7.5.1. Élément non –conforme.....	29
2.7.5.2. Convergence des éléments finis non conformes et patch test.....	31
2.7.6. Critère de convergence – Un rien plus mathématique.....	31
2.7.6.1. Critère 1.....	32
2.7.6.2. Critère 2.....	32

## **Chapitre 3.**

### **Théories des coques**

<b>3.1. Introduction</b> .....	33
<b>3.2. Les coques en général</b> .....	33
3.2.1. Hypothèses cinématiques.....	34
3.2.1.1. Hypothèse de Love – Kirchhoff.....	35
3.2.1.2. Hypothèse de Mindlin – Reisner.....	35
<b>3.3. Théories des coques minces</b> .....	37
3.3.1. Théorie de love.....	37
3.3.2. Élément de coque.....	37
3.3.3. Hypothèses.....	38
3.3.3.1. Hypothèses de linéarisation.....	38
3.3.3.2. Hypothèse des structures minces.....	39
3.3.3.3. Hypothèse de faible épaisseur.....	39
3.3.4. L'évolution de l'analyse des coques minces par éléments finis.....	41

<b>3.4. Coques cylindriques</b> .....	44
3.4.1. Géométrie.....	44
3.4.2. Les relations de la théorie classique de love (la première approximation de la théorie des coques).....	44
3.4.2.1. Equations d'équilibre.....	44
3.4.2.2. Cinématique.....	45
3.4.2.3. Loi constitutive.....	45
3.4.3. Théorie de Koiter – Sander.....	47
<b>3.5. Coques surbaissées</b> .....	49
3.5.1. Géométrie.....	49
3.5.2. Coques surbaissées en coordonnées curvilignes (Théorie de Donnell).....	50

## Chapitre 4.

### Formulation des éléments finis cylindriques étudiés

<b>4.1. Introduction</b> .....	52
<b>4.2. Élément de Sabir et Ashwell [ASH 72]</b> .....	52
4.2.1. Equations Déformations - Déplacements utilisées.....	53
4.2.2. Equations de compatibilité.....	54
4.2.3. Relations constitutives.....	55
4.2.4. Degrés de liberté utilisés.....	56
4.2.5. Champ des déplacements.....	57
4.2.6. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ .....	58
4.2.7. Vecteur des charges équivalentes.....	59
<b>4.3. L'élément Charchafchi et Sabir [CHA 82]</b> .....	60
4.3.1. Calcul des fonctions des déplacements.....	60
4.3.2. Equations d'équilibre .....	62
<b>4.4. Les éléments de Bull [BUL 84]</b> .....	64
4.4.1. La première variante.....	64
4.4.2. La deuxième variante.....	65

4.4.3. La troisième variante.....	66
4.4.4. La quatrième variante.....	67
<b>4.5. Elément de Djoudi et Bahai [DJO 03].....</b>	<b>69</b>
4.5.1. Equations déformation – déplacement.....	69
4.5.2. Equations de compatibilité.....	70
4.5.3. Degrés de liberté utilisés.....	70
4.5.4. Champ des déplacement.....	71
<b>4.6. Etude des éléments basés sur le modèle en déplacement .....</b>	<b>72</b>
<b>4.7. L'élément de Sabir et Lock [SAB 72] .....</b>	<b>73</b>
4.7.1. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire.....	74

## Chapitre 5.

### Validation numérique des éléments finis formulés

<b>5.1. Introduction .....</b>	<b>75</b>
<b>5.2. Cylindre pincé court à bords libres.....</b>	<b>75</b>
<b>5.3. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides.....</b>	<b>85</b>
<b>5.4. Panneau cylindrique soumis à son poids propre.....</b>	<b>93</b>
<b>5.5. Poutre console courbe soumise à des charges statiques.....</b>	<b>97</b>
<b>Conclusions Générale.....</b>	<b>101</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>103</b>
<b>Annexe :Les matrices <math>[K_0]</math> des éléments étudiés .....</b>	<b>106</b>

## NOTATIONS

a	longueur du coté droite de l'élément coque
b	longueur du coté courbé de l'élément coque
[B]	matrice de déformation
[C]	matrice de transformation
[D]	matrice d'élasticité
[K] <sub>e</sub>	matrice de rigidité élémentaire
[K]	matrice de rigidité globale
E	module d'Young
F	force
N <sub>x</sub> , N <sub>y</sub> , N <sub>xy</sub>	efforts normales directes
M <sub>x</sub> , M <sub>y</sub> , M <sub>xy</sub>	moments de flexion internes
V <sub>x</sub> , V <sub>y</sub>	effort tranchant
R	rayon de la coque
t	épaisseur de la coque
u, v, w	les déplacements suivant le repère curviligne x, y, z
U, V, W	les déplacements suivant le repère cartésien X, Y, Z
w <sub>x</sub> , w <sub>y</sub> , w <sub>xy</sub>	$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$
Q	la charge de gravité
ε	déformation
ε <sub>x</sub> , ε <sub>y</sub> , ε <sub>xy</sub>	déformations directes
α	l'angle entre la normale central de l'élément et l'horizontale
α <sub>i</sub>	constantes utilisées dans la fonction de déplacement
2β	l'angle sous – tendu par l'élément
Φ	le co - ordonnée angulaire y/R
ν	coefficient de Poisson
in	1 inch = 0.025 m
lb	1 Pound = 0.454 kg
ft	1 foot = 12 inch = 0.30480 m



## Liste des figures

### Chapitre 2 :

<b>Figure 2.1 :</b>	Un milieu continu soumis à des forces de volume et de surface.....	07
<b>Figure 2.2 :</b>	Relations entre déplacements, déformations et contraintes.....	08
<b>Figure 2.3 :</b>	Subdivisions toujours plus poussé pour étudier la convergence.....	27
<b>Figure 2.4 :</b>	Augmentation du degré de l'interpolation pour étudier la convergence $p$ ●: nombre fixe d'inconnues ( $p=1$ ) ◆ : nombre variable $k$ d'inconnues ( $k=1, p=2 ; k=2 ; p=3 ; \dots$ ).....	27
<b>Figure 2.5 :</b>	Groupe de trois éléments finis plans : (a) configuration initiale ; (b) configuration déformée. Les éléments (1) et (2) sont conformes le long de ABC si les trois nœuds et les deux courbes coïncident exactement dans l'une et l'autre configuration (par exemple : paraboles) ; entre les éléments (2) et (3), la continuité est violée le long de DEF si les deux nœuds D et F de l'élément (3) ne peuvent définir q'une droite.....	28
<b>Figure 2.6 :</b>	Mode rigide : (a) configuration initiale : (b) configuration déformé : BCD se déplace sans se déformer (rotation rigide).....	30
<b>Figure 2.7 :</b>	Déformations constantes : (a) essai de traction : $\varepsilon_x = \text{cste}$ ; (b) flexion pure entre B et C. $\psi = \text{cste}$ .....	30
<b>Figure. 2.8</b>	Maillage en quadrilatères , triangles ou rectangles en vue d'un patch test.....	31

### Chapitre 3 :

<b>Figure 3.1 :</b>	Définition des coques : (a) coque cylindrique épaisse ; (b) coque cylindrique mince.....	34
<b>Figure 3.2 :</b>	Élément coque dans les lignes de courbure (vue arrière).....	38
<b>Figure 3.3 :</b>	Coque cylindrique.....	46
<b>Figure 3.4 :</b>	Les efforts de l'élément coque.....	47
<b>Figure 3.5 :</b>	Surface moyenne d'une coque surbaissée.....	49

## Chapitre 4 :

<b>Figure 4.1 :</b>	La géométrie de l'élément coque ( $\Phi=y/R$ ).....	54
<b>Figure 4.2 :</b>	Degrés de liberté de l'élément coque.....	56
<b>Figure 4.3 :</b>	Charges équivalentes d'un élément coque cylindrique.....	59

## Chapitre 5 :

<b>Figure 5.1 :</b>	Cylindre pincé court à bords libres.....	76
<b>Figure 5.2 :</b>	Maillage 2x2 pour un cylindre pincé épais court avec bords libres.....	76
<b>Figure 5.3 :</b>	Convergence du déplacement $W_c$ pour un cylindre épais pincé court à bords libres ; ( $h_1=0.094$ in).....	78
<b>Figure 5.4 :</b>	Convergence du déplacement $W_c$ de l'élément [CHA 82] avec et sans coefficient de Poisson pour un cylindre épais pincé court à bords libres ( $h_1=0.094$ in) .....	79
<b>Figure 5.5 :</b>	Convergence du déplacement $W_c$ pour un cylindre mince pincé court à bords libres ; ( $h_2=0.01548$ in).....	81
<b>Figure 5.6 :</b>	Convergence du déplacement $W_c$ de l'élément [CHA 82] avec et sans coefficient de Poisson pour un cylindre mince pincé court à bords libres ( $h_2=0.01548$ in).....	82
<b>Figure 5.7 :</b>	Cylindre pincé avec diaphragmes rigides .....	85
<b>Figure 5.8 :</b>	Maillage 3 x 4 pour un cylindre pincé avec diaphragmes rigides.....	86
<b>Figure 5.9 :</b>	Convergence de $\overline{w_c}$ pour un cylindre pincé avec diaphragmes .....	87
<b>Figure 5.10 :</b>	Convergence de $\overline{U_d}$ pour un cylindre pincé avec diaphragmes .....	88
<b>Figure 5.11 :</b>	Déplacement le long de DC , BC et AD ( $R/h=100$ ) de l'élément [ASH 72] pour un cylindre pincé avec diaphragmes .....	89
<b>Figure 5.12 :</b>	Convergence de $\overline{N}_y$ (au point C) pour un cylindre pincé avec diaphragmes.....	90
<b>Figure 5.13 :</b>	Distribution des efforts résultants de l'élément [ASH 72] pour un cylindre pincé avec diaphragmes .....	91

<b>Figure 5.14 :</b>	Panneau cylindrique soumis a son poids propre .....	93
<b>Figure 5.15 :</b>	Un quart du panneau cylindrique soumis a son propre poids (un maillage 2x2).....	94
<b>Figure 5.16 :</b>	Forces nodales équivalentes.....	94
<b>Figure 5.17 :</b>	Convergence du déplacement vertical (au point B) pour un panneau cylindrique soumis à son poids propre.....	95
<b>Figure 5.18 :</b>	Poutre console courbe soumise à des charges statiques.....	97
<b>Figure 5.19 :</b>	Maillage 1x6 pour une poutre console courbe.....	98
<b>Figure 5.20 :</b>	Convergence du déplacement $\Delta_z$ dans le cas de la charge dans le plan.....	99

## Liste des tableaux

### Chapitre 5 :

<b>Tableau 5.1 :</b>	Déplacement $W_c$ (in)(au point C) pour un cylindre pincé épais à bords libres( $h_1=0.094$ in) .....	78
<b>Tableau 5.2 :</b>	Déplacement $W_c$ (in) pour un cylindre pincé épais court à bords libres ( $h_2=0.094$ ) de l'élément [CHA 82].....	79
<b>Tableau 5.3 :</b>	Déplacement $W_c$ (in) (au point C) pour un cylindre pincé mince court à bords libres ( $h_2= 0.01548$ in) .....	80
<b>Tableau 5.4 :</b>	Déplacement $W_c$ pour un cylindre mince pincé court à bords libres ( $h_2=0.01548$ ) de l'élément [CHA 82].....	82
<b>Tableau 5.5 :</b>	Effort $\bar{N}_y$ (au point C) pour un cylindre mince avec diaphragmes ( $\bar{N}_y = 18.6$ ).....	90
<b>Tableau 5.6 :</b>	Déplacements à l'extrémité libre suivant les deux axes $z$ et $x$ .....	98

## RESUME

L'objectif de ce travail est la formulation et l'évaluation d'éléments finis basés sur le modèle en déformation pour l'analyse linéaire des coques cylindriques isotropes. Ces éléments sont : l'élément [ASH 72], l'élément [CHA 82], les éléments [BUL 84] et l'élément [SAB 72] qui est basé sur le modèle en déplacement, ces éléments sont des éléments basés sur la théorie des coques profondes et pour la théorie des coques surbaissées, on a choisit l'élément récent [DJO 03]. Ces éléments possèdent seulement des degrés de liberté essentiels. Pour tous les éléments étudiés la matrice de rigidité élémentaire a été évaluée explicitement.

Plusieurs tests relatifs aux coques cylindriques ont été traités pour évaluer les éléments sélectionnés. Ces tests sont : Le test du cylindre pincé avec et sans diaphragmes, le test de la coque cylindrique surbaissée soumise à son poids propre, ce test est plus connu sous le nom de test «du toit de Scordelis – Lo » et le test d'une poutre console courbe isotrope soumise à une charge statique. Les résultats montrent l'efficacité de l'approche en déformation et les bonnes performances de ces éléments basés sur cette approche.

## ABSTRACT

The objective of this work is the formulation and the evaluation of strain based finite elements for the linear analysis of the isotropic cylindrical shells. These elements are: the element [ASH 72 ], the element [CHA 82 ], the elements [BUL 84] and the element [SAB 72 ] which is based on the model in displacement, These elements are based on the deep shells theory and for the shallow shells theory, we choose the recent element [ DJO 03]. These elements have only essential degrees of freedom. For all the studied elements the elementary matrix of rigidity was evaluated explicitly.

Several tests relating to the shells were treated to evaluate the selected elements. These tests are: The pinched cylinder problem with and without diaphragms, the barrel vault problem, this test is more known under the name of test of the roof of " Scordelis - Lo " and the isotropic cantileaver curved beam subjected to a statique head. The results show the effectiveness of the strain approach and the good performances of these elements based on this approach.

[CHA 82] [ASH 72 ] : [SAB 72 ] [BUL 84]  
[ DJO 03]

أجريت عدة إختبارات خاصة لتقييم العناصر المختارة. هذه الإختبارات هي : إختبار الأسطوانة المثقوبة بحاجز وبدونه، إختبار القشرة الأسطوانية الخاضعة لثقلها الذي يعرف تحت إسم إختبار «سقف سكوردليس - لو» و إختبار الكمرة المحدبة الخاضعة لقوة ثابتة. النتائج توضح فاعلية مبدأ التشوه والأداء الجيد لهذه العناصر التي تعتمد على مبدأ التشوه.

### MOTS CLES :

Méthode des éléments finis , Modèle en déformation, Théories des coques, Coques cylindriques.

## **Chapitre 1. Introduction Générale**

### **1.1. Introduction :**

Tout phénomène physique réel, en mécanique de l'ingénieur, est soumis par essence à l'observation directe, à sa représentation en formules ou équations et à l'étude des méthodes de résolution de ces équations. Ces trois opérations correspondent directement aux trois domaines de la mécanique. En premier lieu la mécanique expérimentale qui permet l'observation directe de ces phénomènes physiques en laboratoire. En second lieu la mécanique appliquée qui s'en sert, en vue de les représentées pertinemment en modèle mathématique, c'est la modélisation. Enfin la mécanique numérique qui intervient afin d'étudier les méthodes de résolution de ces modèles ou autrement dit ces équations déduites du domaine précédent.

La résolution par voie numérique de ces équations constitue la base d'une méthode communément appelée Méthode des Eléments Finis (en abrégé M.E.F). L'un des domaines fertiles pour l'application de cette méthode est la mécanique des structures : barres, poutres, plaques et coques.

La méthode des éléments finis est une procédure numérique approximative pour l'analyse des grandes structures. Elle est devenue très connue avec les avancements des calculateurs numériques puisqu'ils permettent aux ingénieurs de résoudre rapidement et efficacement de grands systèmes d'équations. Cette méthode est un outil très utile pour la solution de plusieurs types de problèmes technologique tels que l'analyse des structures, transfert de chaleur et l'écoulement de fluide. Elle est spécialement utilisée dans la conception des armatures d'air, des bateaux, des moteurs électriques, des moteurs de chaleur et du vaisseau spatial.

La méthode des éléments finis est apparue vers 1955, en même temps que les ordinateurs puissants. D'abord appliquée au calcul des structures et solides, elle a pris, dès 1965, une extension fantastique, quand on a réalisé qu'elle représentait, en fait, une méthode

générale de résolution numérique des problèmes aux limites. Tout phénomène physique, dont la modélisation conduit à des équations différentielles avec conditions aux limites, lui devenait accessible : structure, solide, chaleur, fluide, combustion, électromagnétisme, acoustique.

Pour traiter un problème par éléments finis, il existe différentes approches telles que l'approche en déplacement où on propose une approximation du champ de déplacements en supposant qu'il satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément, pour ce faire on choisit une fonction de déplacement permettant de définir l'état de déplacement d'une façon unique. Puis l'approche en contrainte qui consiste à définir un champ de contraintes de façon à assurer l'équilibre de l'élément, puis poser les équations de compatibilités des déplacements et les résoudre pour obtenir les forces. Ensuite l'approche mixte qui est un mélange des deux approches précédentes ce qui a donné naissance au concept d'élément fini hybride.

Enfin l'approche en déformation qui consiste à supposer les déformations de telle sorte que les équations de compatibilité soient satisfaites, ce modèle présente certaines facilités par rapports aux autres formulations, à savoir que deux critères de convergence principaux sont directement reliés aux déformations qu'avec les suppositions des fonctions de déplacements. D'autre part les éléments finis basés sur le modèle en déformation possèdent des degrés de liberté essentiels qui permettent d'éviter les difficultés associées aux degrés de liberté non essentiels [ASH 72], au contraire les éléments liés à un grand nombre de degrés de liberté mènent à un grand nombre d'inconnus. Contrairement aux éléments ordinaires, les composantes du champ des déplacements pour les éléments basés sur l'approche en déformation ne sont pas indépendantes. En outre le champ des déplacements de ses éléments est représenté par des polynômes d'ordre élevé qui permettent d'avoir une convergence rapide aussi bien pour les déplacements que pour les contraintes quand les résultats sont comparés avec les éléments basés sur le modèle en déplacement correspondants, c'est-à-dire, éléments du déplacement qui ont le même nombre total des degrés de liberté [DJO 04].

Le succès de l'application de l'approche en déformation pour le développement des éléments finis nous a poussés à les programmer. La technique adoptée, dans cette programmation, est l'intégration analytique. Le langage utilisé est le Fortran étant donné sa large utilisation dans le domaine du calcul numérique par l'industrie, le monde de la recherche et les milliers de bibliothèques qui ont été développées, testées et validées depuis plus de 30 ans.

Maintenant que se passerait-il si on soumettait quelques éléments basés d'un côté sur le modèle en déformation à différents tests ? Tels que l'élément de [ASH 72], c'est un élément de coque cylindrique rectangulaire à 4 nœuds, ayant 5 degrés de liberté à chaque nœud, puis l'élément de [CHA 82] formulé en hypothèses de Koiter-Sander au lieu des hypothèses de Love-Kirchhoff utilisées dans l'élément précédemment cité, en gardant les mêmes représentations géométriques. Quelle est ensuite la performance des variantes de [BUL 84] qui introduit des réarrangements sur le champ des déformations de l'élément de [ASH 72] pour développer des éléments en flexion. Ces éléments sont basés sur les hypothèses des coques profondes. Or dans le cas des éléments basés sur les hypothèses des coques surbaissées, on choisit l'élément récent de [DJO 03], c'est un élément rectangulaire à quatre nœuds, ayant cinq degrés de liberté dans chaque nœud.

Pour comparer la performance de ces éléments on formule d'un autre côté l'élément basé sur le modèle en déplacement de [SAB 72] ayant les mêmes représentations géométriques de l'élément [ASH 72], cet élément est une version simplifiée de l'élément Cantin [CAN 68] qui a 24 degrés de liberté. On utilise aussi les résultats des tests de quelques différents éléments cités dans la littérature.



## **1.2. L'objectif et plan du mémoire :**

La présente étude a donc pour but de formuler et d'évaluer des éléments finis de coques cylindriques basés sur les deux modèles en déformation et en déplacement procédant par tests appliqués sur les éléments de ces deux approches . Les résultats obtenus, permettront de vérifier la performance numérique de l'approche en déformation surtout lorsqu'il s'agira de les comparer avec les résultats des éléments basés sur le modèle en déplacement et les résultats des autres éléments cités dans la littérature.

Autrement dit, quel serait le niveau de performance de ces éléments sélectionnés ? C'est à dire l'exactitude des résultats (déplacements et contraintes) qui nous mènera à choisir, parmi plusieurs modèles, celui qui satisfera le plus de nombre d'exigence (convergence rapide, bonne précision avec maillage grossier, programmation efficace, dérivation théorique simple et claire...).La réponse à cette question pourrait permettre de mieux comprendre l'approche en déformation.

Le présent travail est reparti selon cinq chapitre, on proposera ,en premier lieu ,une introduction générale où il est question de situer la méthode des éléments finis appliquée au calcul des structures formées de plaques et de coques dans son contexte historique. On citera, en l'occurrence, les différentes approches de cette méthode parmi d'autres l'approche en déformation.

Le deuxième chapitre sera consacré à des généralités sur la méthode des éléments finis où on exposera la procédure de formulation de la matrice de rigidité élémentaire . Ensuite on donnera les différents modèles d'éléments finis en particulier le modèle en déformation qui fera l'objet d'une étude ,en exposant ces avantages par rapport aux autres modèles ainsi les différents éléments basés sur cette approche développés dans la littérature. Enfin on exposera les critères de convergence ayant une grande importance dans la méthode des éléments finis.

Dans un troisième chapitre ,on abordera les théories des coques en particulier les coques minces qui constituent l'un des types de structures les plus difficiles à analyser ,on essayera d'énoncer les différentes théories appliquées aux développement des éléments de

coques .Parmi les différent types des coques on s'intéressera spécialement aux coques cylindriques profondes et surbaissées .

Dans le quatrième chapitre , on donnera la formulation théorique des éléments finis de coques cylindriques basés sur les 2 modèles en déformation et en déplacements ,ils ont 5 degrés de liberté par nœud (trois translations  $u , v , w$  et deux rotations  $\theta_y, \theta_x$ ), ces éléments sont :L'élément de Ashwell et Sabir [ASH 72] , l'élément de Charchafchi [CHA 82] ,les 4 variantes de Bull [BUL 84], l'élément de Djoudi et Bahai [DJO 03] et l'élément de Sabir et Lock [SAB 72] basé sur le modèle en déplacement.

Enfin un cinquième chapitre sera consacré à la validation numérique des éléments de coques cylindriques proposés. Une série de cas -tests considérés par les ingénieurs comme outils importants de validation des élément de coques est utilisée aussi on donnera des commentaires sur les résultats obtenus.

Une conclusion générale est enfin présentée ainsi que des recommandations.

## Chapitre 2. Généralités sur la méthode des éléments finis

### 2.1. Introduction :

De nos jours, le calcul par éléments finis des structures formées de plaques et de coques est devenu un véritable outil à vocation industrielle. Il est très répandu dans de nombreux secteurs à haute technologie, civils ou militaires (tabliers de ponts, carrosseries automobiles, fuselages et ailes d'avions, réservoirs, bouteilles,..). Il y a quelques années, personne n'imaginait qu'en 1991 le calcul de la plus grosse plate-forme au monde : Hibernia (terre-neuve, Canada) serait traité de façon complète à l'aide d'éléments finis de coque épaisse, avec au total un nombre de 420 000 degrés de liberté. [AYA 93]

Ce qui va nous permettre dans ce chapitre de donner d'abord un rappel sur les notions de la mécanique des milieux continus puis les étapes de formulation de la matrice de rigidité élémentaire dans le cas général. Ensuite on exposera les différents modèles d'éléments finis parmi d'autres le modèle en déformation qui fera l'objet d'une étude critique en donnant un brève historique sur les différents éléments finis basés sur ce modèle. Enfin on citera les critères de convergence d'un point de vue physique et mathématique.

### 2.2. Rappel des notions de la mécanique des milieux continus :

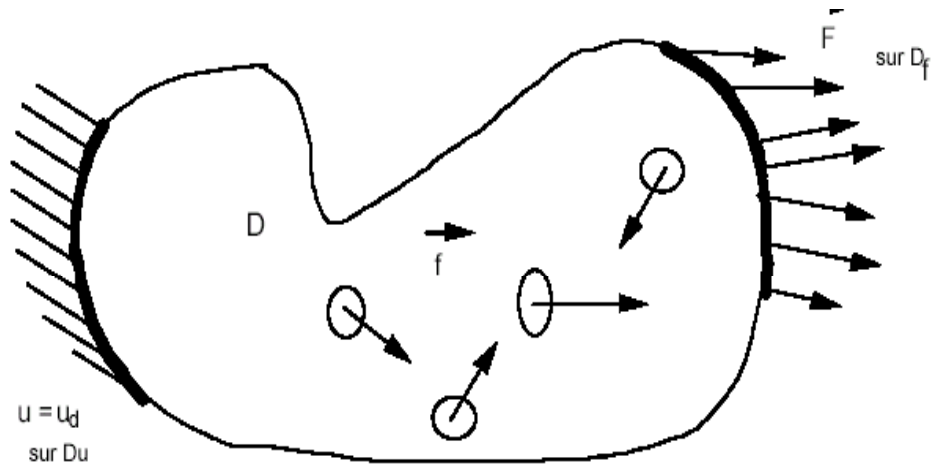
#### 2.2.1. Définitions :

Un milieu continu est soumis à : (figure 2.1)

-Des forces de volume  $\vec{f}$  :

-Des forces de surfaces  $\vec{F}$

Nous travaillerons dans le cadre des petites déformations, cela implique que la position de référence reste la position initiale. Les chargements peuvent être de type volumique  $\vec{f}$  ou de type surfacique  $\vec{F}$  dans le cas 3-D. La résolution d'un problème de structure consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que leurs relations :



**Figure 2.1** :Un milieu continu soumis à des forces de volume et de surface

-Le champ des déplacements, noté  $\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$  (2.1)

-Le champ des déformations, noté  $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$  (2.2)

Sous forme matricielle  $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$  (2.3)

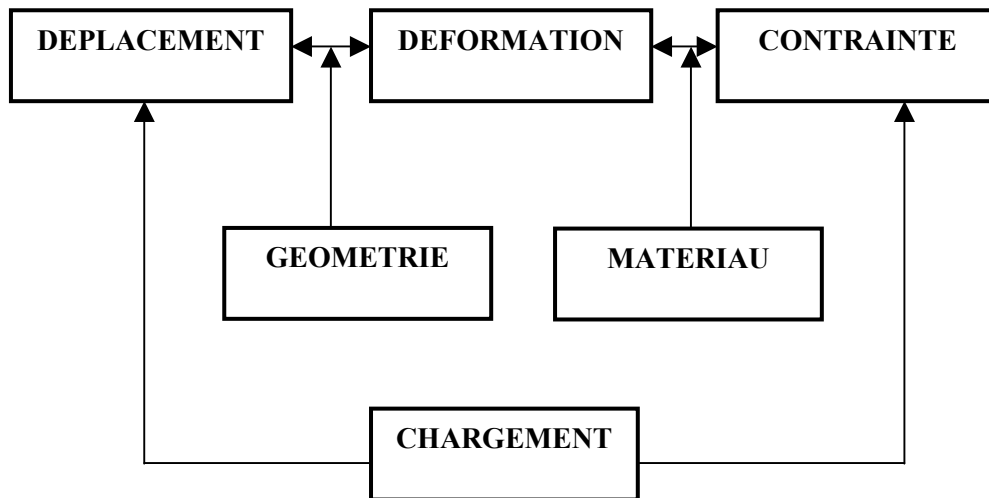
-Le tenseur des déformations  $[\varepsilon]$  est défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1-3 \quad (2.4)$$

-Le champ des contraintes, noté  $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$  (2.5)

Sous forme matricielle  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$  (2.6)

Les différentes relations entre ces quantités peuvent être schématisées par la figure suivante où :



**Figure 2.2 :** Relations entre déplacements, déformations et contraintes.

### 2.2.2. Equations de compatibilité :

Quand on connaît les déplacements, il est simple de déterminer les déformations. Mais le problème inverse n'est pas aussi simple : 3 composantes pour le déplacement et 6 composantes pour le tenseur des déformations. On a donc 6 inconnues et trois équations : Le

problème n'a pas de solution unique. Il existe des relations de compatibilité pour soulever ces indéterminations qui sont :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.7)$$

Cette équation générale permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

### 2.2.3. Loi de comportement - Loi de Hooke :

La loi de comportement relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes. A chaque catégorie de matériau correspond un type de loi. Nous allons ici nous intéresser seulement au matériau élastique linéaire et donc à la loi de Hooke.

### 2.2.4. Matériau isotrope :

Un matériau isotrope est un matériau qui possède des propriétés mécanique identiques suivant tout les directions : Acier, Inox, Plastique ....

## 2.3. Procédure d'analyse par élément finis :

La procédure comporte les étapes suivantes :

-Idéalisation et discrétisation de la structure en éléments finis par un maillage constitué de lignes ou de surfaces imaginaires .Les éléments sont supposés reliés en un nombre fini de points nœuds situés sur leurs frontières. Les déplacements de ces points nœuds seront les inconnues de base du problème .

-On choisit une fonction de déplacement permettant de définir de manière unique le champ des déplacements de ses nœuds. En se basant sur cette fonction de déplacement ,nous déduisons la matrice de rigidité de l'élément qui lie les forces nodales avec les déplacements

nodaux en utilisant le principe des travaux virtuels ou le principe de l'énergie potentielle totale minimal.

-Analyse de la structure idéalisée de l'assemblage des éléments .Cette analyse procède de la manière classique qui a été décrite par la méthode de rigidité.

-Enfin la solution de ses équations nous permet d'évaluer les déplacements et les efforts internes dans la structure (contrainte, déformation).

### 2.3.1. Formulation de la matrice de rigidité élémentaire : [ROC 79]

-On décrit les étapes d'analyse par éléments finis jusqu'à l'obtention de l'expression de la matrice de rigidité élémentaire  $[K_e]$  sous forme générale susceptible d'être appliquée à n'importe quelle situation.

Pour aboutir donc à la formule générale de la matrice de rigidité élémentaire, on suit les étapes suivantes :

#### Etape 1 : Identifier le problème :

On choisit un système de coordonnées et une numérotation des nœuds appropriée pour l'élément.

Puisque l'on connaît les degrés de liberté de l'élément fini choisi, on peut déterminer le vecteur des déplacement nodaux  $\{q_e\}$  et le vecteur des charge nodales  $\{F_e\}$  .La matrice de rigidité élémentaire  $[K_e]$  pour cette élément est alors définie par :

$$[K_e] \{q_e\} = \{F_e\} \quad (2.8)$$

**Etape 2 : Choisir les fonctions de déplacements convenables :**

On choisit une fonction de déplacements qui définit de façon unique l'état de déplacements de tous les points de l'élément.

Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale, et puisque son but est d'exprimer les déplacements  $\{u(x, y)\}$  de n'importe quel point en termes de déplacements nodaux  $\{q_e\}$ , elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément. L'état des déplacements en chaque point  $M(x, y)$  de l'élément peut être décrit sous forme matricielle par l'équation :

$$\{u(x, y)\} = [\varphi(x, y)] \{a\} \quad (2.9)$$

Où  $\{a\}$  : est le vecteur colonne des coefficients indéterminés de la fonction  $[\varphi(x, y)]$

$$\text{On a : } \{a\}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

**Etape 3 : Relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux :**

On exprime maintenant les coefficients indéterminés  $\{a\}$  en fonction des déplacements nodaux  $\{q_e\}$  et en reportant dans l'équation (2.9), on relie les déplacements des points de l'élément aux déplacements nodaux  $\{q_e\}$ .

Puisque  $\{u(x, y)\}$  représente le déplacement au point  $M(x, y)$ , les déplacements nodaux peuvent être obtenus à partir de celui-ci en introduisant simplement les coordonnées nodales convenables dans l'équation (2.9) cela donne par exemple pour le nœud 1 :

$$\{q_{e1}\} = \{u(x_1, y_1)\} = [\varphi(x_1, y_1)] \{a\} \quad (2.10)$$



En procédant de façon similaire pour tous les autres nœuds, on obtient pour les « n » nœuds de l'élément.

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} \{q_{e1}\} \\ \{q_{e2}\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{q_{en}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, y_1) \\ \varphi(x_2, y_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(x_n, y_n) \end{bmatrix} \{a\}$$

Où 
$$\{q_e\} = [C]\{a\} \quad (2.11)$$

Puisque la matrice  $[C]$  est maintenant connue, le vecteur des coefficients indéterminés  $\{a\}$  peut être obtenu en inversant l'expression précédente, cela donne :

$$\{a\} = [C]^{-1}\{q_e\} \quad (2.12)$$

On remplace  $\{a\}$  par sa valeur dans l'équation (2.9) et on obtient la relation cherchée entre les déplacements  $\{u(x, y)\}$  de tous les points de l'élément et les déplacements nodaux  $\{q_e\}$ .

$$\{u(x, y)\} = [\varphi(x, y)][C]^{-1}\{q_e\} \quad (2.13)$$

Dans la plus part des cas, il est très utile d'exprimer la fonction des déplacements en termes des déplacements nodaux, d'où on obtient :

$$\{u(x, y)\} = [N(x, y)]\{q_e\} \quad (2.14)$$

Avec

$$[N(x, y)] = [\varphi(x, y)][C]^{-1} \quad (2.15)$$

**Etape 4 : Relation entre déplacements et déformations :**

On relie maintenant les déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  du point  $M(x, y)$  de l'élément aux déplacements nodaux  $\{q_e\}$ .

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction du déplacement par une différentiation dont la forme exacte dépend du type de problème traité. Par exemple, pour un problème d'élasticité plane, les déformations correspondent aux dérivées premières des déplacements, tandis que pour les problèmes de flexion, les déformations sont associées à la courbure de l'élément et correspondent aux dérivées secondes, en général :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [L]\{u_e(x, y)\} \quad (2.16)$$

avec  $[L]$  : Matrice différentielle

On obtient la forme exacte de cette expression pour chaque classe de problèmes à partir de la théorie de l'élasticité. En utilisant l'expression de l'équation (2.13) pour  $\{u(x, y)\}$  et en remarquant que  $[C]^{-1}$  et  $\{q_e\}$  sont indépendants de  $x$  et  $y$ , le vecteur de déformation  $\{\varepsilon(x, y)\}$  est donné par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [L][N(x, y)]\{q_e\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B(x, y)]\{q_e\}$$

$$\text{Avec } [B(x, y)] = [L][N(x, y)] = [L][\varphi(x, y)][C]^{-1} = [Q(x, y)][C]^{-1}$$

On trouve :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [Q(x, y)][C]^{-1}\{q_e\} \quad (2.17)$$

où, en général,  $[Q(x, y)]$  contient des termes en  $x$  et  $y$ .

C'est la relation cherchée entre les déformations en chaque point de l'élément et les déplacements nodaux avec :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B]\{q_e\} \quad (2.18)$$

Avec 
$$[B] = [Q][C]^{-1}$$

### Etape 5 : Relation entre déformations et contraintes :

Pour un élément élastique linéaire, les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  sont reliées aux déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  comme suit :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D]\{\varepsilon(x, y)\} \quad (2.19)$$

$[D]$  : La matrice d'élasticité qui contient les propriétés élastiques de l'élément : c'est-à-dire des quantités telles que le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .

$$\{\sigma\} = [D][Q(x, y)][C]^{-1}\{q_e\} \quad (2.20)$$

$\{q_e\}$  : Vecteur de déplacement aux nœuds de l'élément dans le repère local.

Il convient d'écrire toutes les équations non pas en fonction de  $\{q_e\}$  mais en fonction de  $\{q\}$  qui représente le vecteur des déplacements dans le repère global.

$$\{q_e\} = [T]\{q\} \quad (2.21)$$

La transformation  $[T]$  combine la rotation des axes et elle est spécifique à chaque élément.

Les champs de déformation, contrainte, déplacement peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{cases} \{u_e(x, y)\} = [N(x, y)]\{q_e\} = [N(x, y)][T]\{q\} \\ \{\varepsilon(x, y)\} = [B(x, y)]\{q_e\} = [B(x, y)][T]\{q\} \\ \{\sigma(x, y)\} = [D][Q(x, y)][C]^{-1}\{q_e\} = [D][Q(x, y)][C]^{-1}[T]\{q\} \end{cases} \quad (2.22)$$

### Etape 6 : Relier les charges nodales aux déplacements nodaux :

Il est maintenant possible de formuler la matrice de rigidité  $[K_e]$  de l'élément, en utilisant les équations (2.19) des contraintes et (2.18) des déformations ainsi que le principe des travaux virtuels.

Durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égale au travail interne total des contraintes.

Les déplacements nodaux virtuels imposés sont représentés par le vecteur  $\{\bar{q}_e\}$  où :

$$\{\bar{q}_e\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_{e1} \\ \bar{q}_{e2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{q}_{en} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Ces déplacements nodaux virtuels produisent des déformations virtuelles  $\{\bar{\varepsilon}(x, y)\}$  aux points de l'élément où les contraintes réelles sont les  $\{\sigma(x, y)\}$ .

$$\{\bar{\varepsilon}(x, y)\} = [B]\{\bar{q}_e\} \quad \text{et} \quad \{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\bar{q}_e\} \quad (2.24)$$

Alors le travail interne (l'énergie de déformation interne) par unité de volume est donné par :

$$W_{\text{int}} = \left\{ \bar{\varepsilon}(x, y) \right\} \left\{ \sigma(x, y) \right\} \quad (2.25)$$

Le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément, c'est-à-dire :

$$\int_V W_{\text{int}} dV = \int_V \left\{ \bar{\varepsilon}(x, y) \right\}^T \cdot \left\{ \sigma(x, y) \right\} dV \quad (2.26)$$

En substituant les expressions de  $\bar{\varepsilon}$  et  $\sigma$  dans l'équation du travail interne, et on obtient :

$$\int_V W_{\text{int}} dV = \int_V \left\{ \bar{\varepsilon}(x, y) \right\}^T [D][B] \{q_e\} dV = \int_V [B]^T \{ \bar{q}_e \} [D][B] \{q_e\} dV \quad (2.27)$$

Maintenant le travail virtuel extérieur produit par les forces nodales réelles, durant le déplacement virtuel imposé  $\{ \bar{q}_e \}$  à l'élément est donné comme suit :

$$W_{\text{ext}} = \{ \bar{q}_e \}^T \{ F_e \} \quad (2.28)$$

Avec  $\{ F_e \}$  est le vecteur des forces nodales réelles.

L'opération finale consiste à évaluer le travail interne et le travail externe produits pendant les déplacements virtuels  $\{ \bar{q}_e \}$ . Puisque le principe de base des déplacements virtuels est valide pour n'importe quel système de déplacements appliqué, on peut choisir ce dernier comme l'on veut. Dans le cas présent, il est commode de supposer les déplacements nodaux égaux à l'unité. On obtient alors :

$$\{ F_e \} = \left[ \int_V [B]^T [D][B] dV \right] \{ q_e \} \quad (2.29)$$

En comparant l'équation (2.29) avec l'équation (2.8) écrite à nouveau ci- dessous  
 $[K_e] \{q_e\} = \{F_e\}$ .

Il est clair que la matrice de rigidité élémentaire  $[K_e]$  est donnée par l'expression :

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D][B].dV \quad (2.30)$$

### Etape 7 : Relation entre contraintes et déplacements :

On a finalement déterminé la matrice reliant les contraintes internes de l'élément  $\{\sigma(x, y)\}$  à ses déplacements nodaux  $\{q_e\}$ . On l'appellera  $[H]$ . Elle est le produit des matrices  $[D]$  et  $[B]$  d'où on aura :

$$[H] = [D] \cdot [B] = [D] \cdot [Q][C]^{-1} \quad (2.31)$$

Soit :

$$\{\sigma(x, y)\} = [H] \cdot \{q_e\} \quad (2.32)$$

## 2.4. Forces nodales équivalentes :

Dans le cas où la structure subit des charges réparties, pour pouvoir utiliser dans ce cas la technique des éléments finis, on doit remplacer ces charges réparties par des charges ponctuelles équivalentes appliquées aux nœuds. Pour cela il faut que les travaux des charges réparties et les charges ponctuelles nodales soit égaux.

Soit un élément qui subit une charge répartie  $f(x, y, z)$  sur le volume ayant comme composantes  $f_1, f_2, f_3$ .

Le travail de la charge répartie est :

$$W_q = \int (f_1 U + f_2 V + f_3 W) dv = \int \{\mu(x, y, z)\}^T f(x, y, z) dv \quad (2.33)$$

$$\{\mu(x, y, z)\} = [\varphi(x, y, z)] \{a_i\} = [\varphi(x, y, z)] [C]^{-1} \{q_e\} \quad (2.34)$$

$$W_q = \{q_e\}^T [C]^{-T} \int [\varphi(x, y, z)]^T f(x, y, z) dv \quad (2.35)$$

Le travail des forces nodales est :

$$W = \{q_e\}^T \{F_e\} \quad (2.36)$$

En égalisant les deux travaux obtenus on trouve :

$$\{F_e\} = [C]^{-T} \int [\varphi(x, y, z)]^T f(x, y, z) dv \quad (2.37)$$

## 2.5. Classification des traitements : [IMB 84]

### 2.5.1. Problème linéaire :

#### a) Statique linéaire :

C'est le problème le plus simple. Il consiste à déterminer les déplacements et les contraintes dans une structure à comportement linéaire sous l'influence des charges statiques ou à variation lente. Ce problème nous ramène à la résolution du système linéaire suivant :

$$[K]\{q\} = \{F\} \quad (2.38)$$

#### b) Dynamique linéaire :

L'analyse dynamique linéaire consiste à déterminer les déplacements (éventuellement les vitesses et accélérations) et contraintes en fonction du temps pour une structure à comportement linéaire sollicitée par des forces dynamiques. Dans la méthode des déplacements, ce type de problème se ramène à la résolution du système différentiel du second ordre des équations du mouvement, soit :

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = F \quad (2.39)$$

Avec **M** : Matrice de masse.

**C** : Matrice d'amortissement .



## 2.6. Modèles d'éléments finis : [FRE 01]

### 2.6.1. Champs interpolés :

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, plus rarement ceux des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément, ou une partie de celui – ci, l'intérieur ou la frontière .Selon la combinaison choisie, on peut créer divers types, dits modèles d'éléments finis .Les plus courants sont les suivants.

### 2.6.2. Modèle déplacement :

Les éléments finis de cette catégorie sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendue à tout l'élément .Il en résulte que les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, alors que les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continues aux frontières .Le modèle déplacement est le plus populaire et le plus développé.

Dans ce modèle, les fonctions de déplacements sont choisies en utilisant le triangle de Pascal, de telle sorte que le nombre total des constantes soit égale au nombre total des degrés de liberté de l'élément.

### 2.6.3. Modèle équilibre ou contrainte :

A l'inverse du précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul champ des contraintes .La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements est sommaire.

Ce modèle est rarement employé en pratique, car il conduit ,en générale, à qualité égale, à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

#### 2.6.4. Modèle mixte :

Ce modèle est basé sur des approximations indépendantes des divers champs inconnus (déplacements, déformations, contraintes), étendues à tout l'élément. En général, ce modèle conserve les paramètres inconnus de ces champs comme degrés de liberté. La mise au point peut être longue et coûteuse, mais les éléments peuvent être d'excellente qualité.

Le modèle mixte est parfois utilisé pour corriger certains défauts du modèle déplacement : On interpole, par exemple, certaines composantes internes de la déformation pour améliorer la précision au niveau des contraintes ; les paramètres correspondants peuvent alors être éliminés par condensation, de sorte que l'élément reprend l'aspect d'un modèle déplacement.

#### 2.6.5. Modèle hybride :

Ce modèle est basé sur deux interpolations a priori indépendantes, l'une portant sur un champ à l'intérieur de l'élément, l'autre sur un champ touchant la seule frontière. En cours de formulation, les paramètres indéterminés du champ interne sont exprimés en fonction des paramètres nodaux du champ défini sur la frontière en cherchant à minimiser la différence entre les deux champs.

Si le champ de bord est du type déplacement, l'élément hybride aura finalement le même aspect extérieur et les mêmes degrés de liberté nodaux qu'un élément en modèle en déplacement.

Le modèle hybride le plus ancien, dit hybride –contrainte, combine un champ interne autoéquilibré de contrainte avec un champ de déplacement à la frontière. Le modèle le plus récent, dit hybride – Trefftz, utilise deux champs indépendants de déplacement : Un champ interne qui vérifie rigoureusement la forme forte du problème, mais viole la compatibilité sur la frontière, et un champ conforme défini sur la frontière de l'élément.

Le modèle hybride fournit d'ordinaire de meilleurs résultats que le modèle déplacement, surtout au niveau des contraintes. Le modèle hybride – Trefftz, en particulier, peut être le plus précis parmi les éléments finis actuellement connus.

#### **2.6.6. Modèle déformation :**

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ des déformations de telle façon que les équations de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

L'approche en déformation permet le développement des éléments courbés d'ordre élevé avec des degrés de liberté minimums qui sont simples pour mettre en application et efficaces à employer. Ceci a mené à l'élaboration d'une méthode alternative simple pour obtenir des fonctions de forme pour les structures courbées. A cet égard l'approche en déformation permet aux composantes des déplacements dans le plan d'être représentées par polynômes d'ordre élevé. C'est d'intérêt particulier puisque l'amélioration obtenue par les éléments d'ordre élevé est principalement due à la représentation des déplacements dans le plan par des termes de polynômes d'ordre élevé.

Contrairement aux éléments conventionnels ordinaires et les éléments d'ordre élevé, les composantes du champ des déplacements pour les éléments basés sur le modèle en déformation ne sont pas indépendantes mais liées en conformité avec les exigences de la relation constitutive déplacements- déformations. Le lien entre ces différents déplacements n'est pas limité aux termes qui correspondent aux mouvements du corps rigide mais se produit également dans les termes correspondant aux déformations de l'élément. [DJO 04]

##### **2.6.6.1. Avantage du modèle en déformation :**

La méthode est attaché avec l'invention de l'approche en contrainte. Cette approche est combinée avec le modèle en déplacement pour produire des éléments mixtes et hybrides. L'avantage du modèle en déformation par rapport au modèle en contrainte c'est que les fonctions de déplacements correspondantes sont obtenues par intégration simple des relations

déformation – déplacements. La procédure habituelle d'élément fini s'impose comme méthode appliquée pour calculer la matrice de rigidité élémentaire de l'élément à partir des fonctions de déplacements.

Les raisons de chercher un élément basé sur des fonctions généralisées de déformations plutôt que les fonctions de déplacements s'expliquent comme suit :

Premièrement, si nous souhaitons réduire au minimum la contribution de l'énergie de déformation sur l'énergie potentielle d'un élément, nous devons chercher des variations de déformations les plus faibles que possible. Ceci est dû au fait que l'expression de l'énergie de déformation est calculée à partir des carrés et des produits des déformations et en imposant une variation locale à la distribution régulière initiale, sans changer les valeurs moyennes locale, elle provoque une augmentation des valeurs des carrés quand ils sont intégrés sur la surface de l'élément.

Deuxièmement, les équations reliant les déplacements et les déformations sont, pour les éléments courbés, couplées de telle manière que quelques déformations sont des fonctions de plus d'un déplacement, par conséquent, si nous proposons les déplacements  $(u, v, w)$  indépendants l'un de l'autre, les déformations ne seront pas ainsi. [ASH 72]

L'approche en déformation présente certaines facilités par rapports aux autres formulations. On cite parmi d'autre la relation directe des deux critères de convergence principaux (mode de déformation constante et mode du corps rigide) aux déformations donc il sera plus facile de les satisfaire en faisant appel à des fonctions de déformation qu'à des fonctions de déplacements.

Dans leurs premières publications, Ashwell et Sabir ont montré que pour avoir des résultats satisfaisants et qui convergent, les éléments basés sur le modèle en déplacements exigent la division des structures courbées en grand nombre d'éléments. Les imperfections de ces éléments ont été remarquées et pour les surmonter, on utilise des éléments basés sur le modèle en déformation plutôt que des éléments basés sur le modèle en déplacement pour les structures courbées. [SAL 86].

**2.6.6.2. Historique des éléments finis basés sur le modèle en déformation :**

Le développement du champ de déplacements en utilisant l'approche en déformation a été appliqué pour la première fois sur des éléments courbés. Cette formulation a été utilisée pour l'analyse des arcs par Ashwell , Sabir et Roberts en 1971 et pour l'analyse des coques cylindriques par Ashwell et Sabir en 1972 .[CHA 82]

Un élément courbé a été également développé par Sabir et Lock en 1973 pour l'analyse non linéaire géométrique des arcs circulaires .Cet élément est basé sur la condition dont la contrainte circonférentielle et la variation des courbures, plutôt que les déplacements, doivent être des fonctions simples et indépendantes des coordonnées .La supériorité de cet élément a été démontrée par rapport aux éléments à fonction de forme polynomiale. Le travail a été étendu par sabir en 1975 pour le développement d'éléments d'arcs se déformant aussi bien hors plan de courbure que dans le plan .

La performance de l'élément coque basé sur le modèle en déformation pour la prédiction des contraintes très élevées au voisinage de l'application des charges concentrées est démontrée par Sabir et Ashwell qui ont entrepris, en 1978 , des essais sur des coques minces en appliquant des chargements, soit des forces radiales ou des moments concentrés. Les résultats obtenus étaient similaires aux solutions théoriques données par Flugge et Fosberg.[FLU 66]

L'approche en déformation a été d'avantage appliquée par Sabir en 1983 pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité plane en coordonnées cartésiennes .Sabir a développé un élément rectangulaire de base ayant uniquement les degrés de liberté essentiels qui satisfait les conditions des mouvements du corps rigide et les équations de compatibilité. Cet élément a huit degrés de liberté ,il est basé sur les déformations directes linéaires et la déformation de cisaillement constante. [SAB 83]

Le succès de l'application de l'approche en déformation pour les problèmes d'élasticité plane a mené à l'extension des travaux pour le développement des éléments finis secteurs dans un système de coordonnées polaires. Ceci est achevé en deux façons. La première est de

développer des éléments finis basés sur le modèle en déformation par une approche directe c'est-à-dire, en assumant les expressions polynomiales des déformations en coordonnées polaires et intégrant les équations résultantes pour obtenir les fonctions de déplacements. La deuxième est d'utiliser le champ de déplacements obtenu par l'approche en déformation et en transformant le système de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires. Un exemple de ces éléments, l'élément développé par Sabir et Salhi en 1986. [SAL 86]

Plus récemment deux éléments triangulaire et rectangulaire sont développés par Sabir et Sfindji en 1995 pour l'élasticité plane. L'élément triangulaire a deux degrés de liberté essentiels externes à chacun des trois nœuds des coins et au nœud du milieu du côté, l'élément résultant possède huit degrés de liberté. L'élément rectangulaire a les mêmes degrés de liberté, que l'élément précédant, aux quatre nœuds des coins et au nœud du centre, il a donc dix degrés de liberté. [SAB 95]

Les avantages des éléments finis basés sur l'approche en déformation en comparaison avec des éléments classiques basés sur le modèle en déplacement ont été illustrés sur plusieurs éléments bidimensionnels et tridimensionnels. Belarbi et Charif ont développé un élément fini de solide hexaédrique (SBH8) basé sur l'approche en déformation. Cet élément possède huit nœuds avec trois degrés de liberté par nœud ( $u$ ,  $v$  et  $w$ ). cet élément a été utilisé pour l'analyse des plaques minces et épaisses en flexion avec la modification de la matrice d'élasticité. Cette modification des constantes de la matrice d'élasticité vise à représenter le comportement réel des plaques minces ou épaisses en flexion. [BEL 00]

Un nouvel élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation et la théorie de Mandlin / Reisner est développé par Belounar et Gunfoud en 2005 pour l'analyse des plaques épaisses ou minces en flexion. Cet nouvel élément appelé SBRP (Strain Based Rectangulaire Plate) possède quatre nœuds de coins avec trois degrés de liberté à chaque nœud. Il est avéré numériquement plus efficace que l'élément similaire basé sur le modèle en déplacement. [BEL 05]

## 2.7. Critères de convergence : [FRE 01]

### 2.7.1. Introduction :

Dans la méthode des éléments finis, il existe deux types de convergences :

- La convergence  $h$ , par raffinement du maillage sans modifier l'interpolation.
- La convergence  $p$ , par enrichissement de l'interpolation sans changer le maillage.

Dans l'un et l'autre cas, l'interpolation choisie doit satisfaire à certaines conditions, appelées *critères de convergence*, pour que la solution approchée tend vers la solution exacte.

### 2.7.2. La convergence $h$ :

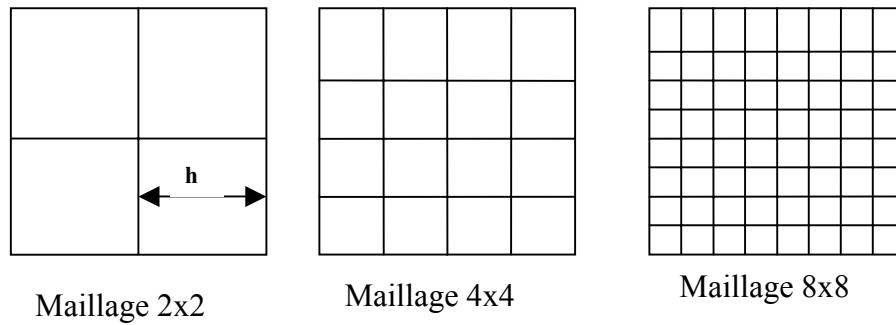
Considérons un maillage d'éléments finis et appelons  $h$  la dimension caractéristique d'un élément (longueur, plus grand côté, diamètre du cercle circonscrit). On subdivise toujours davantage le domaine, en éléments toujours plus petits, chaque nouvelle division contenant la précédente, et on conserve, pour les éléments de même type, constamment la même approximation du champ.

Alors, si les critères de convergences sont remplis, la solution approchée tend vers la solution exacte quand la taille des éléments tend vers zéro ( $h \rightarrow 0$ ). C'est le principe de la *convergence  $h$*  (figure 2.3)

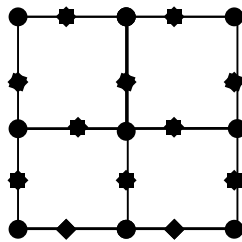
### 2.7.3. Convergence $p$ :

Partons d'un maillage donné d'éléments finis et appelons  $p$  le degré des polynômes utilisés pour l'interpolation. On conserve le maillage choisi et on enrichit le champ approché des éléments en augmentant le degré  $p$ .

Alors, si les critères de convergence sont satisfaits, la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque le degré de l'interpolation tend vers l'infini ( $p \rightarrow \infty$ ). C'est la technique de la convergence  $p$  (figure 2.4).



**Figure 2.3 :** Subdivisions pour étudier la convergence  $h$



**Figure 2.4 :** Augmentation du degré de l'interpolation pour étudier la convergence  $p$   
 ● : nombre fixe d'inconnues ( $p=1$ ) ◆ : nombre variable  $k$  d'inconnues  
 ( $k=1, p=2 ; k=2 ; p=3 ; \dots$ )

#### 2.7.4. Critères de convergence – Point de vue physique :

Si le point de vue physique donne une justification essentiellement intuitive des critères de convergence, il en fournit aussi une compréhension concrète très utile dans le cadre de l'application de la méthode des éléments finis dans le calcul des solides et, surtout des structures.



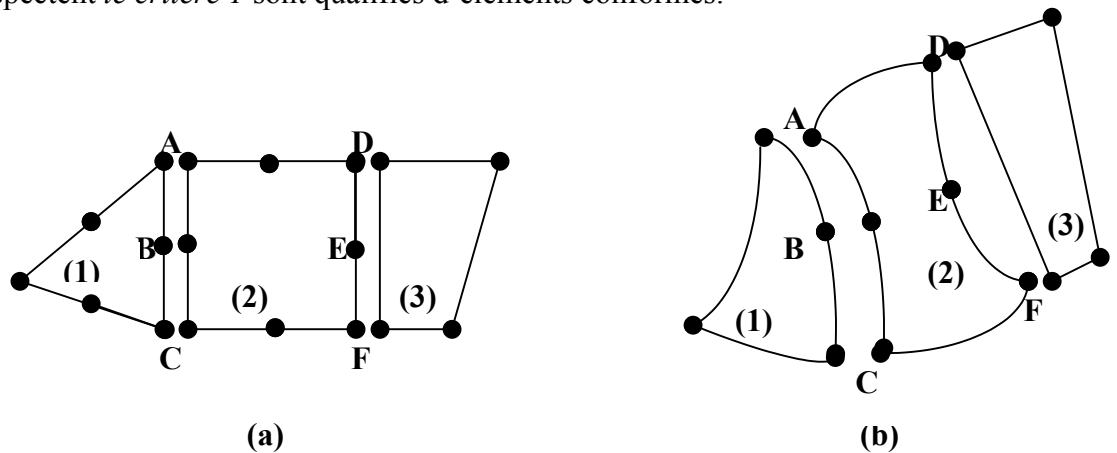
### 2.7.4.1. Critère 1 : continuité, conformité ou compatibilité cinématique :

L'interpolation doit être d'une manière que le champ des déplacements soit :

- Continu et dérivable dans l'élément.
- Continu à travers les frontières.

La première condition prévient l'emploi de fonctions présentant des discontinuités (arrêts, saut ...) et garantit de pouvoir calculer les dérivées nécessaires de la forme faible (on doit pouvoir dériver  $m$  fois).

Par la seconde condition, les déplacements doivent être continus en tout point des frontières séparant les éléments. Or, à la frontière de deux éléments adjacents, les déplacements ne sont a priori égaux qu'aux seuls nœuds communs. Le critère exige donc de garantir la continuité des déplacements tout le long de la frontière en fonction des seules valeurs nodales (figure 2.5). Cette condition peut s'avérer délicate à satisfaire. Les éléments finis qui respectent *le critère 1* sont qualifiés d'éléments conformes.



**Figure 2.5 :** Groupe de trois éléments finis plans : (a) configuration initiale ; (b) configuration déformée. Les éléments (1) et (2) sont conformes le long de ABC si les trois nœuds et les deux courbes coïncident exactement dans l'une et l'autre configuration (par exemple : paraboles) ; entre les éléments (2) et (3), la continuité est violée le long de DEF si les deux nœuds D et F de l'élément (3) ne peuvent définir qu'une droite.

### 2.7.4.2. Critère 2 : Des déformations constantes ou de complétude :

Le second critère de convergence s'énonce comme suit :

L'interpolation doit permettre de représenter.

- Les états de déplacement constant ou modes rigides.
- Les états de déformation constante.

Ce critère semble physiquement évident : l'élément fini doit pouvoir se déplacer en bloc, comme un corps rigide, sans qu'aucune contrainte (ou déformation) n'y naisse (figure 2.6) , et il doit être capable de représenter les états de déformation les plus simples ,c'est-à-dire constants (figure 2.7).

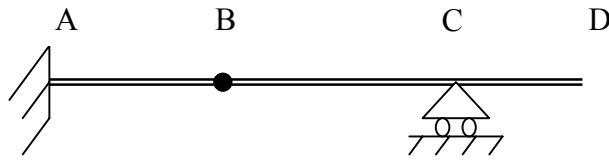
#### Remarques :

- Les modes rigides sont de deux natures : petites rotations et petites translations.
- Qui dit mode rigide dit déformation nulle ; la première condition est donc un cas particulier de la seconde et *le critère 2* peut ne se formuler qu'en déformations (d'où son titre).

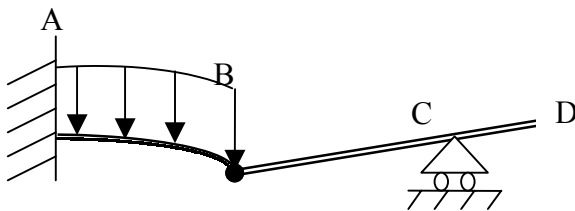
### 2.7.5. Assouplissement des critères et Patch test :

#### 2.7.5.1. Élément non -conforme :

Les critères de convergences sont nés de l'application de la méthode des éléments finis au calcul des structures (1965) .Ils garantissent une convergence monotone de la solution numérique vers la solution exacte .On s'est ensuite aperçu que, sous certaines conditions, ils pouvaient être assouplis (au détriment du caractère monotone de la convergence toutefois). En particulier, la convergence a encore lieu si les critères sont satisfaits asymptotiquement (c'est-à-dire quand la taille des éléments finis  $h$  tend vers zéro).

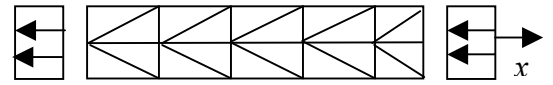


(a)

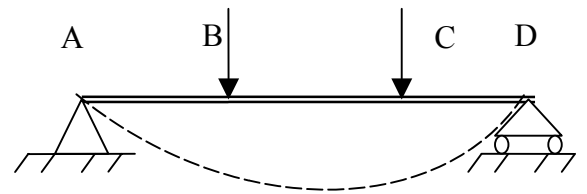


(b)

**Figure 2.6 :** Mode rigide : (a) configuration initiale : (b) configuration déformée : BCD se déplace sans se déformer (rotation rigide).



(a)



(b)

**Figure 2.7 :** Déformations constantes : (a) essai de traction :  $\epsilon_x = \text{cste}$  ; (b) flexion pure entre B et C.  $\psi = \text{cste}$ .

Il en résulte que, dans le premier critère, la condition de continuité entre éléments peut être légèrement relaxée. Les éléments finis qui représentent de légers défauts de continuité aux frontières sont dits *non-conformes*.

Ces nouvelles données apportent un peu de liberté supplémentaire pour construire des éléments finis. Elles ont permis d'en sauver quelques-uns, qui paraissaient douteux. Elles sont aussi employées pour améliorer les performances de certains éléments au comportement trop raide.

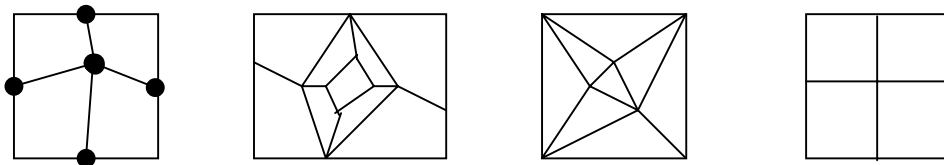
### 2.7.5.2. Convergence des éléments finis non conformes et patch test :

Pour converger, un élément fini non conforme doit, à la limite, restaurer la parfaite continuité aux frontières. Cette propriété est acquise si la continuité aux frontières est rigoureusement satisfaite pour tous les états de déformation constante (nulle ou non).

Cette condition est difficile à vérifier analytiquement, lors de la construction d'un élément. Elle peut être remplacée par un test numérique appelé patch test.

Considérons diverses subdivisions irrégulières d'un domaine de forme simple (figure 2.8). On impose aux limites (nœuds du bord  $\Gamma$ ) des charges (forces ou déplacements imposés) produisant tour à tour les divers états de déformation constante possibles.

Le patch test est satisfait si la solution numérique restituée partout, en particulier aux nœuds intérieurs, la solution théorique exacte.



**Figure. 2.8** Maillage en quadrilatères, triangles ou rectangles en vue d'un patch test

### 2.7.6. Critère de convergence – Un rien plus mathématique :

On dit qu'une fonction a la continuité  $C^\tau$ , ou est de classe  $C^\tau$ , si elle est continue, ainsi que ses dérivées, jusqu'à l'ordre  $\tau$ . Une fonction  $C^0$  est simplement une fonction continue.

Un polynôme est dit complet au degré  $p$  si toutes les puissances  $q$ , avec  $0 \leq q \leq p$ ,  $x$  et  $y$  sont représentées ; par exemple,

$$a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 \quad (2.40)$$

est complet (en  $x$  et  $y$ ) au degré  $p=3$

**2.7.6.1. Critère 1 :**

Il s'énonce maintenant comme suit :

*Critère de continuité* : l'interpolation du champ des déplacements doit être au moins

- De classe  $C^m$  dans l'élément,
- De classe  $C^{m-1}$  au droit des frontières.

La première condition garantie :

- L'emploi de fonctions d'interpolation suffisamment régulières et dérivables dans l'élément fini ;
- La valeur non nulle des intégrales de la forme faible (qui contient des dérivées d'ordre  $m$ )

La seconde assure que, tout le long des frontières,

- Les déplacements sont continus ;
- Les dérivées du plus haut ordre ( $m$ ) présentent, au pire, un saut fini et ne prennent pas en particulier, des valeurs infinies

**2.7.6.2. Critère 2 :**

Il peut prendre plusieurs formes . Par exemple.

*Critère de complétude* : le champ approché et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$  doivent pouvoir prendre des valeurs constantes arbitraires dans l'élément.

Ce critère s'énonce ainsi :

L'interpolation doit contenir tout terme polynomiale de degré inférieur ou égale à  $m$  .Ou encore, plus directement :

Le polynôme doit être complet au degré  $m$  au moins ( $p \geq m$ ) .

## Chapitre 3. Théories des coques

### 3.1. Introduction :

La méthode des éléments finis est appliquée à l'étude des structures continues telles que les poutres, les plaques et les dalles sujettes à la flexion, les murs de barrage, les plaques pliées et les coques, les parties continues sont représentées comme structures composées d'éléments indépendants reliés uniquement par les nœuds. Les structures de coques constituent l'un des types de structures les plus difficiles à analyser. On trouve deux types de coques telles que les coques axisymétriques ou les coques à géométrie quelconque, dans ce dernier cas deux approches sont envisageables, soit l'utilisation d'éléments de coques courbés ou dérivés d'éléments isoparamétriques 3D, soit une représentation approchée de la géométrie par des éléments de plaques planes (membrane+ flexion).

Ce chapitre a pour but d'étudier les différents types de coques. On exposera le problème géométrique des éléments coques. On passera ensuite à l'étude des théories appliquées à la formulation des éléments coques.

### 3.2. Les coques en général : [PRA 95]

Une coque est définie géométriquement par une surface courbée dotée d'une épaisseur  $h$ . Cette épaisseur est supposée faible devant les autres dimensions, y compris devant le rayon de courbure minimal  $r_{\min}$  de la surface.

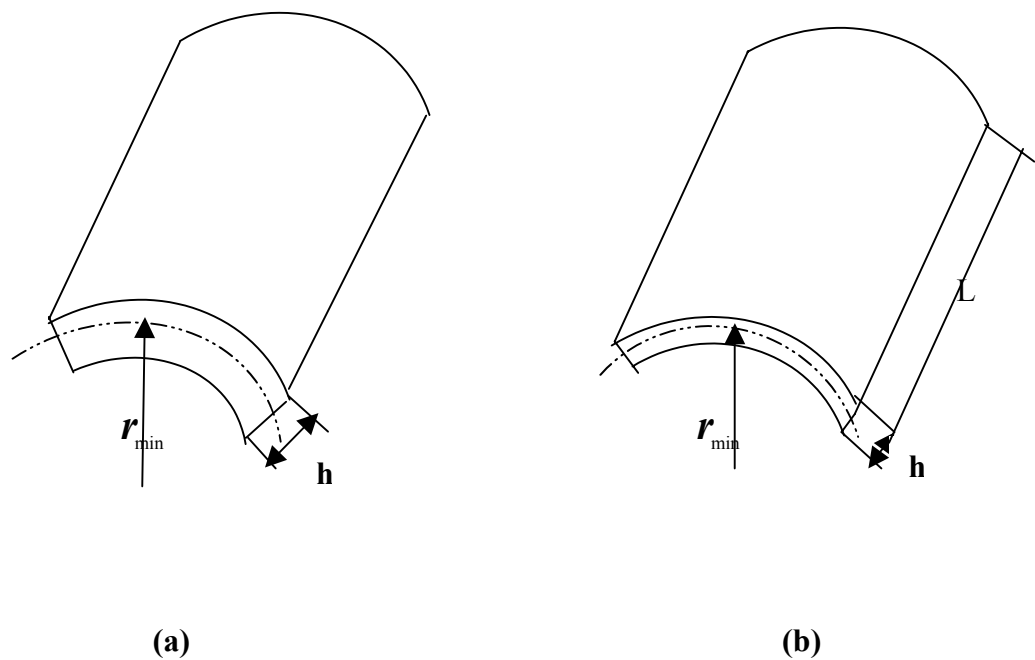
Si  $L$  est la plus petite longueur curviligne de la coque, les valeurs communément admises sont (Figure 3.1) :

$$\frac{L}{h} \succ 4 \quad \text{et} \quad \frac{r_{\min}}{h} \succ 16 \quad (3.1)$$

-Une coque est dite épaisse si  $4 \prec \frac{L}{h} \prec 20$ . Elle est dite mince si  $\frac{L}{h} \succ 20$  (une coque cylindrique mince  $\frac{h}{r_{\min}} \prec 0.1$ ).

Il convient de distinguer deux grandes familles de structures de coques :

- Les structures composées de coques dont les efforts internes ne comprennent que des forces tangentes .
- Les structures composées de coques dont les efforts internes comprennent, en plus des forces tangentes ,des efforts de flexion (structures travaillant en flexion–membrane).



**Figure 3.1** : Définition des coques :

(a) coque cylindrique épaisse ; (b) coque cylindrique mince.

### 3.2.1. Hypothèses cinématiques :

Les formulations analytiques associées aux coques dérivent des équations habituelles de la mécanique des milieux continus auxquelles sont adjointes des hypothèses particulières sur la cinématique .Ces hypothèses permettent de formuler les équations d'équilibre en termes de contraintes généralisées (efforts et moments) . Les deux hypothèses les plus couramment

utilisées sont les hypothèses cinématiques de conservation des normales (Love –Kirchhoff ) ou celles des sections planes ( Mindlin –Reisner –Naghdi –Hencky ) sans prise en compte de la variation de l'épaisseur .Ces hypothèses peuvent être comparées a celles qui sont utilisées pour les éléments de poutre mince ( Navier –Euler – Bernoulli ) ou épaisse (Timoshenko) .Les domaines de validité de chaque hypothèse dépendent de la géométrie de la coque et du chargement appliqué.

### 3.2.1.1. Hypothèse de Love – Kirchhoff :

Les fibres rectilignes orthogonales à la surface moyenne de la coque dans la configuration de référence restent orthogonales à la surface moyenne pour toute configuration déformée et ne sont pas sujettes à la déformation.

Cette hypothèse est à la base de la construction des éléments servant à l'étude des coques minces pour lesquelles les déformations dues au cisaillement transversal peuvent être négligées .Elle est correcte si les conditions suivantes sont remplies :

-Les contraintes normales transverses à la surface moyenne peuvent être négligées devant les autres contraintes.

-L'épaisseur  $h$  de la coque est faible devant le plus petit rayon de courbure  $r_{\min}$  et la plus petite longueur curviligne  $L$  de la coque.

### 3.2.1.2. Hypothèse de Mindlin – Reisner :

Les fibres droites, perpendiculaires à la surface de la coque dans la configuration de référence, restent droites après déformation .Une hypothèse supplémentaire sur la répartition du cisaillement transversal doit alors être rajoutée.

Un coefficient de correction (réduction) de cisaillement transversale, égal à  $5/6$  pour les matériaux isotropes, est introduit comme dans le cas des plaques .



Pour les coques, cette correction est liée aux courbures et à la nature de l'effet étudié (flexion cylindrique, sphérique, etc.).

L'hypothèse de Mindlin- Reisner conduit naturellement à la formulation d'élément de coque épaisse .Le rapport entre l'épaisseur et une dimension caractéristique doit cependant rester inférieur à  $1/4$  .

L'hypothèse de Love – Kirchhoff est un cas particulier de l'hypothèse de Mindlin – Reisner quand les fibres sont normales à la surface moyenne, les contraintes normales ne sont pas considérées).

### 3.3. Théories des coques minces : [FRE 03]

#### 3.3.1. Théorie de Love :

Dans le domaine des coques, la première théorie recevable a été formulée par Love en 1888. Elle est construite sur le même modèle que la théorie des plaques de Kirchhoff, à savoir exprimer les équations en se référant à la surface moyenne tout en tirant parti, à l'aide d'hypothèses raisonnables de la minceur de la structure.

La courbure de la coque pose toutefois des problèmes nouveaux et délicats, par rapport au cas de la plaque. Suite à de nombreuses recherches et controverses, la validité de la théorie simple de Love n'a finalement été confirmée que beaucoup plus tard par Koiter 1960.

#### 3.3.2. Élément de coque :

Sur la surface moyenne de la coque, on choisit les lignes de courbure comme lignes de coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$ , vu leurs propriétés remarquables. On appelle  $z$  la coordonnée mesurée selon la normale  $n$  à la surface moyenne ( $-t/2 \leq z \leq t/2$ ).

Dans la coque d'épaisseur  $t$ , on découpe un élément par deux paires de sections droites infiniment voisines, contenues dans les sections normales associées aux lignes de courbure (figure 3.2)

Au niveau  $z = 0$  de la surface moyenne, les longueurs des cotés curvilignes de l'élément sont  $ds_\alpha$  et  $ds_\beta$ ; les courbures principales  $1/r_{\max}$  et  $1/r_{\min}$  sont désignées par  $1/r_\alpha$  et  $1/r_\beta$ . Au niveau  $z$ , une surface parallèle à la surface moyenne coupe les faces de l'élément selon des arcs de longueur  $ds'_\alpha$  et  $ds'_\beta$ . Par similitude des secteurs circulaires situés dans les plans  $(r_\alpha \cdot ds_\alpha)$  et  $(r_\beta \cdot ds_\beta)$ , on a :

$$ds'_\alpha = \left(1 - \frac{z}{r_\alpha}\right) ds_\alpha \qquad ds'_\beta = \left(1 - \frac{z}{r_\beta}\right) ds_\beta \qquad (3.2)$$

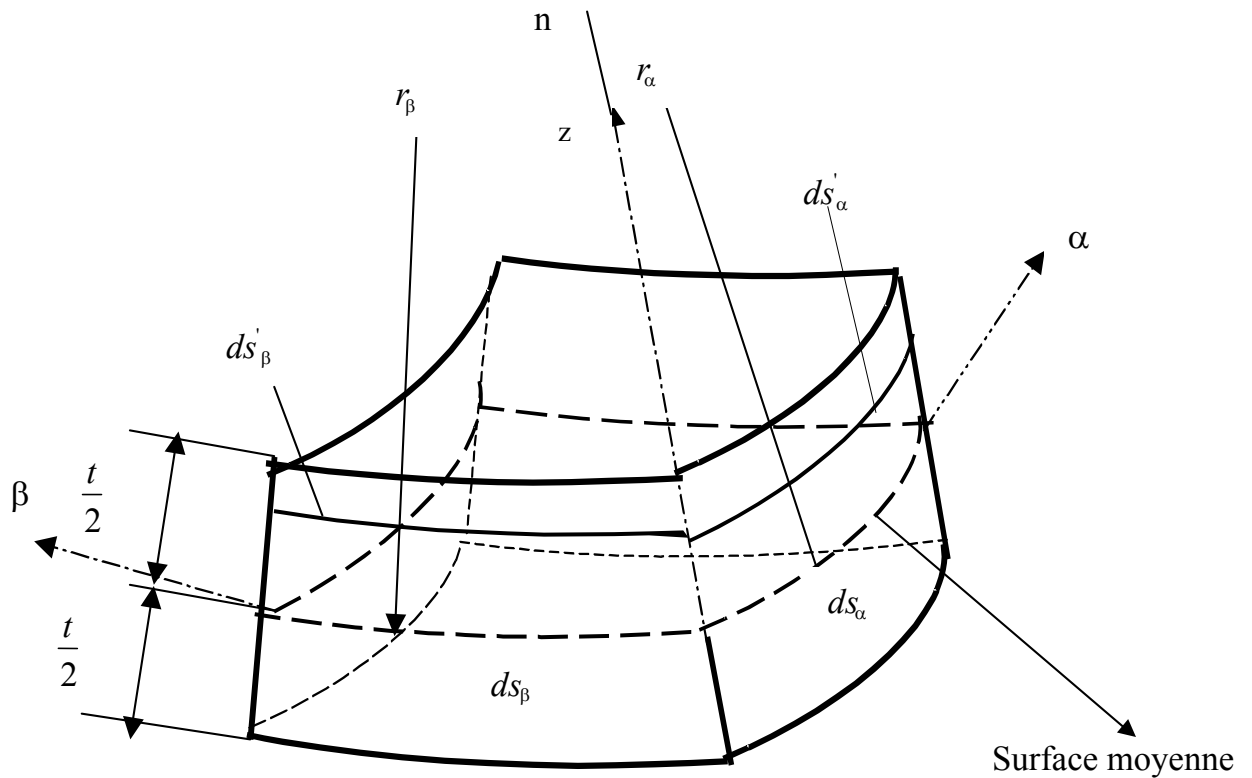


Figure 3.2 : Élément coque dans les lignes de courbure (vue arrière)

### 3.3.3. Hypothèses :

#### 3.3.3.1. Hypothèses de linéarisation :

On se place dans le cadre usuel de l'analyse linéaire des structures , acceptant

- l'hypothèse de linéarisation géométrique
- l'hypothèse de linéarisation matérielle.

La première admet que déplacements et déformations restent petits , en sorte que les équations cinématiques soient linéaires .Pratiquement , les dilatations et , surtout, les rotations doivent rester petites.

La seconde admet que le matériau obéit à la loi de Hooke .

- La coque est constituée d'un seul matériau isotrope homogène.

### 3.3.3.2. Hypothèses des structures minces :

Love a généralisé aux coques les hypothèses classiques propres aux poutres de Bernoulli et aux plaques de Kirchhoff .Elles peuvent s'exprimer de la manière suivante :

- Les normales à la surface moyenne de la coque non déformée restent des normales à la surface moyenne de la coque déformée et elles ne changent pas de longueur.
- La contrainte normale transversale est négligeable.

La première hypothèse est purement cinématique est s'appelle parfois loi de conservation des normales .Il en résulte d'abord que les glissements sont nuls dans tous les plans normaux à la surface moyenne.

$$\gamma_{\alpha z} = 0 \quad \gamma_{\beta z} = 0 \quad (3.3)$$

et ensuite que la dilatation perpendiculaire à la surface moyenne est nulle.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (3.4)$$

La seconde hypothèse, statique, permet d'ignorer les effets qui se manifestent à travers l'épaisseur et s'écrit.

$$\sigma_z \cong 0 \quad (3.5)$$

### 3.3.3.3. Hypothèse de faible épaisseur :

On fait encore l'hypothèse suivante :

- L'épaisseur  $t$  de la coque est petite vis-à-vis du rayon de courbure minimal  $r_{min}$  de la surface moyenne ,soit :

$$\frac{t}{r_{min}} \ll 1 \quad (3.6)$$

Cette hypothèse est essentielle en théorie de Love , car elle conduit à une simplification formidable des équations et fixe l'ordre de grandeur des termes négligeables ,soit  $0( t / r_{\min} )$  .

Il en résulte, dans l'équation (3.2)

$$\frac{z}{r_{\alpha}} \ll 1 \qquad \frac{z}{r_{\beta}} \ll 1 \qquad (3.7)$$

d'où

$$ds'_{\alpha} \cong ds_{\alpha} \qquad ds'_{\beta} \cong ds_{\beta} \qquad (3.8)$$

Ce qui signifie que les faces de l'élément de coque peuvent être admises rectangulaires ( figure3.2)

En liaison avec l'équation (3.4), on déduit aussi qu'on peut faire agir toutes les charges au niveau de la surface moyenne.

En pratique , pour que la théorie qui suit soit valable, il est nécessaire de respecter , en tout point d'une coque , l'ordre de grandeur.

$$\frac{t}{r_{\min}} \prec \frac{1}{10} \qquad (3.9)$$

### 3.3.4. L'évolution de l'analyse des coques minces par éléments finis :

Les constructions de coques à parois minces combinent le poids léger avec la haute résistance. C'est pour ces raisons on les trouve dans larges applications dans les diverses branches de la technologie telles que les ponts de route, les structures aérospatiales et les structures de bateau. Ceci explique le succès réalisé dans ce type de structures. En raison de la forme complexe de la structure de coque, les solutions analytiques sont seulement disponibles pour des cas simples d'où la nécessité des méthodes numériques, comme l'analyse par éléments finis.

L'analyse des coques minces par éléments finis a commencé par son application dans les véhicules aérospatiales. La première tentative était de diviser les surfaces des structures de coques en des éléments plats ayant la forme rectangulaire ou triangulaire, chaque élément subit les déformations de flexion et membranaire.

Un élément plat de coques est obtenu par superposition d'un élément membranaire et un élément flexionnel. Cette approche a été utilisée pour les coques cylindriques par Hrennikoff et Tezcan (1966) et pour les coques de forme générale par Zienkiewicz et Cheung (1967). Cependant, cette méthode renferme un inconvénient qu'aucun accouplement n'est entre l'effet flexionnel et l'effet membranaire. De ce fait les grandes coques courbées ne seront pas bien rapprochées à moins qu'on utilise des petits éléments pour modéliser les structures comme le précisent Fulton, Epink et Walz (1967).

Jones et Strome (1967) ont démontré le besoin d'utilisation des éléments de coques courbées, de sorte qu'aucune transformation des coordonnées et aucune approximation géométrique supplémentaire ne soient nécessaires dans la dérivation des équations structurales de rigidité.

Une considérable attention a été alors accordée au développement des éléments de coques courbés comme l'élément rectangulaire basé sur la théorie de coques surbaissées

développé par Brebbia et Connor (1967). Ces éléments courbés sont basés sur des déplacements polynomiales assumés et ils ont la même représentation linéaire des déplacements dans le plan  $u$  et  $v$ . La convergence des résultats est avérée lente. L'attention a été donc portée sur le développement des éléments d'ordre élevé. Bogner (1967) a développé un élément de coque cylindrique rectangulaire basé sur un champ polynomiale cubique des déplacements pour représenter les déplacements  $u, v, w$ . Cantin et Clough (1979) ont montré qu'aucuns des éléments développés basés sur les formes polynômes des déplacements  $u, v$  et  $w$  ne satisfont chacun des six modes du corps rigide de l'élément coque. Pour tenir compte de la représentation de tous les mouvements du corps rigide, ils ont alors introduit des termes contenant des fonctions trigonométriques, et ils ont développé un élément de coque cylindrique courbé avec 6 degrés de liberté. Les résultats obtenus, dans l'analyse des coques cylindriques, en utilisant cet élément ont confirmé que l'inclusion des termes des déplacements du corps rigide mène aux meilleurs résultats pour les grosses mailles.

Le travail sur le développement des éléments d'ordre élevé n'a pas cessé d'évoluer et un des éléments les plus réussis a été développé par Cowper et Al (1979), dans lequel des déplacements en cinquième degré et cubiques ont respectivement été assumés pour la flexion et les déformations dans le plan. L'élément résultant a 36 degrés de liberté. Les éléments employant plus de 50 degrés de liberté ont été également développés par Argyris et Al (1968) et par Dawe DJ et Al (1975) en utilisant des termes polynomiales d'ordre élevé pour les déplacements dans le plan afin d'améliorer l'exactitude.

Plus récemment Groenwold et Stander (1995) ont développé un élément de coque quadrilatère plat ayant quatre nœuds avec 6 degrés de liberté par nœud en utilisant une forme modifiée d'un degré de liberté membranaire « Drilling degree of freedom » d'Ibrahimbegovic et Al (1990) et l'élément basé sur l'approche en déformation de plaque de Bathe et Dvorken (1985). En outre Koziey et Mirza (1997) ont présenté un élément de coque épaisse avec des polynômes cubiques pour les déplacements et des polynômes quadratiques pour les rotations en utilisant une intégration réduite afin d'améliorer les résultats pour les coques minces.

On voit clairement que les éléments développés ci dessus sont des éléments plats ou des éléments courbés d'ordre élevé liés aux degrés de liberté non -essentiels additionnels afin d'obtenir des résultat satisfaisants . Il est également bien connu que les éléments de coques plats exigent que les panneaux courbés doivent être divisés en un grand nombre d'éléments pour obtenir un niveau satisfaisant d'exactitude et ils sont seulement utilisés en raison de leur simplicité. De même les éléments d'ordre élevé liés à un grand nombre de degrés de liberté mènent non seulement à une augmentation considérable du nombre d'inconnus pour être résolus mais mènent également à une largeur de bande beaucoup plus large de la matrice structurale globale. De plus les degrés de liberté internes additionnels ne sont pas associés aux forces physiques généralisées correspondantes. [DJO 04]



### 3.4. Coques cylindriques :[FRE 03]

#### 3.4.1. Géométrie :

La surface moyenne cylindrique  $\Sigma$  de la coque peut être engendrée par une droite, la génératrice, se déplaçant parallèlement à elle – même en suivant une courbe, la directrice (figure 3.3). La directrice est admise plane et les génératrices sont normales au plan contenant la directrice. Inversement, la surface moyenne s’obtient aussi en faisant se déplacer la directrice parallèlement à elle-même le long d’une génératrice (surface de translation). Conventionnellement, on place les génératrices à l’horizontale. La figure 3.3 montre la surface moyenne et les coordonnées ; génératrices et directrices sont lignes de courbures  $(x, \varphi)$ .

Si la directrice est une courbe fermé (cercle, ellipse), la coque est dite fermée également (tuyau). Si la directrice est ouverte (arc de cercle, demi-ellipse), la coque est dite ouverte et qualifiée de voûte.

#### 3.4.2. Les relations de la théorie classique de love (la première approximation de la théorie des coques) :[FRE 03]

##### 3.4.2.1. Equations d’équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \Phi} + p_x = 0 \\ \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \Phi} - \frac{1}{R} V_\varphi + p_\varphi = 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \Phi} + \frac{1}{R} N_\varphi + p_z = 0 \\ \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \Phi} - V_\varphi = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \Phi} - V_x = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

avec  $N_{\varphi x} = N_{x\varphi}$  et  $M_{\varphi x} = M_{x\varphi}$

**3.4.2.2. Cinématique :**

Les six quantités des déformations sont définies en fonction des déplacements pour une coque cylindrique comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_\Phi = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \Phi} - w \right) & \gamma_{x\Phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \Phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \kappa_\Phi = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \Phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} \right) & \kappa_{x\Phi} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \Phi} \right) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Les rotations sont données comme suit :

$$\theta_x = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial \Phi} + v \right) \quad \theta_\Phi = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.12)$$

**3.4.2.3. Loi constitutive :**

Les résultantes des contraintes ( $N_x$ ,  $N_\Phi$  et  $N_{x\Phi}$ ) qui correspondent aux déformations membranaires  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\Phi$  et  $\gamma_{x\Phi}$  et les moments ( $M_x$ ,  $M_\Phi$  et  $M_{x\Phi}$ ) qui correspondent aux changements des courbures  $\kappa_x$ ,  $\kappa_\Phi$  et  $\kappa_{x\Phi}$  (déformations de flexion) sont définis comme suit : relations (efforts – déformation) (figure 3.4) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} N_x = C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\Phi) & N_\Phi = C(\varepsilon_\Phi + \nu \varepsilon_x) & N_{x\Phi} = \frac{1}{2}(1-\nu)C\gamma_{x\Phi} \\ M_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_\Phi) & M_\Phi = D(\kappa_\Phi + \nu \kappa_x) & M_{x\Phi} = D(1-\nu)\kappa_{x\Phi} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$D'où \quad C = E t / (1-\nu^2) \quad , \quad D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

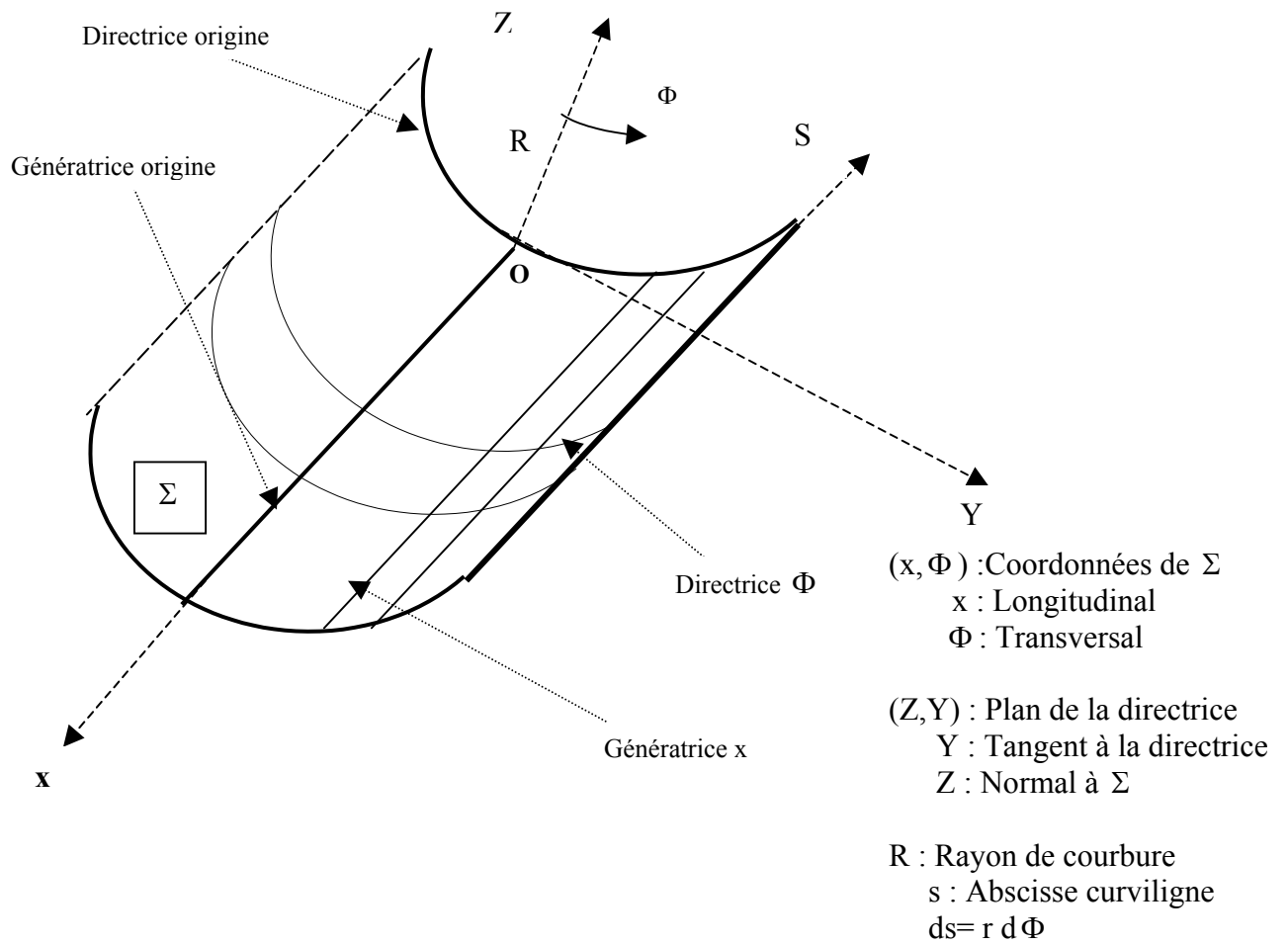


Figure 3.3 : Coque cylindrique

Dans la théorie classique, l'énergie de déformation est la somme des énergies des comportements membranaire et de flexion .Elle a la forme suivante:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{A_s} C \left[ (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{\gamma_{xy}^2}{4}) \right] + D \left[ (\kappa_x + \kappa_y)^2 - 2(1-\nu)(\kappa_x \kappa_y - \kappa_{xy}^2) \right] \} dA_s \quad (3.14)$$

$A_s$  : L'aire de la surface moyenne

Dans le développement des éléments de coques cylindriques, la représentation des mouvements du corps rigide est donnée à partir des équations (3.10) égalisées à zéro pour répartir les 6 coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_6$ , donc les composantes des déplacements ont la forme suivante:

$$\begin{cases} u_r = Ra_2 \cos \frac{y}{R} + Ra_4 \sin \frac{y}{R} + a_5 \\ v_r = (a_1 + a_2 x) \sin \frac{y}{R} - (a_3 + a_4 x) \cos \frac{y}{R} + a_6 \\ w_r = -(a_1 + a_2 x) \cos \frac{y}{R} - (a_3 + a_4 x) \sin \frac{y}{R} \end{cases} \quad (3.15)$$

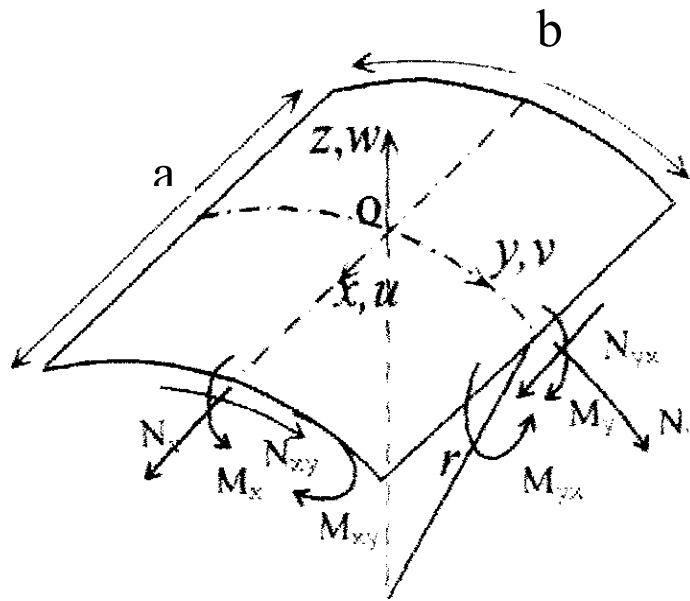


Figure 3.4 :Les efforts de l'élément coque

### 3.4.3. Théorie de Koiter – Sander : [MOR 76]

Les équations déformation - déplacement de la théorie de Koiter et Sander sont compatibles avec le mouvement du corps rigide, la théorie de Koiter est basée sur les hypothèses d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales .

Dans la théorie de Koiter et Sander les composantes des déformations et les changements de courbures pour une coque cylindrique circulaire sont donnés en fonctions des déplacements comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_y = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Les relations constitutives pour une coque construit d'un matériau isotrope élastique sont les mêmes que les relations de la première approximation.

### 3.5. Coques surbaissées : [FRE 03]

#### 3.5.1. Géométrie :

Lorsqu'une coque a, en tout point, une surface moyenne de très faible courbure, elle est qualifiée de coque surbaissée ; la surface moyenne est aussi dite surbaissée. On peut tracer un plan, à peu près parallèle à la surface moyenne  $\Sigma$  de la coque, dans lequel on dessine les axes X et Y d'un système d'axe cartésiens (X, Y, Z) (Figure 3.5), et définir  $\Sigma$  par rapport à ce plan, explicitement, par

$$Z = Z(X, Y) \quad (3.17)$$

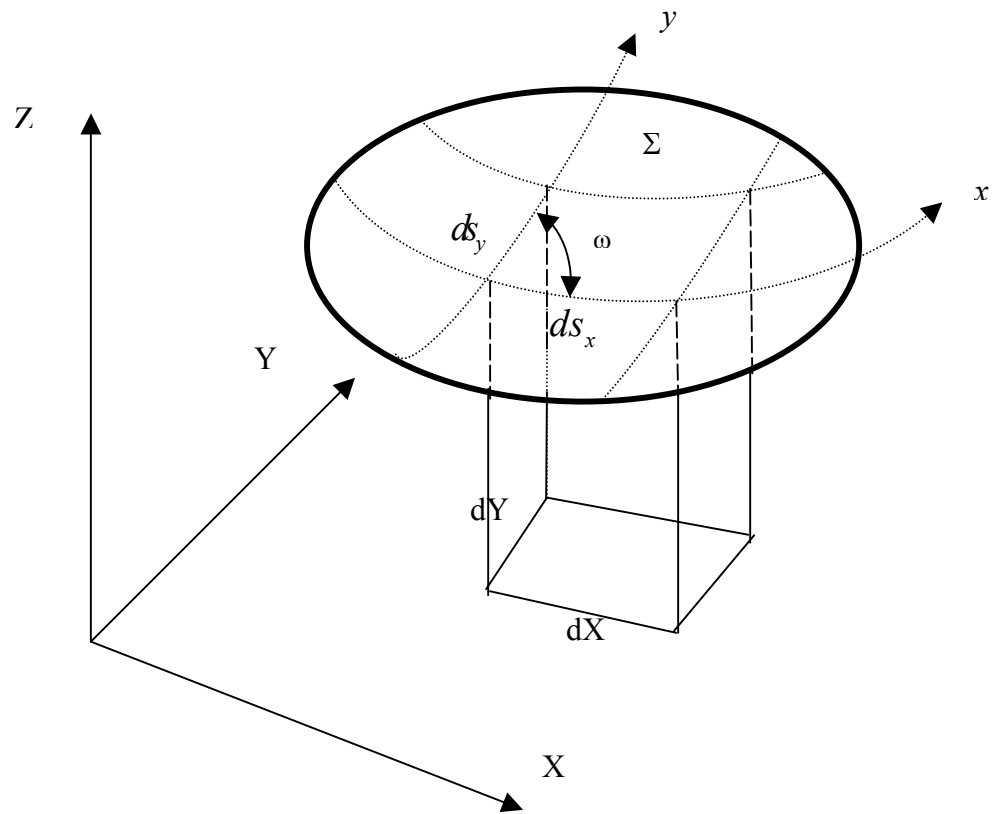


Figure 3.5 : Surface moyenne d'une coque surbaissée

La surface moyenne de la coque est surbaissée si ,par rapport au plan de référence (X ,Y) , les pentes  $\frac{\partial Z}{\partial X}$  et  $\frac{\partial Z}{\partial Y}$  sont petites, c'est-à-dire si les carrés et produits des dérivées première de Z(X,Y) sont négligeables devant l'unité.

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 \ll 1 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 \ll 1 \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial Z}{\partial Y}\right| \ll 1 \quad (3.18)$$

En pratique ,ces pentes ne devraient pas dépasser 0.1 radian , mais les résultats peuvent encore être intéressants jusqu'à 0.5 radian ( $\approx 30^\circ$ ), on déduit :

$$ds_x \cong dX \quad ds_y \cong dY \quad \cos\omega \cong 1 \quad dA \cong dXdY \quad (3.19)$$

**Remarque :**

La langue scientifique anglaise possède deux qualificatifs permettant de distinguer les coques surbaissées des autres : *shallow* et *deep* .La langue française n'a pas de terme pour *deep*. On emploie parfois les expressions à faible courbure et à forte courbure

**3.5.2.Coques surbaissées en coordonnées curvilignes (Théorie de Donnell) :**

Toutes les grandeurs et équations s'expriment dans les coordonnées curvilignes (x, y) de la surface moyenne. La normale est désignée par z.

Dans cette théorie ,une hypothèse complémentaire ,de caractère cinématique , est nécessaire ; elle postule que les composantes membranaires *u* et *v* du déplacement sont négligeable devant la composante transversale *w*: elles peuvent être ignorées dans l'expression des rotations, et disparaissent donc aussi de celles des courbures .

Les rotations se simplifient en :

$$\theta_x = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \Phi} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.20)$$

Vu l'intérêt pratique , les ingénieurs ont cherché des simplifications raisonnables pour résoudre les dix – sept équations (équations 3.10 ,3.11 , 3.13) .En supposant la directrice circulaire ( $r = R = \text{cste}$  ) et la coque surbaissée selon Donnell , les variations de courbure se simplifient en :

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_\Phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} \quad \kappa_{x\Phi} = \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \Phi} \quad (3.21)$$



## Chapitre 4. Formulation des éléments finis cylindriques étudiés

### 4.1. Introduction :

Une nouvelle approche a été développée à l'université de Cardiff (UK) connue sous le nom d'approche basée sur les déformations . Les éléments arc et celui de coque cylindrique dérivant de cette dernière semble avoir des propriétés comparables et souvent supérieures en précision et temps machine aux éléments standards de Cantin et Clough .Par ces travaux intéressants , les deux auteurs Ashwell et Sabir [ASH 72] ouvrent ainsi de nouveaux horizons dans la recherche d'éléments d'ordre élevé encore meilleurs et peu coûteux.

On abordera dans ce chapitre la formulation théorique d'une variété d'éléments finis basés sur le modèle en déformation destinés pour l'analyse des coques cylindriques et l'élément de Sabir et Lock [SAB 72] basé sur le modèle en déplacement .Cet élément est une version simplifier de l'élément Cantin et Clough [CAN 68].

### 4.2. Élément de Sabir et Ashwell [ASH 72]:

Le modèle en déformation est appliqué sur un élément rectangulaire de coque cylindrique, l'élément résultant est un élément non conforme à 20 degrés de liberté, il satisfait les conditions du mode du corps rigide et l'état de déformation constante .Pour cet élément, on utilise seulement des degrés de liberté externes essentiels , trois déplacements linéaires  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et deux rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ .

**4.2.1. Equations Déformations - Déplacements utilisées :**

Dans un système des coordonnées curvilignes  $x, y, z$  les relations déformations - déplacements sont basées sur les hypothèses de Kirchhoff – Love .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \Phi} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\Phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \Phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_\Phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \Phi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} \\ \kappa_{x\Phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \Phi} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_\Phi, \gamma_{x\Phi}$  :Déformations membranaires.

$\kappa_x, \kappa_\Phi, \kappa_{x\Phi}$  : Déformations de flexion ( les changements des courbures).

$R$  : Le rayon de la surface moyenne .

Tout les calculs pour cet élément sont donnés dans le système  $x, y$  (figure 4.1) dont son origine est le centre de l'élément ( une position qui mène à la forme la plus simple de la matrice  $[K_0]$  ).

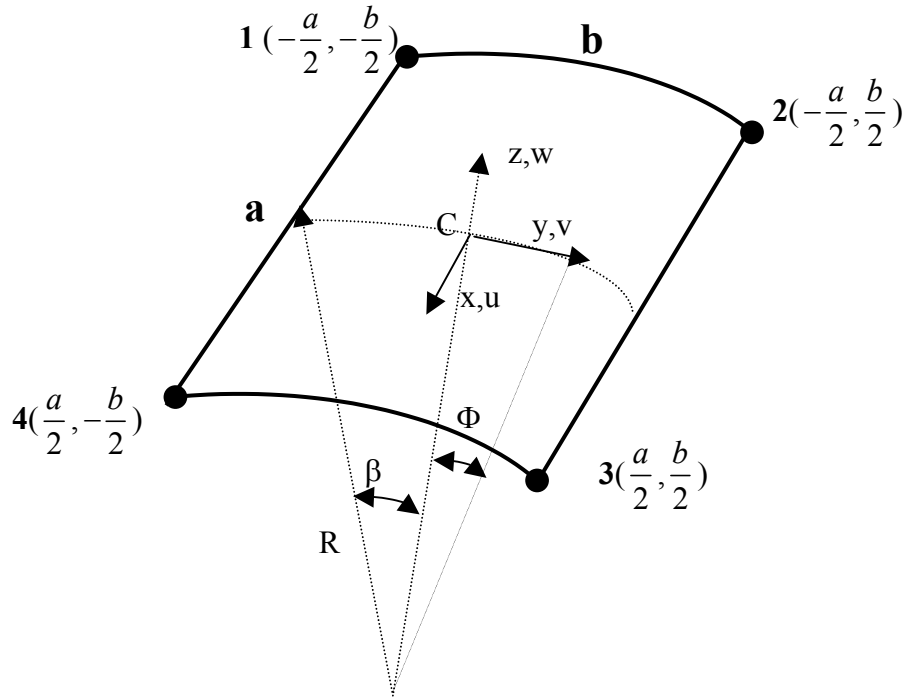


Figure 4.1 : La géométrie de l'élément coque ( $\Phi = \frac{y}{R}$ )

#### 4.2.2. Equations de compatibilité:

Pour avoir les équations de compatibilité ,les trois déplacements  $u, v, w$  donnés par l'équation (4.1) sont éliminés par dérivation des six déformations . On trouve les équations de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \epsilon_\Phi}{\partial x^2} + \frac{k_x}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial \Phi^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_{x\Phi}}{\partial x \partial \Phi} = 0 \\ \frac{\partial k_{x\Phi}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial k_x}{\partial \Phi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial \Phi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_{x\Phi}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial k_\Phi}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial k_{x\Phi}}{\partial \Phi} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Ces équations peuvent être vérifiées en posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \Phi} = \frac{\partial \gamma_{x\Phi}}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_\Phi}{\partial x^2} = -\frac{\kappa_x}{R} \\ \frac{\partial \kappa_{x\Phi}}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial \kappa_x}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial \kappa_\Phi}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial \kappa_{x\Phi}}{\partial \Phi} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

#### 4.2.3. Relations constitutives :

Pour un matériau isotrope, les relations contraintes – déformations sont comme suit :

$$[\sigma] = [D][\varepsilon]$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_1 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

avec

$$D_1 = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \quad D_2 = \nu D_1 \quad D_3 = \frac{1}{2} D_1 (1-\nu)$$

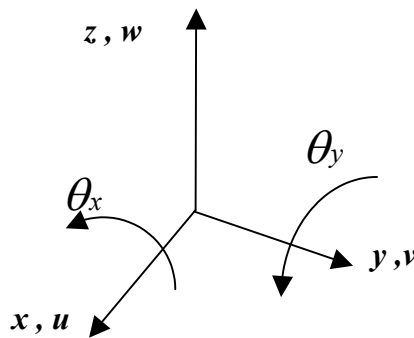
$$K_1 = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad K_2 = \nu K_1 \quad K_3 = K_1 (1-\nu)$$

Et  $t$  : épaisseur de la coque

$E$ ,  $\nu$  sont respectivement le module de Young et coefficient de Poisson

**4.2.4. Degrés de liberté utilisés:**

Pour avoir un élément simple et afin d'éviter les difficultés associées aux degrés de liberté non essentiels (non géométriques tel que  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, w_{x\Phi} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \Phi}$ ), les 5 degrés de liberté essentiels utilisés sont :  $u, v, w, \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}, \theta_x = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R})$  par nœud (figure 4.2), nous obtenons un élément rectangulaire à 20 degrés de liberté avec une matrice de rigidité élémentaire  $20 \times 20$ . Le vecteur des déplacements contient donc 20 constantes ( $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ ).



**Figure 4.2 :** Degrés de liberté de l'élément coque.

Pour avoir les expressions des déplacements du mouvement du corps rigide, les six équations de déformations (équation 4.1) sont égalisées à zéro et les équations différentielles résultantes sont intégrées, nous obtenons les expressions suivantes:

$$\begin{cases} u_r = R\alpha_2 \cos \Phi + R\alpha_4 \sin \Phi + \alpha_5 \\ v_r = (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \Phi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \Phi + \alpha_6 \\ w_r = -(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \Phi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \Phi \end{cases} \quad (4.5)$$

Les équations ci dessus représentent le champ des déplacements qui correspond aux déplacements des modes rigides relatifs à l'élément. Ces équations contiennent 6 constantes  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ .

Puisque l'élément a vingt degrés de liberté, le champ final des déplacements doit contenir 20 constantes. On a utilisé six constantes pour la représentation des mouvements du corps rigide, les quatorze constantes restantes sont réparties sur les expressions des déformations de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \alpha_7 + \Phi \alpha_8 \\ \varepsilon_\Phi = \alpha_9 + x\alpha_{10} + \left[ -\frac{1}{2R} x^2 \alpha_{12} - \frac{1}{6R} x^3 \alpha_{13} - \frac{1}{2R} x^2 \Phi \alpha_{14} - \frac{1}{6R} x^3 \Phi \alpha_{15} \right] \\ \gamma_{x\Phi} = \alpha_{11} + \left[ \frac{1}{R} x \alpha_8 \right] \\ k_x = \alpha_{12} + x\alpha_{13} + \Phi \alpha_{14} + x\Phi \alpha_{15} \\ k_\Phi = \alpha_{16} + x\alpha_{17} + \Phi \alpha_{18} + x\Phi \alpha_{19} \\ k_{x\Phi} = \alpha_{20} + \left[ \frac{1}{R} x \alpha_{14} + \frac{1}{2R} x^2 \alpha_{15} + R\Phi \alpha_{17} + \frac{1}{2} R\Phi^2 \alpha_{19} \right] \end{array} \right. \quad (4.6)$$

#### 4.2.5. Champ des déplacements :

En remplaçant l'équation (4.6) dans l'équation (4.1) et après intégration ,nous obtenons les composantes du champ de déplacements:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \alpha_7 x + \alpha_8 x \Phi + R\Phi \alpha_{11} - \frac{1}{2} R^3 \Phi^2 \alpha_{17} + R^3 \Phi (1 - \frac{1}{6} \Phi^2) \alpha_{19} - R^2 \Phi \alpha_{20} \\ v = R^2 \Phi \alpha_{16} + R^2 x \Phi \alpha_{17} + \frac{1}{2} R^2 \Phi^2 \alpha_{18} + R^2 x (\frac{1}{2} \Phi^2 - 1) \alpha_{19} + R x \alpha_{20} \\ w = R \alpha_9 + R x \alpha_{10} - \frac{1}{2} x^2 \alpha_{12} - \frac{1}{6} x^3 \alpha_{13} - \frac{1}{2} x^2 \alpha_{14} \Phi - \frac{1}{6} x^3 \alpha_{15} \Phi - R^2 \alpha_{16} - R^2 x \alpha_{17} \\ \quad - R^2 \alpha_{18} \Phi - R^2 \alpha_{19} x \Phi \end{array} \right. \quad (4.7)$$

La forme finale du champ des déplacements s'écrit en additionnant les équations (4.7) et (4.5) d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = R\alpha_2 \cos \Phi + R\alpha_4 \sin \Phi + \alpha_5 + \alpha_7 x + \alpha_8 x \Phi + R\Phi \alpha_{11} - \frac{1}{2} R^3 \Phi^2 \alpha_{17} \\ \quad + R^3 \Phi (1 - \frac{1}{6} \Phi^2) \alpha_{19} - R^2 \Phi \alpha_{20} \\ v = (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \Phi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \Phi + \alpha_6 + R^2 \Phi \alpha_{16} + R^2 x \Phi \alpha_{17} \\ \quad + \frac{1}{2} R^2 \Phi^2 \alpha_{18} + R^2 x (\frac{1}{2} \Phi^2 - 1) \alpha_{19} + R x \alpha_{20} \\ w = -(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \Phi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \Phi + R \alpha_9 + R x \alpha_{10} - \frac{1}{2} x^2 \alpha_{12} \\ \quad - \frac{1}{6} x^3 \alpha_{13} - \frac{1}{2} x^2 \alpha_{14} \Phi - \frac{1}{6} x^3 \alpha_{15} \Phi - R^2 \alpha_{16} - R^2 x \alpha_{17} - R^2 \alpha_{18} \Phi - R^2 \alpha_{19} x \Phi \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Les deux degrés de liberté  $\theta_x, \theta_y$  sont comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_x = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} \right) = -\alpha_6 \frac{1}{R} - \alpha_{14} \frac{1}{2R} x^2 - \frac{1}{6R} x^3 \alpha_{15} - \alpha_{16} y - x \Phi \alpha_{17} + \left( \frac{1}{2} \Phi^2 + R \right) \alpha_{18} \\ \quad - \frac{R}{2} x \Phi^2 \alpha_{19} - x \alpha_{20} \\ \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = -\alpha_2 \cos \Phi - \alpha_4 \sin \Phi + R \alpha_{10} - \alpha_{12} x - \alpha_{13} \frac{x^2}{2} - x \Phi \alpha_{14} - \frac{1}{2} x^2 \Phi \alpha_{15} \\ \quad - R^2 \alpha_{17} - R^2 \Phi \alpha_{19} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

#### 4.2.6 . Calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ :

La matrice de rigidité élémentaire est donnée par l'équation( 2.30) comme suit.

$$[K_e] = [C]^{-T} \left[ \iint [Q]^T [D][Q] dx dy \right] [C]^{-1} = [C]^{-T} [K_0][C]^{-1} \quad (4.10)$$

avec

$$[K_0] = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [Q]^T [D][Q] dx dy \quad (4.11)$$

La matrice  $[K_0]$  est calculée par intégration analytique . (voir Annexe)

**4.2.7. Vecteur des charges équivalentes :**

Le vecteur des charges équivalentes pour un élément de coques est donné par l'équation suivante :

$$\{F_e\} = [C]^{-T} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [\varphi(x, y)]^T f(x, y) dx dy = [C]^{-T} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (-wq_1 + vq_2) dx dy = [C]^{-T} \{F_0\} \quad (4.12)$$

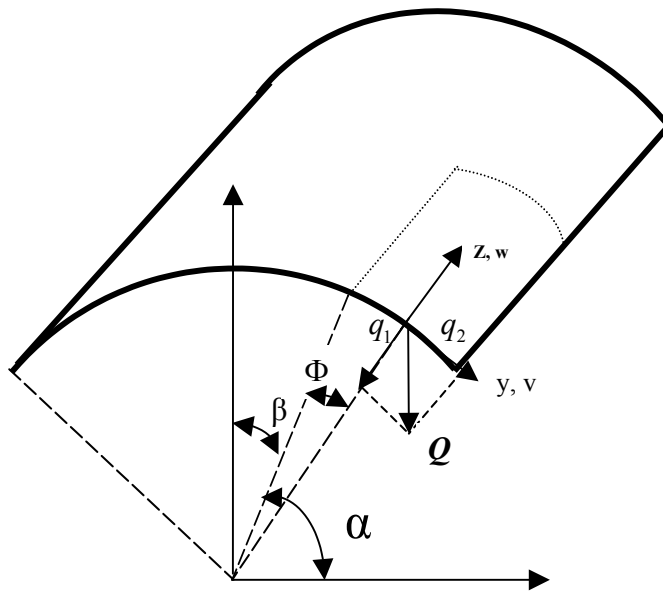
avec

$$\begin{cases} q_1 = Q \sin(\alpha - \Phi) \\ q_2 = Q \cos(\alpha - \Phi) \end{cases} \quad (4.13)$$

$Q$  : La charge répartie.

On pose :

$$\{F_0\} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (-wq_1 + vq_2) dx dy \quad (4.14)$$



**Figure 4.3 :** Charges équivalentes d'un élément coque cylindrique

Le vecteur  $\{F_0\}$  pour les éléments [ASH 72] et [SAB 72] est donné dans l'annexe.



### 4.3. L'élément de Charchafchi et Sabir [CHA 82] :

L'élément de la référence [CHA 82] est une modification de l'élément développé par Ashwell et Sabir [ASH 72]. L'élément résultant a les mêmes représentations géométriques que l'élément [ASH 72]. Sauf que la formulation de cet élément est basée sur les hypothèses de Sander - Koiter au lieu des hypothèses de Kirchhoff - Love utilisées dans la formulation de l'élément [ASH 72].

Une autre version de cet élément où le coefficient de Poisson est inclus dans les expressions des déformations afin de satisfaire les équations d'équilibre à l'intérieur de l'élément.

#### 4.3.1. Calcul des fonctions des déplacements:

Les relations déformation - déplacement données par Sander - Koiter sont comme suit (équation 3.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \Phi} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\Phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \Phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_\Phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \Phi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} \\ \kappa_{x\Phi} = \frac{3}{4} \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \Phi} - \frac{1}{4} \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \Phi} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Où  $\partial \Phi = R \partial y$

En éliminant les trois déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  dans les six équations des déformations (équation 4.15), nous obtenons les trois équations de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_\Phi}{\partial x^2} - \frac{\kappa_x}{R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \Phi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_{x\Phi}}{\partial x \partial \Phi} = 0 \\ -\frac{\partial \kappa_{x\Phi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \kappa_x}{\partial \Phi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \Phi} + \frac{3}{4R} \frac{\partial \gamma_{x\Phi}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \kappa_\Phi}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \kappa_{x\Phi}}{\partial \Phi} - \frac{1}{4R^2} \frac{\partial \gamma_{x\Phi}}{\partial \Phi} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Les expressions des déformations sont comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha_7 + \Phi \alpha_8 \\ \varepsilon_\Phi = \alpha_9 + x \alpha_{10} + \left[ -\frac{1}{2R} x^2 \alpha_{12} - \frac{1}{6R} x^3 \alpha_{13} - \frac{1}{2R} x^2 \Phi \alpha_{14} - \frac{1}{6R} x^3 \Phi \alpha_{15} \right] \\ \gamma_{x\Phi} = \alpha_{11} + \left[ \frac{4}{3} \frac{1}{R} x \alpha_8 \right] \\ k_x = \alpha_{12} + x \alpha_{13} + \Phi \alpha_{14} + x \Phi \alpha_{15} \\ k_\Phi = \alpha_{16} + x \alpha_{17} + \Phi \alpha_{18} + x \Phi \alpha_{19} \\ k_{x\Phi} = \alpha_{20} + \left[ \frac{1}{R} x \alpha_{14} + R \Phi \alpha_{17} + \frac{1}{2R} x^2 \alpha_{15} + \frac{1}{2} R \Phi^2 \alpha_{19} \right] \end{cases} \quad (4.17)$$

Les fonctions de forme sont les suivantes :

$$\begin{cases} u = \alpha_7 x + \alpha_8 x \Phi + \frac{3}{4} R \Phi \alpha_{11} - \frac{1}{2} R^3 \Phi^2 \alpha_{17} + R^3 \Phi (1 - \frac{1}{6} \Phi^2) \alpha_{19} - R^2 \Phi \alpha_{20} \\ v = (\frac{1}{4} a_{11} - R^2 a_{19} + R a_{20}) x + \frac{1}{6R} x^2 a_8 + R^2 \Phi \alpha_{16} + R^2 x \Phi \alpha_{17} + \frac{1}{2} R^2 \Phi^2 \alpha_{18} + \frac{1}{2} R^2 x \Phi^2 \alpha_{19} \\ w = R \alpha_9 + R x \alpha_{10} - \frac{1}{2} x^2 \alpha_{12} - \frac{1}{6} x^3 \alpha_{13} - \frac{1}{2} x^2 \alpha_{14} \Phi - \frac{1}{6} x^3 \alpha_{15} \Phi - R^2 \alpha_{16} - R^2 x \alpha_{17} \\ \quad - R^2 \alpha_{18} \Phi - R^2 \alpha_{19} x \Phi \end{cases} \quad (4.18)$$

Les fonctions de forme complètes sont la somme des équations (4.18) et (4.5)

$$\left\{ \begin{array}{l} u = R\alpha_2 \cos \Phi + R\alpha_4 \sin \Phi + \alpha_5 + \alpha_7 x + \alpha_8 x \Phi + \frac{3}{4} R \Phi \alpha_{11} - \frac{1}{2} R^3 \Phi^2 \alpha_{17} \\ \quad + R^3 \Phi (1 - \frac{1}{6} \Phi^2) \alpha_{19} - R^2 \Phi \alpha_{20} \\ v = (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \Phi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \Phi + \alpha_6 + (\frac{1}{4} a_{11} - R^2 a_{19} + R a_{20}) x \\ \quad + \frac{1}{6R} x^2 a_8 + R^2 \Phi \alpha_{16} + R^2 x \Phi \alpha_{17} + \frac{1}{2} R^2 \Phi^2 \alpha_{18} + \frac{1}{2} R^2 x \Phi^2 \alpha_{19} \\ w = (\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \Phi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \Phi + R \alpha_9 + R x \alpha_{10} - \frac{1}{2} x^2 \alpha_{12} \\ \quad - \frac{1}{6} x^3 \alpha_{13} - \frac{1}{2} x^2 \alpha_{14} \Phi - \frac{1}{6} x^3 \alpha_{15} \Phi - R^2 \alpha_{16} - R^2 x \alpha_{17} - R^2 \alpha_{18} \Phi - R^2 \alpha_{19} x \Phi \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Les deux degrés de liberté  $\theta_x, \theta_y$  sont comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_x = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R} \right) = -\alpha_6 \frac{1}{R} - \alpha_8 \frac{1}{6R^2} x^2 - \alpha_{11} \frac{1}{4R} x - \alpha_{14} \frac{1}{2R} x^2 - \frac{1}{6R} x^3 \alpha_{15} \\ \quad - \alpha_{16} y - R x \Phi \alpha_{17} - R \left( \frac{1}{2} \Phi^2 + 1 \right) \alpha_{18} - \alpha_{19} \frac{1}{2R} x y^2 - x \alpha_{20} \\ \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = -\alpha_2 \cos \Phi - \alpha_4 \sin \Phi + R \alpha_{10} - \alpha_{12} x - \alpha_{13} \frac{x^2}{2} - x \Phi \alpha_{14} - \frac{1}{2} x^2 \Phi \alpha_{15} \\ \quad - R^2 \alpha_{17} - R^2 \Phi \alpha_{19} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

### 4.3.2. Equations d'équilibre :

Les équations différentielles d'équilibre sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\nu \partial \varepsilon_\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2R} (1-\nu) \frac{\partial \gamma_{x\Phi}}{\partial \Phi} - \frac{h^2}{24R^2} \left[ (1-\nu) \frac{\partial k_{x\Phi}}{\partial \Phi} \right] = 0 \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_{x\Phi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \varepsilon_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{\nu \partial \varepsilon_x}{\partial \Phi} \right) + \frac{h^2}{12R^2} \left[ \frac{3R}{2} (1-\nu) \frac{\partial k_{x\Phi}}{\partial \Phi} + \frac{\partial k_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{\nu \partial k_x}{\partial \Phi} \right] = 0 \\ -\frac{1}{R} (\varepsilon_\Phi + \nu \varepsilon_x) + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^2 k_x}{\partial x^2} + \frac{\nu \partial^2 k_\Phi}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{12R^2} \left[ \frac{\partial^2 k_\Phi}{\partial \Phi^2} + \frac{\nu \partial^2 k_x}{\partial \Phi^2} \right] + \frac{h^2}{6R} (1-\nu) \frac{\partial^2 k_{x\Phi}}{\partial x \partial \Phi} = 0 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$h$  : l'épaisseur de la coque

Les termes additionnels dans les expressions déformation – déplacement pour satisfaire aux équations différentielles d'équilibre sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = -\nu x a_{10} + \left( \frac{\nu x^2}{2R} a_{12} + \frac{\nu x^3}{6R} a_{13} + \frac{\nu x^2}{6R} \Phi a_{14} + \frac{\nu x^3}{6R} a_{15} \right) \\ \varepsilon_\phi = -\nu \Phi a_8 \\ \gamma_{x\phi} = \frac{2\nu x^3}{9R^2} a_{14} + \frac{\nu x^4}{18R^2} a_{15} \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Après intégration des équations (4.22), les termes additionnels aux équations (4.19) et (4.20) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \nu \left( \frac{-x^2}{2} a_{10} + \frac{x^3}{R} a_{12} + \frac{x^4}{24R} a_{13} + \frac{x^3}{6R} \Phi a_{14} + \frac{x^4}{24R} \Phi a_{15} \right) \\ v = \nu \left( \frac{x^4}{72R^2} a_{14} + \frac{x^5}{360R^2} a_{15} \right) \\ \theta_x = -\left( \frac{x^2}{2R} + \nu \frac{x^4}{72R^3} \right) a_{14} - \left( \frac{x^3}{6R} + \nu \frac{x^5}{360R^3} \right) a_{15} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

#### 4.4. Les éléments de Bull [BUL 84] :

Des éléments basés sur l'approche en déformation sont développés par Bull [BUL 84] en réarrangeant les termes polynomiales dans les fonctions déformations –déplacements (équation 4.6) .

Les fonctions déformation – déplacement de l'élément Ashwell et Sabir [ASH 72] sont la base de ces transformations. Les éléments résultants ont les mêmes représentations géométriques que l'élément [ASH 72].

##### 4.4.1. La première variante :

Le premier réarrangement des termes  $a_i$  (élément 1) est effectué en augmentant l'ordre des termes de la composante  $\kappa_\Phi$  par le remplacement des termes  $\alpha_{14}$  de l'équation (4.6) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \alpha_7 + \Phi \alpha_8 \\ \varepsilon_\Phi = \alpha_9 + x\alpha_{10} + \left[ -\frac{1}{2R}x^2\alpha_{12} - \frac{1}{6R}x^3\alpha_{13} - \frac{Rx^2\Phi^3}{6}\alpha_{14} - \frac{1}{6R}x^3\Phi\alpha_{15} \right] \\ \gamma_{x\Phi} = \alpha_{11} + \left[ \frac{1}{R}x\alpha_8 \right] \\ \kappa_x = \alpha_{12} + x\alpha_{13} + \frac{R^2\Phi^3}{3}\alpha_{14} + x\Phi\alpha_{15} \\ \kappa_\Phi = \Phi x^2\alpha_{14} + \alpha_{16} + x\alpha_{17} + \Phi\alpha_{18} + x\Phi\alpha_{19} \\ \kappa_{x\Phi} = \alpha_{20} + \left[ R\Phi\alpha_{17} + \frac{R\Phi^2x\alpha_{14}}{2} + \frac{1}{2}R\Phi^2\alpha_{19} + \frac{1}{2R}x^2\alpha_{15} \right] \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Ces transformations des équations déformations – déplacements mènent aux changements suivants des termes  $\alpha_{14}$  dans le champ des déplacements des équations (4.8) et (4.9) .

$$\begin{cases} w = -\frac{R^2\Phi^3}{6}x^2a_{14} \\ \theta_x = -\frac{R^2\Phi^2}{2}x^2a_{14} \\ \theta_y = -\frac{R^2\Phi^3}{3}xa_{14} \end{cases} \quad (4.25)$$

**Remarque :**

- Les termes entre parenthèse dans l'équation 4.24 sont ajoutés afin de satisfaire les équations de compatibilité.
- Les termes en rouge sont l'objet des modifications.

**4.4.2. La deuxième variante :**

Le deuxième réarrangement (élément 2) est effectuée en supprimant tous les termes  $\alpha_{17}$  de l'équation (4.6) et les remplacés par les termes soulignés :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha_7 + \Phi\alpha_8 \\ \varepsilon_\Phi = \alpha_9 + x\alpha_{10} + \left[ -\frac{1}{2R}x^2\alpha_{12} - \frac{1}{6R}x^3\alpha_{13} - \frac{1}{2R}x^2\Phi\alpha_{14} - \frac{1}{6R}x^3\Phi\alpha_{15} \right] \\ \gamma_{x\Phi} = \alpha_{11} + \left[ \frac{1}{R}x\alpha_8 \right] \\ k_x = \alpha_{12} + x\alpha_{13} + \Phi\alpha_{14} + x\Phi\alpha_{15} \\ k_\Phi = \alpha_{16} + \underline{x\Phi^2\alpha_{17}} + \Phi\alpha_{18} + x\Phi\alpha_{19} \\ k_{x\Phi} = \alpha_{20} + \left[ \underline{\frac{R\Phi^3}{3}\alpha_{17}} + \frac{1}{R}x\alpha_{14} + \frac{1}{2}R\Phi^2\alpha_{19} + \frac{1}{2R}x^2\alpha_{15} \right] \end{cases} \quad (4.26)$$

Ces transformations mènent au remplacement des termes  $\alpha_{17}$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -R^3 \left( \frac{\Phi^4}{12} - \Phi^2 \right) a_{17} \\ v = x \left( \frac{R^2 \Phi^3}{3} - 2\Phi \right) a_{17} \\ w = R^2 x (2 - \Phi^2) a_{17} \\ \theta_x = -x \left[ 2R^2 \Phi + \left( \frac{R^2 \Phi^3}{3} - 2\Phi \right) \right] a_{17} \\ \theta_y = R^2 (2 - \Phi^2) a_{17} \end{array} \right. \quad (4.27)$$

#### 4.4.3. La troisième variante :

La troisième variante (élément 3) donne un élément flexionnel en supprimant le terme  $\alpha_{10}$  de la déformation membranaire  $\varepsilon_\Phi$  de l'équation (4.6) et les remplacés par les termes soulignés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \alpha_7 + \Phi \alpha_8 \\ \varepsilon_\Phi = \alpha_9 + \left[ -\frac{1}{2R} x^2 \alpha_{12} - \frac{1}{6R} x^3 \alpha_{13} - \frac{1}{2R} x^2 \Phi \alpha_{14} - \frac{1}{6R} x^3 \Phi \alpha_{15} \right] \\ \gamma_{x\Phi} = \alpha_{11} + \left[ \frac{1}{R} x \alpha_8 \right] \\ k_x = \alpha_{12} + x \alpha_{13} + \Phi \alpha_{14} + x \Phi \alpha_{15} \\ k_\Phi = \underline{x \Phi^2 \alpha_{10}} + \alpha_{16} + x \alpha_{17} + \Phi \alpha_{18} + x \Phi \alpha_{19} \\ k_{x\Phi} = \alpha_{20} + \left[ \underline{\frac{R \Phi^3}{3} \alpha_{10}} + R \Phi \alpha_{17} + \frac{1}{R} x \alpha_{14} + \frac{1}{2} R \Phi^2 \alpha_{19} + \frac{1}{2R} x^2 \alpha_{15} \right] \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Ces transformations aux équations déformation–déplacement mènent aux remplacements des termes  $\alpha_{10}$  des équations (4.8) et (4.9) par :

$$\begin{cases} u = -R^3 \left( \frac{\Phi^4}{12} - \Phi^2 \right) a_{10} \\ v = x \left( \frac{R^2 \Phi^3}{3} - 2\Phi \right) a_{10} \\ w = R^2 x (2 - \Phi^2) a_{10} \\ \theta_x = -2xR\Phi a_{10} - x \left( \frac{R\Phi^3}{3} - \frac{2\Phi}{R} \right) a_{10} \\ \theta_y = R^2 (2 - \Phi^2) a_{10} \end{cases} \quad (4.29)$$

#### 4.4.4. La quatrième variante :

L'élément 4 est obtenu en supprimant tous les termes  $\alpha_{10}$  et  $\alpha_{14}$  de l'équation (4.6) et les remplacés par les termes soulignés :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha_7 + \Phi \alpha_8 \\ \varepsilon_\Phi = \alpha_9 + \left[ -\frac{1}{2R} x^2 \alpha_{12} - \frac{1}{6R} x^3 \alpha_{13} - \frac{Rx^2 \Phi^3}{6} \alpha_{14} - \frac{1}{6R} x^3 \Phi \alpha_{15} \right] \\ \gamma_{x\Phi} = \alpha_{11} + \left[ \frac{1}{R} x \alpha_8 \right] \\ k_x = \alpha_{12} + x \alpha_{13} + \frac{R^2 \Phi^3}{3} \alpha_{14} + x \Phi \alpha_{15} \\ k_\Phi = \underline{x \Phi^2 \alpha_{10}} + \underline{\Phi x^2 \alpha_{14}} + \alpha_{16} + x \alpha_{17} + \Phi \alpha_{18} + x \Phi \alpha_{19} \\ k_{x\Phi} = \alpha_{20} + \left[ \frac{R\Phi^3}{3} \alpha_{10} + R\Phi \alpha_{17} + \underline{R\Phi^2 x \alpha_{14}} + \frac{1}{2} R\Phi^2 \alpha_{19} + \frac{1}{2R} x^2 \alpha_{15} \right] \end{cases} \quad (4.30)$$



Les changements mènent aux remplacements des termes  $\alpha_{10}$  et  $\alpha_{14}$  des équations (4.8) et (4.9) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -R^3 \left( \frac{\Phi^4}{12} - \Phi^2 \right) a_{10} \\ v = x \left( \frac{R^2 \Phi^3}{3} - 2\Phi \right) a_{10} \\ w = R^2 x (2 - \Phi^2) a_{10} - \frac{R^2 \Phi^3}{6} x^2 a_{14} \\ \theta_x = -2Rx\Phi a_{10} - x \left( \frac{R\Phi^3}{3} - \frac{2\Phi}{R} \right) a_{10} - \frac{R^2 \Phi^3}{3} x a_{14} \\ \theta_y = R^2 (2 - \Phi^2) a_{10} - \frac{R^2 \Phi^3}{3} x a_{14} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

#### 4.5. Elément de Djoudi et Bahai [DJO 03] :

L'élément développé par Djoudi et Bahai est un élément de coque cylindrique surbaissée basé sur le modèle en déformation destiné pour l'analyse des coques cylindriques. L'élément est un élément rectangulaire dans le plan ayant seulement les 5 degrés de liberté essentiels dans chacun des nœuds de coin .Le champ des déplacements de l'élément satisfait les représentations des modes rigides .

##### 4.5.1. Equations déformations – déplacements :

Les équations déformation - déplacement pour un élément de coques cylindriques surbaissées dans un système de coordonnées curvilignes sont données comme suit (équation 3.21):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\Phi = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\Phi} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_\Phi = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \kappa_{x\Phi} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (4.32)$$

**4.5.2. Equations de compatibilité :**

Les équations de compatibilité sont obtenus en éliminant les déplacements  $u$  ,  $v$  ,  $w$  de l'équation (4.32) par dérivation d'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{k_x}{R} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} - 2 \frac{\partial k_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial k_y}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

**4.5.3. Degrés de liberté utilisés :**

Les 5 déplacements essentiels à adopter sont  $u$  ,  $v$  ,  $w$  ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w}{\partial y}$  , d'où les fonctions de forme contient 20 constantes indépendantes.

De la même façon que précédemment, les déplacements correspondants aux mouvements du corps rigide sont obtenus :

$$\begin{cases} u_r = a_2 \frac{y^2}{2R} + a_4 + a_6 y \\ v_r = -a_1 \frac{y}{R} - a_2 \frac{xy}{R} - a_3 \frac{y^2}{2R} + a_5 - a_6 x \\ w_r = a_1 + a_2 x + a_3 y \end{cases} \quad (4.34)$$

Le champ de déformations imposés est comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \alpha_7 + y\alpha_8 \\ \varepsilon_y = \alpha_9 + x\alpha_{10} + \frac{1}{R} \left[ -\frac{1}{2}x^2\alpha_{12} - \frac{1}{6}x^3\alpha_{13} - \frac{1}{2}x^2y\alpha_{14} - \frac{1}{6}x^3y\alpha_{15} \right] \\ \gamma_{xy} = \alpha_{11} - [y\alpha_{10}] \\ k_x = \alpha_{12} + x\alpha_{13} + y\alpha_{14} + xy\alpha_{15} \\ k_y = \alpha_{16} + x\alpha_{17} + y\alpha_{18} + xy\alpha_{19} \\ k_{xy} = \alpha_{20} + [2y\alpha_{17} + 2x\alpha_{14} + y^2\alpha_{19} + x^2\alpha_{15}] \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Premièrement les termes hors des parenthèses sont assumés. Ils représentent les déformations membranaires qui sont suggérées à partir des expressions correspondantes aux fonctions de déformations de l'élément rectangulaire de base usuel à 8 degrés de liberté, deuxièmement les termes entre parenthèse sont ajoutés afin de satisfaire les équations de compatibilité.

#### 4.5.4. Champ des déplacements :

Les fonctions des déplacements complètes sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = a_2 \frac{y^2}{2R} + a_4 + a_6 y + \alpha_7 x + xy\alpha_8 - y^2\alpha_{10} + \frac{y}{2}\alpha_{11} - \frac{y^4}{24R}\alpha_{17} - \frac{y^5}{120R}\alpha_{19} - \frac{y^3}{12R}\alpha_{20} \\ v = -a_1 \frac{y}{R} - a_2 \frac{yx}{R} - a_3 \frac{y^2}{2R} + a_5 - a_6 x - \alpha_8 \frac{x^2}{2} + y\alpha_9 + xy\alpha_{10} + \frac{x}{2}\alpha_{11} + \frac{y^3}{6R}\alpha_{16} + \frac{xy^3}{6R}\alpha_{17} + \frac{y^4}{24R}\alpha_{18} \\ \quad + \frac{xy^4}{24R}\alpha_{19} + \frac{xy^2}{4R}\alpha_{20} \\ w = a_1 + a_2 x + a_3 y - \alpha_{12} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\alpha_{13} - \frac{x^2 y}{2}\alpha_{14} - \frac{x^3 y}{6}\alpha_{15} - \frac{y^2}{2}\alpha_{16} - \frac{xy^2}{2}\alpha_{17} - \frac{y^3}{6}\alpha_{18} - \frac{xy^3}{6}\alpha_{19} \\ \quad - \frac{xy}{2}\alpha_{20} \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Les expressions des degrés de liberté  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$  et  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$  sont les suivantes :

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 - \frac{1}{2}x^2\alpha_{14} - \frac{1}{6}x^3\alpha_{15} - \alpha_{16}y - \alpha_{17}yx - \frac{1}{2}y^2\alpha_{18} - \frac{1}{2}xy^2\alpha_{19} - \frac{1}{2}x\alpha_{20} \\ \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 - x\alpha_{12} - \frac{1}{2}x^2\alpha_{13} - \alpha_{14}xy - \alpha_{15}y\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}y^2\alpha_{17} - \frac{1}{6}y^3\alpha_{19} - \frac{1}{2}y\alpha_{19} \end{cases} \quad (4.37)$$

#### 4.6. Éléments basés sur le modèle en déplacement : [ASH 76]

Des fonctions de forme ont été proposés pour différents éléments de coques cylindriques, l'élément le plus simple a été développé par Connor et Brebbia, cet élément a les fonctions de déplacements suivantes :

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \\ w = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}x^2 + a_{13}xy + a_{14}y^2 + a_{15}x^3 + a_{16}x^2y + a_{17}xy^2 + a_{18}y^3 \\ \quad + a_{19}x^3y + a_{20}xy \end{cases} \quad (4.38)$$

Les cinq degrés de libertés à chaque nœud sont trois déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et deux rotations  $w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$  et  $(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R})$  au lieu de  $\frac{\partial w}{\partial y}$ . Cet élément non conforme a été utilisé pour l'analyse des coques profondes et surbaissées.

Gallagher a développé un élément conforme à 24 degrés de liberté similaire à l'élément de Connor et Brebbia en ajoutant l'expression suivante à  $w$ :

$$a_{21}x^2y^2 + a_{22}x^3y^2 + a_{23}x^2y^3 + a_{24}x^3y^3 \quad (4.39)$$

et le degré de liberté additionnel  $w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ .

Cantin et Clough ont modifié l'élément de Gallagher, en introduisant les déplacements des mouvements du corps rigide contenant des fonctions trigonométriques. Les déplacements sont comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = R\alpha_1 x \Phi + x\alpha_2 + R\alpha_3 \Phi + \alpha_4 - \alpha_6 R \sin \Phi - a_{20} R (\cos \Phi - \cos \beta) \\ v = R\alpha_5 x \Phi + \alpha_6 x \cos \Phi + R\alpha_7 \Phi - \alpha_8 R (1 - \cos \Phi \cos \beta) - \alpha_{20} x \sin \Phi + \alpha_{23} \cos \Phi \\ \quad - \alpha_{24} \sin \Phi \\ w = (R^3 \alpha_9 x^3 \Phi^3) + (R^2 \alpha_{10} x^3 \Phi^2) + \alpha_6 x \sin \Phi + \alpha_8 R \sin \Phi \cos \beta + \alpha_{11} R x^3 \Phi + \alpha_{12} x^3 \\ \quad + (R^3 \alpha_{13} x^2 \Phi^3) + (\alpha_{14} x^2 y^2) + \alpha_{15} x^2 y + \alpha_{16} x^2 + \alpha_{17} x y^3 + \alpha_{18} x y^2 + \alpha_{19} x y \\ \quad + \alpha_{20} x \cos \Phi + \alpha_{21} y^3 \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Cet élément est conforme à 24 degrés de liberté et les mêmes six degrés de liberté par nœuds que l'élément de Gallagher. Les termes  $a_4, a_6, a_8, a_{20}, a_{23}, a_{24}$  représentent les six composantes du mouvements du corps rigide.

#### 4.7. L'élément de Sabir et Lock [SAB 72]:

L'élément de Sabir et Lock [SAB 72] est une version simplifier en supprimant les termes entre parenthèses dans l'équation (4.40) des déplacements de l'élément de Cantin et Clough [CAN 68] ainsi que le degré de liberté  $w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ . Cet élément est non conforme et contenant seulement les degrés de liberté essentiels. Le champ des déplacements obtenus est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \alpha_1 x y + x\alpha_2 + \alpha_3 y + \alpha_4 - \alpha_6 R \sin \Phi - a_{16} R (\cos \Phi - \cos \beta) \\ v = \alpha_5 x y + \alpha_6 x \cos \Phi + \alpha_7 y - \alpha_8 R (1 - \cos \Phi \cos \beta) - \alpha_{16} x \sin \Phi + \alpha_{19} \cos \Phi - \alpha_{20} \sin \Phi \\ w = \alpha_6 x \sin \Phi + \alpha_8 R \sin \Phi \cos \beta + \alpha_9 x^3 y + \alpha_{10} x^3 + \alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} x^2 + \alpha_{13} x y^3 \\ \quad + \alpha_{14} x y^2 + \alpha_{15} x y + \alpha_{16} x \cos \Phi + \alpha_{17} y^3 + \alpha_{18} y^2 + \alpha_{19} \sin \Phi + \alpha_{20} \cos \Phi \\ \theta_x = -\frac{1}{R} \alpha_5 x y - \frac{1}{R} \alpha_7 y + \alpha_8 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{11} x^2 + \alpha_{13} x y^3 + 2\alpha_{14} x y + \alpha_{15} x + 3\alpha_{17} y^2 + 2\alpha_{18} y \\ \theta_y = \alpha_6 \sin \Phi + 3\alpha_9 x^2 y + 3\alpha_{10} x^2 + 2\alpha_{11} x y + 2\alpha_{12} x + \alpha_{13} y^3 + \alpha_{14} y^2 + \alpha_{15} y + \alpha_{16} \cos \Phi \end{array} \right. \quad (4.41)$$

**4.7.1. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire:**

Considérant l'élément rectangulaire montré dans la figure(4.1), le point C est le centre de l'élément dans le système des coordonnées curvilignes  $x, y, z$  .La matrice de rigidité de l'élément peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{cases} [K] = [C]^{-T} \left\{ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [Q]^T [D][Q] dx dy \right\} [C]^{-1} \\ [K_0] = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [Q]^T [D][Q] dx dy \\ [K] = [C]^{-T} [K_0][C]^{-1} \end{cases} \quad (4.42)$$

$[K_0]$  : est donnée dans l'annexe

$[C]$ :La matrice de transformation qui relie les vingt degrés de liberté de l'élément avec les constantes  $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$  .

Les degrés de liberté nodaux sont  $u, v, w, \theta_x = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R})$  et  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$  .En utilisant les équations déformations-déplacements (4.1) , les déformations peuvent être données comme suit:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = y\alpha_1 + \alpha_2 \\ \varepsilon_\phi = x\alpha_5 + \alpha_7 + \frac{1}{R}x^3y\alpha_9 + \frac{1}{R}x^3\alpha_{10} + \frac{1}{R}x^2y\alpha_{11} + \frac{1}{R}x^2\alpha_{12} + \frac{1}{R}xy^3\alpha_{13} + \frac{1}{R}xy^2\alpha_{14} \\ \quad + \frac{1}{R}xy\alpha_{15} + \frac{1}{R}y^3\alpha_{17} + \frac{1}{R}y^2\alpha_{18} \\ \gamma_{x\phi} = x\alpha_1 + \alpha_3 + y\alpha_5 \\ k_x = 6xy\alpha_9 + 6x\alpha_{10} + 2y\alpha_{11} + 2\alpha_{12} \\ k_\phi = \frac{1}{R}x\alpha_5 + \frac{1}{R}\alpha_7 - 6xy\alpha_{13} - 2x\alpha_{14} - 6y\alpha_{17} - 2\alpha_{18} \\ k_{x\phi} = \frac{1}{R}y\alpha_5 - 3x^2\alpha_9 - 2x\alpha_{11} - 2x\alpha_{13} - 2y\alpha_{14} - \alpha_{15} \end{cases} \quad (4.43)$$

## Chapitre 5. Validation numérique des éléments finis formulés

### 5.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous présenterons les résultats obtenus avec les éléments formulés ainsi que les solutions de référence des problèmes considérés comme tests d'évaluation des éléments de coques cylindriques.

Parmi les nombreux tests proposés, on a :

- Le test du cylindre pincé court à bords libres(épais et mince).
- Le test du cylindre pincé avec diaphragmes rigides.
- Le test du panneau cylindrique soumis à son poids propre ,ce test est plus connu sous le nom de test « du toit de Scordelis – Lo ».
- Le test d'une poutre console courbe soumise à une charge statique.

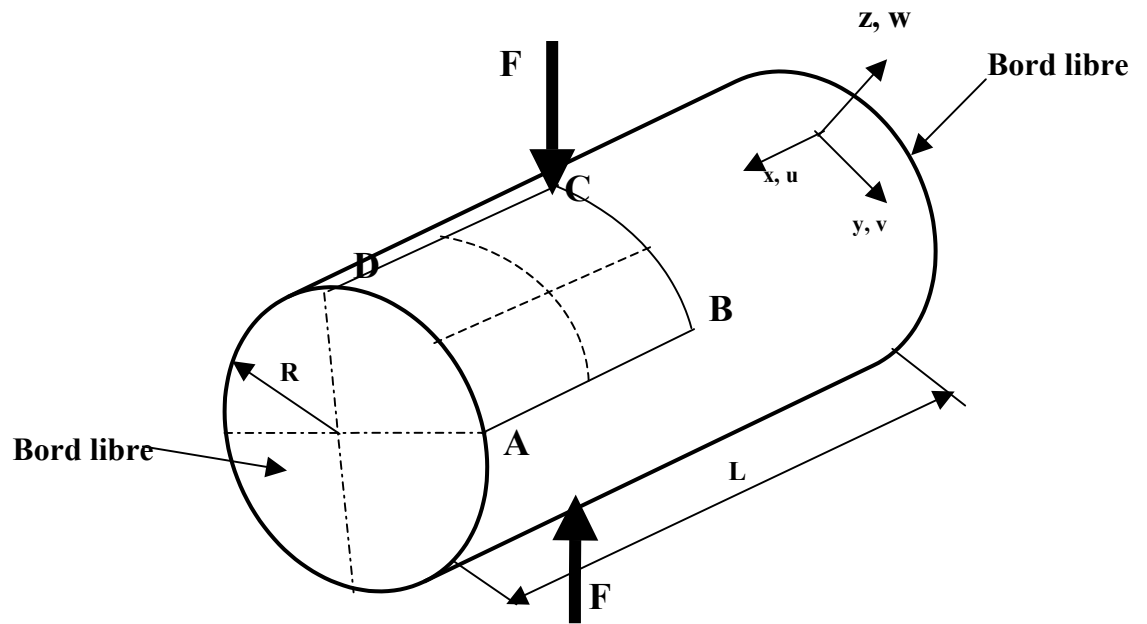
### 5.2. Cylindre pincé court à bords libres :[ASH 72]

C'est l'un des exemples les plus répandus dans la littérature pour comparer les éléments de coque (représentation des modes rigides et convergence).En effet depuis 1967 ,il a servi de problème test ,afin d'évaluer les performances des nouveaux éléments de coque de point de vue de vitesse, de convergence et surtout représentation du mode de corps rigides .Par raison de double symétrie ,seul un huitième du cylindre est modélisé. Les conditions de symétrie sont imposées le long de AB ,BC et DC (figure 5.1) .Deux épaisseurs du cylindre sont considérées ( $h_1$  épais et  $h_2$  mince ).

Pour cet exemple ,les résultats obtenus pour les différents éléments sont reportés sur la figure 5.3 et tableau 5.1 dans le cas où  $R/t = 53$  (cylindre épais ) et sur la figure 5.5 et tableau 5.3 dans le cas où  $R/t = 320$  (cylindre mince).

La valeur de référence du déplacement  $W_c$  dans le cas où  $R/t = 53$  (cylindre épais ) est une valeur numérique obtenue par l'élément Cantin [CAN 70] qui a 24 degrés de liberté par élément ,ce déplacement égale a 0.1139 in. Dans le cas où  $R/t = 320$  (cylindre mince ) , la valeur analytique du déplacement  $W_c$  est égale à 0.02439 in.





**Données :**

$L=10.35$  in ;  $R= 4.953$  in ;  $E =10.5 \times 10^6$  lb/in<sup>2</sup>  
 $\nu = 0.3125$  ;  
 $F_1=100$  lb ;  $h_1=0.094$  in  
 $F_2= 0.1$  lb ;  $h_2=0.01548$  in

**Conditions de symétrie :**

$v = \theta_x = 0$  sur AB  
 $u = \theta_y = 0$  sur BC  
 $v = \theta_x = 0$  sur CD

Figure 5.1. Cylindre pincé court à bords libres.

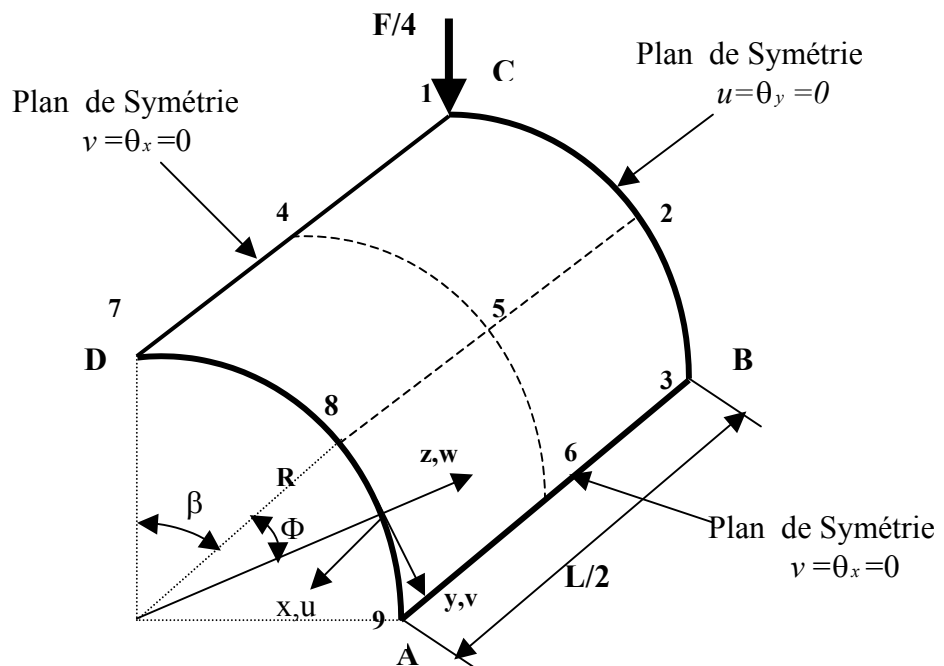


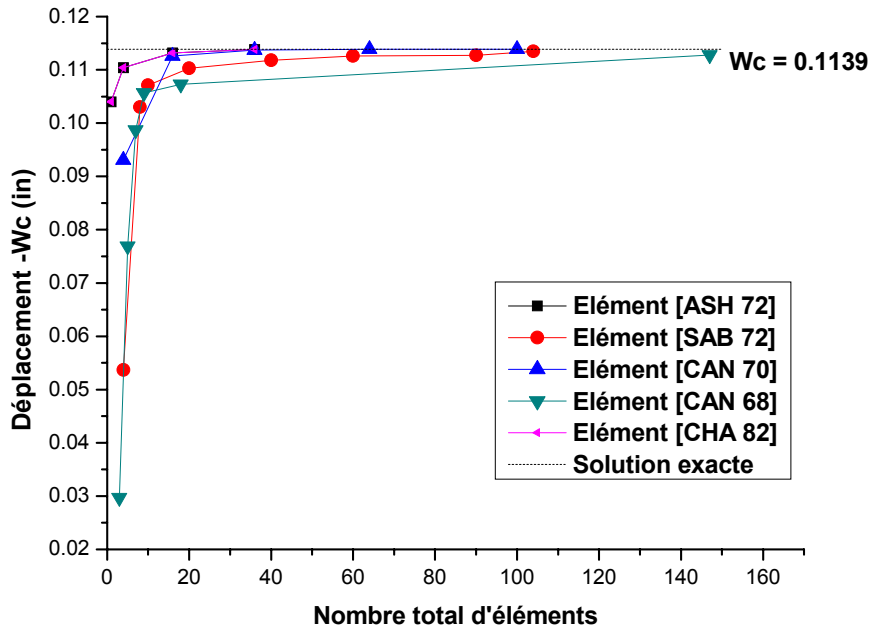
Figure 5.2 : Maillage 2x2 pour un cylindre pincé épais court avec bords libres.

**Tableau 5.1.** Déplacement Wc (in)(au point C) pour un cylindre pincé épais à bords libres( $h_1=0.094$ )

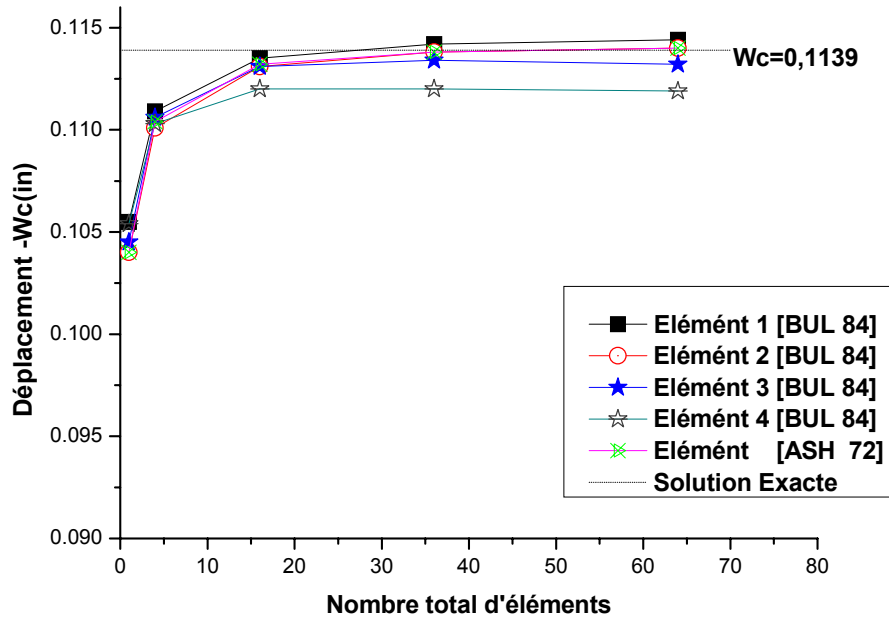
**Note :-** (\*) Eléments basés sur le modèle en déformation.

-(\*\*) Eléments basés sur le modèle en déplacement

Elément [ASH 72] 20 x20 [programme] (*)		Elément [CHA 82] 20 x20 [programme] (*)		Elément [SAB 72] 20 x20 [programme] (**)		Elément [CAN 70] 24x24 Réf [ASH 76] (**)		Elément [CAN 68] 24x24 Réf [ASH 76] (**)		Elément [DJO 03] 20 x20 [programme] (*)	
Maillage	Wc	Maillage	Wc	Maillage	Wc	Maillage	Wc	Maillage	Wc	Maillage	Wc
1x1	0,1040	1x1	0,1040	1x4	0,0537	1x1	-	1x3	0,0297	1x1	0,05894
2x2	0,1104	2x2	0,1104	1x8	0,103	2x2	0,0931	1x5	0,0769	2x2	0,06418
4x4	0,1132	4x4	0,1131	1x10	0,1071	4x4	0,1126	1x7	0,0987	4x4	0,06627
6x6	0,1138	6x6	0,1138	1x20	0,1103	6x6	0,1137	1x9	0,1057	6x6	0,06675
8x8	0,1140	8x8	0,1140	2x20	0,1118	8x8	0,1139	2x9	0,1073	8x8	0,06691
10x10	0,1141	10x10	0,1141	3x20	0,1126	10x10	0,1139	3x9	0,1128	10x10	0,06697
				3x30	0,1127						
				4x26	0,1135						

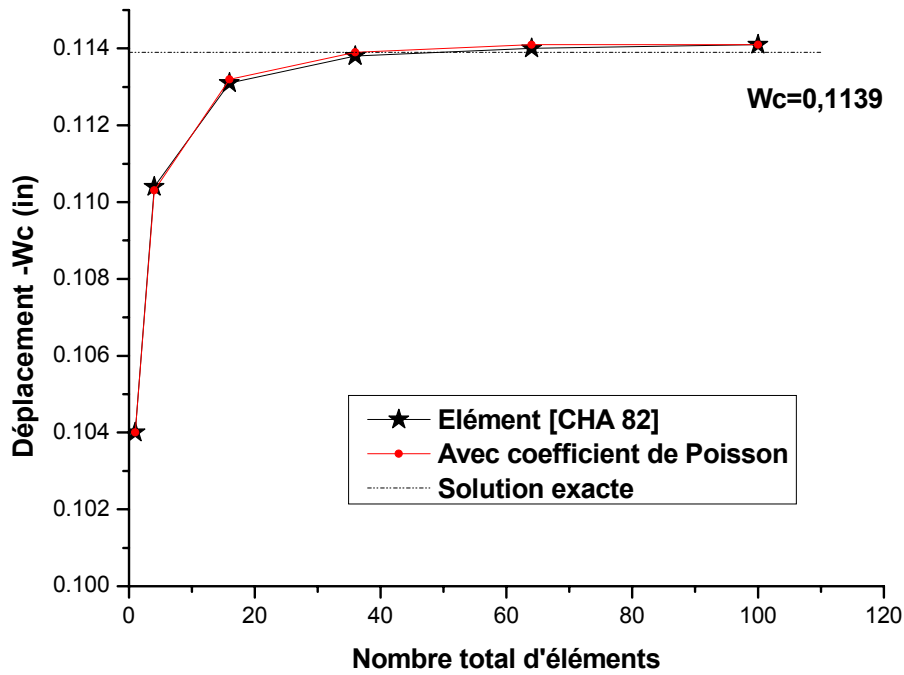


(a)



(b)

Figure 5.3 : Convergence du déplacement  $W_c$  pour un cylindre épais court pincé court à bords libres ( $h_1=0.094$  in) .



**Figure 5.4 :** Convergence du déplacement  $W_c$  de l'élément [CHA 82] avec et sans coefficient de Poisson pour un cylindre épais pincé court à bords libres ( $h_1 = 0.094$  in)

**Tableau 5.2** Déplacement  $W_c$  (in) pour un cylindre pincé épais court à bords libres ( $h_1 = 0.094$  in) de l'élément [CHA 82]

Maillage	Elément [CHA 82]	Elément [CHA 82]
	SCP	ACP
1x1	0.1040	0.1040
2x2	0.1104	0.1103
4x4	0.1131	0.1132
6x6	0.1138	0.1139
8x8	0.1140	0.1141
10x10	0.1141	0.1141

**Note :**

**SCP :** Sans coefficient de Poisson

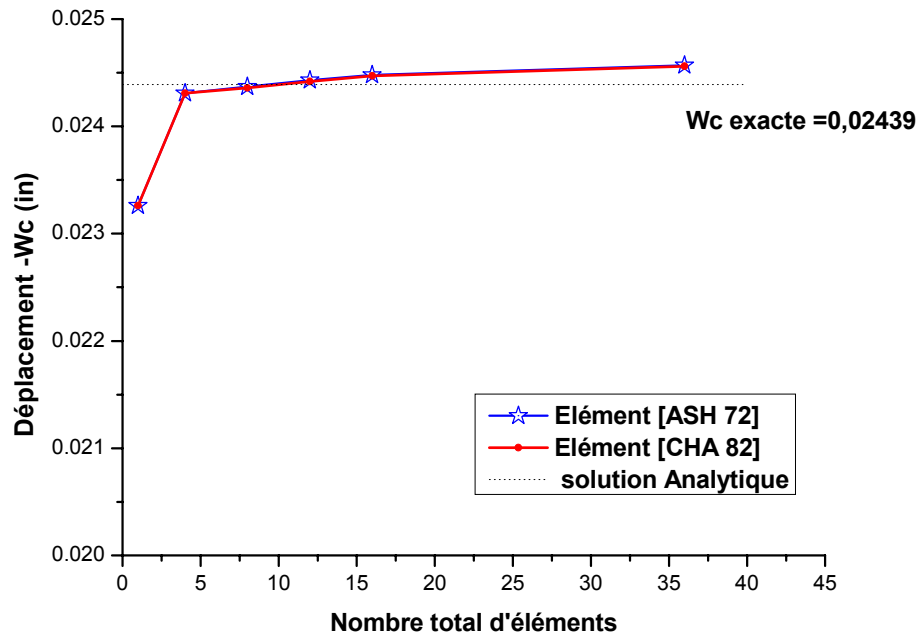
**ACP :** Avec coefficient de Poisson

**Tableau 5.3** .Déplacement  $W_c$  (in) (au point C) pour un cylindre pincé mince court à bords libres ( $h_2=0.01548$ )

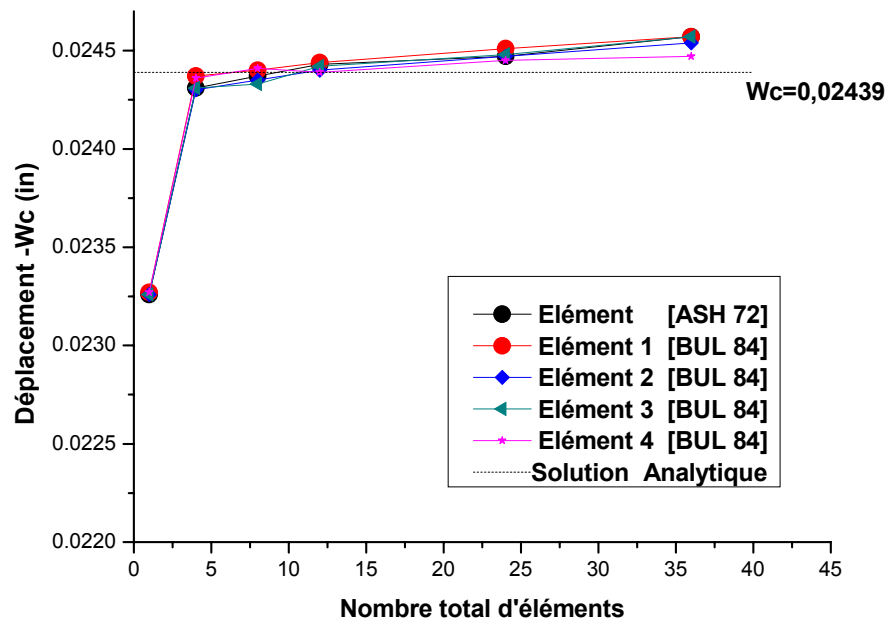
**Note :-** (\*) Eléments basés sur le modèle en déformation.

-(\*\*) Eléments basés sur le modèle en déplacement

[ASH 72] 20x20 [programme] (*)		[SAB 72] 20x20 [programme] (**)		[CHA 82] 20x20 [programme] (*)		[CAN 68] 24x24 Réf [ASH 76] (**)	
maillage	Wc	maillage	Wc	maillage	Wc	maillage	Wc
1x1	0.02326	1x1	0.6626E-05	1x1	0.02326	1x1	0.00001
1x4	0.02431	2x2	0.5350E-04	1x4	0.02431	1x4	0.00074
1x8	0.02434	4x4	0.00065	1x8	0.02434	1x8	0.00700
2x1	0.02334	6x6	0.00285	2x1	0.02327	2x8	0.00699
2x2	0.02330	8x8	0.00709	2x2	0.02430	3x8	0.00699
2x4	0.02437	10x10	0.01218	2x4	0.02436	8x8	0.00708
2x8	0.02442			2x8	0.02441		
3x1	0.02328			3x1	0.02328		
3x4	0.02443			3x4	0.02442		
3x8	0.02447			3x8	0.02446		
4x4	0.02448			4x4	0.02447		
6x6	0.02456			6x6	0.02455		

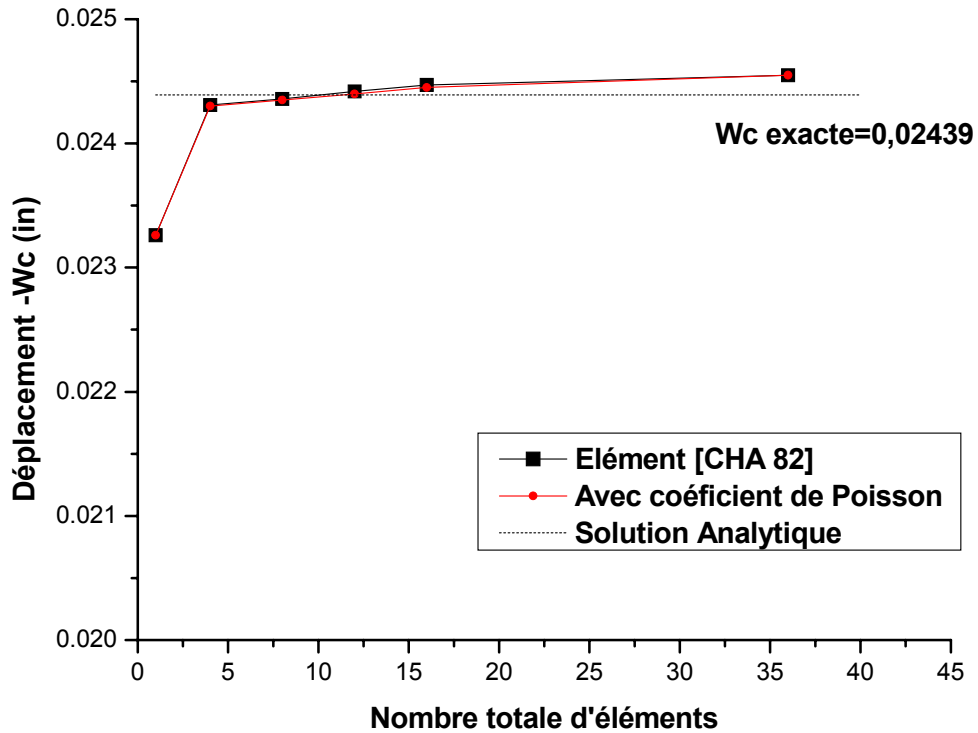


(a)



(b)

Figure 5.5 : Convergence du déplacement  $W_c$  pour un cylindre mince pincé court à bords libres ; ( $h_2=0.01548$  in)



**Figure 5.6 :** Convergence du déplacement  $W_c$  de l'élément [CHA 82] avec et sans coefficient de Poisson pour un cylindre mince pincé court à bords libres ( $h_2=0.01548$  in)

**Tableau 5.4.** Déplacement  $W_c$  pour un cylindre mince pincé court à bords libres

( $h_2= 0.01548$  in) de l'élément [CHA 82].

Maillage	Elément [CHA 82]	
	SCP	ACP
1x1	0.02326	0.02326
1x4	0.02431	0.02430
1x8	0.02434	0.02432
3x4	0.02442	0.02440
3x8	0.02446	0.02445
6x6	0.02455	0.02454

**Commentaires :****Cas du cylindre épais .**

- Une convergence monotone du déplacement  $W_c$  est observée pour tous les éléments [ASH 72], [CHA 82], [SAB 72], [CAN 70], [CAN 68] et les variantes de [BUL 84] avec vitesses différentes contrairement à l'élément [DJO 03] (figure 5.3 , 5.4 et tableau 5.1).
- Les résultats de l'élément [ASH 72] à 20 degrés de liberté avec un maillage 1x1 sont meilleurs que ceux de l'élément [CAN 70] à 24 degrés de liberté avec un maillage 2x2. (figure 5.3.a et tableau 5.1).
- Une convergence rapide est observée de l'élément [ASH 72] par rapport aux autres éléments basés sur le modèle en déplacement [SAB 72] , [CAN 70] et [CAN 68] (figure 5.3 .a et tableau 5.1).
- Les éléments [ASH 72] et [CHA 82] basés sur le modèle en déformation donnent des résultats sensiblement identiques (figure 5.3.a et tableau 5.1).
- Les variantes [BUL 84] convergent de façon monotone vers la solution de référence pour un faible nombre d'éléments (figure 5.3.b) .
- Les variantes 1 , 2 de [BUL 84] et l'élément [ASH 72] donnent des résultats similaires (figure 5.3.b)
- La convergence de l'élément [CAN 68] est moins bonne que celle de l'élément [SAB 72] qui est une version simplifiée du premier élément (figure 5.3 .a).
- L'inclusion du coefficient de Poisson pour l'élément [CHA 82] , pour satisfaire les équations d'équilibre, n'a pas d'influence sur les résultats (figure 5.4 tableau 5.2).



**Cas du cylindre mince :**

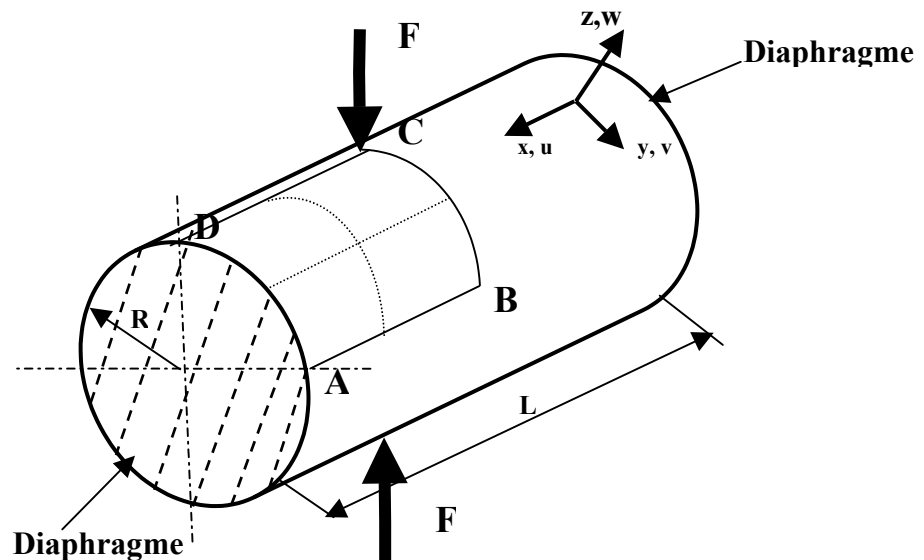
- La convergence des éléments [ASH 72] et [CHA 82] vers la solution exacte est observée (figure 5.5.a et tableau 5.3).
- On constate que les éléments [SAB 72] , [CAN 68] et [DJO 03] se comportent mal pour ce cas (tableau 5.3).
- Les variantes de [BUL 84] et l'élément [ASH 72] donnent des résultats similaires pour cet exemple et convergent vers la solution analytique (figure 5.5.b).
- L'inclusion du coefficient de Poisson pour l'élément [CHA 82] ,pour satisfaire les équations d'équilibre n'a pas d'influence sur les résultats (figure 5.6 tableau 5.4).
- La convergence du déplacement  $W_c$  est rapide pour les éléments [ASH 72],[CHA 82] et les variantes [BUL 84] pour un maillage de nombre plus élevé suivant la direction circonférentielle (suivant  $y$ ) que celui suivant la direction longitudinale (suivant  $x$ )(tableau 5.3).

### 5.3. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides :[BAT 92]

Un autre problème classique est celui d'un cylindre soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées et qui repose à ses extrémités sur deux diaphragmes rigides dans leurs plans .Les données géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure 5.7 .Cet exemple de coque mince ( $R/h = 100$  ) constitue un des tests les plus sévères pour étudier la capacité d'un élément de coque à décrire des champs de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne. Par raison de symétrie, seul un huitième de la coque (portion ABCD) est discrétisé.

Une solution de référence basée sur une théorie de coques minces donnée par Flugge et Lindbergh.[FLU 66]

- Déplacement  $\bar{W}_c$  au point C suivant  $z$  sous la charge :  $\bar{W}_c = - W_c Eh/P = 164.24$
- Déplacement  $\bar{U}_d$  au point D suivant  $x$  :  $\bar{U}_d = - U_d Eh/P = 4.114$



**Données :**

$L = 6\text{m}$  ;  $R = 3\text{m}$  ;  $E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$   
 $\nu = 0.3$  ;  $F = 1\text{N}$  ;  $h = 0.03\text{m}$

**Conditions aux limites :**

$w = v = \theta_x = 0$  sur AD

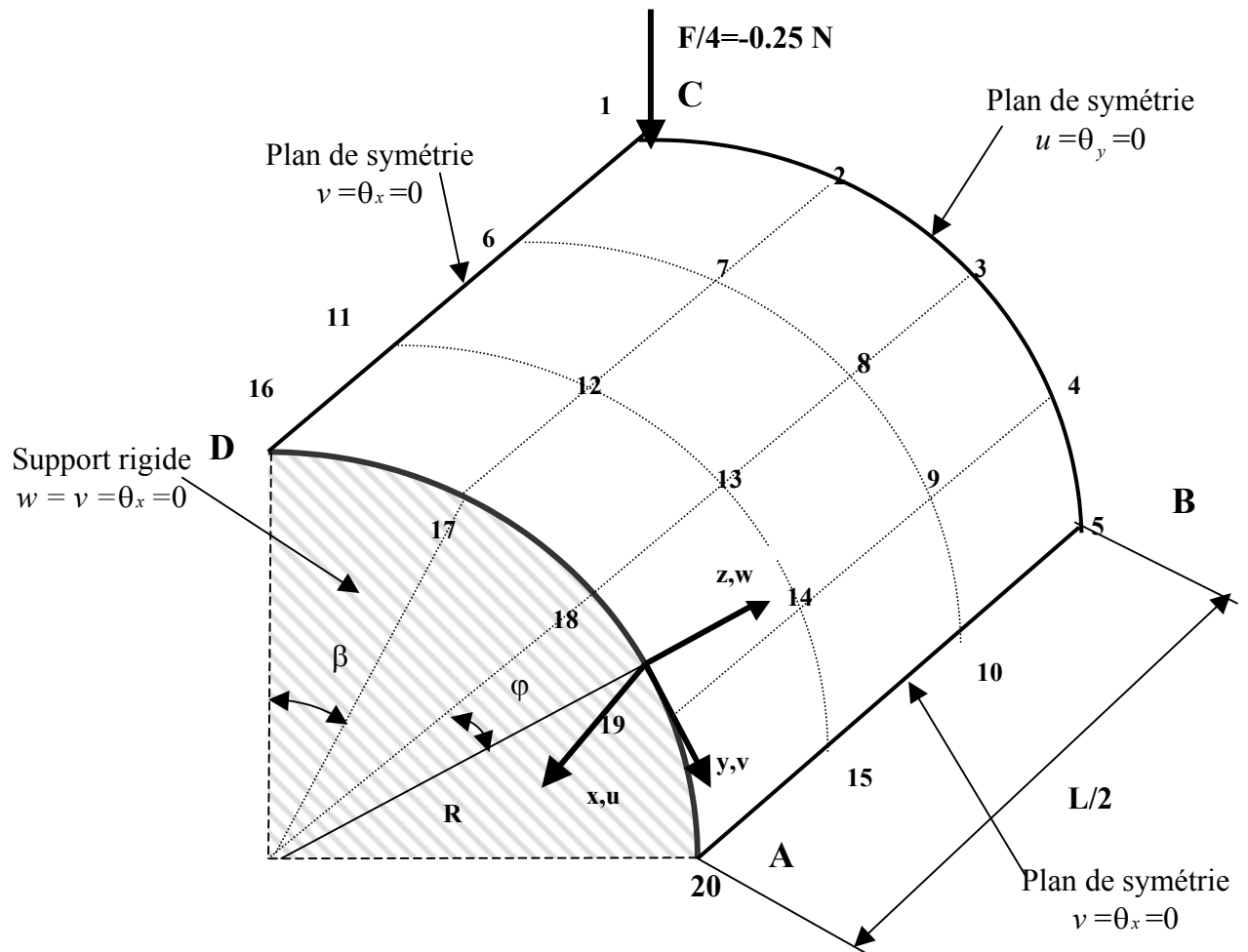
**Conditions de symétrie :**

$v = \theta_x = 0$  sur CD

$u = \theta_y = 0$  sur BC

$v = \theta_x = 0$  sur AB

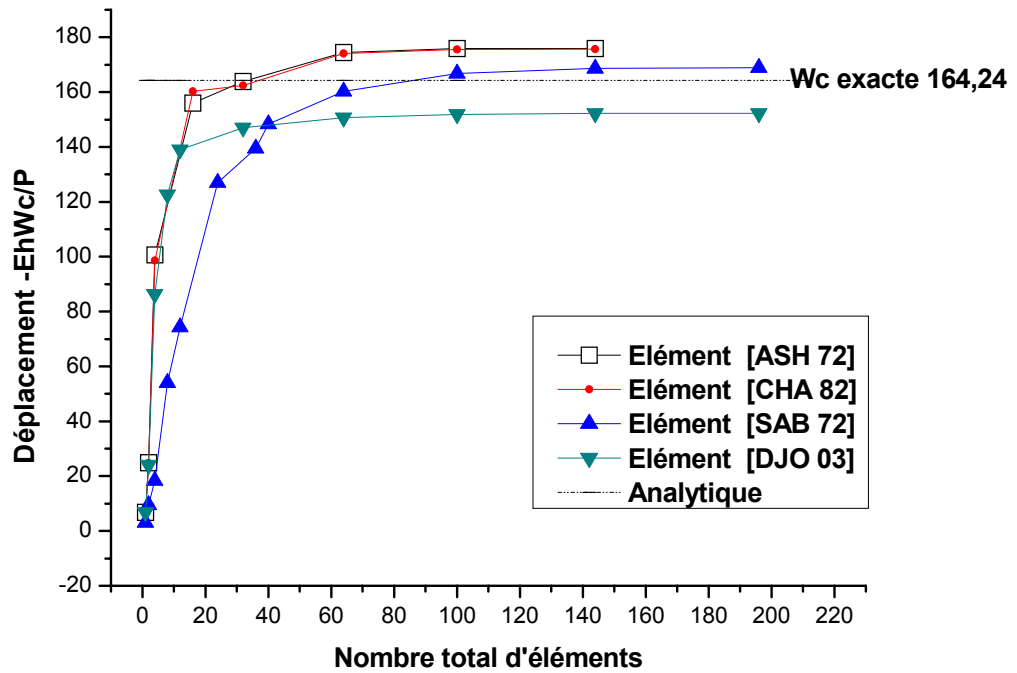
Figure 5.7 : Cylindre pincé avec diaphragmes rigides.



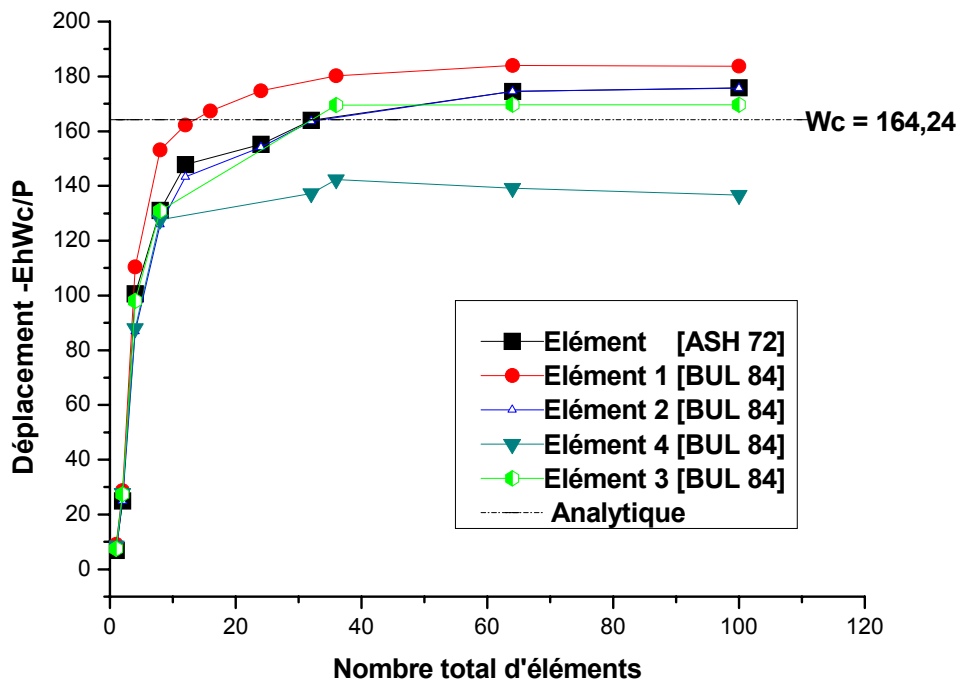
**Figure 5.8 :** Maillage 3 x 4 pour un cylindre pincé avec diaphragmes rigides.

Les résultats obtenus en utilisant les différents types d'éléments sont reportés sur les figures 5.9 et 5.10 en fonction des nombres total d'éléments pour  $W_c$  et  $U_d$ .

En utilisant l'élément rectangulaire [ASH 72] basé sur le modèle en déformation pour un maillage 12x12, on a évalué les déplacements  $W$  suivant  $z$  le long  $DC$  et  $BC$  et le déplacement  $U$  suivant  $x$  le long  $AD$ . Les courbes de répartition sont représentées sur la figure 5.11. On s'intéresse également à la convergence de l'effort tangentiel  $N_y$  en fonction des nombre total d'éléments et à la distribution des efforts sur des points nodaux particuliers : L'effort normal  $N_x$  est évalué sur  $BC$  et l'effort tangentiel  $N_y$  sur  $CD$ . Ces efforts sont calculés aux nœuds. Les résultats correspondants sont présentés sur les figures 5.12 et 5.13.

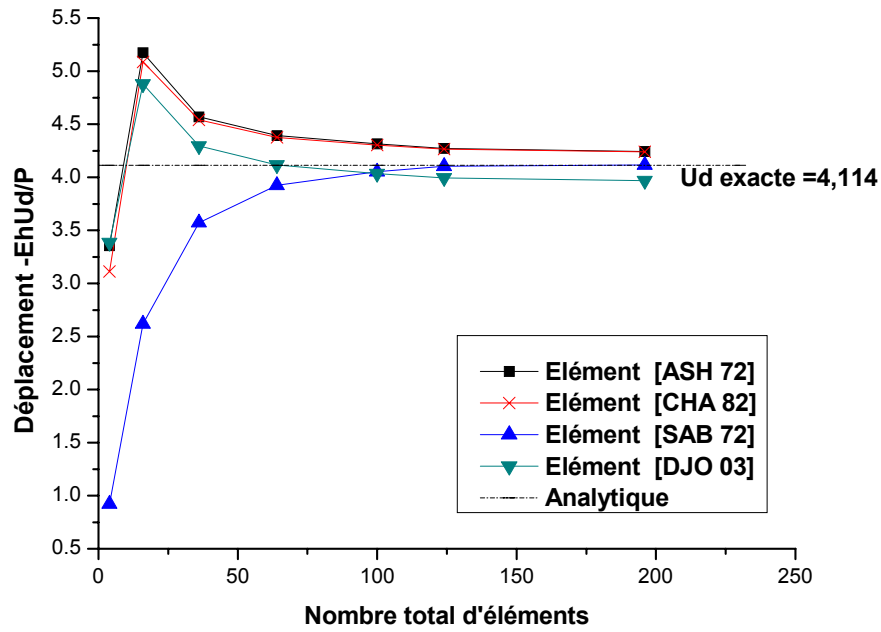


(a)

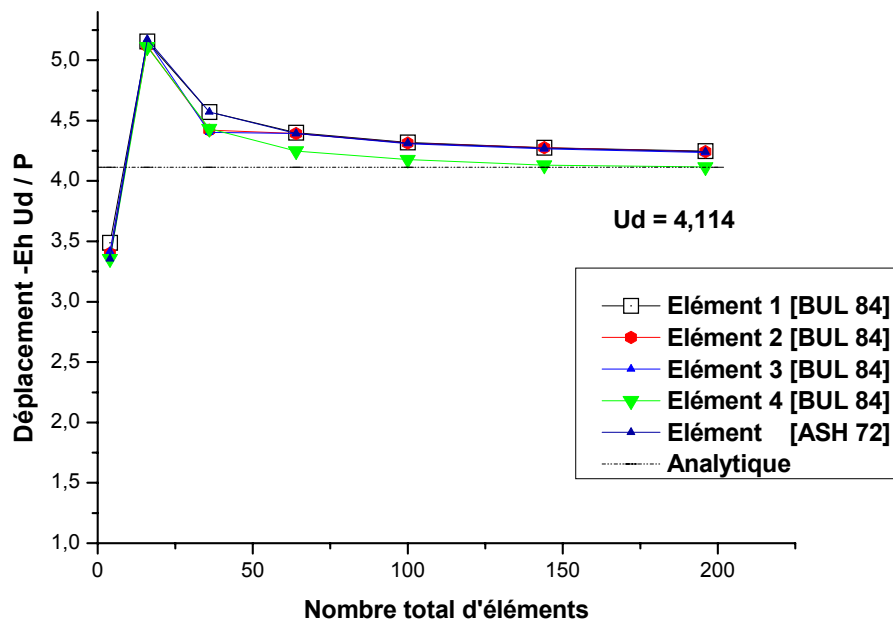


(b)

Figure 5.9 : Convergence de  $\overline{W}_c$  pour un cylindre pincé avec diaphragmes

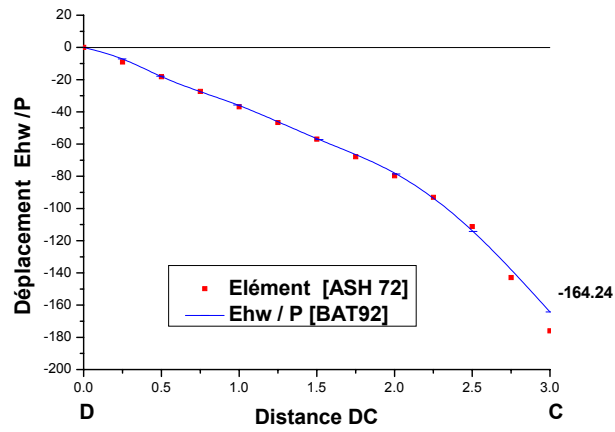


(a)

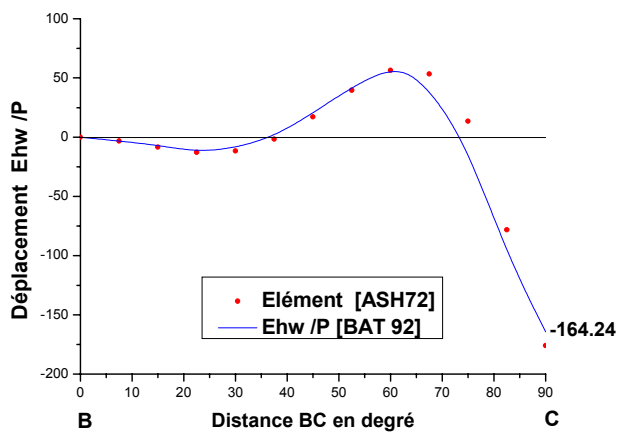


(b)

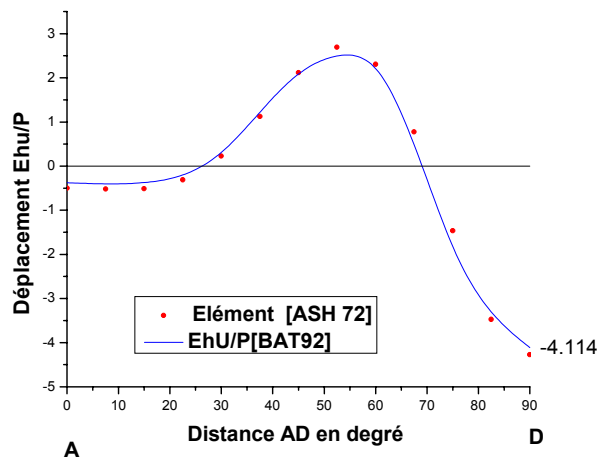
Figure 5.10 : Convergence de  $\bar{U}_d$  pour un cylindre pincé avec diaphragmes.



(a) Déplacement suivant z le long DC



(b) Déplacement suivant z le long BC

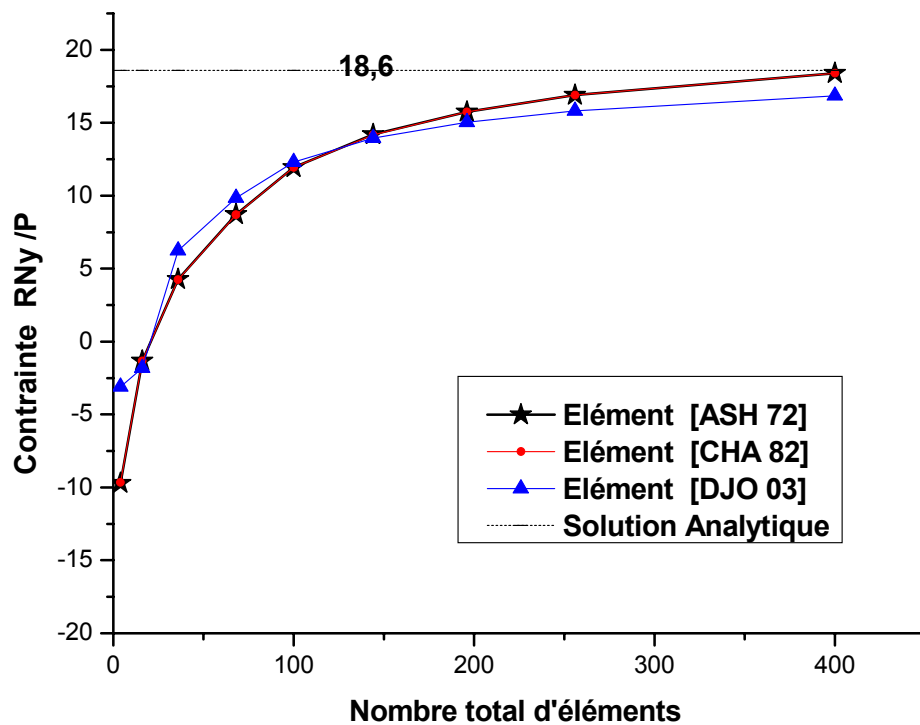


(c) Déplacement suivant x le long de AD

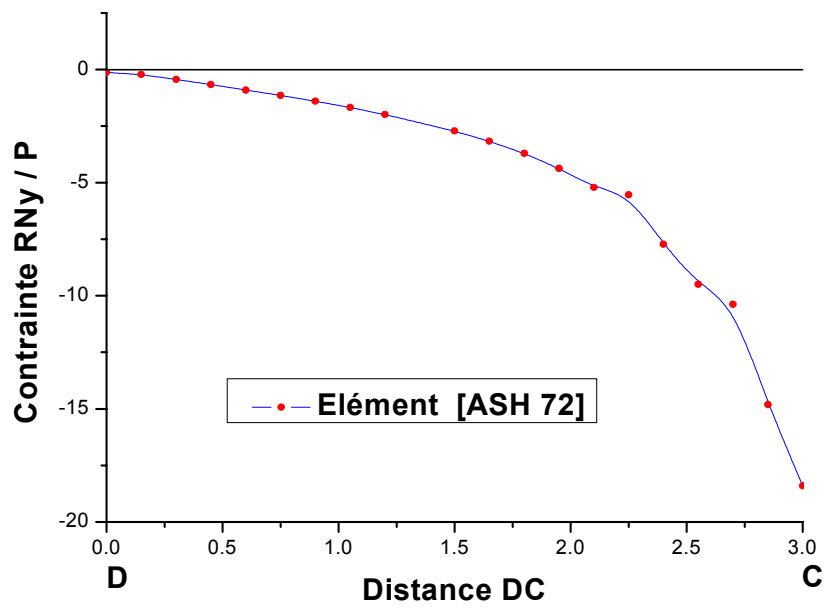
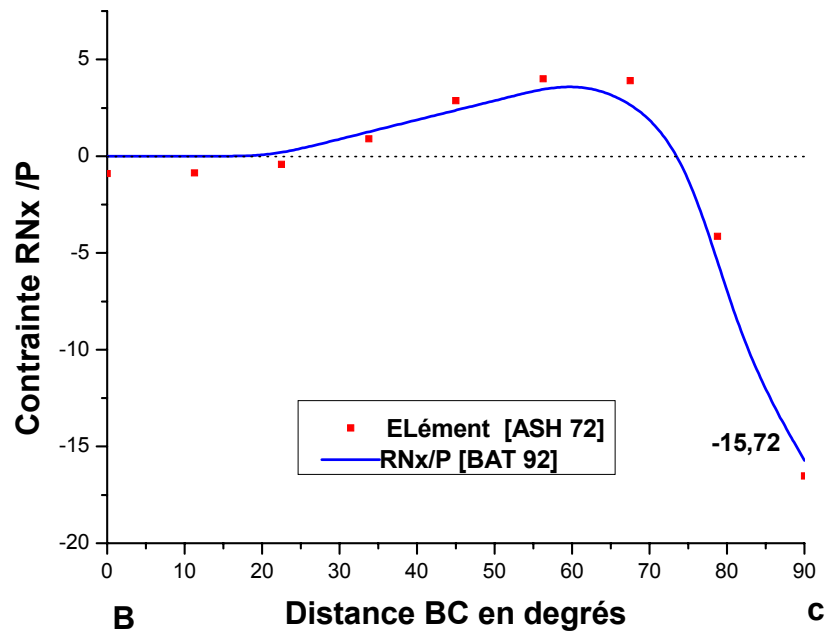
Figure 5.11 : Déplacement le long de DC , BC et AD ( $R/h=100$ ) de l'élément [ASH 72] pour un cylindre pincé avec diaphragmes

**Tableau 5.5.** Effort  $\bar{N}_y$  (au point C) pour un cylindre mince avec diaphragmes ( $\bar{N}_y = 18.6$ )

	Elément [ASH 72]	Elément [CHA 82]	Elément [SAB 72]	Elément [DJO 03]
Maillage	$\bar{N}_y$	$\bar{N}_y$	$\bar{N}_y$	$\bar{N}_y$
2x2	-9.714	-9.657	0.523	-3.093
4x4	-1.327	-1.338	-6.234	-1.828
6x6	4.272	4.245	-7.500	6.243
8x8	8.706	8.682	-4.071	9.848
10x10	11.943	11.925	0.0789	12.300
12x12	14.193	14.181	3.774	13.953
14x14	15.756	15.750	6.375	15.033
16x16	16.902	16.899	8.526	15.819
20x20	18.405	18.408	11.586	16.845



**Figure 5.12 :** Convergence de  $\bar{N}_y$  ( au point C) pour un cylindre pincé avec diaphragmes



**Figure 5.13:** Distribution des efforts résultants de l'élément [ASH 72] pour un cylindre pincé avec diaphragmes.



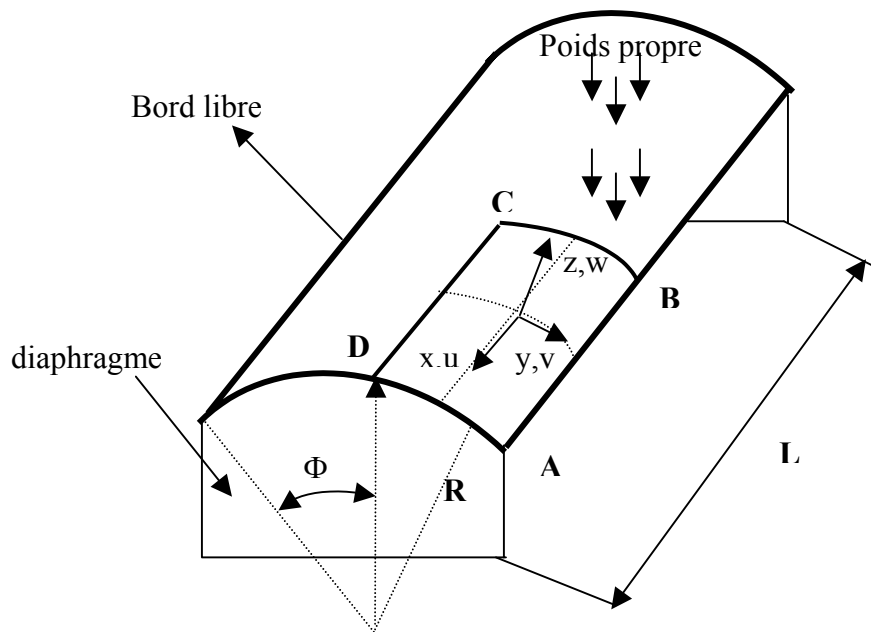
**Commentaires :**

- Une convergence des déplacements  $W_c$  et  $U_d$  est observée pour tous les éléments avec vitesses différentes sauf pour la variante 4 de la référence [BUL 84] (voir figures 5.9 et 5.10).
- Les deux éléments [ASH 72] et [CHA 82] donnent des résultats sensiblement identique pour ce problème malgré que le premier élément est basé sur la théorie de Love – Kirchhoff et le deuxième sur la théorie de Koiter –Sander(figure 5.9a).
- Des maillages très fins au voisinage du point C (la flexion est dominante au voisinage du point C) sont nécessaires pour réduire l'erreur sur  $W_c$  en utilisant l'élément [SAB 72] et l'élément [DJO 03] au contraire des éléments [ASH 72] et [CHA 82] qui ne nécessitent pas un maillage très fin (figure 5.9a).
- De bons résultats sont obtenus avec les éléments [ASH 72], [SAB 72] et [CHA 82] pour ce problème .L'élément [DJO 03] converge moins vite que l'élément [ASH 72] (les deux éléments sont basés sur l'approche en déformation, ils diffèrent que par la théorie utilisée, le premier élément est basé sur la théorie des coques surbaissées, et le deuxième sur la théorie des coques profondes) (figure 5.9a).
- Une divergence des résultats est observée pour la 4<sup>ème</sup> variante [BUL 84] et avec un degré moindre pour la 1<sup>ère</sup> variante par rapport aux autres variantes à cause de la grande rigidité de flexion de ces éléments(figure 5.9b).
- Un maillage raffiné au voisinage du point C est utile pour obtenir une bonne estimation des efforts  $N_y$  et  $N_x$  pour l'élément [ASH 72] ( figure 5.12 et tableau 5.5)
- L'élément [SAB 72] basé sur le modèle en déplacement ne donne pas une estimation correcte des efforts résultants (tableau 5.5).
- Dans le cas du déplacement  $U_d$  , les éléments [ASH 72] ,[CHA 82] et les variantes de [BUL 84] convergent rapidement vers la solution de référence (figure 5.10) .Une convergence assez bonne est obtenue également par les éléments [SAB 72] et [DJO 03].

### 5.4. Panneau cylindrique soumis à son poids propre : [ASH 76]

Un des problèmes fréquemment traité pour évaluer les performances d'un élément de coque cylindrique est celui d'un panneau cylindrique soumis à son poids propre. Les bords droits sont libres et les bords courbés reposent sur diaphragmes rigides dans leurs plans. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont indiquées sur la figure 5.14

Par raison de symétrie, seul un quart du panneau est modélisé, les conditions de symétrie sont imposées le long BC et CD



#### Données :

$L=50$  ft ;  $R= 25$  ft ;  $h=0.25$  ft ;  $\Phi =40^\circ$   
 $E= 432 \times 10^6$  lb/ft<sup>2</sup> ;  $\nu =0$  ;  $Fz =-90$  lb/ft<sup>2</sup>

#### Conditions aux limites :

$w =v =\theta_x =0$  sur AD

#### Valeurs de référence (théorie des coques surbaissées) :

$W_B = 3.70$  in

#### Valeurs de référence (théorie des coques profondes) :

$W_B = 3.58$  in

#### Conditions de symétrie:

$v=\theta_x =0$  sur CD

$u=\theta_y =0$  sur BC

Figure 5.14 :Panneau cylindrique soumis a son poids propre .

Pour ce problème les déformations de cisaillement transversale sont négligeables et les déformations de membrane sont importantes par rapport à celle de flexion. La solution de référence basée sur la théorie des coques surbaissées (shallow shell theory) est obtenu par Scordolis et Lo [SCO 64] qui donne le déplacement  $W_B$  vertical au centre du bord libre égale à 3.70 in , celle basé sur la théorie des coques profondes (deep shell theory )est sensiblement différente ,elle est moins de 3% de celle des coques surbaissées .

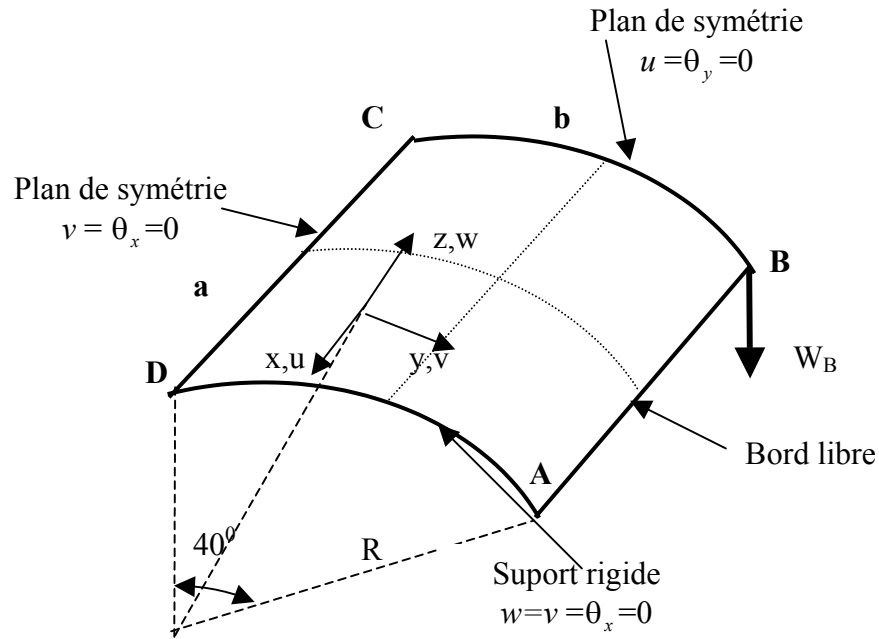


Figure 5.15 : Un quart du panneau cylindrique soumis à son poids propre (un maillage 2x2)

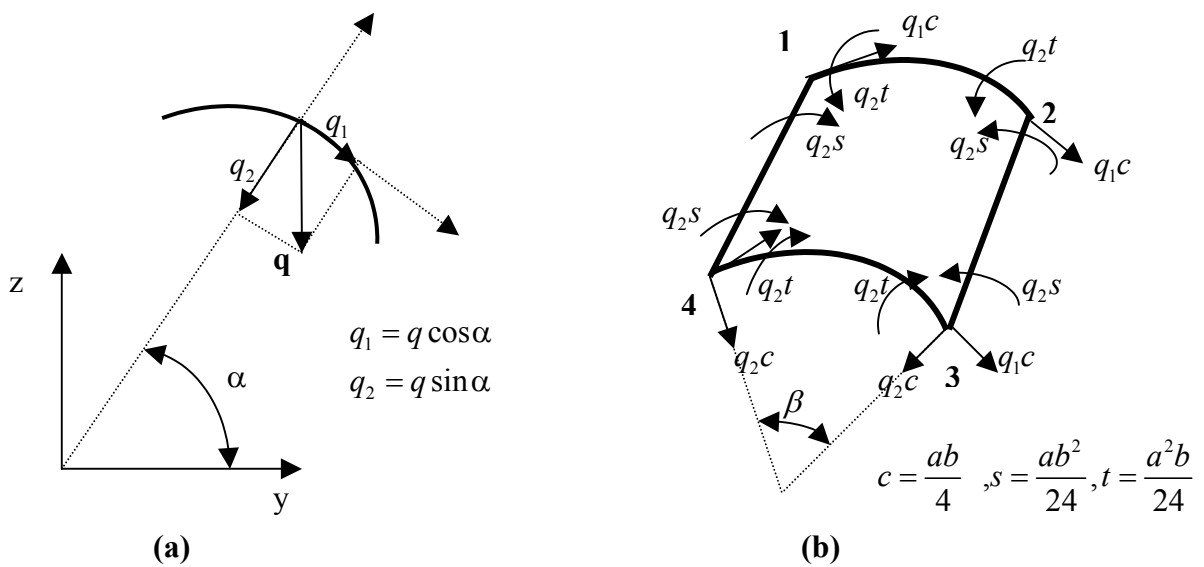


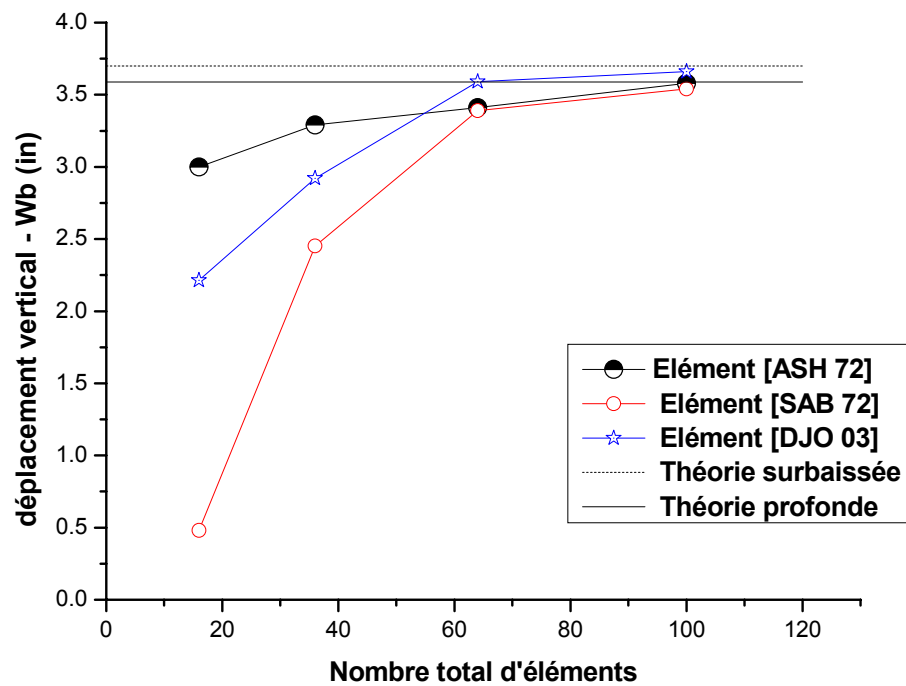
Figure 5.16. Forces nodales équivalentes

Le vecteur des déplacements à un point quelconque est comme suit :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix}$$

Le vecteur des forces nodales équivalentes est :(figure 5.16.b)

$$\{F_e\}^T = \left\{ \overbrace{0 \quad q_2c \quad -q_1c \quad q_2t \quad -q_2s}^1 \quad \overbrace{0 \quad q_2c \quad -q_1c \quad q_2t \quad q_2s}^2 \quad \overbrace{0 \quad q_2c \quad -q_1c \quad -q_2t \quad q_2s}^3 \quad \overbrace{0 \quad q_2c \quad -q_1c \quad -q_2t \quad -q_2s}^4 \right\}$$



**Figure 5.17 :**Convergence du déplacement vertical  $W_B$  (au point B) pour un panneau cylindrique soumis à son poids propre.

**Commentaires :**

- Les éléments [ASH 72] et [SAB 72] convergent vers la solution de coques profondes ‘‘Deep shell theory ‘‘ (figure 5.17).
- L’élément [DJO 03] converge vers la solution de coques surbaissée ‘‘Shallow shell theory’’(figure 5.17).
- L’ élément [ASH 72] converge rapidement vers la solution de référence.
- Une convergence assez bonne est obtenue également par l’élément [SAB 72].

### 5.5. Poutre console curve soumise à des charges statiques : [SAP 00]

Dans cet exemple une poutre console curve est modélisée avec des éléments coques cylindriques, elle est soumise à des charges statiques au extrémité libre dans les directions dans le plan et hors plan ,c'est-à-dire dans les directions  $z$  et  $x$  respectivement. Les déplacements dans la direction de la charge sont comparés avec les résultats analytiques de la référence [SAP 00] .

La poutre console à un angle de courbure égale à  $90^\circ$ . Elle a un rayon interne égale 4.12 in et un rayon externe égale 4.32 in. La poutre a une épaisseur 0.1 in dans la direction  $z$ .

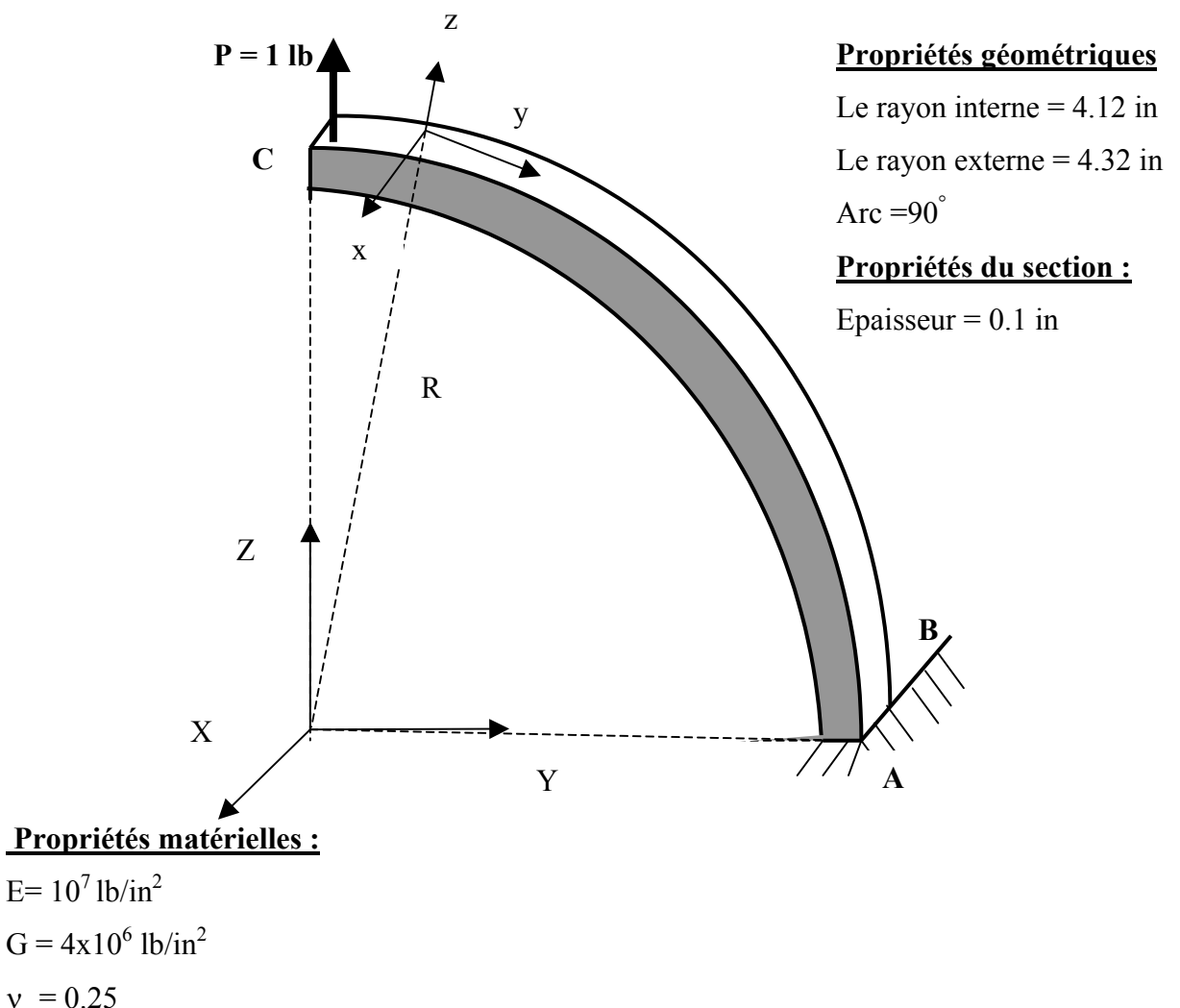


Figure 5.18 : Poutre console curve soumise à des charges statiques .

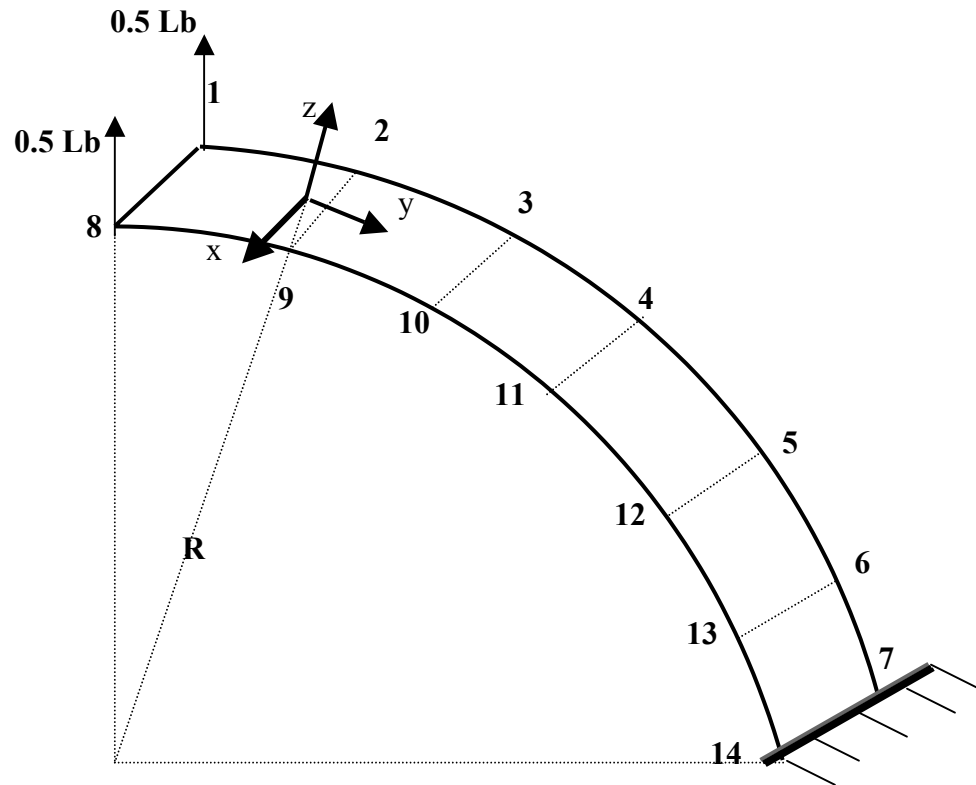
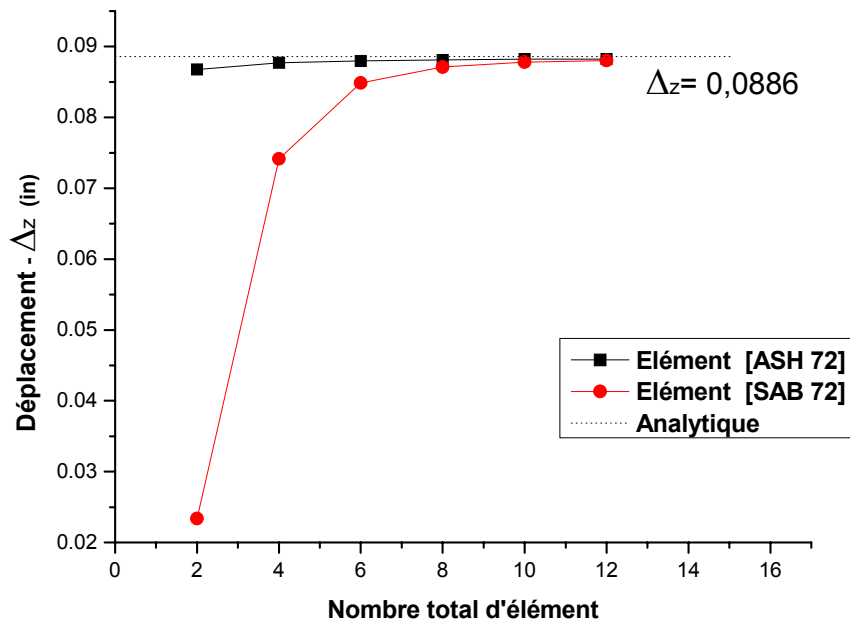


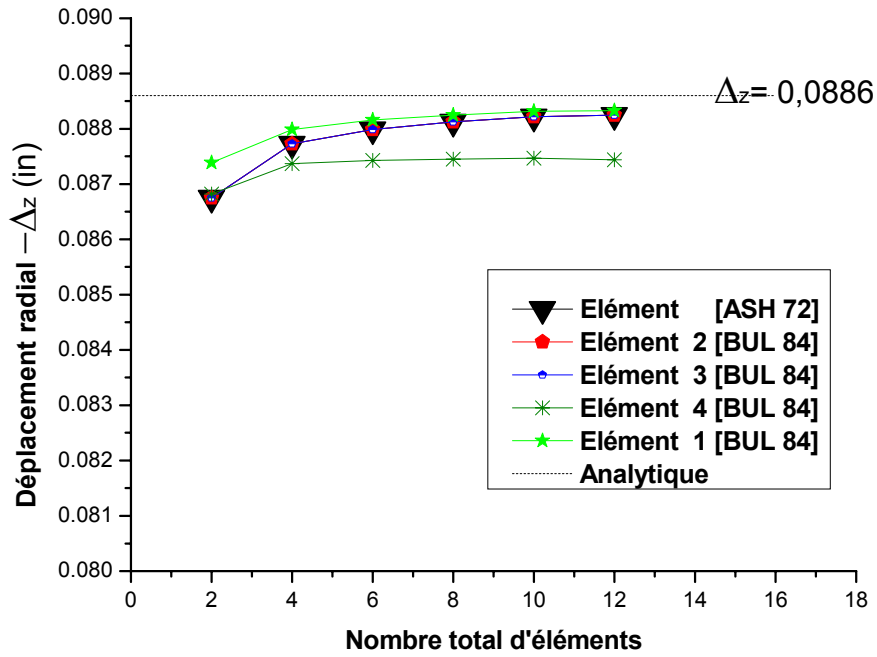
Figure 5.19 : Maillage 1x6 pour une poutre console courbe.

Tableau 5.6. Déplacements à l'extrémité libre suivant les deux axes  $z$  et  $x$

Maillage	La charge	[ASH 72]		[SAB 72]		[DJO 03]		SAP2000		Solution exacte [SAP 00]
		$\Delta$	erreur	$\Delta$	erreur	$\Delta$	erreur	$\Delta$	erreur	
1x6	Dans le plan (axe $z$ )	0.0877	-0.9 %	0.8488	-4 %	0.144	62.86 %	0.0773	-13 %	<b>0.0886</b>
	Hors du plan (axe $x$ )	0.3759	-24 %	0.03015	-93 %	0.0268	-94.63%	0.4535	-9 %	<b>0.5004</b>



(a)



(b)

Figure 5.20 : Convergence du déplacement  $\Delta_z$  dans le cas de la charge dans le plan (suivant z).



**Commentaires :****Cas de la charge dans le plan(suivant z) :**

- L'élément [ASH 72] et les variantes de [BUL 84] donnent d'excellent résultats même pour un faible nombre d'éléments : La solution de référence dans le cas de la charge dans le plans  $\Delta_z = 0.0886$  [SAP 00] est atteinte par l'élément [ASH 72] pour un maillage 1x4 (figure 5.20).
- Une convergence assez bonne est obtenue également par l'élément [SAB 72] (figure 5.20).
- Le résultat obtenu par les éléments [ASH 72] et [SAB 72] est meilleur que le résultat obtenu par SAP 2000 au cas du maillage 1x6 (tableau 5.6).
- On constate que l'élément [DJO 03] se comporte mal pour cet exemple (tableau 5.6)

**Cas de la charge hors du plan :**

- Tous les éléments se comportent mal pour ce cas (tableau 5.6).

## Conclusions Générales

Dans le présent travail ,nous avons abordé l'analyse des structures en coques cylindriques isotropes par des éléments finis basés sur les modèles en déformation et en déplacement. Ces éléments vérifient les équations de compatibilité et la représentation exacte du mouvement du corps rigide. Les éléments formulés sont : l'élément [ASH 72], l'élément [CHA 82] , les variantes [BUL 84] et l'élément [SAB 72] ,ces éléments sont des éléments basés sur la théorie des coques profondes ,or dans le cas de la théorie des coques surbaissées ,on a choisit l'élément récent [DJO 03] .

Au début ,nous avons présenté une introduction générale sur la méthode des éléments finis où il est utile de définir quelques domaines de l'ingénieur où cette méthode a été appliquée ainsi on a cité les différentes approches propre à cette méthode parmi d'autres l'approche en déformation avec ses avantages par rapport aux autres approches et les différents éléments développés de cette approche .Tout cela nous a permet d'exposer la formulation théorique des éléments coques cylindriques cités ci dessus .Enfin on a utilisé des tests de coques pour évaluer la performance des éléments coques cylindriques sélectionnés ,ces tests sont : Le test du cylindre pincé avec et sans diaphragmes, le test du panneau cylindrique surbaissée soumis à son poids propre ,ce test est plus connu sous le nom de test du toit de « Scordelis – Lo » et le test d'une poutre console courbe soumise à une charge statique.

Les différents tests réalisés dans ce travail nous a permis de conclure ce qui suit :

- Les éléments basés sur le modèle en déformation ont l'avantage d'être simples dans la forme et ils utilisent seulement des degrés de libertés essentiels  $u$  ,  $v$  ,  $w$  ,  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$  ,  $\theta_x = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R})$  (sans avoir besoin d'introduire des nœuds internes) .
- Les éléments [SAB 72] et [CAN 68] convergent (avec augmentation du nombre d'éléments) pour le test du cylindre pincé avec bords libres dans le cas où  $R/t = 50$  (cylindre épais). Ils ne le seront pas dans le cas où  $R/t = 320$ (cylindre mince) contrairement à l'élément [ASH 72] basé sur le modèle en déformation qui donne de bons résultats dans les deux cas .

- La convergence des éléments basés sur le modèle en déformation est plus rapide comparativement à celle des éléments basés sur le modèle en déplacement (dans le cas où le nombre total des degrés de liberté serait identique).
- La capacité de développer avec succès des éléments finis de coque mince cylindrique (variantes de [BUL 84] ) basés sur des fonctions généralisées de déformation a été démontré, l'approche en déformation s'est avérée simple en produisant un grand nombre d'éléments (surtout des éléments en flexion ) très performants.
- En supprimant le degré de liberté interne  $w_{xy}$  de l'élément [CAN 68] nous a permis d'avoir un élément [SAB 72] simple qui converge plus rapidement que l'élément [CAN 68].
- La vitesse de convergence pour l'élément [ASH 72] est assez faible pour les problèmes où les effets de membrane sont importants (dans le cas de la poutre console soumise à une charge suivant  $x$  ) .
- Une bonne précision pour un maillage grossier est constaté pour les éléments basés sur le modèle en déformation à cause du degré du polynôme constituant le champ des déplacements ,ce polynôme est d'ordre élevé .
- Les éléments finis construits sur la base d'une théorie exprimée en composantes curvilignes des déplacements convergent vers la solution des coques surbaissées ; ils ne s'appliquent donc qu'aux seules coques surbaissées ( l'élément [DJO 03] ne donne pas des résultats sauf pour le cas du panneau cylindrique soumis à son poids propres) .
- Les éléments basés sur le modèle en déplacement (pour notre cas l'élément [SAB 72]) exigent que la structure courbée soit divisée en un grand nombre d'éléments.

On conclut que les différents tests étudiés montrent l'efficacité du modèle en déformation . S'il y a lieu , dans une perspective ultérieure , de faire avancer les travaux dans ce domaine ,on recommande d'essayer d'améliorer le comportement de membrane pour l'élément [ASH 72].

**BIBLIOGRAPHIE**

- [ASH 72] Ashwell ,D.G. .et Sabir A. B. A new cylindrical shell finite element based on single independent strain functions. Int. J .Mech.Sci.14, 171-183 (1972).
- [ASH 76] Ashwell D.G., Strain elements, with applications to arches ring and cylindrical shell P 91-110 of D. G. Ashwell and R. H. Gallagher (Ed). Finite Elements for Thin Shells and Curved Members. John Wiley and Sons, London, (1976).
- [AYA 93] Ayad R. Eléments finis de plaque et de coque en formulation mixte avec projection en cisaillement , Thèse de doctorat ,U.T.C , 1993 ,217 pages.
- [BAT 92] Batoz Jean Louis , Ghouri Dhat , Modélisation des Structures par éléments finis coques volume 3 .Edition Hemes 1992 Paris.
- [BEL 00] Belarbi MT. Développement de nouveaux éléments finis à modèle en déformation Application linéaire et non linéaire .Thèse de doctorat , Université de Mentouri Constantine , février 2000 .
- [BEL 05] Belounar L , Guenfoud M, A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, Thin-Walled Structures 43(2005) 47-63.
- [BUL 84] Bull .J. W, The Strain approach to the development of thin cylindrical shell finite element , Thin-Walled Structures 2 (1984) 195-205.
- [CAN 68] Cantin G, and Clough R.W , A curved cylindrical shell finite element, AIAA Journal,6(1968) 1057-1062.
- [CAN 70] Cantin G, Rigid body motions in curved finite elements, AIAA ,Journal ,8 (1970) 1252.

- [CHA 82] Charchafchi T.A. Sabir A.B, Curved rectangular and general quadrilateral shell elements for cylindrical shells. The Mathematics of finite elements and application IV .Editor J.R. Whiteman 231-239(1982),Academic Press.
- [DJO 03] Djoudi M.S., H. Bahai, A shallow shell finite element for the linear and non – linear analysis of cylindrical shells. Engineering Structures 25,769-778 (2003).
- [DJO 04] Djoudi M .S., H. Bahai, Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with opening. Thin-Walled structures 42 (2004) 575 – 588.
- [FLU 66] Flugge W .and Fosberge K , Point load on shallow elliptic paraboloid , j Appl .Mech .Vol .33 (1966) 575-585.
- [FRE 01] Frey Francois et Jaroslav Jirousek, Analyse des structures et milieux continus , Méthode des éléments finis , Volume 6 , Presses polytechniques et Universitaires Romandes , Lausanne 2001.
- [FRE 03] Frey Francois , Marc – André Studer , Analyse des structures et milieux continus, Coques ,Volume 5 , Presses Polytechniques et Universitaires Romandes Lausanne 2003.
- [IMB 84] Imbert J.F, Analyse des structures par éléments finis. Cepadues Editions .1984.
- [MOR 76] Morley L.S.D et B.C. Marrisfield , Polynomial comparison solutions in the sanders koiter theory of circular cylindrical shells p 42-43. Of D. G. Ashwell and R.H Gallagher (Ed). Finite elements for Thin Shells and Curved Members. John Wiley and Sons, London, (1976).
- [PRA 95] Prat Michel, La modélisation des ouvrages .Hermes , Paris 1995 .

- [ROC 79] Rockey Lenneth , Roy Evans , Wiliam Griffiths et David Netherocot , Introduction à la méthode des éléments finis .Eyrolles Paris 1979.
- [SAB 72] Sabir A. B. et A. C. lock, Curved , Cylindrical , Shell , Finite element . Int. J . Mech.Sci.14, 125-135 (1972).
- [SAB 83] Sabir A . B. A new class of finite elements for plane elasticity problems .The computational aspects of finite elements CAFEM , 7<sup>th</sup> Int . Conf on Structural Mech in Reactor Technology , Chicago , August , 1983.
- [SAB 95] Sabir A . B. et A . Sfendji , Triangular and Rectangular plane elasticity finite element ,Thin- Walled Structures 21 (1995) 225-232
- [SAP 00] Manuel SAP 2000 Version 9.
- [SAL 86] Salhi H.. Y. et A. B .Sabir ,A strain based finite element for general plane elasticity problems in polar coordinates .Res Mechanica 19 ,1-16 (1986).
- [SCO 64] A.C.Scordelis and K.S.lo.,Computer analysis of cylindrical shells ,J.A.Conc.Inst .61,539,(1964).

Les logiciels utilisés sont :

- Scientific Work Place ,Version 5 .
- Programming the finite element method ,I. M .Smith et D .V. Griffiths University of Manchester .U K . John Wiley et Sons second edition 1982.

## ANNEXE :

Les matrices  $[K_0]$  des éléments étudiésA.1. Matrice  $[K_0]$  de l'élément [ASH 72] :

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 & H_1 & 0 & 0 & H_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_7 & 0 & 0 & H_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_3 & 0 & H_6 & 0 & 0 & H_{10} & 0 & 0 & 0 & H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_8 & 0 & 0 & H_{12} & 0 & 0 & 0 & H_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{14} & 0 & 0 & 0 & H_{15} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{16} & 0 & 0 & 0 & H_{17} & H_{18} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{11} & 0 & 0 & 0 & H_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{13} & 0 & 0 & 0 & H_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{15} & 0 & 0 & 0 & H_{21} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{17} & 0 & 0 & 0 & H_{22} & H_{23} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{18} & 0 & 0 & 0 & H_{23} & H_{24}
 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = C_1 D_1, \quad H_2 = C_1 D_2$$

$$H_3 = -\frac{1}{2R} C_2 D_2$$

$$H_4 = \frac{1}{R^2} C_3 D_1 + \frac{1}{R^2} C_2 D_3$$

$$H_5 = -\frac{1}{2R^3} C_4 D_2$$

$$H_6 = -\frac{1}{2R} C_2 D_1$$

$$H_7 = C_2 D_1$$

$$H_8 = -\frac{1}{6R} C_5 D_1$$

$$H_9 = C_1 D_3$$

$$H_{10} = C_1 K_1 + \frac{1}{4R^2} C_5 D_1$$

$$H_{11} = C_1 K_2$$

$$H_{12} = C_2 K_1 + \frac{1}{36R^2} C_9 D_1$$

$$H_{13} = C_2 K_2$$

$$H_{14} = \frac{1}{R^2} C_3 K_1 + \frac{1}{R^2} C_2 K_3 + \frac{1}{4R^4} C_6 D_1$$

$$H_{15} = \frac{1}{R^2} C_3 K_2$$

$$H_{16} = \frac{1}{4R^2} C_5 K_3 + \frac{1}{R^2} C_4 K_1 + \frac{1}{36R^4} C_8 D_1$$

$$H_{17} = \frac{1}{R^2} C_4 K_2 + \frac{1}{4R^2} C_4 K_3$$

$$H_{18} = \frac{1}{2R} C_2 K_3$$

$$H_{19} = C_1 K_1,$$

$$H_{20} = C_2 K_1 + C_3 K_3$$

$$H_{21} = \frac{1}{R^2} C_3 K_1,$$

$$H_{22} = \frac{1}{4R^2} C_7 K_3 + \frac{1}{R^2} C_4 K_1$$

$$H_{23} = \frac{1}{2R} C_3 K_3, \quad H_{24} = C_1 K_3$$

$$C_1 = ab, \quad C_2 = \frac{a^3 b}{12}, \quad C_3 = \frac{ab^3}{12}, \quad C_4 = \frac{a^3 b^3}{144}, \quad C_5 = \frac{a^5 b}{80}, \quad C_6 = \frac{a^5 b^3}{960}, \quad C_7 = \frac{ab^5}{80}$$

$$C_8 = \frac{a^7 b^3}{5376}, \quad C_9 = \frac{a^7 b}{448}$$

avec

$$D_1 = Et(1-\nu^2) \quad D_2 = \nu K_1 \quad D_3 = \frac{1}{2} D_1(1-\nu)$$

$$K_1 = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad K_2 = \nu K_1 \quad K_3 = K_1(1-\nu)$$

Et  $t$  : épaisseur de la coque

$E$  et  $\nu$  sont respectivement module de Young et coefficient de Poisson

la matrice de déformation  $[Q]$  est :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{R}y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -\frac{1}{2R}x^2 & -\frac{1}{6R}x^3 & -\frac{1}{2R^2}x^2y & -\frac{1}{6R^2}x^3y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R}x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \frac{1}{R}y & \frac{1}{R}xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \frac{1}{R}y & \frac{1}{R}xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R}x & \frac{1}{2R}x^2 & 0 & y & 0 & \frac{1}{2R}y^2 & 1 \end{bmatrix}$$



Vecteur  $\{F_0\}$  pour cet élément est :

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} absin\alpha \\ 0 \\ -abcos\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 2Racos\alpha sin\beta \\ 0 \\ 0 \\ -2R^2 asin\alpha sin\beta \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} Ra^3 sin\alpha sin\beta \\ 0 \\ -\frac{1}{12} Ra^3 cos\alpha sin\beta + \frac{1}{24} a^3 bcos\alpha cos\beta \\ 0 \\ 4R^3 asin\alpha sin\beta - R^2 absin\alpha cos\beta \\ 0 \\ -4R^3 acos\alpha sin\beta + 2R^2 abcos\alpha cos\beta + \frac{1}{4} Rab^2 cos\alpha sin\beta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## A.2. Matrice $[K_0]$ de l'élément [CHA 82] :

L'élément [CHA 82] a la même matrice  $[K_0]$  que l'élément [ASH 72] sauf que le terme  $H_4$  devient :

$$H_4 = \frac{1}{R^2} C_3 D_1 + \frac{48}{27R^2} C_2 D_3$$

### A.3. Matrice $[K_0]$ de l'élément [CHA 82] avec l'inclusion du coefficient de Poisson :

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$H_1$	0	$H_2$	0	0	$H_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$H_4$	0	0	0	0	0	$H_5$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$H_2$	0	$H_1$	0	0	$H_6$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_7$	0	0	$H_8$	0	$H_9$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$H_3$	0	$H_6$	0	0	$H_{12}$	0	0	0	$H_{13}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_8$	0	0	$H_{14}$	0	0	0	$H_{15}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$H_5$	0	0	0	0	0	$H_{17}$	0	0	0	$H_{18}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_9$	$H_{11}$	0	$H_{15}$	0	$H_{19}$	0	0	0	$H_{20}$	$H_{21}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_{13}$	0	0	0	$H_{22}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_{16}$	0	0	0	$H_{23}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_{18}$	0	0	0	$H_{24}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_{20}$	0	0	0	$H_{25}$	$H_{26}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$H_{21}$	0	0	0	$H_{26}$	$H_{27}$

$$H_1 = C_1 D_1, \quad H_2 = C_1 D_2$$

$$H_3 = -\frac{1}{2R} C_2 D_2 + \frac{1}{2R} C_2 \nu D_1$$

$$H_4 = \frac{1}{R^2} C_3 D_1 + \frac{48}{27R^2} C_2 D_3 - \frac{2}{R^2} C_3 \nu D_2 + \frac{1}{R^2} C_3 \nu^2 D_1$$

$$H_5 = -\frac{1}{2R^3} C_4 D_2 + \frac{1}{R^3} C_4 \nu D_1 + \frac{8}{27R^3} C_5 \nu D_3 - \frac{1}{2R^3} C_4 \nu^2 D_2$$

$$H_6 = -\frac{1}{2R} C_2 D_1 + \frac{1}{2R} C_2 \nu D_2$$

$$H_7 = C_2 D_1 + C_2 \nu^2 D_1 - 2C_2 \nu D_2$$

$$H_8 = -\frac{1}{6R} C_5 D_1 - \frac{1}{6R} C_5 \nu^2 D_1 + \frac{1}{6R} C_5 \nu D_2$$

$$H_9 = \frac{1}{6R} C_5 \nu D_2 - \frac{1}{6R} C_5 \nu^2 D_1$$

$$H_{10} = C_1 D_3$$

$$H_{11} = \frac{1}{18R^2} C_3 \nu D_3$$

$$H_{12} = C_1 K_1 + \frac{1}{4R^2} D_1 (1 + \nu^2) C_5 - \frac{1}{2R^2} D_2 \nu C_5$$

$$H_{13} = C_1 K_2$$

$$H_{14} = C_2 K_1 + \frac{1}{36R^2} C_9 D_1 - \frac{1}{18R^2} C_9 \nu D_2$$

$$H_{15} = -\frac{1}{36R^2} C_9 \nu D_2 + \frac{1}{36R^2} C_9 \nu^2 D_1$$

$$H_{16} = C_2 K_2$$

$$H_{17} = \frac{1}{R^2} C_3 K_1 + \frac{1}{R^2} C_2 K_3 + \frac{1}{4R^4} C_6 D_1 - \frac{1}{2R^4} C_6 \nu D_2 + \frac{4}{81R^4} C_9 \nu^2 D_3 + \frac{1}{4R^4} C_6 \nu^2 D_1$$

$$H_{18} = \frac{1}{R^2} C_3 K_2$$

$$H_{19} = \frac{1}{4R^2} C_5 K_3 + \frac{1}{R^2} C_4 K_1 + \frac{1}{36R^4} C_8 D_1 + \frac{1}{36R^2} C_9 v^2 D_1 + \frac{1}{R^4} C_{10} v^2 D_3$$

$$H_{20} = \frac{1}{R^2} C_4 K_2 + \frac{1}{4R^2} C_4 K_3$$

$$H_{21} = \frac{1}{2R} C_2 K_3$$

$$\begin{aligned} H_{22} &= C_1 K_1, & H_{23} &= C_2 K_1 + C_3 K_3 \\ H_{24} &= \frac{1}{R^2} C_3 K_1, & H_{25} &= \frac{1}{4R^2} C_7 K_3 + \frac{1}{R^2} C_4 K_1 \\ H_{26} &= \frac{1}{2R} C_3 K_3, & H_{27} &= C_1 K_3 \end{aligned}$$

$$C_1 = ab, \quad C_2 = \frac{a^3 b}{12}, \quad C_3 = \frac{ab^3}{12}, \quad C_4 = \frac{a^3 b^3}{144}, \quad C_5 = \frac{a^5 b}{80}$$

$$C_6 = \frac{a^5 b^3}{960}, \quad C_7 = \frac{ab^5}{80}, \quad C_8 = \frac{a^7 b^3}{5376}, \quad C_9 = \frac{a^7 b}{448}, \quad C_{10} = \frac{a^9 b}{746496}$$

#### A.4. Matrices [K<sub>0</sub>] des variantes de [BUL 84] :

Les variantes de [BUL 84] ont la même matrice [K<sub>0</sub>] que l'élément [ASH 72] sauf pour les termes suivants qui deviennent :

##### A.4.1. La 1<sup>ère</sup> variante :

$$H_5 = -\frac{1}{6R^3} C_{10} D_2$$

$$H_{14} = (9C_6 + C_{11}) \frac{1}{9R^2} K_1 + \frac{1}{R^2} C_{10} K_3 + \frac{1}{36R^4} C_{12} D_1$$

$$H_{15} = \frac{1}{3R^2} C_7 K_2 + \frac{1}{R^2} C_4 K_1$$

avec :

$$C_{10} = \frac{a^3 b^5}{960}, \quad C_{11} = \frac{a^5 b^7}{448}$$

$$C_{12} = \frac{a^5 b^7}{35840}$$

**A.4.2. La 2<sup>ème</sup> variante :**

$$H_{13} = \frac{1}{R^2} C_4 K_2$$

$$H_{20} = \frac{1}{R^4} C_{11} K_1 + \frac{1}{9R^4} C_{10} K_3$$

avec

$$C_{10} = \frac{ab^7}{448} \quad C_{11} = \frac{a^3b^5}{960}$$

**A.4.3. La 3<sup>ème</sup> variante :**

$$H_7 = \frac{1}{9R^2} C_{10} K_3 + \frac{1}{R^2} C_{11} K_1$$

$$K_0(10,17) = \frac{1}{3R^2} K_3 C_7 + \frac{1}{R^2} K_1 C_4$$

avec

$$C_{10} = \frac{ab^7}{448} \quad C_{11} = \frac{a^3b^5}{960}$$

**A.4.4. La 4<sup>ème</sup> variante :**

$$H_5 = -\frac{1}{6R^3} C_{11} D_2$$

$$H_7 = \frac{1}{9R^4} K_3 C_{10} + \frac{1}{R^4} K_1 C_{11}$$

$$H_8 = \frac{1}{R^2} K_2 C_4 - \frac{1}{6R} D_1 C_5$$

$$K_0(10,17) = \frac{1}{3R^2} K_3 C_7 + \frac{1}{R^2} K_1 C_4$$

$$H_{12} = \frac{1}{36R^2} D_1 C_9, H_{15} = 0$$

$$H_{14} = \frac{1}{9R^2} K_1 C_{10} + \frac{1}{R^2} K_3 C_7 + \frac{1}{240R^4} D_1 C_{12} + \frac{1}{R^2} K_1 C_6 + \frac{2}{3R^2} K_2 C_{11}$$

$$K_0(14,15) = \frac{1}{2R^2} K_3 C_4$$

$$H_{15} = \frac{1}{3R^2} K_2 C_7 + \frac{1}{R^2} K_1 C_4, K_0(14,19) = \frac{1}{8R^2} K_3 C_7, K_0(14,20) = \frac{1}{R} K_3 C_3$$

A.5. Matrice  $[K_0]$  de l'élément [DJO 03] :

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 & H_1 & 0 & 0 & H_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_7 & 0 & 0 & H_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_3 & 0 & H_6 & 0 & 0 & H_{10} & 0 & 0 & 0 & H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_8 & 0 & 0 & H_{12} & 0 & 0 & 0 & H_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{14} & 0 & 0 & 0 & H_{15} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{16} & 0 & 0 & 0 & H_{17} & H_{18} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{11} & 0 & 0 & 0 & H_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{13} & 0 & 0 & 0 & H_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{15} & 0 & 0 & 0 & H_{21} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{17} & 0 & 0 & 0 & H_{22} & H_{23} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{18} & 0 & 0 & 0 & H_{23} & H_{24}
 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = C_1 D_1, \quad H_2 = C_1 D_2$$

$$H_3 = -\frac{1}{2R} C_2 D_2, \quad H_4 = C_3 D_1$$

$$H_5 = -\frac{1}{2R} C_4 D_2, \quad H_6 = -\frac{1}{2R} C_2 D_1$$

$$H_7 = C_2 D_1 + C_3 D_3, \quad H_8 = -\frac{1}{6R} C_5 D_1$$

$$H_9 = C_1 D_3, \quad H_{10} = C_1 K_1 + \frac{1}{4R^2} C_5 D_1$$

$$H_{11} = C_1 K_2, \quad H_{12} = C_2 K_1 + \frac{1}{36R^2} C_9 D_1$$

$$H_{13} = C_2 K_2, \quad H_{14} = C_3 K_1 + C_2 K_3 + \frac{1}{4R^2} C_6 D_1$$

$$H_{15} = C_3 K_2, \quad H_{16} = C_5 K_3 + C_4 K_1 + \frac{1}{36R^2} C_8 D_1$$

$$H_{17} = C_4 K_2 + C_4 K_3, \quad H_{18} = C_2 K_3$$

$$H_{19} = C_1 K_1, \quad H_{20} = C_2 K_1 + 4C_3 K_3$$

$$H_{21} = C_3 K_1, \quad H_{22} = C_7 K_3 + C_4 K_1$$

$$H_{23} = C_3 K_3, \quad H_{24} = C_1 K_3$$

$$C_1 = ab$$

$$C_4 = \frac{a^3 b^3}{144}$$

$$C_7 = \frac{ab^5}{80}$$

$$C_2 = \frac{a^3 b}{12}$$

$$C_5 = \frac{a^5 b}{80}$$

$$C_8 = \frac{a^7 b^3}{5376}$$

$$C_3 = \frac{ab^3}{12}$$

$$C_6 = \frac{a^5 b^3}{960}$$

$$C_9 = \frac{a^7 b}{448}$$

A.6. Matrice  $[K_0]$  de l'élément [SAB 72] :

$$\begin{bmatrix}
 H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & H_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{26} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_8 & 0 & 0 & 0 & H_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{27} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_7 & 0 & 0 & 0 & H_{15} & 0 & H_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & H_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_9 & 0 & 0 & 0 & H_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{24} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & H_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{28} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{15} & 0 & 0 & 0 & H_{16} & 0 & H_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & H_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{18} & 0 & 0 & 0 & H_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{21} & 0 & H_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{25} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & H_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{27} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{29} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \frac{1}{12} ab^3 K_1 + \frac{1}{12} a^3 b K_3$$

$$H_2 = abK_1$$

$$H_3 = abK_3$$

$$H_4 = \frac{1}{12} a^3 b K_1 + \frac{1}{12} ab^3 K_3 + \frac{1}{12} a^3 \frac{b}{r^2} D_1 + \frac{1}{3} a \frac{b^3}{r^2} D_3$$

$$H_5 = abK_2$$

$$H_6 = abK_1 + a \frac{b}{r^2} D_1$$

$$H_7 = \frac{9}{20} a^5 b D_3 + \frac{1}{4} a^3 b^3 D_1 + \frac{1}{5376} a^7 \frac{b^3}{r^2} K_1$$

$$H_8 = \frac{1}{80} a^5 \frac{b}{r} K_1 - \frac{1}{2} a^3 \frac{b}{r} D_2$$

$$H_9 = 3a^3 b D_1 + \frac{1}{448} a^7 \frac{b}{r^2} K_1$$

$$H_{10} = \frac{1}{144} a^3 \frac{b^3}{r} K_2$$

$$H_{11} = \frac{1}{3} ab^3 D_1 + \frac{4}{3} a^3 b D_3 + \frac{1}{960} a^5 \frac{b^3}{r^2} K_1$$

$$H_{12} = \frac{1}{12} a^3 \frac{b}{r} K_2$$

$$H_{13} = \frac{1}{12} a^3 \frac{b}{r} K_1 - 2a \frac{b}{r} D_2$$

$$H_{14} = 4abD_1 + \frac{1}{80} a^5 \frac{b}{r^2} K_1$$

$$H_{15} = \frac{1}{4} a^3 b^3 D_2 + \frac{1}{4} a^3 b^3 D_3 + \frac{1}{6400} a^5 \frac{b^5}{r^2} K_1$$

$$H_{16} = \frac{9}{20}ab^5D_3 + \frac{1}{4}a^3b^3D_1 + \frac{1}{5376}a^3\frac{b^7}{r^2}K_1$$

$$H_{17} = \frac{1}{144}a^3\frac{b^3}{r}K_1 - \frac{2}{3}a\frac{b^3}{r}D_3 - \frac{1}{6}a^3\frac{b}{r}D_1$$

$$H_{18} = a^3bD_2 + \frac{1}{960}a^5\frac{b^3}{r^2}K_1$$

$$H_{19} = \frac{1}{3}a^3bD_1 + \frac{4}{3}ab^3D_3 + \frac{1}{960}a^3\frac{b^5}{r^2}K_1$$

$$H_{20} = a^3bD_3 + \frac{1}{960}a^5\frac{b^3}{r^2}K_1$$

$$H_{21} = ab^3D_3 + \frac{1}{960}a^3\frac{b^5}{r^2}K_1$$

$$H_{22} = 4abD_3 + \frac{1}{144}a^3\frac{b^3}{r^2}K_1$$

$$H_{23} = \frac{1}{80}a\frac{b^5}{r}K_2$$

$$H_{24} = ab^3D_2 + \frac{1}{960}a^3\frac{b^5}{r^2}K_1$$

$$H_{25} = 3ab^3D_1 + \frac{1}{448}a\frac{b^7}{r^2}K_1$$

$$H_{26} = \frac{1}{12}a\frac{b^3}{r}K_2$$

$$H_{27} = \frac{1}{12}a\frac{b^3}{r}K_1 - 2a\frac{b}{r}D_1$$

$$H_{28} = 4abD_2 + \frac{1}{144}a^3\frac{b^3}{r^2}K_1$$

$$H_{29} = 4abD_1 + \frac{1}{80}a\frac{b^5}{r^2}K_1$$

Avec :

$$K_1 = Et(1-\nu^2) \quad K_2 = \nu D_1 \quad K_3 = \frac{1}{2}K_1(1-\nu)$$

$$D_1 = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad D_2 = \nu K_1 \quad D_3 = D_1(1-\nu)$$

Vecteur  $\{F_0\}$  pour cet élément est :

$$\{F_0\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2ar^2 \sin\alpha(-\beta \cos\beta + \sin\beta) \\ -2ar^2 \cos\alpha(\sin\beta - \beta \cos\beta) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6}a^3 r^2 \cos\alpha(\sin\beta - \beta \cos\beta) \\ -\frac{1}{6}a^3 r \sin\alpha \sin\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2ar^4 \cos\alpha[(3\beta^2 - 6) \sin\beta - (\beta^3 - 6\beta) \cos\beta] \\ -2ar^3 \sin\alpha[(\beta^2 - 2) \sin\beta + 2\beta \cos\beta] \\ 2ra\beta \cos\alpha \\ -2ra\beta \sin\alpha \end{array} \right\}$$