

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohamed Khider-Biskra  
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie  
Département : Sciences de la Matière  
Filière : Physique

N° d'ordre :

## THESE

Présentée Pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Physique

# L'approche polynomiale et les techniques de décomposition dans le traitement des équations différentielles aux dérivées partielles de la physique

Par

Samia Ouamane

Soutenue le 12/03/2012

devant le jury composé de :

- |                    |            |                                 |
|--------------------|------------|---------------------------------|
| - M A. Attaf,      | Président  | Pr. (Université de Biskra)      |
| - M A. Zerarka,    | Rapporteur | Pr. (Université de Biskra)      |
| - M A. B. Bouzida, | Examineur  | Pr. (Université de Batna)       |
| - M N. Attaf,      | Examineur  | Pr. (Université de Constantine) |
| - M N. Khelil,     | Examineur  | Mc. (Université de Biskra)      |
| - M M.T. Meftah,   | Examineur  | Pr. (Université de Ouargla)     |

# Remerciements et Dédicace

J'exprime toute ma gratitude au Professeur A. Zerarka, pour m'avoir proposé ce sujet, en me permettant d'aller au terme de cette thèse dans d'excellentes conditions et pour avoir patiemment dirigé mes travaux; ainsi, son expérience, ses connaissances et son savoir-faire m'ont été d'une très grande utilité.

Je remercie les différents membres du jury d'avoir accepté de lire et d'évaluer mon travail : Mr.A. B. Bouzida, Professeur à l'Université de *Batna*, Mr. N. Attaf, Professeur à l'Université de *Constantine*, Mr. N. Khelil, Maître de Conférences à l'Université de *Biskra*, Mr. M.T. Meftah, Professeur à l'Université de *Ouargla* et Mr. A. Attaf, Professeur à l'Université de *Biskra* d'avoir bien voulu présider ce jury.

Je remercie chaleureusement mes enseignants, ceux qui m'ont formé, aidé ou conseillé à un moment ou à un autre.

Enfin, et surtout, je remercie mes parents, mon mari et ma famille, pour leur soutien et leurs encouragements.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les équations d'ondes non-linéaires</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction . . . . .	4
1.2	Les équations aux dérivées partielles . . . . .	5
1.3	Problèmes bien posés . . . . .	7
1.4	Notions de solution . . . . .	7
1.5	Les équations dispersives non-linéaires . . . . .	8
1.6	Le concept "soliton" . . . . .	11
1.7	Définitions . . . . .	13
1.8	Ondes non-linéaires et milieux dispersifs . . . . .	14
1.8.1	Le comportement des équations non-linéaires dispersives . . . . .	16
1.9	Les modèles d'équations dispersives non-linéaires . . . . .	16
1.9.1	Les équations de type Korteweg-de Vries ( KdV) . . . . .	16
1.10	Solitons multidimensionnels . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Les méthodes d'approximations</b>	<b>28</b>
<b>I</b>	<b>Introduction sur les méthodes d'approximations</b>	<b>29</b>
2.1	Introduction . . . . .	30
2.2	Présentation de quelques méthodes d'approximations . . . . .	30
2.2.1	L'Approche Variationnelle . . . . .	30
2.2.2	La méthode d'Itération Variationnelle . . . . .	33

2.2.3	La méthode de perturbation d'homotopie (MPH) . . . . .	33
2.2.4	La méthode du développement du paramètre . . . . .	35
2.2.5	La méthode de la fonction exponentielle . . . . .	36
2.2.6	La méthode Tanh . . . . .	36
2.2.7	La méthode Sine-Cosine . . . . .	38
 <b>II Les méthodes de décomposition</b>		<b>47</b>
2.3	Introduction . . . . .	48
2.4	La méthode d'Adomian . . . . .	48
2.4.1	Description de la méthode . . . . .	48
2.4.2	Polynômes d'Adomian . . . . .	49
2.4.3	Applications : L'équation non linéaire de Schrödinger ( <i>CNLS</i> ) . .	53
2.4.4	Calculs symboliques . . . . .	54
2.4.5	Test pour un soliton simple . . . . .	57
2.5	La méthode de perturbation artificielle . . . . .	61
2.5.1	Introduction . . . . .	61
2.5.2	Description de la méthode . . . . .	62
2.5.3	Application : L'équation complexe de Korteweg de Vries ( <i>CMKdV</i> ) modifiée . . . . .	63
2.6	Discussion et conclusion . . . . .	66
 <b>3 La méthode de la variable fonctionnelle : Les équations d'ondes à coef-</b>		<b>71</b>
<b>ficients constants</b>		
3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	La description de la méthode . . . . .	71
3.3	Application de la méthode . . . . .	73
3.3.1	L'équation de KdV . . . . .	74
3.3.2	La forme généralisée du système de Boussinesq . . . . .	76

3.3.3	L'équation d'onde longue régularisée (RLW) . . . . .	81
3.3.4	Structures avec un exposant négatif . . . . .	85
3.3.5	Remarques . . . . .	88
3.3.6	Structures en deux dimensions : équation de Burgers . . . . .	89
3.4	Conclusion . . . . .	90
<b>4</b>	<b>La méthode de la variable fonctionnelle : Les équations d'ondes à coef-</b>	
	<b>ficients variables</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Application à l'équation KdV . . . . .	95
4.3	Conclusion . . . . .	99

# Introduction générale

Cette thèse s'inscrit dans un courant d'études scientifiques pour les équations différentielles partielles appliquées en physique et en mathématique. Une des impulsions principales pour développer les équations partielles non-linéaires a été l'étude des problèmes non-linéaires de propagation d'ondes. L'onde dispersive non-linéaire se produit dans tous les systèmes physiques et naturels quand la dissipation est faible. Ces équations fournissent d'excellents exemples des systèmes dynamiques qui possèdent divers phénomènes fascinants comprenant les ondes solitaires, les trains d'ondes, la génération et la propagation des oscillations, l'existence des ondes temporellement chaotiques...etc.

En effet, la théorie des ondes non-linéaires et les solitons ont connu une révolution pendant les trois dernières décennies. Pendant cette révolution, on a également observé beaucoup de phénomènes remarquables et inattendus dans les systèmes physiques, chimiques, et biologiques.

Ces phénomènes qui surgissent dans différents domaines incluent le système optique non-linéaire, les dispositifs de communication tels que les fibres optiques transsoniques, les ondes dans l'atmosphère et l'océan, et la turbulence dans le plasma. Les exemples des équations partielles dispersives non-linéaires renferment l'équation de Korteweg de Vries (*KdV* en abrégé), les équations non-linéaires de Klein Gordon, les équations de Schrödinger non-linéaires, et beaucoup d'autres.

Les réalisations principales des mathématiques appliquées ont montré entre autres la découverte des interactions de soliton, en introduisant la méthode de «diffusion inverse» pour trouver la solution exacte explicite pour un système d'équations partielles, et l'analyse asymptotique de perturbation pour la recherche des équations non-linéaires d'évolution.

La compréhension mathématique de ces objets et de leur rôle dans la description des dynamiques des ondes non-linéaires étaient depuis les années 60 un sujet de recherche extrêmement actif qui met en œuvre des points de vue très divers : la théorie

classique des équations aux dérivées partielles (théorie des EDP elliptiques et de l'intégrabilité complète), l'analyse fonctionnelle et l'analyse harmonique, la théorie des systèmes dynamiques (théorie des perturbations, fonctionnelles de Liapounov), des ingrédients classiques de la physique mathématique (analyse spectrale), ainsi que des contributions importantes de l'analyse numérique.

Avec le développement rapide de la science non-linéaire, les scientifiques et les ingénieurs sont intéressés par les techniques analytiques asymptotiques pour des problèmes non-linéaires. Bien qu'il soit très facile pour nous maintenant de trouver les solutions des systèmes linéaires à l'aide de l'ordinateur. Cependant, il est très difficile de résoudre toujours les problèmes non-linéaires numériquement ou analytiquement. C'est probablement dû au fait que les diverses méthodes de simulations numériques s'appliquent à des techniques d'itération pour trouver leurs solutions numériques à des problèmes non-linéaires, et presque toutes les méthodes itératives sont sensibles aux conditions initiales. Ainsi, il semble difficile d'obtenir des résultats convergents dans les cas de forte non-linéarité.

D'autres équations d'évolution issues de la physique sont complètement intégrables. Mais cette propriété exceptionnelle a le défaut d'être instable par perturbation de l'équation, ce qui ne permet pas de raffiner la modélisation physique. Ces trente dernières années un effort considérable a été entrepris pour développer une théorie beaucoup plus robuste et générale avec des apports importants de différentes parties des mathématiques.

L'objectif de ce travail, est la construction des solutions de certains modèles physiques classiques ou quantiques traités mathématiquement au moyen de la méthode de *décomposition* et la méthode de la *variable fonctionnelle*.

Donc, notre contribution comporte deux tâches :

- Application des méthodes de décomposition en séparant les termes non linéaires pour trouver les solutions des équations différentielles qui admettent des conditions aux limites ou/et initiales.

- Introduction de la méthode de la variable fonctionnelle dans la recherche des solutions exactes explicitement.

Cette thèse est constituée d'une introduction générale qui présente l'importance du thème, les objectifs de la recherche et montre l'organisation de la thèse renfermant quatre grands chapitres et chacun sa propre bibliographie, et enfin une conclusion générale.

Nous rappelons, dans le premier chapitre, la théorie de base pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles modélisant la propagation des ondes dans des milieux faiblement non linéaires et dispersifs en citant quelques équations modèles décrivant des situations physiques appropriées.

Le deuxième chapitre porte sur les méthodes d'approximations, dans lequel on essaye de donner en premier lieu un aperçu sur quelques méthodes approximatives récentes avec l'appui de quelques applications. En second lieu, on essaye d'appliquer des méthodes de décomposition, telles que la méthode d'Adomian et la méthode de perturbation artificielle. Différentes configurations ont été considérées et testées et qui nous ont permis de trouver des solutions judicieuses avec la contribution du package de *Mathematica*. Cette étude introduit les deux systèmes suivants :

- L'équation non linéaire de Schrödinger (*CNLS*) (équation cubique)
- L'équation complexe de Korteweg-de Vries modifiée *CMKdV* (couplée)

Les développements récents des problèmes non-linéaires avec l'effort intense augmentent le besoin de la construction de nouvelles approches.

Le troisième chapitre propose donc une nouvelle approche : la méthode de la variable fonctionnelle appliquée à plusieurs types de problèmes non-linéaires à coefficients constants. Dans ce chapitre, on essaye d'appliquer cette méthode pour quelques exemples bien connus, l'équation de *KdV*, la forme généralisée du système de Boussinesq, l'équation d'onde longue régularisée (*RLW*), l'équation de Burgers en deux dimensions. Le dernier chapitre traite un problème non-linéaire à coefficient variables (dépendant du temps) et avec un terme de force avec la méthode de la variable fonctionnelle.



# Chapitre 1

## Les équations d'ondes non-linéaires

### 1.1 Introduction

Les équations différentielles partielles expriment beaucoup de lois fondamentales de la nature et surgissent généralement dans l'analyse mathématique des problèmes en science et technologie.

Bien que, les équations différentielles partielles non-linéaires aient subi de nouveaux développements remarquables pendant la dernière moitié du vingtième siècle, une des impulsions principales pour développer des équations partielles non-linéaires a été l'étude des problèmes non-linéaires de propagation des ondes. Ces problèmes apparaissent dans différents domaines des mathématiques appliquées, de la physique, y compris la dynamique de fluides, le système optique, la mécanique des solides, la physique des plasmas, et la physique non-linéaire de la matière condensée.

Les équations d'ondes non-linéaires en particulier ont fourni plusieurs exemples de nouvelles solutions qui sont remarquablement différentes de celles obtenues pour des problèmes d'ondes linéaires. On va essayer dans ce chapitre d'exposer rapidement un aperçu de la théorie de base pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles modélisant la propagation des ondes, suivie de quelques équations modèles décrivant des situations physiques données.

## 1.2 Les équations aux dérivées partielles

Soit  $u$  une fonction définie sur  $R^d$ , à valeurs dans  $R$  et suffisamment régulière. Une équation aux dérivées partielles (*E.D.P.*) pour la fonction  $u$  est une relation entre  $u$ , les variables  $x_1, \dots, x_d$  et un nombre fini de dérivées partielles de  $u$  [1],

$$F(x_1, \dots, x_d, u, D_1 u, \dots, D_d u, D_1 D_1 u, D_1 D_2 u, \dots, D^\alpha u, \dots) = 0$$

avec  $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  et  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in N^d$

Ces équations peuvent être linéaires ou non-linéaires à coefficients constants ou variables. L'équation partielle non linéaire de premier ordre ayant deux variables indépendantes  $x$  et  $y$  est généralement exprimée sous la forme

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = f \tag{1.1}$$

où  $f$  est une fonction d'une ou deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ . De même, l'équation partielle non linéaire du second degré ayant deux variables indépendantes  $x$  et  $y$  peut être exprimée par

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) = f \tag{1.2}$$

L'équation partielle non linéaire s'appelle homogène si  $f = 0$ , et dite non homogène si  $f \neq 0$

Quelques exemples des équations différentielles partielles non linéaires :

$$u_t + 2uu_x = 0 \tag{1.3}$$

$$u_t + u^2 u_y = 0 \tag{1.4}$$

$$u_t + uu_x = \sin x \quad (1.5)$$

Plus formellement, il est possible d'écrire ces équations sous forme d'opérateur

$$L_X u (X) = f (X) \quad (1.6)$$

où  $L_X$  est un opérateur différentiel partiel et  $f(X)$  est une fonction de deux variables et,  $X = (x, y, \dots)$ .

Si  $L_X$  n'est pas un opérateur linéaire, l'Eq.(1.6) s'appelle une équation partielle non linéaire. Pour trouver des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions. Les contraintes les plus fréquentes sont [1, 2] :

1. Conditions initiales :

si  $u$  est fonction de  $(x, t) \in R^d \times R$  on donne :

$u(x, t_0) = \Phi_0(x)$  ou  $D_2^p u(x, t_0) = \Phi_p(x)$ , on parle aussi de conditions de Cauchy.

2. Conditions au bord :

si  $u$  est fonction de  $x \in R^d$  on a trois types de contraintes :

- *conditions de Dirichlet* où  $u$  est fixé sur le bord de  $\Omega : u|_{\partial\Omega} = g$ ; et  $\Omega$  est le domaine de définition de la solution.

- *conditions de Neumann* où la dérivée normale de  $u$  est fixée  $\frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = g$ ;

- *conditions mixtes*  $c(x)u + \bar{c}(x)\frac{du}{dn} = g$  sur  $\partial\Omega$ ;

si  $g = 0$  on a des conditions homogènes au bord ;

3. Conditions à l'infini :

si  $u$  n'est pas bornée on a des conditions de la forme :

$u(x) \sim \Phi(x)$  quand  $|x| \rightarrow \infty$  ou  $\|u\|_2 < \infty$

Les contraintes sont en général imposées par la nature du problème que l'on essaye de résoudre, et l'équation aux dérivées partielles et ses conditions restrictives seront donc

a priori cohérentes.

De façon générale une équation aux dérivées partielles ne donne lieu à un problème raisonnable que si on l'associe à un certain type de conditions restrictives, par exemple des conditions initiales pour des problèmes d'évolution (équation de la chaleur et équation des ondes) ou des conditions au bord pour l'équation de Laplace.

### 1.3 Problèmes bien posés

Pour un problème physique modélisé par une équation aux dérivées partielles, le scientifique essaye de formuler les conditions auxiliaires physiquement réalistes, le tout constitue un problème bien-posé.

Si on considère une équation aux dérivées partielles sur un domaine avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que le problème est bien posé si on a :

- *Existence* d'une solution du problème : l'existence au moins d'une solution satisfaisant toutes les conditions.

- *Unicité* de cette solution

- *Stabilité* par rapport aux données du problème : la solution unique dépend d'une façon stable des données du problème.

Si la solution change beaucoup quand les données changent peu, on dit que le problème est sensible aux données.

### 1.4 Notions de solution

Soit  $u$  la solution d'un problème bien posé. Dans ce qui précède on n'a pas précisé la régularité de  $u$ , on a seulement supposé que  $u$  était suffisamment différentiable pour que les équations aient un sens. Dans beaucoup de cas un problème n'admet pas de solutions régulières : ex, l'équation des ondes avec conditions initiales non continues, les lois de

conservation scalaires qui génèrent des ondes de choc (*Chaos*) [1].

En général, le principe de superposition linéaire peut être appliqué aux équations partielles linéaires. Ce principe est habituellement employé pour trouver une nouvelle solution comme une combinaison linéaire d'un ensemble donné de solutions. Cependant, pour des équations partielles non-linéaires, le principe de superposition linéaire ne peut pas être appliqué pour donner une nouvelle solution. Ainsi, parce que la plupart des méthodes de solution pour des équations linéaires ne peuvent pas être appliquées aux équations non-linéaires, et des techniques numériques sont habituellement exigées pour leur solution. On peut parfois trouver une transformation des variables qui transforme une équation non-linéaire en équation linéaire. En fait, de nouvelles méthodes sont manifestement exigées pour trouver des solutions aux équations de types non-linéaires [2].

## 1.5 Les équations dispersives non-linéaires

L'intérêt que portent les physiciens aux équations non linéaires dispersives est dû à l'existence pour ces équations non linéaires des ondes solitaires, c-à-d. des solutions se propageant à vitesse constante sans changement de forme.

La première observation dans la « nature » de ce phénomène est sans doute l'expérience vécue par J. Scott-Russel, en 1834. Lors d'une promenade le long du canal *Edinburgh-Glasgow*, il suivit pendant plusieurs kilomètres une vague produite par le sillage d'un bateau. Celle-ci se propageait sans se déformer [3]. Il découvrit alors ce qu'il a appelé les grandes ondes de translation ou ondes solitaires.

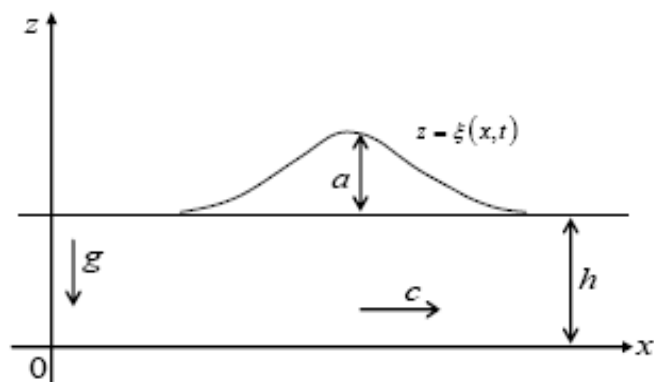
La découverte remarquable a motivé Russel pour conduire des expériences physiques de laboratoire pour accentuer son observation et pour étudier ces ondes solitaires. Il a empiriquement dérivé la relation :

$$c^2 = g(h + a) \tag{1.7}$$

Cela détermine la vitesse  $c$  de l'onde solitaire, où  $a$  est l'amplitude maximale au-dessus

de la surface de l'eau,  $h$  est la profondeur finie et  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Les ondes solitaires s'appellent donc les ondes de gravité [3].

La *Fig.1.* montre les paramètres et les variables utilisés dans la description de l'onde solitaire.



*Fig.1.* La description de l'onde solitaire [3]

Ce n'est qu'en 1895, que la découverte de Russel fût confortée grâce aux mathématiciens Korteweg et de Vries qui proposèrent leur célèbre équation aux dérivées partielles, appelée depuis, équation de Korteweg-de Vries, couramment abrégé en *KdV*, pour décrire le mouvement des ondes en eaux peu profondes (longueur d'onde plus grande que la profondeur). Ils montrèrent que les ondes solitaires sont solutions de cette équation.

Cette équation est l'une des équations d'évolution non-linéaires les plus étudiées. L'intérêt porté par les scientifiques envers cette équation est dû à ses propriétés remarquables lui permettant d'être un bon modèle pour de nombreux systèmes physiques.

L'équation de *KdV* sous sa forme plus simple est donnée par :

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.8)$$

qui indique que la dispersion et la non-linéarité pourraient se produire. On assume que

les solutions d'ondes solitaires sont de la forme

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (1.9)$$

où,  $c$  est la vitesse de la propagation de l'onde, nous obtenons l'équation différentielle ordinaire (*EDO*) :

$$-cf' + f''' + 6ff' = 0$$

qui fournit après intégration

$$-cf'' + f'' + 3f^2 = a$$

où  $a$  est une constante d'intégration. Une multiplication par  $f'$  suivi d'une intégration on trouve :

$$-cf^2 + (f')^2 + 2f^3 = 2af + b \quad (1.10)$$

où  $b$  est encore une constante.

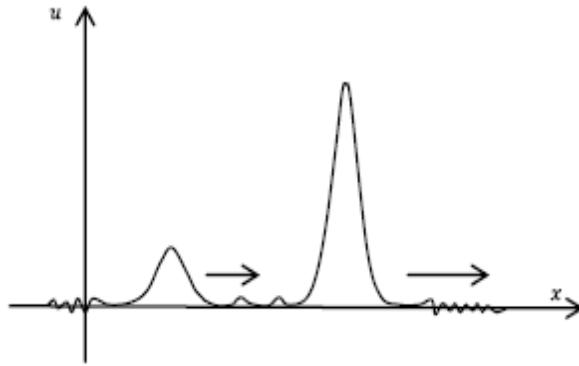
Nous cherchons une solution solitaire, signifiant que loin du tams de l'eau, il n'y a aucune altitude et  $f, f', f'' \rightarrow 0$ , quand  $x \rightarrow \pm\infty$ , alors nous devons avoir  $a = b = 0$ , de sorte que

$$-cf^2 + (f')^2 + 2f^3 = 0$$

La solution de cette *EDO* de premier ordre est

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct + x_0)\right], \quad (1.11)$$

où  $x_0$  est une constante d'intégration



*Fig.2.* Le soliton,  $t$  fix.

La solution (1.11), tend à zéro exponentiellement quand  $x \rightarrow \pm\infty$ . (voir *Fig.2.*). Avec la fonction  $f$ ,  $u(x, t) = f(x - ct)$ , c'est la forme d'un soliton. Il voyage vers la droite à une vitesse  $c$ , son amplitude est  $c/2$ . Il existe un soliton pour chaque  $c > 0$ . Il est long, étroit et rapide si  $c$  est grande, et est court, large et lent si  $c$  est petite.

La stabilité du soliton, est découverte seulement en 1965 par M. Kruskal et N. Zabusky [5]. Ils ont trouvé une propriété inattendue de l'équation de  $KdV$ . Si nous commençons par deux solitons, les plus rapides dépasseront le plus lent et, après une interaction non-linéaire compliquée, les deux solitons émergeront sans changement de forme quand ils se déplacent vers la droite, excepté un léger retard. En fait, ils ont observé que chaque solution de (1.8), avec n'importe quelle fonction initiale  $u(x, 0) = \Phi(x)$ , semble se décomposer, quand  $t \rightarrow \pm\infty$ , en un nombre fini de solitons (voir *Fig.2.*).

Ce comportement spécial incite des physiciens à employer le soliton comme un modèle mathématique d'une particule élémentaire stable [4].

## 1.6 Le concept "soliton"

Pendant ces dernières années, la théorie de soliton a été appliquée à de nombreux problèmes pratiques et fondamentaux dans des domaines divers. En raison de leur stabi-



lité, les solitons constituent une image commode et adéquate pour décrire une multitude de phénomènes non linéaires [6-15].

Notons que le terme soliton (formé du latin *solitarius* : solitaire) est employé dans la physique et les mathématiques. Dans la littérature mathématique ce terme est typiquement associé aux solutions des équations intégrables qui interagissent élastiquement et reprennent leurs formes après collision. Donc, le soliton est une onde non-linéaire, qui a les deux propriétés importantes suivantes :

1. Une onde localisée se propage sans changer ses propriétés (forme, vitesse etc.)
2. Les ondes localisées sont stables contre des collisions mutuelles et maintiennent leurs identités.

La première propriété est un état d'onde solitaire connu en hydrodynamique depuis le 19ème siècle. La seconde signifie que l'onde a l'aspect d'une particule. Comment confirmons-nous analytiquement les propriétés des solitons ? Pourquoi les solitons sont-ils stables comme des particules ? Le soliton est-il un phénomène spécifique de l'équation de  $KdV$  ? Les réponses à ces questions ont joué un rôle important en établissant le concept de soliton.

La raison pour laquelle chaque onde solitaire reste stable contre des interactions mutuelles est que l'équation de  $KdV$  a un nombre infini de quantités conservées. Des propriétés dynamiques du système sont limitées par l'existence d'un nombre infini de lois de conservation. Les quantités conservées garantissent l'indépendance des paramètres par rapport au temps ; ce qui caractérise les solitons, et donc les solitons sont stables.

Le plus important développement des solitons est survenu en 1967 dans lequel une relation remarquable entre les solitons et la diffusion transformée de l'opérateur de Schrödinger a été introduite par Gardner, Green, Kruskal et Miura [16].

Ces derniers ont proposé de résoudre le problème de *Cauchy* de l'équation de  $KdV$  en utilisant la diffusion inverse. Gardner, Green, Kruskal et Miura [16] ont présenté un problème linéaire (problème de valeur propre) où le potentiel  $u(x, t)$  est la solution de l'équation de  $KdV$  ,

$$-\psi_{xx} - u(x, t)\psi = \lambda\psi, \quad (1.12)$$

c'est une équation de type Schrödinger. Quand  $u$  satisfait l'Eq. (1.8), la valeur propre  $\lambda = -c^2$  ne dépend pas du temps. Puisque  $\lambda$  est négatif ceci représente un état lié dans la mécanique ondulatoire. D'autres valeurs de  $\lambda > 0$  peuvent être associées aux solitons mais ce ne sont pas des états liés et ils sont reliés aux ondes progressives.

Le fait que les solitons peuvent être associés à l'équation de Schrödinger, des physiciens ont postulé l'idée que les solitons peuvent apparaître en tant que particules élémentaires massives beaucoup plus lourdes que le proton. Les solitons peuvent décrire la physique des particules d'une autre manière, confinées non seulement dans l'espace mais aussi dans le temps. Dans ce cas ils s'appellent les *Instantons*.

## 1.7 Définitions

La propagation des ondes intervient dans différents domaines. Une onde peut se définir comme étant une perturbation qui se propage dans un milieu provoquant ainsi des variations de ses propriétés physiques locales. Une onde transporte de l'énergie sans transporter de la matière. Il existe différents types d'ondes : ondes acoustiques, ondes élastiques, ondes électromagnétiques, ondes solitaires..etc. Les ondes sont solutions d'équations aux dérivées partielles.

Un exemple d'une équation d'onde est l'équation des ondes acoustiques qui décrit la propagation des ondes sonores dans un fluide. En une dimension d'espace, celle-ci s'écrit :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (1.13)$$

où  $x$  et  $t$  représentent les variables spatiale et temporelle respectivement. La notation  $u_{tt}$  désigne la dérivée seconde de  $u$  par rapport à la variable  $t$ . De même on notera,  $u_\alpha$  la dérivée de  $u$  par rapport à la variable  $\alpha$ .

Les définitions suivantes sont inspirées des notes de Scott et al [17] :

Une *onde progressive* est une solution d'une équation aux dérivées partielles qui dépend des variables spatiale  $x$  et temporelle  $t$  uniquement à travers la relation  $\xi = x - ct$ ;  $c$  étant la vitesse de propagation constante.

Exemple, la solution de l'Eq. (1.13) se met sous la forme :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct), \quad (1.14)$$

où  $f(x, t)$  est une onde qui se propage vers la gauche et  $g(x, t)$  est une onde se propageant vers la droite.

Une *onde solitaire* est une onde progressive localisée, c'est à dire, une onde progressive qui tend vers des états constants.

Un *soliton* est une onde solitaire qui asymptotiquement préserve sa forme et sa vitesse après collision avec d'autres ondes solitaires.

Un *N-soliton* consiste en  $N$  ondes solitaires de différentes amplitudes, se propageant à différentes vitesses, éventuellement en interaction.

## 1.8 Ondes non-linéaires et milieux dispersifs

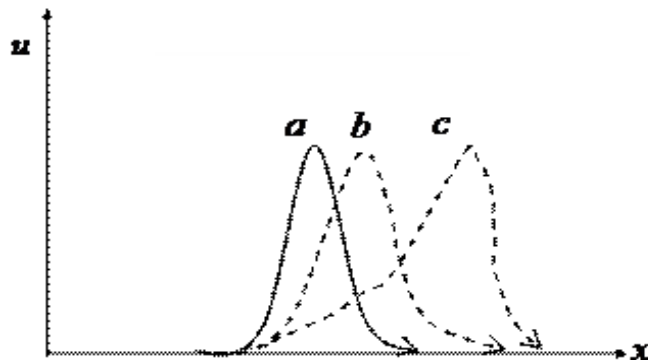
Les phénomènes de non-linéarité tendent à favoriser la formation de fronts raides étant donné que les points de plus grande amplitude se propagent plus vite. Prenons l'exemple de l'équation dite de Burgers :

$$u_t + uu_x = 0 \quad (1.15)$$

Un terme non-linéaire est présent dans cette équation, à savoir  $(uu_x)$ . Pour comprendre son effet, rappelons que l'équation linéaire :

$$u_t + cu_x = 0 \quad (1.16)$$

admet pour solution une onde de la forme  $u(x, t) = f(x - ct)$  qui se propage à la vitesse  $c$ . Ainsi en assimilant dans l'équation de Burgers (1.15) le coefficient du terme  $u_x$ , à savoir  $u$ , à la vitesse de propagation de l'onde, il est facile de se convaincre qu'en première approximation, les parties aux grandes valeurs de  $u$  vont se propager plus vite que les parties de faible amplitude, ce qui induit à la formation d'ondes de choc, c'est à dire des solutions présentant des discontinuités à temps fini (voir *Fig.3*).



*Fig.3* : La rupture de l'onde non-linéaire

Par ailleurs, on définit un milieu dispersif par le fait que les différentes fréquences constituant l'onde ne se propagent pas à la même vitesse. Les vitesses de phase et de groupe sont alors différentes. Une onde se propageant dans un milieu dispersif s'étale. Prenons l'exemple suivant :

$$u_t + u_{xxx} = 0 \tag{1.17}$$

Cette équation admet comme solution une onde plane du type  $u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$  si la pulsation  $\omega$  est liée au nombre d'onde  $k$  par la relation  $\omega = -k^3$  appelée relation de dispersion. La vitesse de phase dépend dans ce cas du nombre d'onde et est différente de la vitesse de groupe.

### 1.8.1 Le comportement des équations non-linéaires dispersives

Une des conséquences mathématiques de la dispersion pour les équations linéaires est la présence d'effets régularisants locaux ; c'est à dire qu'à l'instant  $t > 0$ , les solutions sont localement en espace plus régulières qu'elles ne le sont à l'instant initial. Ces effets régularisant, ne peuvent pas être globaux puisque, pour ces équations linéaires, les normes de *Sobolev* sont conservées au cours du temps ; de plus, elles sont toutes réversibles en temps). Ces effets régularisants sont liées à la dispersion [18] :

- Ils n'existent pas pour l'équation des ondes par exemple ; plus l'équation est dispersive, plus ces effets seront importants.

- Il est remarquable que la non-intégrabilité n'est pas forcément lié aux termes non-linéaires [18]. Les dispersions d'ordre supérieur, par exemple, peuvent également effectuer le système pour être non-intégrable.

## 1.9 Les modèles d'équations dispersives non-linéaires

Les équations partielles non linéaires apparaissent fréquemment en formulant des lois fondamentales de la nature et dans l'analyse mathématique d'une grande variété de problèmes physiques. Nous nous intéresserons donc à des équations de la forme :

$$\partial_t u = Lu + f(u) \tag{1.18}$$

où,  $\partial_t = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$  et  $u = u(t, x)$  est à valeurs réelles ou complexes (ou éventuellement à valeurs dans  $R^k$ ),  $t \in R^+$  et  $x \in R^n$  ; l'opérateur  $L$  sera anti-adjoint,  $f$  est une fonction donnée.

On cite quelques exemples modèles d'équations dispersives non linéaires importantes.

### 1.9.1 Les équations de type Korteweg-de Vries ( KdV)

Cela concerne les équations qui se mettent en général sous la forme :

$$\partial_t u + \partial_x M u + \partial_x f(u) = 0, \quad (1.19)$$

où,  $x \in R$ ,  $t > 0$ ,  $u(t, x)$  est à valeurs réelles.  $M$  est un opérateur différentiel ou pseudo différentiel à coefficients constants. Aussi des dérivées d'ordre élevé par rapport au temps peuvent se manifester dans l'équation (1.19).

### 1. L'équation de Korteweg-de Vries ( KdV )

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^3 u + \partial_x (u^2) = 0, \quad t \in R^+, x \in R \quad (1.20)$$

Cette équation décrit un modèle de propagation unidirectionnelle pour les ondes longues à la surface de l'eau, en faible profondeur.

### 2. L'équation de Benjamin-Ono (B.O)

L'équation de Benjamin-Ono (B.O) est donnée par

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_x^2 H(u) + \partial_x (u^2) = 0, t \in R, x \in R \quad (1.21)$$

Où,  $H$  est la transformation d'*Hilbert*

Cette équation surgit dans l'étude de longues ondes de gravité internes faiblement non-linéaires [19, 20, 21] et appartient à la classe des modèles faiblement non-linéaires.

### 3. L'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP)

L'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP) est un modèle bi ou tridimensionnel, qui tient compte de faibles perturbations transversales, dont la longueur d'onde est de l'ordre du carré de la longueur d'ondes dans la direction de propagation. Cette équation s'écrit en deux dimensions [22] :

$$\partial_x (\partial_t u + \gamma \partial_x^3 u + \partial_x (u^2))_x + \sigma^2 \partial_y^2 u = 0, t \in R, (x, y) \in R^2 \quad (1.22)$$

où les différents coefficients sont constants.

Kadomtsev et Petviashvili [23] ont présenté la première fois cette équation pour décrire

le changement lent des ondes non linéaires dans un milieu dispersif [24, 25]. L'Eq. (1.22) avec  $\sigma^2 = +1$  surgit dans l'étude des ondes dispersives faiblement non-linéaires dans les plasmas et également dans la modulation de longues ondes d'eau faiblement non-linéaires qui voyage presque dans un plan vertical.

Récemment, en [26, 27] les auteurs ont dérivé l'équation de KP unifiée ( $uKP$ ) pour les ondes externes et d'interface se propageant dans un canal tournant avec la topographie variable et les parois latérales. Cette nouvelle équation inclut la majeure partie des équations de type  $KP$  existant dans la littérature en tant que cas spéciaux.

#### 4. L'équation de Benjamin-Bona-Mahony généralisée (BBM)

Une variante des modèles de type  $KdV$  est donnée par l'équation de Benjamin-Bona-Mahony ( $BBM$ ) ou "Regularized Long Wave equation ( $RLW$ )"[22].

$$\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u + \partial_x (u + u^2) = 0, \quad t \in R, \quad x \in R \quad (1.23)$$

est mise aussi sous la forme :

$$\partial_t u = - (1 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x (u + u^2) = 0, \quad (1.24)$$

L'équation de Benjamin-Bona-Mahony généralisée ( $BBM$ ) comme modèle qui caractérise de longues ondes dans des milieux dispersifs non-linéaires. De nombreux chercheurs sont attirés par l'application de l'équation de  $BBM$  [26, 28, 29].

#### 5. L'équation de Boussinesq

L'équation de Boussinesq (1.25), décrit les vagues d'eau non-linéaires unidimensionnelles faiblement dispersives se propageant dans les directions positives et négatives de  $x$  [32, 33, 34, 35].

$$u_{tt} - u_{xx} + (3u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0, \quad (1.25)$$

#### 6. L'équation de Burgers

$$u_t + uu_x = vu_{xx} = 0, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (1.26)$$

où  $v$  est la viscosité cinématique

C'est l'équation non-linéaire et modèle le plus simple pour les ondes diffusives dans la dynamique de fluide. Elle a été présentée la première fois par [37] pour décrire la turbulence unidimensionnelle, et elle surgit également dans beaucoup de problèmes physiques comprenant les ondes sonores dans un milieu visqueux [38], les ondes dans des tubes élastiques visqueux remplis de fluide, et les ondes magnétohydrodynamiques dans un milieu avec la conductivité électrique finie.

### 7. L'équation de Fisher

$$u_t - vu_{xx} = K \left( u - \frac{u^2}{\kappa} \right) = 0, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (1.27)$$

où  $v$ ,  $K$  et  $\kappa$  sont des constantes.

L'Eq.(1.27) a été employée comme équation modèle non-linéaire pour étudier la propagation d'ondes dans un grand nombre de systèmes biologiques et chimiques. Fisher [39] a présenté la première fois cette équation pour étudier la propagation d'un gène dans une population. Ces dernières années, l'équation de Fisher a été employée comme équation modèle pour une grande variété de problèmes qui incluent la propagation d'onde chimique [40], la population de neutrons dans un réacteur nucléaire [41, 42], et peut s'appliquer à la théorie de combustion, de diffusion non-linéaire, et la cinétique chimique [43, 44, 45].

### 8. Les équations non linéaires fortement dispersives et les Compactons

Récemment, un type spécial d'équations de  $KdV$  a été découvert et un nouveau phénomène a été observé. Quand la dispersion est purement non-linéaire, on peut observer l'existence des '*compactons*' : solitons avec la longueur d'onde finie [46].

Rosenau et Hyman [46] ont découvert une classe d'ondes solitaires avec un support compact appelés '*compactons*'. Les compactons sont définis par les ondes solitaires avec



la propriété remarquable qu'après collision avec d'autres compactons, ils émergent avec la même forme de cohérence.

Cette nouvelle classe de solutions est régie par une famille de deux-paramètres, dénotée par  $K(m, n)$ ,

$$u_t \pm a (u^m)_x + b (u^n)_{xxx} = 0, \quad m > 0, \quad 1 < n \leq 3 \quad (1.28)$$

Pour certaines valeurs de  $m$  et de  $n$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives réelles. Ainsi, des compactons sont définis comme des solitons avec un support compact. En d'autres termes, les compactons ont les propriétés suivantes [46] :

- (i) Les Compactons sont des solitons avec la longueur d'onde finie ;
- (ii) Les Compactons sont des ondes de solitons avec un support compact ;
- (iii) Les Compactons sont des solitons exempts de queues exponentielles ;
- (iv) Les Compactons sont des solitons caractérisés par l'absence des ailes finies ;
- (v) Les Compactons sont des solutions robustes de type soliton ;
- (vi) Les Solutions de type compactons sont des solutions d'ondes spéciales qui peuvent être exprimées par le carré des fonctions sinusoïdales.

À la différence du soliton standard de  $KdV$ , la largeur se décroît quand les amplitudes (vitesse) augmentent, la largeur d'un compacton est indépendante de l'amplitude, mais sa vitesse dépend de sa hauteur. Puisque la dispersion augmente avec l'amplitude ; aux amplitudes élevées, la dispersion est plus dominante que dans l'équation de  $KdV$ , et par conséquent, elle peut efficacement équilibrer l'effet de la non-linéarité.

L'Eq.(1.28) avec  $(+a)$  s'appelle la branche focalisante et admet des solutions d'ondes solitaires de déplacement. D'autre part, l'Eq.(1.28) avec  $(-a)$  est référée comme la branche défocalisante et admet des solutions d'ondes solitaires avec des pentes infinies. Ainsi, l'Eq.(1.28) représente deux modèles non-linéaires avec des structures physiques entièrement différentes.

La solution de  $K(2, 2)$  avec  $a = b = 1$  de l'Eq.(1.28)

$$u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0, \quad (1.29)$$

est donnée par

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{4c}{3}\right) \cos^2 \left[\frac{1}{4}(x - ct)\right], & |x - ct| \leq 2\pi \\ 0, & \text{autrement} \end{array} \right\} \quad (1.30)$$

Wazwaz [31] a obtenu des compactons, des solitons, des modèles solitaires et des solutions périodiques pour la forme généralisée en utilisant la méthode de Tanh et la méthode de sine-cosine ( voir *chap 2, partie I*).

Récemment, une famille des équations de  $KdV$  non-linéaires est apparue dans la théorie de soliton parce que diverses formes d'effets de non-linéarité et de dispersion ont été prises en considération. A titre d'exemple, nous citons principalement l'équation de type  $KdV$  de cinquième ordre [31, 47] et l'équation dispersive non-linéaire  $K(m, n)$  [59-63]. Aussi, Wazwaz a dérivé plusieurs types de solutions, y compris des compactons pour l'équation dispersive non-linéaire  $K(n, n)$  et  $K(m, n)$  (1.28) [59-61].

Aussi, l'équation  $K(m, n)$  (1.31) à coefficients dépendant du temps étudié par Wazwaz et al [53]

$$(u^l)_t + 2\beta(t)u^l + [\alpha(t) + \beta(t)x] (u^l)_x + \delta(t)u^m u_x + \gamma(t) (u^n)_{xxx} = 0, \quad (1.31)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients variables (dépendant du temps).  $\gamma$  et  $\delta$  sont les coefficients de la non-linéarité et la dispersion en fonction du temps respectivement.

Les solitons et les compactons sont deux types d'ondes non-linéaires. Ils jouent un rôle essentiel dans toutes les ramifications de la science et de la technologie, et sont employés comme éléments constructifs pour formuler le comportement dynamique complexe des systèmes d'ondes dans toute la science : de l'hydrodynamique au système optique non-linéaire, des plasmas aux ondes de chocs, des tornades à la grande tache rouge de Jupiter,

de Tsunamis à la turbulence. Récemment, le soliton et le compactons sont d'importance principale dans le domaine de la nano hydrodynamique [54].

### 9. L'équation de Sine-Gordon (SG)

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = 0, \quad (1.32)$$

L'équation de  $SG$  possède diverses solutions intéressantes : car  $x$  varie de  $(-\infty \rightarrow +\infty)$ , une solution qui change de  $0$  à  $2\pi$  est un soliton (*kink*). Une solution qui change de  $2\pi$  à  $0$  est un anti-soliton (*anti-kink*) et l'état lié de *kink* et *anti-kink* est un *breather*. En 1939, Frenkel et Kontrova [55] ont présenté l'équation de  $SG$  comme modèle pour les dislocations dans les cristaux. Le déplacement  $\phi(x, t)$  des atomes peut se propager comme un *kink* dans le champ périodique du cristal. Autour de 1960, Perring and Skyrme [37] ont considéré l'équation de  $SG$  comme modèle pour les particules élémentaires (plus rigoureusement, baryons). Ils ont étudié les collisions de *kink-kink* et de *kink-(anti-kink)* et ont confirmé la stabilité des *kink*.

### 10. L'équation complexe de Korteweg de Vries modifiée (CMKdV)

Cette équation est donnée par

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial |\psi|^2 \psi}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (1.33)$$

où,  $\psi$  est une fonction complexe évaluée en fonction de la coordonnée spatiale  $x$  et du temps  $t$ ,  $\alpha$  est un paramètre réel. Cette équation est utilisée comme modèle pour l'évolution non-linéaire des ondes de plasma. Elle incorpore la propagation des ondes transversales dans un modèle à chaînes moléculaires [57], (pour plus de détail voir *chap2, partie II*).

### 11. L'équation de Schrödinger non linéaire

L'exemple type est donné par l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$i\partial_t u + \beta \Delta u + \gamma |u|^{2\sigma} u = 0, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (1.34)$$

où  $u$  est une fonction à valeurs complexes,  $t \in R$ ,  $x \in R^n$ ,  $\beta$  et  $\gamma = \pm 1$  sont des constantes réelles. Cette équation intervient dans la physique des plasmas (c'est alors un cas particulier de l'équation de Zakharov) et en optique non linéaire (par exemple comme modèle de propagation dans les fibres optiques). Bien souvent, l'effet de non linéarité est à l'origine d'une interaction cohérente de matière-rayonnement et a forte puissance. Ceci ne peut être réservé que pour les sources laser notamment les lasers à solides. Par ailleurs, le transport d'informations par solitons dans les systèmes de télécommunications utilise la fibre optique comme milieu de propagation non linéaire en s'appuyant sur le principe de réflexion totale des ondes à l'interface cœur-gaine de la fibre. De ce fait, l'équation de Schrödinger non linéaire à été développée pour approximer la dynamique de propagation non linéaire dans un système faiblement non linéaire et fortement dispersif comme les fibres optiques et les guides d'ondes.

Cette équation intervient aussi dans la propagation des ondes solitaires dans les semi-conducteurs piézoélectriques [58], mais également dans le contexte des ondes de surface, lorsque la profondeur est infinie. Le cas le plus souvent rencontré dans les modèles physiques correspond à  $\sigma = 1$ . En hydrodynamique, on rencontre également l'équation en deux dimensions dans laquelle l'opérateur  $\Delta$  est remplacé par l'opérateur  $\partial_{x^2} - \partial_{y^2}$ .

## 1.10 Solitons multidimensionnels

Les exemples bien connus de systèmes de soliton  $(2 + 1)$ -dimensions sont :

$$(u_t + 6uu_x + u_{xx})_x + \alpha u_{yy} = 0, \quad \text{avec } \alpha = \pm 1 \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} iu_t - u_{xx} - \sigma^2 u_{yy} + |u|^2 u - 2uv &= 0, \\ -\sigma^2 v_{xx} + v_{yy} - (|u|^2)_{yy} &= 0 \quad \text{avec } \sigma^2 = \pm 1 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Nous appelons (1.35) l'équation à deux dimensions de  $KdV$  ou l'équation de Kadomtsev-Petviashvili, et (1.36) est l'équation de Davey-Stewartson [59].

# Bibliographie

- [1] Georges Koepfler, équation aux dérivées partielles, Maitrise d'Ingénierie Mathématique (MIM), Université René Descartes, Paris, 2004, p1
- [2] L. Debnath, Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers, 2nd .ed., Boston, 2005, p150.
- [3] Drazin, PG. Solitons, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [4] N. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965)
- [5] W. A. Strauss, Partial differential equations An Introduction, Brown University, by John Wiley & Sons, Inc ;1992, p370
- [6] V.E. Zakharov, S.V. Manakov, S.P. Novikov, L.P. Pitaevskii, Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method, Plenum, New York, 1984.
- [7] M.J. Ablowitz, H. Segur, Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [8] F. Calogero, A. Degasperis, Spectral Transform and Solitons I, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [9] A.C. Newell, Solitons in Mathematics and Physics, SIAM, Philadelphia, 1985.
- [10] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, in : London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 149, Cambridge University Press, 1991.
- [11] K. Lonngren, A. Scott (Eds.), Solitons in Action, Academic Press, London, 1978.

- [12] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris, Solitons and Nonlinear Waves, Academic Press, London, 1982.
- [13] S.E. Trullinger, V.E. Zakharov, V.L. Pokrovsky (Eds.), Solitons, Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [14] A. Hasegawa, Y. Kodama, Solitons in Optical Communications, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [15] A. Scott, Nonlinear Science, Emergence and Dynamics of Coherent Structures, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [16] C S Gardner, J M Greene, M D Kruskal and R M Miura, Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967)
- [17] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin. The soliton : A new concept in applied science. Proceedings of the IEEE, 61(10) :1443-1483, October 1973.
- [18] Terrence Tao, arXiv : math.AP/0608293 v1 , 2006.
- [19] Benjamin, T. B, Instability of periodic wave trains in nonlinear dispersive systems, Proc. Roy. Soc. London A 299, 59-75, 1967.
- [20] Davis. R. E and Acrivos, J. Fluid Mech. 29, 593-607, 1967.
- [21] Ono, H, , J. Phys. Soc. Japan 39, 1082-1091, 1975
- [22] Anne de Bouard, Equations dispersives non linéaires, Institut Fourier, Grenoble, 2005.
- [23] Kadomtsev, B.B and Petviashvili, V. I. , Dokl, Akad. Nauk, SSSR 192, 753-756 ; Sov. Phys. Dokl.15, 539-541, 1970.
- [24] Johnson, R. S. , J. Fluid Mech. 97, 701-719.1980
- [25] Johnson, R. S. A modern introduction to the Mathematical theory of water Waves, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [26] Chen, Y and Liu, P. L.-F, J. Fluid Mech. 288, 383-408, 1995 .
- [27] Chen, Y and Liu, P. L.-F, J. Fluid Mech. 288, 351-381, 1995.
- [28] W.X. Ma, H.Y. Wu, J. Math. Anal., 324 : 134-149, 2006.

- [29] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Philos Trans Royal Soc London Ser A, 272 : 47-78, 1972.
- [30] J.L. Bona, R. Smith, Philos Trans Royal Soc London Ser A, 278 : 555-601, 1975.
- [31] A.M. Wazwaz, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 12 (2007) 904.
- [32] Peregrine, D. H, J. Fluid. Mech. 27, 815-827, 1967
- [33] V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP, 26 :994-998, 1968.
- [34] Ablowitz, M .J and Haberman, R. , Phys. Rev. Lett. 35, 1185-1188, 1975
- [35] Prasad, P and Ravindran, R, J. Inst. Math. Appl. 20, 9-20, 1977.
- [36] Zabusky. N. J, A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, Proc, Symp. On Nonlinear Partial differential equations (ed. W. F. Emes), academic Press, Boston, 223-258,1967.
- [37] Burgers .J. M. , Adv. Appl. Mech. 1948, 1,171-199.
- [38] Lighthill. M. J, viscosity effects in sound waves of finite amplitude, in Surveys in mechanics, Cambridge university, 1956, 35-250.
- [39] Fisher, R. A, the wave of advance of advantageous genes, Ann. Eugenics 7, 335-369, 1936.
- [40] Arnold . R, and al, J. Chem. Edu.64, 740-742, 1987.
- [41] Canosa, J. , J. Math. Phys.10, 1862-1868, 1969.
- [42] Canosa. J , IBM J. J. Res. Develop. 17, 307-313, 1973.
- [43] Kolmogorov, A, Petrovsky, I., and Piscunov, N., Bull. Univ. Moscow, Ser. Internat. Sec A. 1, 1-25, 1937.
- [44] Aris, R. The mechanical theory of diffusion and reaction in permeable catalyst, Oxford University Press, Oxford 1975.
- [45] Fife, P. C, Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, Lecture Notes in Biomathematics, 28, Springer-Verlag, Berlin,1979.
- [46] P. Rosenau, J.M. Hyman, Phys. Rev. Lett. 70 (5) (1993) 564.
- [47] A.M. Wazwaz, Chaos Solitons Fractals 13 (2002) 1053.

- [48] A.M. Wazwaz, *Math. Comput. Simul.* 59 (2002) 519.
- [49] A.M. Wazwaz, *Chaos Solitons Fractals* 13 (2002) 321.
- [50] A.M. Wazwaz, *Chaos Solitons Fractals* 13 (2002) 161.
- [51] A. Biswas, *Phys. Lett. A* 372 (2008) 4601.
- [52] A. Biswas, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 14 (2009) 3226.
- [53] Houria Triki, Abdul-Majid Wazwaz, *Physics Letters A* 373 (2009) 2162–2165.
- [54] Ji-Huan He, *Int. J. of Modern Physics B*, Vol. 20, No. 10 (2006) 1141-1199.
- [55] J Frenkel and T Kontrova, *J. Phys. USSR* 1, 137 (1939).
- [56] J K Perring and T H R Skyme, *Nucl. Phys.* 31, 550 (1962).
- [57] G. M. Muslu and H. A. Erabay, *Comput. Math Applic.* 45 (2003) 503-514.
- [58] Pawlik , M and Rowlands, G, *J. Phys. C8*, 1189-1204. 1975.
- [59] K Nakayama and M Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* 62, 1895 (1993).



## **Chapitre 2**

### **Les méthodes d'approximations**

# Première partie

## Introduction sur les méthodes d'approximations

## 2.1 Introduction

L'effort pour trouver une solution exacte à une équation non-linéaire est important pour comprendre la plupart des phénomènes physiques non-linéaires. Ces dernières années beaucoup de méthodes puissantes pour chercher les solutions exactes des équations partielles non-linéaires ont été établies et développées, ce qui est l'une des avancées les plus passionnantes de la science non-linéaire et de la physique mathématique et théorique.

Il y a un grand nombre d'approches analytiques à la recherche des solutions. Parmi ces méthodes nous pouvons citer la méthode de perturbation, la méthode « *de diffusion inverse* », la transformation de *Bäcklund /Darboux*, la méthode d'Adomian, la méthode bilinéaire d'*Hirota*, la méthode elliptique de Jacobi, la méthode de perturbation d'homotopie, la méthode de la fonction tangente hyperbolique (*Tanh*), la méthode de Sinus-Cosinus (*Sine-Cosine*), la méthode d'itération variationnelle, les méthodes d'ansatze . . . et beaucoup d'autres [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Dans cette partie, on va donner un aperçu sur quelques méthodes puissantes et connues d'être utilisées dans plusieurs modèles physiques, ensuite on tente de résoudre quelques modèles intéressants, en citant l'équation de *KdV*, et l'équation complexe de Korteweg-de Vries modifiée (*CMKdV*).

## 2.2 Présentation de quelques méthodes d'approximations

### 2.2.1 L'Approche Variationnelle

La théorie variationnelle a été appliquée avec succès à la recherche des solutions de soliton [7, 8]. Cette méthode peut mener à une simple dérivation des solutions de soliton.

Considérant l'équation de *KdV*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (2.1)$$

Nous cherchons ces solutions comme une onde de la forme suivante

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (2.2)$$

où  $c$  est la fréquence angulaire (ou vitesse). La substitution de (2.2) dans l'Eq.(2.1) donne

$$-cU' - 6UU' + U''' = 0 \quad (2.3)$$

où ''' dénote la différentiation selon  $\xi$ . L'intégration de l'Eq. (2.3) donne

$$-cU - 3U^2 + U'' = 0 \quad (2.4)$$

et par la méthode de *semi-inverse* [9], la formulation variationnelle suivante est établie

$$J = \int_0^\infty \left( \frac{1}{2}cU^2 + U^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\xi \quad (2.5)$$

La méthode semi-inverse est un outil mathématique puissant à la recherche des formules variationnelles pour des problèmes physiques réels. Par la méthode de *Ritz* [10], nous cherchons une solution d'ondes solitaires sous la forme d'un polynôme en termes de fonctions hyperboliques :

$$u = \sum_{i=0}^M p_i Y^i,$$

où

$$Y = \operatorname{sech}(q_i \xi), \quad (2.6)$$

où  $p_i$ ,  $q_i$  et  $M$  sont des constantes à déterminer. Pour des mesures de simplicité, nous posons  $M = 2$ ,  $p_0 = p_1 = 0$ ,  $p_2 = p$  et  $q_2 = q$ .

La substitution de (2.6) dans la relation (2.5) résulte

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2}c p^2 \operatorname{sech}^4(q\xi) + p^3 \operatorname{sech}^6(q\xi) + \frac{1}{2}(4p^2q^2 \operatorname{sech}^4(q\xi) \tanh^2(q\xi)) \right] d\xi \quad (2.7) \\
&= \frac{c p^2}{2q} \int_0^\infty \operatorname{sech}^4(z) dz + \frac{p^3}{q} \int_0^\infty \operatorname{sech}^6(z) dz + 2p^2q \int_0^\infty \{ \operatorname{sech}^4(z) \tanh^4(z) \} dz \\
&= \frac{c p^2}{3q} + \frac{8p^3}{15q} + \frac{4p^2q}{15}
\end{aligned}$$

La fonctionnelle  $J$  est minimale par rapport à  $p$  et  $q$ , il résulte

$$\frac{2cp}{3q} + \frac{24p^2}{15q} + \frac{8pq}{15} = 0, \quad (2.8)$$

$$-\frac{cp^2}{3q^2} - \frac{8p^3}{15q^2} + \frac{4p^2}{15} = 0 \quad (2.9)$$

Après simplification, on trouve

$$\begin{aligned}
5c + 12p + 4q^2 &= 0 \\
-5c - 8p + 4q^2 &= 0
\end{aligned} \quad (2.10)$$

À partir du système (2.10), nous pouvons facilement obtenir les quantités suivantes

$$p = -\frac{1}{2}c, \quad q = \sqrt{\frac{c}{4}} \quad (2.11)$$

ainsi la solution d'onde solitaire peut être approximée comme

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{c}{4}}(x - ct - \xi_0) \quad (2.12)$$

qui fournit la solution d'onde solitaire exacte de l'équation de  $KdV$  (2.1).

L'analyse précédente a la vertu de la simplicité totale, l'approche variationnelle peut aisément être appliquée à la recherche des solutions d'ondes solitaires à d'autres problèmes non-linéaires, et peut être employée comme point de référence pour beaucoup d'autres

applications.

### 2.2.2 La méthode d'Itération Variationnelle

La méthode d'itération variationnelle [7] est une nouvelle méthode pour obtenir des solutions de type soliton à de diverses équations d'ondes non-linéaires. La méthode commence par une solution de type soliton avec quelques paramètres inconnus qui peuvent être déterminés après quelques itérations seulement. La formule d'itération est construite par un multiplicateur général de *Lagrange* qui peut être identifié de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle[7, 11, 12, 13, 14].

### 2.2.3 La méthode de perturbation d'homotopie (MPH)

Cette méthode [15] est un outil mathématique simple dans la recherche des solutions de soliton [16, 17]. Dans cette méthode, une homotopie est construite avec un paramètre  $p$ .

Pour illustrer les idées fondamentales de cette méthode, nous considérons l'équation non-linéaire suivante :

$$A(U) - f(r) = 0 \quad r \in \Omega \quad (2.13)$$

avec les conditions aux bords sont données.  $A$  est un opérateur différentiel général,  $f(r)$  une fonction analytique connue,  $\Omega$  est le domaine de la solution.

L'opérateur  $A$  peut être, généralement divisé en deux parties de  $L$  et  $N$ , où  $L$  est la partie linéaire, alors que  $N$  est la partie non-linéaire.

L' Eq.(2.13) peut, donc, être réécrite comme :

$$L(U) + N(U) - f(r) = 0 \quad (2.14)$$

Par la technique d'homotopie, nous construisons une homotopie  $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \in R$

qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p) [L(v) - L(u_0)] + p [A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0, 1], \quad r \in \Omega \quad (2.15)$$

ou

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p [N(v) - f(r)] = 0 \quad (2.16)$$

où  $p \in [0, 1]$  est un paramètre et  $u_0$  est une approximation initiale de l'Eq.(2.13) qui satisfait les conditions aux limites. Evidemment, en considérant l'Eq.(2.16), on a :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.17)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (2.18)$$

Le changement de  $p$  de zéro à l'unité est justement le changement de  $v(r, p)$  de  $u_0(r)$  à  $U(r)$ . Dans la topologie, ceci s'appelle la déformation, et  $L(v) - L(u_0)$  et  $A(v) - f(r)$  s'appellent homotopie.

Selon *MPH*, nous pouvons d'abord employer le paramètre  $p$  comme "*petit paramètre*", et supposons que la solution de (2.16) peut être écrite comme une série entière en  $p$  :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.19)$$

Posons  $p = 1$ , la solution approximative de l'Eq.(2.13) :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (2.20)$$

La combinaison de la méthode de perturbation et de la méthode d'homotopie s'appelle la méthode d'homotopie de perturbation.

La série (2.20) est convergente pour la plupart des cas. Cependant, le taux de conver-

gence dépend de l'opérateur non-linéaire  $A(v)$ .

Les remarques suivantes sont suggérées par *He* [15] :

- (a) la deuxième dérivée de  $N(v)$  selon  $v$  doit être petite parce que le paramètre  $p$  peut être relativement grand, c-à-d.  $p \rightarrow 1$ .
- (b) la norme  $L^{-1} \partial N/\partial v$  doit être plus petite que "un" de sorte que la série converge.

## 2.2.4 La méthode du développement du paramètre

La méthode du développement du paramètre [18-21] est une nouvelle méthode pour rechercher les solutions de type *soliton* et les solutions périodiques des systèmes non-linéaires. La méthode suppose que les solutions peuvent être exprimées sous formes arbitraires de fonction exponentielle. Cette méthode n'exige pas de construire une homotopie.

Pour illustrer la procédure de la recherche des solutions, nous considérons comme exemple l'équation non-linéaire suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + N(u) = 0, \quad a > 0, b > 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 1.N(u) = 0, \quad (2.22)$$

Supposons que les paramètres  $a$ ,  $b$ , et 1 peuvent s'exprimer de la forme

$$a = a_0 + pa_1 + p^2a_2 + \dots \quad (2.23)$$

$$b = b_0 + pb_1 + p^2b_2 + \dots \quad (2.24)$$

$$1 = pc_1 + p^2c_2 + \dots \quad (2.25)$$

où  $p$  est un paramètre de comptabilité,  $p = 1$ . La substitution des Eqs.(2.19) et (2.23) –



(2.25) dans l'Eq.(2.22) et en procédant la même démarche utilisée dans la méthode de perturbation, nous pouvons facilement obtenir la solution nécessaire.

### 2.2.5 La méthode de la fonction exponentielle

La méthode de la fonction exponentielle [22, 23, 24] nous fournit une approche directe et concise sur la réalisation des solutions solitaires généralisées et les solutions périodiques. Considérons une équation partielle non-linéaire générale de la forme

$$F(u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, u_{xy}, u_{xt}, u_{yt}, \dots) = 0, \quad (2.26)$$

Utilisant la transformation

$$\eta = ax + by + cz + dt, \quad (2.27)$$

nous pouvons réécrire l'Eq.(2.26) sous forme d'équation ordinaire non-linéaire comme suit :

$$G(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (2.28)$$

où les primes dénotent la dérivation selon  $\eta$ .

On donne aux solutions d'ondes la forme suivante

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-k}^l a_n \exp(n \eta)}{\sum_{m=-i}^j b_m \exp(m \eta)} \quad (2.29)$$

où  $i$ ,  $j$ ,  $k$ , et  $l$  sont des nombres entiers positifs qui pourraient être librement choisis,  $a_n$  et  $b_m$  sont des constantes inconnues à déterminer. Pour plus de détails, le développement de la méthode est illustré dans la réf [23].

## 2.2.6 La méthode Tanh

La méthode Tanh est développée par Malfliet [25-27]. Il a utilisé la technique de *Tanh* en présentant la fonction *tanh* comme une nouvelle variable, puisque toutes les dérivées de la fonction *tanh* sont représentées par la fonction *tanh* elle-même.

Introduisons une variable indépendante

$$Y = \tanh(\mu\xi) \quad (2.30)$$

où  $\mu$  est une constante arbitraire et  $\xi$  est la variable d'onde. On peut obtenir les différentes dérivées comme

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= \mu(1 - Y^2) \frac{d}{dY} \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= \mu^2(1 - Y^2) \left( -2Y \frac{d}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d^2}{dY^2} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Puis, nous appliquons la série en puissance en  $Y$  ( un polynôme de degré  $M$  et ayant  $M + 1$  coefficients inconnus),

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k \quad (2.32)$$

où,  $M$  est un nombre entier positif, dans la plupart des cas, on peut le déterminer. Cependant, si  $M$  n'est pas un nombre entier, une formule de transformation est habituellement employée pour surmonter cette difficulté.

Pour déterminer le paramètre  $M$ , nous équilibrons les termes linéaires d'ordre supérieur dans l'équation résultante avec les termes non linéaires d'ordre supérieur.  $M$  étant déterminé, nous rassemblons tous les coefficients de puissances  $Y$  dans l'équation résultante dans laquelle ces coefficients doivent disparaître. Ceci donnera un système d'équations algébriques comportant les paramètres  $a_k$  ( $k = 0, \dots, M$ ), et le reste des inconnues. Après avoir déterminé ces paramètres, et sachant que  $M$  est un nombre en-

tier positif dans la plupart des cas, et en utilisant (2.32), nous obtenons une solution analytique  $u(x, t)$ .

## 2.2.7 La méthode Sine-Cosine

La description de cette méthode peut être illustrée comme suit [28] :

Soit, l'équation aux dérivées partielles (*EDP*) suivante,

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (2.33)$$

qui peut être convertie en *EDO*,

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (2.34)$$

Le changement de variable,  $\xi = x - ct$  est utilisé comme une variable d'onde. Les solutions de l'équation réduite *EDO* peuvent être exprimées sous la forme,

$$u(x, t) = \begin{cases} \lambda \cos^\beta(\mu\xi), & |\xi| \leq \pi/2\mu \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.35)$$

ou sous cette forme,

$$u(x, t) = \begin{cases} \lambda \sin^\beta(\mu\xi), & |\xi| \leq \pi/2\mu \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.36)$$

où  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\beta$  sont des paramètres qui seront déterminés,  $\mu$  et  $c$  sont le nombre d'onde et la vitesse de l'onde respectivement. Ces hypothèses donnent

$$(u^n)'' = -n^2 \mu^2 \beta^2 \lambda^n \cos^{n-\beta}(\mu\xi) + n \mu^2 \lambda^n \beta(n-\beta-1) \cos^{n-\beta-2}(\mu\xi) \quad (2.37)$$

$$(u^n)'' = -n^2 \mu^2 \beta^2 \lambda^n \sin^{n-\beta}(\mu\xi) + n \mu^2 \lambda^n \beta(n-\beta-1) \sin^{n-\beta-2}(\mu\xi) \quad (2.38)$$

L'utilisation de (2.35)–(2.38) dans l'EDO réduite donne une équation trigonométrique de termes  $\cos^R(\mu\xi)$  ou  $\sin^R(\mu\xi)$ . Puis, les paramètres sont déterminés en équilibrant d'abord les exposants de chaque paire de cosinus ou sinus pour déterminer  $R$ . Ensuite, nous rassemblons tous les coefficients de même puissance de  $\cos^k(\mu\xi)$  ou  $\sin^k(\mu\xi)$ . Ceci donne un système d'équations algébriques où les inconnus  $\beta$ ,  $\lambda$ , et  $\mu$  seront déterminés. Les solutions proposées en (2.35) et (2.36) suivent immédiatement.

### Application [28]

Nous traitons l'équation complexe de Korteweg-de Vries modifiée (*mKdV* couplée) ou *CMKdV* donnée par

$$\Psi_t + \Psi_{xxx} + \alpha(|\Psi|^2\Psi)_x = 0, \quad (2.39)$$

où  $\Psi$  est une fonction complexe évaluée en fonction de la coordonnée spatiale  $x$  et du temps  $t$ ,  $\alpha$  est un paramètre réel. L'Eq.(2.39) est complètement intégrable par la méthode "diffusion inverse" et elle admet les solutions de soliton dont les amplitudes et les vitesses sont des paramètres libres [33].

Cette équation est étudiée en utilisant la méthode de *Tanh* et la méthode de *Sine-Cosine*. En verra par la suite, la puissance de ces deux méthodes en cherchant les solutions exactes.

**Méthode de Sine-Cosine** Nous commençons notre analyse par la décomposition de  $\Psi$  dans ses parties réelles et imaginaires,

$$\Psi_t + \Psi_{xxx} + \alpha(|\Psi|^2\Psi)_x = 0,$$

avec,  $\Psi = u + iv$ ,  $i^2 = -1$ , pour obtenir l'équation complexe (*CMKdV*)

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + \alpha[(u^2 + v^2)u]_x = 0 \\ v_t = v_{xxx} + \alpha[(u^2 + v^2)v]_x = 0, \end{cases}, \quad (2.40)$$

En utilisant la variable d'onde  $\xi = x - ct$  dans le système (2.40) et après intégration, nous obtenons :

$$\begin{cases} -cu + \alpha u^3 + \alpha u^2 v + u'' = 0, \\ -cv + \alpha v^3 + \alpha uv^2 + v'' = 0, \end{cases} \quad (2.41)$$

on écrit l'équation (2.35) sous cette forme,

$$\begin{cases} u(x, t) = \lambda \cos^\beta(\mu\xi), \\ v(x, t) = \tilde{\lambda} \cos^{\tilde{\beta}}(\mu\xi), \end{cases} \quad (2.42)$$

et le système (2.41) donne

$$\begin{aligned} -c \lambda \cos^\beta(\mu\xi) + \alpha \lambda^3 \cos^{3\beta}(\mu\xi) + \alpha \lambda^2 \tilde{\lambda} \cos^{2\beta}(\mu\xi) \cos^{\tilde{\beta}}(\mu\xi) - \\ -\mu^2 \lambda \beta^2 \cos^\beta(\mu\xi) + \mu^2 \lambda (\beta - 1) \cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} -c \tilde{\lambda} \cos^{\tilde{\beta}}(\mu\xi) + \alpha \tilde{\lambda}^3 \cos^{3\tilde{\beta}}(\mu\xi) + \alpha \lambda \tilde{\lambda}^2 \cos^{2\tilde{\beta}}(\mu\xi) \cos^\beta(\mu\xi) - \\ -\mu^2 \lambda \tilde{\beta}^2 \cos^{\tilde{\beta}}(\mu\xi) + \mu^2 \lambda \tilde{\beta} (\tilde{\beta} - 1) \cos^{\tilde{\beta}-2}(\mu\xi) = 0 \end{aligned}$$

En employant la technique d'équilibre, en égalisant les exposants et les coefficients de  $\cos^j$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta - 1 &\neq 0, & \tilde{\beta} - 1 &\neq 0, \\ 3\beta = 2\beta + \tilde{\beta} = \beta - 2, & & 3\tilde{\beta} = \beta + 2\tilde{\beta} = \tilde{\beta} - 2, \\ \mu^2 \beta^2 = -c, & & \mu^2 \tilde{\beta}^2 = -c, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\alpha\lambda^3 + \alpha\lambda^2\tilde{\lambda} = -\lambda\mu^2\beta(\beta - 1),$$

$$\alpha\tilde{\lambda}^3 + \alpha\lambda\tilde{\lambda}^2 = -\tilde{\lambda}\mu^2\tilde{\beta}(\tilde{\beta} - 1)$$

La résolution du système (2.44) mène aux résultats,

$$\begin{aligned}\beta &= \tilde{\beta} = -1, \\ \mu &= \sqrt{-c}, \quad c < 0, \\ \lambda &= \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{c}{\alpha}}\end{aligned}\tag{2.45}$$

En conséquence, pour  $c < 0$ , nous obtenons les solutions périodiques suivantes,

$$u(x, t) = v(x, t) = \sqrt{\frac{c}{\alpha}} \csc(\sqrt{-c}(x - ct)), \quad 0 < \mu(x - ct) < \pi,\tag{2.46}$$

et

$$u(x, t) = v(x, t) = \sqrt{\frac{c}{\alpha}} \sec(\sqrt{-c}(x - ct)), \quad |\mu(x - ct)| < \frac{\pi}{2},\tag{2.47}$$

ainsi, les solutions de l'équation  $CMKdV$  sont

$$\Psi(x, t) = (1 + i)\sqrt{\frac{c}{\alpha}} \csc(\sqrt{-c}(x - ct)), \quad 0 < \mu(x - ct) < \pi\tag{2.48}$$

et

$$\Psi(x, t) = (1 + i)\sqrt{\frac{c}{\alpha}} \sec(\sqrt{-c}(x - ct)), \quad |\mu(x - ct)| < \frac{\pi}{2}\tag{2.49}$$

Cependant, pour  $c > 0$ , nous obtenons les solutions complexes,

$$\Psi(x, t) = (1 + i)\sqrt{-\frac{c}{\alpha}} \operatorname{csch}(\sqrt{c}(x - ct)),\tag{2.50}$$

et

$$\Psi(x, t) = (1 + i)\sqrt{\frac{c}{\alpha}} \operatorname{sech}(\sqrt{c}(x - ct)),\tag{2.51}$$

**La méthode Tanh** Dans cette section, nous employons la méthode de *Tanh* comme elle est présentée dans [25],[26] pour résoudre l'équation de (*CMKdV*). Nous avons déjà montré que la forme d'équation complexe de (*CMKdV*) prend la forme d'un système d'équations couplées.

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} + \alpha[(u^2 + v^2)u]_x = 0 \\ v_t = v_{xxx} + \alpha[(u^2 + v^2)v]_x = 0, \end{cases} \quad (2.52)$$

La méthode de *Tanh* utilise la série de fonction finie, ou encore un polynôme en  $Y$  comme nous allons le voir concrètement. Pour exprimer les solutions  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$ ,

où  $Y = \tanh(\mu\xi)$ , substituant (2.53) dans l'EDO (2.41)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= S(Y) = \sum_{m=0}^M b_m Y^m \\ v(x, t) &= \tilde{S}(Y) = \sum_{m=0}^M b_m Y^m \end{aligned} \quad (2.53)$$

donne

$$\begin{aligned} -cS + \alpha S^3 + \alpha S \tilde{S}^2 + \mu^2(1 - Y^2)(-2YS' + (1 - Y^2)S'') &= 0 \\ -c\tilde{S} + \alpha \tilde{S}^3 + \alpha S \tilde{S}^2 + \mu^2(1 - Y^2)(-2Y\tilde{S}' + (1 - Y^2)\tilde{S}'') &= 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

En équilibrant le terme linéaire d'ordre supérieur avec le terme non-linéaire dans les deux équations, nous trouvons

$$\begin{cases} 3M = M + 2M_1, \\ 3M_1 = 2M + M_1, \end{cases} \quad (2.55)$$

Ce qui donne  $M = M_1 = 1$ , Ceci signifie que

$$\begin{cases} u(x, t) = a_0 + a_1 Y, \\ v(x, t) = b_0 + b_1 Y, \end{cases} \quad (2.56)$$

La substitution de l'Eq.(2.56) dans les deux composants de l'Eq.(2.54), et le rassemblement des coefficients de  $Y$  donne un système d'équations algébriques en  $a_0, a_1, b_0, b_1$ , et  $\mu$ ,

$$\begin{aligned}
2\alpha a_1 b_0 b_1 + 3\alpha a_0 a_1^2 + \alpha a_0 b_1^2 &= 0, \\
-ca_1 + 3\alpha a_0^2 a_1 + \alpha a_1 b_0^2 + 2\alpha a_0 b_0 b_1 - 2\mu^2 a_1 &= 0, \\
\alpha a_0^3 + \alpha a_0 b_0^2 - ca_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

et

$$\begin{aligned}
2\mu^2 b_1 + \alpha b_1^3 + \alpha b_1 a_1^2 &= 0, \\
2\alpha b_1 a_0 a_1 + 3\alpha b_0 b_1^2 + \alpha b_0 a_1^2 &= 0, \\
-cb_1 + 3\alpha b_0^2 b_1 + \alpha b_1 a_0^2 + 2\alpha b_0 a_0 a_1 - 2\mu^2 b_1 &= 0, \\
\alpha b_0^3 + \alpha b_0 a_0^2 - cb_0 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.58}$$

La solution de ces deux systèmes donne

$$\begin{cases} a_0 = b_0 = 0, \\ a_1 = b_1 = \sqrt{\frac{c}{2\alpha}} \\ \mu = \sqrt{\frac{-c}{2}}, c < 0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Les solutions de *kink* pour  $c < 0$  prennent les formes,

$$u(x, t) = v(x, t) = \sqrt{\frac{c}{2\alpha}} \tanh\left(\sqrt{\frac{-c}{2}}(x - ct)\right) \tag{2.60}$$

$$u(x, t) = v(x, t) = \sqrt{\frac{c}{2\alpha}} \coth\left(\sqrt{\frac{-c}{2}}(x - ct)\right) \tag{2.61}$$



Ceci signifie que les solutions d'équation de  $CMKdV$  prennent les formes suivantes,

$$\Psi(x, t) = (1 + i) \left[ \sqrt{\frac{c}{2\alpha}} \tanh\left(\sqrt{\frac{-c}{2}}(x - ct)\right) \right] \quad (2.62)$$

et

$$\Psi(x, t) = (1 + i) \left[ \sqrt{\frac{c}{2\alpha}} \coth\left(\sqrt{\frac{-c}{2}}(x - ct)\right) \right] \quad (2.63)$$

Cependant, pour  $c > 0$ , nous trouvons les solutions périodiques,

$$u(x, t) = v(x, t) = \sqrt{\frac{-c}{2\alpha}} \tan\left(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - ct)\right) \quad (2.64)$$

$$u(x, t) = v(x, t) = \sqrt{\frac{-c}{2\alpha}} \cot\left(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - ct)\right) \quad (2.65)$$

et en conséquence, nous obtenons

$$\Psi(x, t) = (1 + i) \left[ \sqrt{\frac{-c}{2\alpha}} \tan\left(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - ct)\right) \right] \quad (2.66)$$

et

$$\Psi(x, t) = (1 + i) \left[ \sqrt{\frac{-c}{2\alpha}} \cot\left(\sqrt{\frac{c}{2}}(x - ct)\right) \right] \quad (2.67)$$

# Bibliographie

- [1] Ye JF, Zheng CL, Xie LS ,. Int J Nonlinear Sci NumSimul 7(2) :203–208, (2006)
- [2] Bogning JR, Tchakoutio-Nguetcho AS, Kofane ,. Int J Nonlinear Sci Num Simul 6(4) :371–385(2005).
- [3] El-Sabbagh MF, Ali AT ,. Int J Nonlinear Sci NumSimul 6(2) :151–162, (2005).
- [4] Shen JW, XuW . Int J Nonlinear Sci NumSimul 5(4) :397–402, (2004).
- [5] Sheng Z , Chaos Solit. Fract 32(4) :1375–1383, (2007).
- [6] A.M. Wazwaz, chaos , Solitons and Fractals 28 454-462. (2006).
- [7] He JH, Wu XH , Chaos Solit Fract 29(1) :108–113, (2006).
- [8] He JH , Chaos Solit Fract 26(3) : 695–700, (2005).
- [9] He JH , Chaos Solit Fract 19(4) :847–851, (2004).
- [10] He JH, Int J Non-Linear Mech 34(4) :699–708, (1999).
- [11] Abulwafa EM, Abdou MA, Mahmoud AA , Chaos Solit Fract 32(4) :1384–1397, (2007).
- [12] Mustafa Inc M , Phys A 375(2) :447–456, (2007).
- [13] Soliman AA, Chaos Solit Fract 29(2) :294–302, (2006).
- [14] Abdou MA, Soliman AA ,. J Comput Appl Math 181(2) :245–251, (2005).
- [15] Herman RL, Nonlinear Anal 63(5–7) : e2473–e2482, (2005).
- [16] He JH , Int J Non- Linear Mech 35(1) :37–43, (2000).
- [17] Ganji DD, Rafei M ,Phys Lett A 356(2) :131–137, 2006
- [18] Shou DH, He JH . Int J Nonlinear Sci Numer Simul 8 :113–116, (2007).

- [19] He JH , . Int J Nonlinear Sci Numer Simul 2 :257–264, (2001).
- [20] He JH , Int J Non-Linear Mech 37 :309-314, (2002).
- [21] Xu L , J Comput Appl Math 207(1) :148-157, (2007).
- [22] He J-H,WuX-H , Chaos Solit Fract 30(3) :700–708, (2006).
- [23] He J-H, Abdou MA , Chaos Solit Fract 34(5) :1421–1429, (2007).
- [24] WuX-H, He J-H, Chaos Solit Fract 38(3) :903–910, (2008).
- [25] S. Dusuel, P. Michaux and M. Remoissenet, Physical Review E 57 (2), 2320-2326, (1998).
- [26] A. Ludu and J.P. Draayer, Physica D 123, 82-91, (1998).
- [27] W. Malfliet, Am. J. Phys. 60 (7), 650-654, (1992).
- [28] A.M. Wazwaz, Computers and Mathematics with Applications 49 1101-1112, (2005).
- [29] C.F.F. Karney, A. Sen and F.Y. Chu, , Phys. Fluids 22 (5), 940-952, (1979).
- [30] O.B. Gorbacheva and L.A. Ostrovsky, Physica D 8, 223-228, (1983).
- [31] C.M. Mnslu and H.A. Erbay, Computers Math. Applic. 45 (1-3), 503-514, (2003).
- [32] J.P. Wang, Journal of Nonlinear Mathematical Physics 9, 213-233, (2002).
- [33] J. Yang, Physical Review Letters 91 (14), 1-4, (2003).

## **Deuxième partie**

### **Les méthodes de décomposition**

## 2.3 Introduction

Des problèmes non-linéaires sont résolus facilement sans linéarisation et discrétisation en employant les méthodes de décomposition. Ces méthodes consistent en la décomposition du terme non linéaire en une série infinie. Les deux méthodes qui seront présentées ici sont : la méthode d'*Adomian* et la méthode de *perturbation a paramètre artificiel*.

## 2.4 La méthode d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian [1, 2] avait suscité beaucoup d'attention ces dernières années dans la recherche des solutions. Un travail considérable de recherche a été entrepris récemment en appliquant cette méthode, pour obtenir des solutions analytiques et approximatives pour une large classe d'équations différentielles et intégrales linéaires et non-linéaires dans le domaine de la science [3, 4].

Dans la réf [5], Il est constaté qu'à la différence d'autres méthodes, la méthode de décomposition est facile à programmer dans des problèmes compliqués. Il est montré, dans la réf [6], que la convergence est presque garantie. Cette méthode a été utilisée avec succès [7, 8, 9] pour résoudre l'équation de réaction-convection non-linéaire. Dans la réf [10], une comparaison avec la méthode de perturbation a montré l'efficacité de la méthode de décomposition comparée à d'autres techniques.

### 2.4.1 Description de la méthode

La méthode présente un algorithme formel pour établir une représentation appropriée de toutes les formes des termes non-linéaires. La représentation des termes non-linéaires est nécessaire pour manipuler l'équation non-linéaire d'une manière efficace. Un algorithme alternatif pour calculer les polynômes d'Adomian sera décrit en détails. De façon semblable, la représentation des termes non-linéaires sera également présentée. La discussion sera illustrée par un exemple faisant preuve de test.

## 2.4.2 Polynômes d'Adomian

La solution  $u(x, t)$  est écrite comme une somme infinie de composantes  $u_n(x, t)$  définie par [11].

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.68)$$

la méthode de décomposition identifie le terme non-linéaire,  $N(u(x, t)) = F(u(x, t))$  par la décomposition en  $A_0(u_0) + A_1(u_0, u_1) + A_2(u_0, u_1, u_2) + \dots A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ ,

$$F[u(x, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (2.69)$$

où  $A_n$  sont les polynômes d'Adomian.

Adomian [1-3] a présenté plusieurs formules pour générer les polynômes (d'Adomian) pour toutes les formes d'opérateurs non-linéaires. Récemment, quelques méthodes récentes pour calculer les polynômes d'Adomian d'une manière simple sans le besoin des formules introduites par Adomian [1-3] ont été étudiées par nombreux auteurs [4 - 8].

**Théorème 1.** Supposons la fonction non-linéaire  $Nu = F(u)$ , et la représentation paramétrée de  $u$  est  $u(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k$ , où  $\lambda$  est un paramètre, nous avons [13] :

$$\left. \frac{\partial^n F(u(\lambda))}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0}, \quad (2.70)$$

**Preuve 1.** Comme :

$$u(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k = \sum_{k=0}^n \lambda^k u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k u_k,$$

En remplaçant  $u(\lambda)$  par l'Eq. (2.70) :

$$\frac{\partial^n F(u(\lambda))}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0},$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\frac{\partial^n F(u(\lambda))}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0},$$

Comme dans la représentation présentée par Adomian [1], nous supposons la forme suivante :

$$Nu(\lambda) = F(u(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k \quad (2.71)$$

ainsi, nous avons

$$F(u(\lambda)) = F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k, \quad (2.72)$$

Afin d'obtenir  $A_n$ , nous calculons la dérivée d'ordre  $n$  des deux côtés de (2.72) selon  $\lambda$  et ensuite en pose  $\lambda = 0$ , soit :

$$\frac{\partial^n F(u(\lambda))}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0}, \quad (2.73)$$

Selon le théorème 1 :

$$\frac{\partial^n F(u(\lambda))}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0}, \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial^n (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n (\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0}, \quad (2.75)$$

ainsi on a

$$\left. \frac{\partial^n F \left( \sum_{k=0}^n \lambda^k u_k \right)}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^n \left( \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k \right)}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0}, \quad (2.76)$$

Pour l'Eq.(2.76) quand  $n = 0$ , on peut obtenir  $A_0$ ; quand  $n = 1$ , nous obtenons  $A_1$ ; et ainsi de suite, les autres quantités  $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$

Les cinq premiers polynômes sont donnés par [12] :

$$\begin{aligned} A_0 &= F(u_0), \\ A_1 &= u_1 F'(u_0), \\ A_2 &= u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0), \\ A_3 &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F''(u_0), \\ A_4 &= u_4 F'(u_0) + \left( \frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3 \right) F''(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{4!} u_1^4 F^{(4)}(u_0), \end{aligned}$$

Premièrement, on observe que  $A_0$  dépend seulement de  $u_0$ ,  $A_1$  dépend seulement de  $u_0$  et  $u_1$ ,  $A_2$  dépend seulement de  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ , et ainsi de suite. En second lieu, les polynômes d'Adomian présentés ici montre que la somme d'indices inférieurs des composantes de  $u(x, t)$  de chaque terme de  $A_n$  est égale à  $n$  [23]. Cette dernière observation jeu un rôle important pour construire l'algorithme.

La méthode suggère qu'il faut substituer  $u(x, t)$  comme la somme des composantes  $u_n$ ,  $n \geq 0$  comme il est défini par l'Eq.(2.68). Il est clair que  $A_0$  est toujours déterminé indépendamment des autres polynômes  $A_n$ ; de sorte que  $A_0$  soit toujours défini par :

$$A_0 = F(u_0), \quad (2.77)$$

Nous séparons d'abord  $A_0 = F(u_0)$  des autres termes non-linéaires  $F(u)$ . Avec  $A_0$  identifié, les termes restants de  $F(u)$  peuvent être développés en employant des opérations



algébriques, des identités trigonométriques et des séries de Taylor. Après avoir établi ce développement, nous rassemblons alors tous les termes obtenus tels que la somme des indices des composantes de  $u(x, t)$  pour chaque terme identique. L'algorithme ci-dessous est employé pour calculer les polynômes d'Adomian :  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{(n-1)}, A_n$ .

**Étape 1** : Entrer les termes non-linéaire  $U = F(u)$  et aussi  $n$  l'ordre des polynômes d'Adomian.

**Étape 2** : Poser  $u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^n u_n$

**Étape 3** : Poser  $\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = F(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^n u_n)$

**Étape 4** : Pour  $i = 0, 1, \dots, n$  faire :

a) La dérivée  $i^{\text{ème}}$  des deux cotés de l'égalité ci-dessous par rapport à  $\lambda$  :

$$\frac{\partial^i (\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k)}{\partial \lambda^i} = \frac{\partial F(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^n u_n)}{\partial \lambda^i}, \quad (2.78)$$

b) Pour l'Eq.(2.78), poser  $\lambda = 0$  et déterminer  $A_i$  en résolvant l'équation en  $A_i$ .

**Étape 5** : Ecrire :  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$

Fin.

Nous considérons maintenant l'équation :

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (2.79)$$

où,  $L = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$  est facilement inversible,  $R$  est un opérateur différentiel linéaire d'ordre inférieur par rapport à  $L$ ,  $Nu$  représente les termes non-linéaires, et  $g$  le terme de source.

Application de l'opérateur inverse,  $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$  à l'Eq.(2.79), et en utilisant les conditions données nous obtenons :

$$u = f - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \quad (2.80)$$

où la fonction  $f$  représente les termes résultant d'intégration de la source  $g$ . La méthode d'Adomian standard définit  $u(x, t)$  par des séries. En utilisant l'Eq.(2.68), les composantes  $u_0, u_1, u_2, \dots$  sont habituellement déterminés récursivement :

$$\begin{aligned} u_0 &= f \\ u_{k+1} &= -L^{-1}(Ru_k) - L^{-1}(Nu_k), \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Alors la solution est donnée par l'approximation suivante

$$u(x, t) \approx u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) \tag{2.82}$$

Le nombre de termes change d'un exemple à un autre. Dans certains cas, peu de termes donnent la bonne approximation et dans d'autres, plus le nombre est élevé, plus l'approximation est meilleure, ce rapport est généralement vrai [6, 13, 23].

### 2.4.3 Applications : L'équation non linéaire de Schrödinger (CNLS)

L'équation non linéaire de Schrödinger généralisée (NLS) est définie par :

$$iu_t + u_{xx} + i (g (|u|^2) u)_x + f (|u|^2) u = 0 \tag{2.83}$$

Nous présentons un test de précision pour l'équation cubique non-linéaire de Schrödinger (CNLS) qui a la forme

$$iu_t + u_{xx} + q |u|^2 u = 0, \quad x \in R, \quad L_0 < x < L_1, \quad t \geq t_0 \tag{2.84}$$

où,  $i = \sqrt{-1}$ , le paramètre  $q \in R$  et  $q > 0$ , et  $u = u(x, t) = v(x, t) + i w(x, t)$  joue un rôle important dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques tels que la propagation des impulsions optiques, des vagues d'eau, des ondes dans le plasma et des effets d'auto-focalisation en impulsions de laser.

L'état initial est donné par cette forme,

$$u(x, t_0) = f(x) = f_R(x) + i f_I(x), \quad L_0 < x < L_1 \quad (2.85)$$

tel que  $f_R$  et  $f_I$  sont des fonctions continues de  $x$  à valeurs réelles et les conditions aux limites sont données par

$$\frac{\partial u(L_0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq t_0, \quad \frac{\partial u(L_1, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.86)$$

Pour le cas de soliton simple, quand  $q \neq 0$ , la fonction s'écrit [14, 15, 16] :

$$u(x, t) = \left(\frac{2a}{q}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(\frac{c}{2}x - \theta t\right)\right] \operatorname{sech}\left[a^{1/2}(x - ct)\right] \quad (2.87)$$

avec  $\theta = c^2/4 - a$ , satisfait les Eqs.(2.85) – (2.86). Pour une valeur fixée de  $t$ , la fonction  $u$  en (2.87) décroît exponentiellement quand  $|x| \rightarrow \infty$  et elle représente une perturbation de type soliton qui voyage avec la vitesse  $c$ ; son amplitude est régie par le paramètre réel  $a$ .

Les ondes de cette forme jouent un rôle important dans des situations physiques complexes, par exemple, dans le système optique du laser, le module  $|u(x, t)|$  peut être considéré comme un soliton. Des méthodes numériques pour résoudre (2.85) – (2.86) sont également rapportées par Griffiths et al [17], Taha et Ablowitz [18], Twizell et al [19], Weideman [20] etc., alors que récemment un grand intérêt a été porté sur les solutions numériques dans lesquelles le terme non-linéaire est correctement linéarisé (voir [18], [21]).

#### 2.4.4 Calculs symboliques

Considérons l'Eq. (2.84) écrite sous forme d'opérateur

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q|u|^2 u, \quad L_0 < x < L_1, \quad t > 0 \quad (2.88)$$

D'après la méthode de décomposition d'Adomian, où les composantes  $u_n(x, t)$  vont être déterminées récursivement, alors que le terme non-linéaire  $F(u) = |u|^2 u$  est décomposé en séries infinies de polynômes. Appliquant l'opérateur intégral  $L^{-1}$  des deux côtés de l'Eq.(2.88), après avoir utilisé la condition initiale donnée par l'Eq.(2.85), on trouve l'équation résultante de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = f(x) + i L^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + q \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \right] \quad (2.89)$$

On propose d'utiliser la méthode de décomposition modifiée présentée en [22] afin de résoudre l'Eq.(2.89). La relation de récurrence suivante est construite :

$$u(x, t = 0) = f(x) \quad (2.90)$$

$$u_k(x, t) = iL^{-1} \left[ \frac{\partial u_{k-1}}{\partial x^2} + qA_{k-1} \right], \quad \text{pour } k \geq 1 \quad (2.91)$$

Posons  $|u|^2 = u\bar{u}$ , les polynômes;  $A_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) qui représentent le terme non-linéaire  $F(u)$  et qui sont donnés par :

$$A_0 = u_0^2 \bar{u}_0 \quad (2.92)$$

$$A_1 = 2u_0 u_1 \bar{u}_0 + u_0^2 \bar{u}_1,$$

$$A_2 = 2u_0 u_2 \bar{u}_0 + u_2^2 \bar{u}_2 + 2u_0 u_1 \bar{u}_1 + u_0^2 \bar{u}_2,$$

$$A_3 = 2(u_0 u_3 \bar{u}_0 + u_1 u_2 \bar{u}_0 + u_0 u_2 \bar{u}_1 + u_0 u_1 \bar{u}_2) + u_1^2 \bar{u}_1 + u_0^2 \bar{u}_3,$$

où les polynômes  $A_k$  sont obtenus d'une façon semblable.

Appliquant les étapes décrites précédemment, nous obtenons les termes suivants

## 2.5.2 Description de la méthode

Pour illustrer les concepts de base de cette méthode, nous considérons une équation différentielle aux dérivées partielles avec deux variables indépendantes [31] :

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.93)$$

Cette approche consiste à introduire un paramètre auxiliaire,  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) et le remplacement du terme non-linéaire par  $Nu = F(u)$ . Donc, on obtient l'équation partielle analogue suivante :

$$F(v, v_x, v_t, v_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.94)$$

avec la solution  $u(x, t)$  étant de la forme :

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} v(x, t, \varepsilon) \quad (2.95)$$

Supposons l'existence des solutions des équations pour toutes les valeurs de  $\varepsilon$ , et nous pouvons voir que  $u(x, t)$  sera modifiée et dépend maintenant du paramètre  $\varepsilon$ . Les solutions  $v$  dans l'Eq.(2.95) peuvent être trouvées par un développement en séries de Taylor en fonction du paramètre  $\varepsilon$ . Dans les calculs pratiques nous retenons seulement les termes d'ordre  $M$  de la série pour décrire la solution  $v$ , notée comme suit :

$$v_M(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^M \varepsilon^i v^{(i)}, \quad (2.96)$$

où,

$$v^{(0)} = v_M(x, t, 0), \quad v^{(n)} = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n v_M}{\partial \varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0}, \quad n = 1, \dots, M$$

où :  $\left. \frac{\partial^n v_M}{\partial \varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0}$  représente la dérivée d'ordre  $n$  évaluée au point 0.

En introduisant la forme de la solution, Eq.(2.96) dans l'équation différentielle (2.94)

et ensuite par égalisation des mêmes puissances de  $\varepsilon$ , on obtient un système d'équations linéaires qui peuvent être résolues récursivement. La solution  $v^{(0)}$  est obtenue à partir de l'équation linéarisée qui peut être résolue par la méthode de la transformée de Fourier ou par d'autres méthodes.

En introduisant  $v^{(0)}$  dans le système d'équations, nous obtenons la solution  $v^{(1)}$  qui sera incorporée dans le système pour obtenir la solution  $v^{(2)}$  et ainsi de suite.

Notons que la séparation du terme non-linéaire de l'équation initiale nous permet d'obtenir un système d'équations et la reconstruction de la solution finale est alors possible dans la plupart des cas.

### 2.5.3 Application : L'équation complexe de Korteweg de Vries (CMKdV) modifiée

La solution numérique des équations d'ondes non-linéaires pour quelques équations intégrables connues a été le sujet de nombreuses études ces dernières années telles que l'équation de Korteweg-de Vries ( $KdV$ ) [25, 26, 27]. Ce système a été résolu numériquement par Ismail [28, 29, 30] et dans [31, 32, 33, 34] Muslu et al [35], ont résolu l'équation couplée de Korteweg-de Vries en utilisant la méthode de Split-Step Fourier. En outre Taha [27] a résolu une forme différente de l'équation de  $CKMdV$  par la même méthode.

L'équation couplée de Korteweg-de Vries a été récemment résolue numériquement par la méthode de collocation [24]. Cette dernière est basée sur la formulation de *Crank-Nicolson* pour l'intégration dans le temps et par les fonctions de *quintic B-spline* pour l'intégration dans l'espace. La stabilité de Von-Neumann est employée pour montrer que le système est stable. Le système non-linéaire résultant est un bloc penta diagonale et la méthode de newton est utilisée pour résoudre ce système.

Dans cette partie, on essaye de résoudre l'équation de  $CKMdV$  (couplée), en utilisant la méthode de perturbation artificielle.

L'équation complexe de Korteweg de Vries modifiée ( $CMKdV$ ) est donnée par [14, 24, 35]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial (|\psi|^2 \psi)}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2.97)$$

avec

$$\psi = u + iv, \quad i^2 = -1,$$

où,  $\psi$  est une fonction complexe évaluée en fonction de la coordonnée spatiale  $x$  et du temps  $t$ ,  $\alpha$  est un paramètre réel. Cette équation est proposée comme modèle pour l'évolution non-linéaire des ondes de plasma [35]. L'équation de *CMKdV* (2.97) a été résolue analytiquement par la méthode de *sine – cosine* et la méthode de *tanh* [36], qui a prouvé que cette équation admet des solutions exactes de soliton formées par les fonctions de *sech* dont les amplitudes et les vitesses sont des paramètres libres, et la solution par *Tanh* (de type *Kink*).

L'équation de *CMKdV*, a une solution d'onde solitaire de la forme donnée par l'Eq.(2.51) [35], dans le cas  $c > 0$

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2c}{\alpha}} \operatorname{sech} [\sqrt{c}(x - x_0 - ct)] \exp(i\theta), \quad (2.98)$$

où  $c$  est la vitesse,  $\alpha$  un paramètre réel et  $\theta$  l'angle de polarisation. Cette équation représente une onde solitaire placée à  $x_0$  et se déplace vers la droite avec la vitesse  $c$  et satisfait les conditions aux limites  $\psi \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Cette équation a les quantités conservatives [37] :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{2} |\psi|^4 - |\psi_\infty|^2 dx \quad (2.99)$$

Pour éviter le calcul complexe, nous transformons l'équation de *CMKdV* en système couplé non-linéaire par la décomposition du  $\psi(x, t)$  dans ses parties réelles et imaginaires.

$$\psi(x, t) = u(x, t) + i v(x, t), \quad i^2 = -1, \quad (2.100)$$

où,  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$  sont des fonctions réelles. On obtient alors un système d'équations

couplées de  $KdV$  modifiées

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} [(u^2 + v^2) u] = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} [(u^2 + v^2) v] = 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

Ces deux équations non-linéaires couplées décrivent l'interaction de deux ondes transversales orthogonales polarisées [35, 36], où  $u$  et  $v$  représentent les ondes transversales polarisées suivant  $y$  et  $z$  respectivement, se propageant dans la direction  $x$  dans un système de coordonnées  $xyz$ . L'angle  $\theta$  de polarisation est défini par  $\tan \theta = v/u$ . Pour quelques cas spéciaux, c-à-d., pour  $v = 0$  ou  $u = 0$  ou  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ , correspondent aux polarisations,  $0$ ,  $\pi/2$ , et  $\theta_0$ , respectivement, ces deux équations couplées (2.101) se réduisent à l'équation simple de  $mKdV$  [35].

Afin de décrire la méthode de perturbation, nous écrivons l'Eq.(2.101) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha [(3u^2 + v^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2u v \frac{\partial v}{\partial x}] = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \alpha [2uv \frac{\partial u}{\partial x} + (u^2 + 3v^2) \frac{\partial v}{\partial x}] = 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

avec les solutions  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$  étant de la forme :

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} W(x, t, \varepsilon) \quad \text{et} \quad v(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} Z(x, t, \varepsilon) \quad (2.103)$$

En introduisant les expressions (2.103) dans le système (2.102) on obtient le système d'équations différentielles en fonction de  $W(x, t)$  et  $Z(x, t)$  :

$$W_t^{(0)} + W_{xxx}^{(0)} = 0, \quad (2.104)$$

$$W_t^{(1)} + \alpha (3W^{(0)2} + 2W^{(0)}Z^{(0)}Z_x^{(0)} + W_x^{(0)}Z^{(0)2}) + W_{xxx}^{(1)} = 0 \quad (2.105)$$

$$W_t^{(2)} + \alpha \left\{ W_x^{(1)}Z^{(0)2} + 2 \left[ W_x^{(0)}Z^{(0)}Z^{(1)} + Z_x^{(0)} \left( W^{(1)}Z^{(0)} + W^{(0)}Z^{(1)} \right) + W^{(0)}Z^{(0)}Z_x^{(1)} \right] \right\} +$$



$$6\alpha W^{(0)}W^{(1)} + W_{xxx}^{(2)} = 0, \quad (2.106)$$

et

$$Z_t^{(0)} + Z_{xxx}^{(0)} = 0, \quad (2.107)$$

$$Z_t^{(1)} + \alpha (3W^{(0)2} + 2W^{(0)}Z^{(0)}W_x^{(0)} + Z_x^{(0)}Z^{(0)2}) + Z_{xxx}^{(1)} = 0 \quad (2.108)$$

$$Z_t^{(2)} + \alpha \left\{ Z_x^{(1)}Z^{(0)2} + 2 \left[ Z_x^{(0)}Z^{(0)}Z^{(1)} + W_x^{(0)} \left( W^{(1)}Z^{(0)} + W^{(0)}Z^{(1)} \right) + W^{(0)}Z^{(0)}W_x^{(1)} \right] \right\} +$$

$$6\alpha W^{(0)}W^{(1)} + Z_{xxx}^{(2)} = 0 \quad (2.109)$$

Il est évident qu'à partir des équations linéarisées (2.104) et (2.107), les solutions  $W^{(0)}$  et  $Z^{(0)}$  peuvent être obtenues en utilisant un simple test de soliton. Ces équations linéarisées, peuvent être résolues en utilisant la transformée de Fourier.

## 2.6 Discussion et conclusion

Nous avons présenté la méthode de décomposition d'Adomian dans le but de séparer le terme non linéaire dans l'équation d'évolution spécifique, qui est l'équation non linéaire de Schrödinger, (équation cubique : *CNLS*). Nous avons montré que la méthode est bonne dans la recherche des solutions approximatives, et on a constaté que les résultats itérés sont en bon accord avec les solutions exactes.

La deuxième méthode de décomposition est la méthode de perturbation artificielle basée sur la série de Taylor qui permet d'obtenir les termes de correction ordre-par-ordre de la solution approximée du problème original. Le système d'équations linéaires diffé-

rentielles résultant peuvent être résolu à l'aide de la transformée de Fourier. **Une autre méthode de décomposition directe** sera traitée séparément dans les prochains chapitres vu son usage important dans la recherche des solutions exactes à une large variété d'équations d'ondes, c'est **la méthode de la variable fonctionnelle**.

# Bibliographie

- [1] G. Adomian, , Math. Comput. Model. 13 (7) (1992) 17-3.
- [2] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics : The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [3] G.Adomian, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, 1986.
- [4] G.Adomian, Applications of Nonlinear Stochastic Systems Theory to Physics, Kluwer, 1988.
- [5] S. Van Tonningen, Computers Education J. 5 (4) (1995) 30-34.
- [6] Y. Cherruault, G. Saccomandi, B. Some, Math. Comput. Model. 16 (2) (1992) 85-93,
- [7] Y. Eugene, Appl. Math. Comput. 56 (1993) 1-27.
- [8] A.M. Wazwaz, Appl. Math. Comput. 72 (1995) 175 -181.
- [9] A.M. Wazwaz, Appl. Math. Comput. 80 (1996) 287-299.
- [10] N. Bellomo, R.A. Monaco, J. Math. Anal. Appl. 110 (1985) 495-502.
- [11] W. F. Ames, Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. II, Academic press, New York, 1965.
- [12] A.M. Wazwaz, Appl.Math.Comput.111 (2000) 53–69.
- [13] Yonggui Zhu, Qianshun Chang, Shengchang Wu, Applied Mathematics and Computation 169 (2005) 402–416.
- [14] Jinqing F, Wei-Guang Y. In : , Adomian’s decomposition method for the solution of generalized Duffing equations. In : Proc (1992),Proc (1992), Int Workshop on Mathematics Mechanization, Beijing, China, 1992.

- [15] J. Argyris, M. Haase, , *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 61 (1987), 71-122.
- [16] A. G. Bratsos, *Korean J. Comput. & Appl. Math.*, Vol. 8, (2001) no 3, 459-467.
- [17] D. F. Griffiths, A. R. Mitchel and J. LI. Morris, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 45 (1984), 177-215.
- [18] T. R. Taha and M. J. Ablowitz, *J. Comput. Phys.* 55 (1984), 203-230.
- [19] E. H. Twizell, A. G. Bratsos and J. C. Newby, *Mathematics and Computers in Simulation*, 43 (1997), 67-75.
- [20] J.A.C Weideman and B.M. Herbst, *SIAM J. Numer. Anal.* 23(3) (1986), 485-507.
- [21] A. G. Bratsos, *Communications in Applied Analysis*, Vol. 4, 1 (2000), 133-139.
- [22] A. M. Wazwaz, A reliable Technique for Solving Linear and Nonlinear Schrödinger Equations by Adomian decomposition Method, *Bulletin of The Institute Of Mathematics Academica Sinica*, 29(2)125-134, 2001.
- [23] A. Zerarka, V.G. Foester, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 10 (2005) 217–225.
- [24] M.S. Ismail, *Com. Nonl. Sci. Num. Simulation*, 14(3), 749-759, (2009).
- [25] T.R. Taha and M. J. Ablowitz, *J. comput. Phys.* 55 (1984) 231-253.
- [26] T.R. Taha and M. J. Ablowitz, *J. Comput. Phys.* 77 (1988) 540-548.
- [27] T.R. Taha, *Math. Comput. Simul.* 37 (1994) 461-467.
- [28] M. S. Ismail, Thiab R Taha, *Math. Comp. Simul.* 74 (2007) 302-311.
- [29] M. S. Ismail, S. Z. Alamri, *Int. J. Comp. Math.* 81(3) (2004) 333-351.
- [30] M. S. Ismail, Thiab R. Taha, *Math. Comp. Simul.* 56 (2001) 547-562 .
- [31] N. Khelil, Bensalah N., Saidi H., Zerarka A., *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 2006, 7(12) : 2079–2082.
- [32] A. A. Halim, S. P. Kshevetskii and S. B. Leble, *Comput. and Math Applic.* 45(2003) 581-591.
- [33] A. A. Halim and S. B. Leble, *Chaos, Solitons, Fractals* 19 (2004) 99-108 .
- [34] D. Kaya and I. Inan, *Appl. Math Comput.* 151 (2004) 775-787.

- [35] G. M. Muslu and H. A. Erabay, *Comput. Math Applic.* 45 (2003) 503-514.
- [36] A. M. Wazwaz, *Comput. Math. Applic.* 49 (2005) 1101-1112.
- [37] L. Debenath, *Nonlinear partial differential equations*, Birkhäuser, 2005, Boston, p528

# Chapitre 3

## La méthode de la variable fonctionnelle : Les équations d'ondes à coefficients constants

### 3.1 Introduction

Les développements récents des problèmes non-linéaires avec l'effort intense entrepris a augmenté le besoin de la construction de nouvelles approches. Nous décrivons dans ce chapitre un nouveau traitement basé sur la méthode de la variable fonctionnelle pour trouver les solutions exactes pour une classe d'équations d'ondes non-linéaires [8, 12, 13, 15, 16, 19, 24, 30, 42, 44, 49]. Pour montrer l'efficacité de cette méthode, on a traité les structures de quelques équations non linéaires à coefficients constants, et l'effet de l'exposant négatif des termes non-linéaires est aussi traité.

### 3.2 La description de la méthode

Dans cette section, nous décrivons la méthode de la variable fonctionnelle (*MVF*) [50, 51] qui conduit à l'intégration de plusieurs modèles des équations partielles non-linéaires

*EDP*. Considérons l'équation différentielle partielle non-linéaire suivante, écrite en plusieurs variables indépendantes

$$P(u, u_t, u_y, u_z, u_{xy}, u_{yz}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.1)$$

les indices expriment les dérivées partielles de la fonction inconnue  $u(t, x, y, z, \dots)$ ,  $P$  est une fonction qui relie les différents êtres mathématiques tels que  $u, u_t, u_y, u_z, u_{xy}, u_{yz}, u_{xx}, \dots$

On exprime la nouvelle variable d'onde par :

$$\xi = \delta + \sum_{i=0}^m \alpha_i \chi_i \quad (3.2)$$

$\chi_i$  sont les variables indépendantes,  $\delta$  et  $\alpha_i$  sont des paramètres. Quand  $m = 1$ , alors  $\xi = \alpha_0 \chi_0 + \alpha_1 \chi_1 + \delta$ , et si  $\chi_0, \chi_1$  sont les variables  $t$  et  $x$  respectivement, les paramètres  $\alpha_0, \alpha_1$  sont identifiés comme la pulsation d'onde,  $\omega$  et le vecteur d'onde,  $k$  respectivement.

A ce stade, nous introduisons la transformation suivante pour la solution d'onde

$$u(\chi_0, \chi_1, \dots) = U(\xi) \quad (3.3)$$

et avec la règle de chaîne

$$\frac{\partial}{\partial \chi_i} (\cdot) = \alpha_i \frac{d}{d \xi} (\cdot), \quad \frac{\partial^2}{\partial \chi_i \partial \chi_j} (\cdot) = \alpha_i \alpha_j \frac{d^2}{d \xi^2} (\cdot), \dots \quad (3.4)$$

Avec l'utilisation des relations (3.3) et (3.4), l'équation différentielle partielle non-linéaire (3.1) est convertie en équation différentielle ordinaire (*EDO*) :

$$Q(U, U_\xi, U_{\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (3.5)$$

On introduit alors une transformation dans laquelle la fonction inconnue  $U$  est considérée comme une variable fonctionnelle est écrite sous la forme

$$U_\xi = F(U) \quad (3.6)$$

et les dérivées successives de  $U$  sont

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2} (F^2)', U_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2} (F^2)'' \sqrt{F^2}, U_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{2} \left[ (F^2)''' F^2 + (F^2)'' (F^2)' \right], \dots \quad (3.7)$$

où «'» représente la dérivée  $(\frac{d}{dU})$ , «''» représente la dérivée  $(\frac{d^2}{dU^2})$ , .... L' équation différentielle ordinaire (3.5) peut être réduite en termes de  $U$ ,  $F$  et ses dérivées en utilisant les relations (3.7), on obtient une fonction  $R$  de la forme

$$R(U, F, F', F'', F''', F^4, \dots) = 0 \quad (3.8)$$

L'idée principale de la forme particulière (3.8) est d'intérêt spécial parce qu'elle admet les solutions analytiques pour une certaine classe d'équations d'ondes non-linéaires. Après intégration, l'Eq.(3.8) fournit l'expression de  $F$ , et alternativement avec l'Eq.(3.6), on peut extraire les solutions appropriées au problème original. Dans la suite, nous examinons quelques exemples traités par d'autres approches notamment par la méthode de *sine – cosine*, la méthode de *Tanh* et les méthodes d'ansatze.

### 3.3 Application de la méthode

Dans la plupart des cas, cette méthode peut donner des solutions exactes, telles que par exemple, des solutions de type *soliton*, des solutions de type *compactons* et *non – compactons*, des solutions *trigonométriques*, des solutions de type *Pattern*, des solutions de type *Kink*, et d'autres profils de solutions. Dans cette section, nous nous intéressons à quelques exemples bien connus tels que, l'équation de *KdV*, la forme généralisée du système de *Boussinesq*, l'équation des ondes longues régularisées (*RLW*), et l'équation de *Burgers* en deux dimensions. En conséquence beaucoup de recherches ont été consacrées à ces types d'équations.



### 3.3.1 L'équation de KdV

Nous allons tester cette méthode sur l'équation de  $KdV$

$$u_t + \eta u(u)_x + \alpha u_{xxx} = 0, \quad (3.9)$$

avec  $\alpha = \eta = 1$ . En utilisant la relation (3.2), l'Eq.(3.9) prend la forme :

$$\alpha_1 U_\xi + \alpha_0 U U_\xi + \alpha_0^3 U_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (3.10)$$

et après intégration on trouve

$$\alpha_1 U + \frac{1}{2} \alpha_0 (U)^2 + \alpha_0^3 U_{\xi\xi} = 0, \quad (3.11)$$

En multipliant l'Eq.(3.11) par  $U_\xi$ , et en intégrant il vient,

$$\frac{\alpha_1}{2} U^2 + \frac{1}{6} \alpha_0 (U)^3 + \frac{\alpha_0^3}{2} (U_\xi)^2 = 0, \quad (3.12)$$

avec l'aide de la transformation (3.6, l'Eq.(3.12) devient :

$$\alpha_1 U^2 + \frac{1}{3} \alpha_0 (U)^3 + \alpha_0^3 F^2(U) = 0, \quad (3.13)$$

qui fournit l'expression de  $F(U)$  :

$$F(U) = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_0} U} \sqrt{1 + \frac{\alpha_0}{3} U} \quad (3.14)$$

En regardant l'expression (3.14), la relation différentielle (3.6) est complètement intégrable, puisque ses solutions sont déduites directement de l'intégrale

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{1+y}} = \ln \left| \frac{-1 + \sqrt{1+y}}{1 + \sqrt{1+y}} \right|, \quad (3.15)$$

A partir de (3.6) et (3.15), nous pouvons obtenir l'équation quadratique suivante

$$A^2 Z^2 + 4(1 - A^2)Z - 4(1 - A^2) = 0 \quad (3.16)$$

avec

$$Z = \frac{\alpha_0}{3} U \quad (3.17)$$

et

$$A = \frac{2 \tanh \left[ \frac{c}{2} \xi \right]}{\left\{ 1 + \tanh^2 \left[ \frac{c}{2} \xi \right] \right\}} \quad (3.18)$$

où

$$c = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}} \quad (3.19)$$

Finalement, les deux solutions de l'équation (3.16), et après une certaine manipulation algébrique sont données par :

**1. Pour**  $\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3} < 0$ ,

On trouve la solution exacte

$$u_1(x, t) = \frac{3}{\alpha_1} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x) + \beta \right) \right] \quad (3.20)$$

avec  $\beta = \delta \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3}}$

**2. Pour**  $\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3} > 0$ ,

On trouve la solution exacte

$$u_2(x, t) = \frac{3}{\alpha_1} \operatorname{sec}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x) + \beta \right) \right] \quad (3.21)$$

avec  $\beta = \delta \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_0^3}}$  et qui sont identiques avec celles trouvées en [48]

### 3.3.2 La forme généralisée du système de Boussinesq

$$\begin{cases} v_t + a(u^n)_x - bu_{xxx} = 0 \\ u_t + v_x = 0 \end{cases}, \quad a, b \neq 0, \text{ et } n > 1 \quad (3.22)$$

où,  $a$  et  $b$  sont des constantes arbitraires. Les équations de *Boussinesq* décrivent les vagues d'eau non-linéaires faiblement dispersives et les solitons d'ions acoustiques [20, 26, 33, 45]. Plusieurs formes des équations de Boussinesq sont également construites avec différentes stratégies afin de fournir de nouvelles structures physiques [1, 9, 23, 25, 27, 37, 39]. Nous présentons d'abord les variables indépendantes,  $x$  et  $t$ , par l'intermédiaire de la variable d'onde en utilisant la relation (3.2), alors on a

$$\xi = \alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta \quad (3.23)$$

et nous cherchons les solutions d'ondes de déplacement du système (3.22) en utilisant la relation (3.3),  $u(x, t) = U(\xi)$  et  $v(x, t) = V(\xi)$ . En employant la règle de chaîne (3.4), le système (3.22) devient comme

$$\begin{cases} \alpha_0 V_\xi + a \alpha_1 (U^n)_\xi - b \alpha_1^3 U_{\xi\xi\xi} = 0 \\ \alpha_0 U + \alpha_1 V = 0 \end{cases}, \quad (3.24)$$

L'intégration du système (3.24) donne

$$\begin{cases} \alpha_0 V + a \alpha_1 (U^n) - b \alpha_1^3 U_{\xi\xi} = 0 \\ \alpha_0 U + \alpha_1 V = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

ou, d'une manière équivalente, (3.25) est écrite sous cette forme

$$\begin{cases} -\alpha_0^2 U + a \alpha_1^2 U^n - b \alpha_1^4 U_{\xi\xi} = 0 \\ V = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} U \end{cases} \quad (3.26)$$

Suivant les relations (3.7), nous obtenons à partir de l'Eq.(3.26), l'expression de la fonction  $F(U)$

$$F(U) = \frac{\alpha_0}{\alpha_1^2 \sqrt{-b}} U \sqrt{1 - \frac{2a \alpha_1^2}{(n+1) \alpha_0^2} U^{n-1}} \quad (3.27)$$

Évidemment, en vertu de (3.27), l'Eq.(3.6) est complètement intégrable, puisque ses solutions sont déduites directement de l'intégrale :

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y}} = \ln \left| \frac{-1 + \sqrt{1-y}}{1 + \sqrt{1-y}} \right| \quad (3.28)$$

Suivant (3.6) et (3.28), nous pouvons obtenir l'équation quadratique suivante

$$A^2 Z^2 + 4(1 - A^2) Z - 4(1 - A^2) = 0 \quad (3.29)$$

avec

$$Z = \frac{2a \alpha_1^2}{(n+1) \alpha_0^2} U^{n-1} \quad (3.30)$$

et

$$A = \frac{2 \tanh \left[ \frac{c}{2} \xi \right]}{\left\{ 1 + \tanh^2 \left[ \frac{c}{2} \xi \right] \right\}} \quad (3.31)$$

où

$$c = \frac{(n-1) \alpha_0}{\alpha_1^2 \sqrt{-b}} \quad (3.32)$$

Finalement, les deux solutions de (3.29) et (3.30), après une certaine manipulation

algébrique sont données par

$$U_1(\xi) = \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} \xi \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.33)$$

et

$$U_2(\xi) = \left\{ -\frac{(n+1)\alpha_1^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{csch}^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} \xi \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.34)$$

## 1. Pour $b > 0$

À partir des Eqs.(3.33) et (3.34), nous obtenons les solutions périodiques pour  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \sec^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.35)$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \csc^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.36)$$

et pour  $v(x, t)$ , tel que

$$v_{(1)}(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} u_{(1)}(x, t) \quad (3.37)$$

$$v_{(2)}(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} u_{(2)}(x, t) \quad (3.38)$$

$$v_1(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \sec^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.39)$$

et

$$v_2(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \csc^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.40)$$

## 2. Pour $b < 0$

À partir des Eqs.(3.33) et (3.34), les solutions de type solitons sont

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.41)$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ -\frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{csch}^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.42)$$

et pour  $v(x, t)$ , nous obtenons

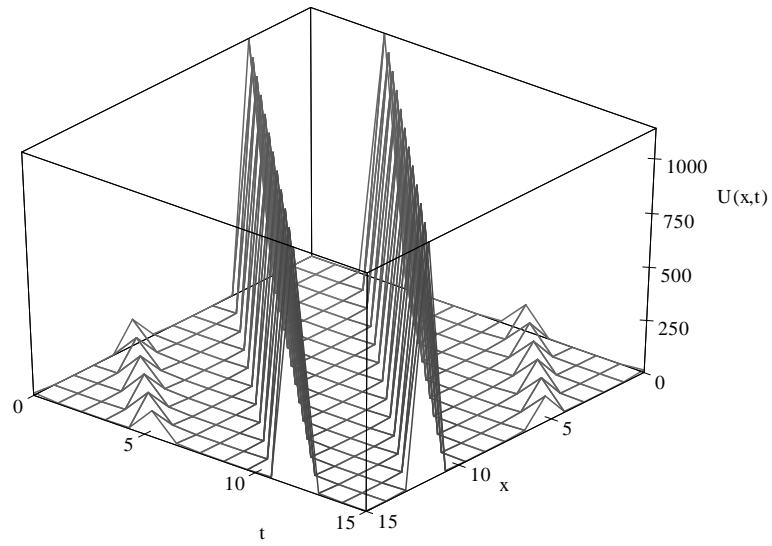
$$v_1(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left\{ \frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.43)$$

$$v_2(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left\{ -\frac{(n+1)\alpha_0^2}{2a\alpha_1^2} \operatorname{csch}^2 \left[ \frac{(n-1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.44)$$

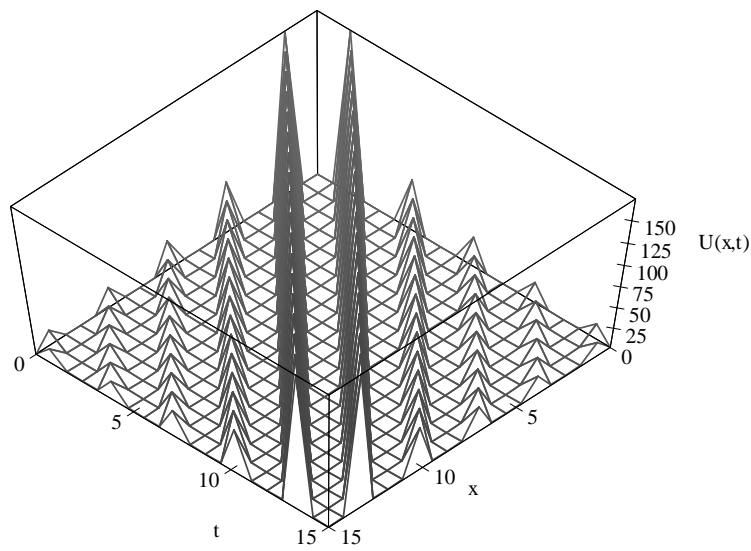
On note que les solutions d'ondes de déplacements exactes (3.41), (3.42), (3.43) et (3.44) sont identiques avec celles trouvées en [32] en employant la méthode *Sine-Cosine* avec les paramètres suivants :

$$\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, a = 2, b = 1 \text{ et } \delta = 0 \quad (3.45)$$

Nous montrons dans la *Fig.3.I.1(a, b)*, la formation des solutions périodiques  $u_1(x, t)$  donnée par l'Eq.(3.35) où les courbes (a) et (b) affichent les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  respectivement.



*Fig.3.I.1 – a.* La courbe de la solution periodique, le cas  
 $n = 2$



*Fig.3.I.1 – b.* La courbe de la solution periodique, le cas  
 $n = 3$

### 3.3.3 L'équation d'onde longue régularisée (RLW)

Dans cet exemple, nous traiterons l'équation d'onde longue régularisée (*RLW*) [7, 10, 40] qui est un modèle pour la description des ondes longues de faible amplitude. L'équation (*RLW*) est présentée comme suit

$$U_t + a U_x - k (U^n)_x + b (U^n)_{xxt} = 0, \quad n > 1 \quad (3.46)$$

En utilisant la nouvelle variable d'onde (3.2) et avec les transformations (3.3) et (3.4), l'Eq.(3.46) devient

$$(\alpha_0 + a \alpha_1) U (\xi) - \alpha_1 k (U^n)_\xi + \alpha_1^2 \alpha_0 b (U^n)_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.47)$$

En posant  $U = V^{(1/n)}$ , et après intégration de l'Eq.(3.47), nous obtenons l'équation suivante en termes de  $V$

$$(\alpha_0 + a \alpha_1) V^{\frac{1}{n}} - k \alpha_1 V + \alpha_0 \alpha_1^2 b V_{\xi\xi} = 0 \quad (3.48)$$

À partir des Eqs.(3.7) et (3.48), il est facile de déduire l'expression de la fonction  $F(V)$

$$F(V) = \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} V \sqrt{1 - \frac{2n(\alpha_0 + a \alpha_1)}{\alpha_1 k (n+1)} V^{\frac{1-n}{n}}} \quad (3.49)$$

On pose alors

$$Z = \frac{2n(\alpha_0 + a \alpha_1)}{\alpha_1 k (n+1)} V^{\frac{1-n}{n}}$$

et en utilisant la relation (3.49), la solution de l'Eq.(3.6) est obtenue comme suit

$$\ln \left| \frac{-1 + \sqrt{1-y}}{1 + \sqrt{1-y}} \right| = c \xi \quad (3.50)$$

avec  $c = \frac{(1-n)}{n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}}$



En combinant le résultat (3.50), nous obtenons la forme quadratique suivante

$$A^2 Z^2 + 4(1 - A^2) Z - 4(1 - A^2) = 0 \quad (3.51)$$

où

$$A = \frac{2 \tanh \left[ \frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} \xi \right]}{\left\{ 1 + \tanh^2 \left[ \frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} \xi \right] \right\}} \quad (3.52)$$

Il résulte deux solutions possibles du système (3.51) et (3.52) :

$$V_1(\xi) = \left\{ \frac{\alpha_1 k (n+1)}{2n (\alpha_0 + a \alpha_1)} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{n}{1-n}} \quad (3.53)$$

et

$$V_2(\xi) = \left\{ -\frac{\alpha_1 k (n+1)}{2n (\alpha_0 + a \alpha_1)} \operatorname{csch}^2 \left[ \frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{n}{1-n}} \quad (3.54)$$

Des Eqs.(3.53) et (3.54) nous déduisons les solutions du problème (3.46)

$$U_1(\xi) = \left\{ \frac{\alpha_1 k (1+n)}{2n (\alpha_0 + a \alpha_1)} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}} \quad (3.55)$$

et

$$U_2(\xi) = \left\{ -\frac{\alpha_1 k (1+n)}{2n (\alpha_0 + a \alpha_1)} \operatorname{csch}^2 \left[ \frac{(1-n)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} \xi \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}} \quad (3.56)$$

On a deux cas à discuter :

### 1. Pour $\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1} > 0$

Les solutions des Eqs.(3.55) et (3.56) sont

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2n (\alpha_0 + a \alpha_1)}{\alpha_1 k (n+1)} \cosh^2 \left[ \frac{(n-1)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.57)$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ -\frac{2n(\alpha_0 + a\alpha_1)}{\alpha_1 k(n+1)} \sinh^2 \left[ \frac{(n-1)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.58)$$

Ces deux solutions sont connues comme des solutions solitaires "Pattern".

## 2. Pour $\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1} < 0$

Les résultats (3.55) et (3.56), mènent à des solutions de la famille des compactons suivante

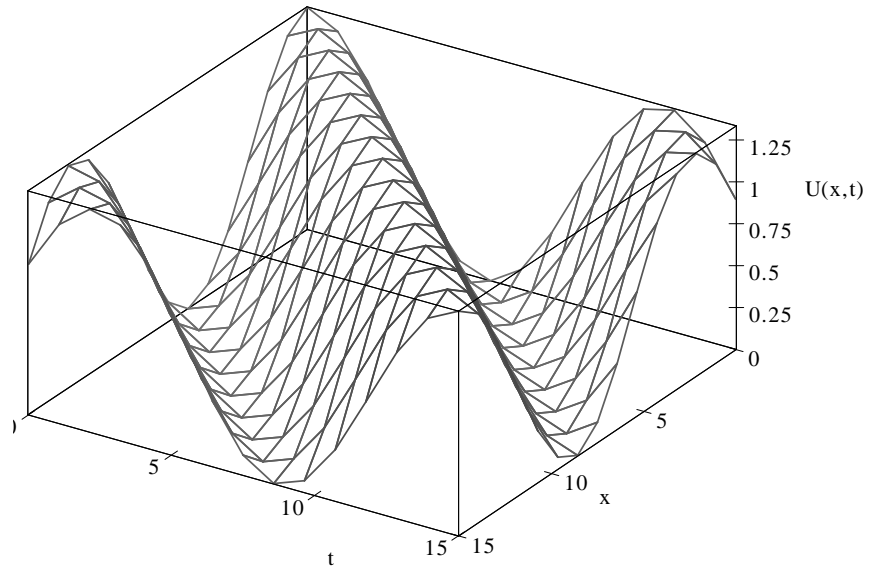
$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2n(\alpha_0 + a\alpha_1)}{\alpha_1 k(n+1)} \cos^2 \left[ \frac{(n-1)}{2n} \sqrt{-\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.59)$$

et

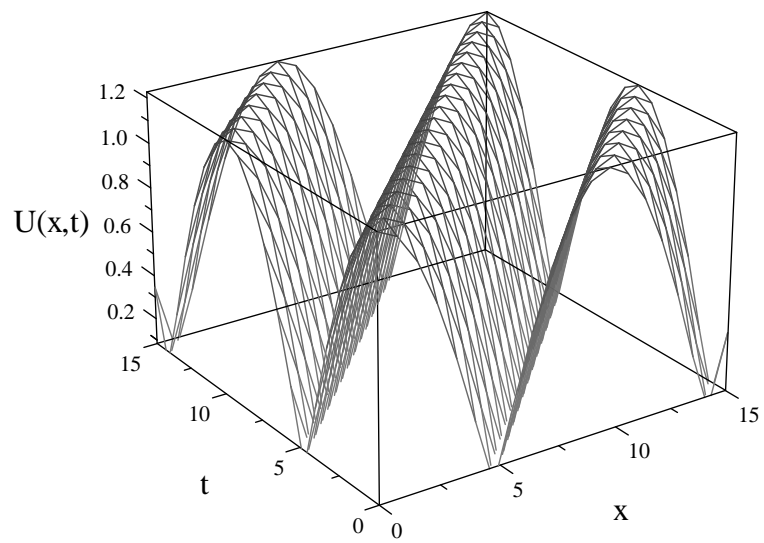
$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{2n(\alpha_0 + a\alpha_1)}{\alpha_1 k(n+1)} \sin^2 \left[ \frac{(n-1)}{2n} \sqrt{-\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (3.60)$$

Notons que pour les deux cas, les solutions exactes sont identiques à celles trouvées en [40] en employant les méthodes d'ansatze avec les paramètres suivants :  $n = 2$  pour la courbe (a) et  $n = 3$  pour la courbe (b) avec les paramètres suivants :

$$\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, a = 2, b = 1, k = 1 \text{ et } \delta = 0$$



(a)



(b)

Fig.3.I.2. La courbe de la solution des compactons, a) le cas  $n = 2$ , b) le cas  $n = 3$

### 3.3.4 Structures avec un exposant négatif

Des solutions remarquables peuvent être déduites des deux exemples précédents dans le cas où les termes non-linéaires dans le problème original comportent un exposant négatif.

#### Structure de forme généralisée du système de Boussinesq

On a le système suivant

$$\begin{cases} v_t + a(u^{-n})_x + bu_{xxx} = 0 \\ u_t + v_x = 0 \end{cases}, a, b \neq 0, n > 1 \quad (3.61)$$

Selon les résultats (3.35) et (3.36), pour le cas  $b > 0$ , en remplace  $n$  par  $-n$ , et nous déduisons les solutions de type compactons pour l'Eq.(3.61)

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2a \alpha_1^2}{(1-n) \alpha_0^2} \cos^2 \left[ \frac{(n+1) \alpha_0}{2\alpha_1^2 \sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.62)$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{2a \alpha_1^2}{(1-n) \alpha_0^2} \sin^2 \left[ \frac{(n+1) \alpha_0}{2\alpha_1^2 \sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.63)$$

avec  $v_{(1)2}(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} u_{(1)2}(x, t)$

Pour le cas  $b < 0$ , et à partir des Eqs.(3.41) et (3.42) dans lesquelles  $n$  est remplacé par  $-n$ , nous obtenons les solutions solitaires exactes de "Pattern" suivantes pour le système (3.61)

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{2a \alpha_1^2}{(1-n) \alpha_0^2} \cosh^2 \left[ \frac{(n+1) \alpha_0}{2\alpha_1^2 \sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.64)$$

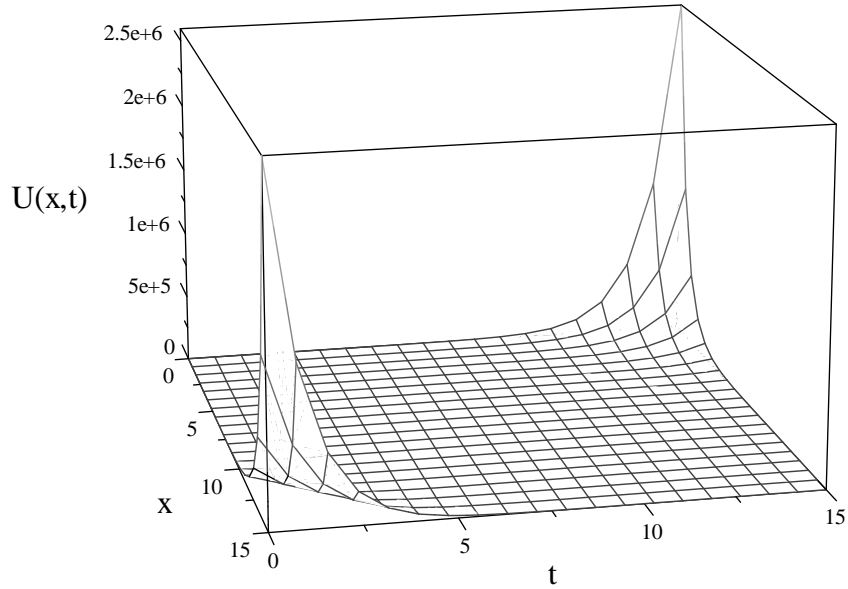
et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{-2a \alpha_1^2}{(1-n) \alpha_0^2} \sinh^2 \left[ \frac{(n+1) \alpha_0}{2\alpha_1^2 \sqrt{-b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.65)$$

avec

$$v_{(1)2}(x, t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} u_{(1)2}(x, t) \quad (3.66)$$

La courbe d'évolution de la solution solitaire de "Pattern" associée à un exposant négatif (3.66) est donnée par la *Fig.3.I.3*, avec les paramètres :  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $a = -1$ ,  $b = -1$  et  $n = 2$



*Fig.3.I.3.* La courbe de la solution solitaire "Pattern"

### Structures des ondes longues régularisées (RLW)

On a l'équation suivante

$$u_t + au_x - k(u^{-n})_x + b(u^{-n})_{xxt} = 0 \quad (3.67)$$

Selon les résultats (3.57) et (3.58) pour le cas  $\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1} > 0$ ,  $n$  est remplacé par  $(-n)$ ,

nous déduisons les solutions de type solitons pour l'Eq.(3.67)

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{\alpha_1 k (n-1)}{2n(\alpha_0 + a \alpha_1)} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{(n+1)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.68)$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ -\frac{\alpha_1 k (n-1)}{2n(\alpha_0 + a \alpha_1)} \operatorname{csch}^2 \left[ \frac{(n+1)}{2n} \sqrt{\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.69)$$

De la même manière, nous utilisons les résultats (3.59) et (3.60) pour le cas  $\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1} < 0$  et  $n$  est remplacé par  $-n$ , nous obtenons alors les solutions périodiques suivantes pour l'Eq.(3.67)

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{\alpha_1 k (n-1)}{2n(\alpha_0 + a \alpha_1)} \operatorname{sec}^2 \left[ \frac{(n+1)}{2n} \sqrt{-\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.70)$$

et

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{\alpha_1 k (n-1)}{2n(\alpha_0 + a \alpha_1)} \operatorname{csc}^2 \left[ \frac{(n+1)}{2n} \sqrt{-\frac{k}{b \alpha_0 \alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta) \right] \right\}^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.71)$$

La courbe d'évolution de la solution de type soliton associée à un exposant négatif (3.68) est montrée dans la *Fig.3.I.4* avec les paramètres :  $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \delta = 0, a = 2, b = 1, n = 2$  et  $k = 1$

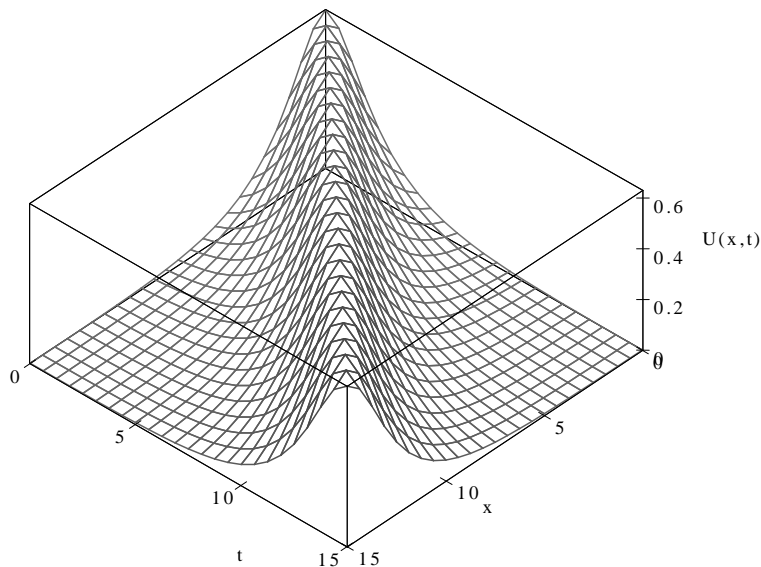


Fig.3.I.4. La courbe de la solution de type *soliton*.

### 3.3.5 Remarques

1. La forme généralisée du système de Boussinesq avec un exposant positif admet pour  $b > 0$  ( $b < 0$ ) des solutions périodiques (type solitons). Ces solutions deviendront de type compactons (solitaires "Pattern") pour un exposant négatif.

2. Les ondes longues régularisées (*RLW*) avec un exposant positif admettent pour  $\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1} > 0$  ( $\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1} < 0$ ), des solutions solitaires de Pattern (type compactons). Ces solutions deviendront des solutions de type solitons (solutions périodiques) pour un exposant négatif.

3. Puisque les solutions de compactons sont définies seulement dans un domaine fini de l'espace, donc les arguments des fonctions d'ondes (3.59) et (3.60) obéissent respectivement à  $|\theta| < \pi/2$  et  $|\theta| < \pi$  avec  $\theta = \frac{(n-1)}{2n} \sqrt{-\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta)$ . Aussi, les Eqs.(3.62) et (3.63) obéissent respectivement à  $|\theta| < \pi/2$  et  $|\theta| < \pi$  avec  $\theta = \frac{(n+1)\alpha_0}{2\alpha_1^2\sqrt{b}} (\alpha_0 t + \alpha_1 x + \delta)$ .

### 3.3.6 Structures en deux dimensions : équation de Burgers

Soit l'équation suivante, dite de Burgers [49]

$$u_t + \varepsilon (uu_x + uu_y) - \nu (u_{xx} + u_{yy}) = 0 \quad (3.72)$$

On introduit la variable d'onde donnée par la relation (3.2), avec  $m = 2$

$$\xi = \alpha_0 \chi_0 + \alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 + \delta = \alpha_0 x + \alpha_1 y + \alpha_2 t + \delta \quad (3.73)$$

et avec la transformation (3.3), on trouve

$$\alpha_2 U' + \varepsilon (\alpha_0 + \alpha_1) U U' - \nu (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) U'' = 0 \quad (3.74)$$

après intégration de l'Eq.(3.74) on a

$$\alpha_2 U + \frac{\varepsilon}{2} (\alpha_0 + \alpha_1) U^2 - \nu (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) U' = 0 \quad (3.75)$$

Suivant (3.7) et (3.75), et à partir de (3.6), on trouve la solution

$$U(\xi) = \frac{1}{\varepsilon (\alpha_0 + \alpha_1)} \left\{ -\alpha_2 + s_1 \tan \left[ \frac{s_1}{2\nu (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)} \xi \right] \right\} \quad (3.76)$$

avec,  $s_1 = \sqrt{2\varepsilon (\alpha_0 + \alpha_1) - \alpha_2^2}$

**1. Pour**  $2\varepsilon (\alpha_0 + \alpha_1) - \alpha_2^2 > 0$

on pose :

$$\alpha_0 = 1, \alpha_2 = -c, \alpha_1 = \beta, \text{ et } \delta = \mu_0 \quad (3.77)$$

donc,  $s_1 = \sqrt{2\varepsilon (1 + \beta) - c^2}$

La première solution du problème (3.72) est donnée par  $u_1(x, y, t)$



$$u_1(x, y, t) = \frac{1}{\varepsilon(1+\beta)} \left\{ c + \sqrt{2\varepsilon(1+\beta) - c^2} \tan \left[ \frac{\sqrt{2\varepsilon(1+\beta) - c^2}}{2\nu(1+\beta^2)} (x + \beta y - ct + \mu_0) \right] \right\} \quad (3.78)$$

## 2. Pour $2\varepsilon(\alpha_0 + \alpha_1) - \alpha_2^2 < 0$

Avec les changements des paramètres donnés par (3.77)

$$s_1 = \sqrt{-2\varepsilon(1+\beta) + c^2}$$

La deuxième solution du problème (3.72) est donnée par  $u_2(x, y, t)$

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{\varepsilon(1+\beta)} \left\{ c + \sqrt{c^2 - 2\varepsilon(1+\beta)} \tan \left[ \frac{\sqrt{c^2 - 2\varepsilon(1+\beta)}}{2\nu(1+\beta^2)} (x + \beta y - ct + \mu_0) \right] \right\} \quad (3.79)$$

## 3.4 Conclusion

Cette méthode a été appliquée avec succès pour résoudre quelques équations d'ondes non-linéaires à coefficients constants. Nous avons montré que cette méthode est souple et efficace pour trouver les structures exactes des solutions à une variété d'équations d'ondes non-linéaires.

En appliquant cette méthode, nous avons obtenu des solutions exactes des ondes de déplacement pour trois modèles de la physique mathématique notamment, l'équation de *KdV*, la forme généralisée du système de *Boussinesq*, et l'équation des ondes longues régularisées (*RLW*).

En se basant sur les résultats de ces modèles typiques, nous avons également analysé l'effet de l'exposant négatif sur les solutions obtenues. En résumé, nous pouvons conclure que cette méthode permet de trouver les solutions exactes pour plusieurs familles de problèmes non-linéaires à coefficients constants [50, 51]. En outre, la formulation de la

méthode de la variable fonctionnelle présentée dans ce travail peut être aisément appliquée aux systèmes non-linéaires à coefficient variable (dépendant du temps), qui sera discuté dans le dernier chapitre.

# Bibliographie

- [1] T. Abassy, M. El-Tawil, H. El-Zoheiry, *Computers and Mathematics with Applications*, 2007, 54(7-8) : 955–965.
- [2] M. Ablowitz, P. Clarkson. *Soliton, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge University Press, New York, 1991.
- [3] G. Adomian. *Nonlinear stochastic systems theory and applications to physics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1989.
- [4] G. Adomian. , *Computers and Mathematics with Applications*, 1994, 27(9-10) :145–154.
- [5] G. Adomian. *Solving frontier problems of physics : The decomposition method*. Kluwer, 1994.
- [6] G. Adomian. *Non linear stochastic operator equations*. Academic Press, 1996.
- [7] R. Benjamin, J. Bona, J. Mahony. , *Philosophical Transactions of the Royal Society London*, 1972, 272 : 47–78.
- [8] M. Boiti, J. Leon., *Physics Letters A*, 1988, 132 : 432–439.
- [9] Y. Chen, P. Liu. , *Journal of Fluid Mechanics*, 1995, 228 : 351–381.
- [10] J. Dye, A. Parker. , *Journal of Mathematical Physics*, 2000, 41(5) : 2889–2904.
- [11] O. El-Kalaawy. , *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 14(4) : 547–552.
- [12] J. Fang, W. Yao. in *Adomians decomposition method for the solution of generalized Duffing equations*. in : *In Proceedings of the International Workshop on Mathematics Mechanization*, Beijing, China, 1992.

- [13] B. Fornberg, G. Whitham. , *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1978, 289 : 373–404.
- [14] N. Freeman, R. Johnson. , *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, 42 : 401–409.
- [15] C. Gardner, J. Green, *Physical Review Letters*, 1967, 19 : 1095–1097.
- [16] R. Hirota. , *Physical Review Letters*, 1971, 27 : 1192–1194.
- [17] R. Ibrahim, O. El-Kalaawy. , *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 31(4) : 1001–1008.
- [18] M. Inc, Y. Cherruault. . *Kybernetes*, 2003, 32(9-10) : 1492–1503.
- [19] L. Iskandar. , *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, 1989, 5 : 215–221.
- [20] F. Kako, N. Yajima. , *Journal of the Physical Society of Japan*, 1980, 49 : 2063–2071.
- [21] N. Khelil, et al. , *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 2006, 7(12) : 2079–2082.
- [22] D. Korteweg, G. Vries. , *Philosophical Magazine*, 1895, 39 :422–443 .
- [23] P. Madsen, R. Murray, O. Sorensen. , *Coastal Engineering*, 1991, 15 : 371–388.
- [24] T. özis, A.Yildirim. , *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 38 : 209–212.
- [25] M. Pavlov. , *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, 136(6) : 4478–4483.
- [26] D. Peregrine. , *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, 11 : 815–827.
- [27] G. Quispel, F. Nijhoff, H. Capel. ,*Physics Letters A*, 1982, 91 : 143–145.
- [28] S. Ray, R. Bera. , *ASME Transactions Journal of Applied Mechanics*, 2005, 72(2) : 290–295.
- [29] T. Sasamoto, M. Wadati. , *Journal of the Physical Society of Japan*, 1998, 67 : 784–790.
- [30] A. Scott, E. Chu, D. McLaughlin : In *Proceedings of IEEE*, vol. 61, 1973, 1443–1483.
- [31] Sirendaoreji., *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 19 : 147–150.
- [32] Sirendaoreji., *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 31 : 943–950.
- [33] M. Toda, M. Wadati. , *Journal of the Physical Society of Japan*, 1973, 34 : 18–25.
- [34] D.Wang, H. Li., *Chaos Solitons and Fractals*, 2008, 38 : 383–390.

- [35] A. Wazwaz., *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 13(2) : 321–330.
- [36] A. Wazwaz. *Partial Differential Equations : Methods and Applications*. Balkema, Rotterdam, 2002.
- [37] A. Wazwaz., *Appl. Math. Comput.*, 2005, 167(2) : 1162–1178.
- [38] A. Wazwaz., *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2006, 11(3) : 376–390.
- [39] A. Wazwaz., *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, 207 : 18–23.
- [40] A. Wazwaz., *Communications in Nonlinear Science and Numerical*, 314 C327, 12 : 314–327.
- [41] Y. Wu, X. Geng, et al. , *Physics Letters A*, 1999, 255 : 259–264.
- [42] L. Xu, J. Zhang., *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 31 : 937–942.
- [43] T. Yajima, M.Wadati., *Journal of the Physical Society of Japan*, 1990, 59 : 41–47.
- [44] V. Zakharov, A. Shabat., *Soviet Physics-JETP*, 1972, 34 : 62–69.
- [45] V. Zakharov, A. Shabat., *Journal of Applied Functional Analysis*, 1974, 8 : 226–235.
- [46] A. Zerarka, V. Foester., *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2005, 10 : 217–225.
- [47] A. Zerarka, *International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, Sc, Casa, 1996.
- [48] Scott AC, Chu EYF, McLaughlin DW. *The soliton : a new concept in applied science*, *Proc IEEE* 1973 ; 61 : 1443-83.
- [49] A. M. A. Ali , *International Journal of nonlinear Science*, Vol.4 (2007), 2 : 109-117.
- [50] A. Zerarka and S. Ouamane, *World Journal of Modelling and Simulation*, Vol. 6 (2010) No. 2, pp. 150-160
- [51] A. Zerarka , S. Ouamane and A. Attaf, *Waves in Random and Complex Media*, 21(2011) No. 1, 44-56.

# Chapitre 4

## La méthode de la variable fonctionnelle : Les équations d'ondes à coefficients variables

### 4.1 Introduction

Les diverses méthodes discutées précédemment [1-18] ont été appliquées pour étudier les équations non-linéaires à coefficients constants. Ces méthodes possèdent des outils puissants qui les rendent pratiques pour la détermination des solutions multiples de soliton pour une large classe d'équations non-linéaires. La plupart des recherches font introduire des fonctions d'essais [2, 3, 4, 5] pour la détermination des différentes solutions de soliton. Dans ce chapitre, nous étudions spécialement l'équation de  $KdV$  à coefficients variables (dépendant du temps).

### 4.2 Application à l'équation KdV

Nous examinons l'équation de  $KdV$  [1]

$$V_t + f(t) V_x + g(t) V V_x + h(t) V_{xxx} = \alpha(t), \quad (4.1)$$

où  $f(t)$ ,  $g(t)$  et  $h(t)$  sont des coefficients dépendant du temps, et  $\alpha(t)$  est le terme de force. Le cas particulier suivant  $f(t) = 0$ ,  $g(t) = 6$ ,  $h(t) = 1$ , et  $\alpha(t) = 0$ , l'Eq.(4.1) est réduite à l'équation intégrable de  $KdV$ . Revenons à l'équation originale avec les coefficients variables et on pose

$$u(x, t) = V(x, t) + \beta(t), \quad (4.2)$$

où

$$\beta(t) = \int \alpha(t) dt \quad (4.3)$$

La substitution de la relation (4.2) dans l'Eq.(4.1) mène à l'équation homogène de  $KdV$  à coefficients dépendant du temps

$$u_t + [f(t) + \beta(t)g(t)]u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxx} = 0 \quad (4.4)$$

on utilise la variable d'onde

$$\xi(x, t) = \eta(t) [(x - v(t) t)] \quad (4.5)$$

avec  $\eta(t)$  et  $v(t)$  des paramètres qui seront déterminés en fonction des coefficients dépendant du temps, et on a

$$\frac{d\xi(x, t)}{dx} = \eta(t) \quad (4.6)$$

et

$$\frac{d\xi(x, t)}{dt} = x \frac{d\eta(t)}{dt} - \frac{d[t \eta(t) v(t)]}{dt} \quad (4.7)$$

et nous cherchons les solutions de l'Eq.(4.4) en utilisant la relation  $u(t, x) = U(\xi)$ . En

employant la règle de chaîne, l'Eq.(4.4) se ramène après intégration à la forme suivante

$$\left\{ x \frac{d\eta(t)}{dt} - \frac{d[t \eta(t) v(t)]}{dt} + \eta(t) [f(t) + \beta(t) g(t)] \right\} U + \eta(t) \frac{g(t)}{2} U^2 + \eta^3(t) h(t) U_{\xi\xi} = 0 \quad (4.8)$$

de l'Eq.(3.7), nous déduisons  $\eta(t) = k$  (où  $k$  est une constante) et l'expression de la fonction  $F(U)$  s'écrit

$$F(U) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}} U \sqrt{1 - \frac{g(t)}{3S(t)} U} \quad (4.9)$$

avec  $S(t) = \frac{d[t v(t)]}{dt} - f(t) - \beta(t) g(t)$

Évidemment, en vertu de l'Eq.(4.9), l'Eq.(3.6) est complètement intégrable, puisque ses solutions sont déduites directement de l'intégrale :

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y}} = \ln \left| \frac{-1 + \sqrt{1-y}}{1 + \sqrt{1-y}} \right| \quad (4.10)$$

Suivant l'Eq.(3.6) et (4.9), nous pouvons obtenir l'équation quadratique suivante

$$A^2 Z^2 + 4(1 - A^2) Z - 4(1 - A^2) = 0 \quad (4.11)$$

avec

$$Z = \frac{g(t)}{3S(t)} U \quad (4.12)$$

et

$$A = \frac{2 \tanh \left[ \frac{c(t)}{2} \xi \right]}{\left\{ 1 + \tanh^2 \left[ \frac{c(t)}{2} \xi \right] \right\}} \quad (4.13)$$

où



$$c(t) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}} \quad (4.14)$$

Finalemment, les deux solutions de (4.12) et (4.13), après une certaine manipulation algébrique sont données par

$$U_1(\xi) = \frac{3S(t)}{g(t)} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}} \xi \right] \quad (4.15)$$

et

$$U_2(\xi) = -\frac{3S(t)}{g(t)} \operatorname{csch}^2 \left[ \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}} \xi \right] \quad (4.16)$$

### 1. Pour $S(t)h(t) < 0$

À partir des Eqs.(4.15) et (4.16), nous obtenons les solutions périodiques pour  $u(x, t)$

$$u_1(\xi) = \frac{3S(t)}{g(t)} \sec^2 \left[ \frac{1}{2k} \sqrt{-\frac{S(t)}{h(t)}} \xi \right] \quad (4.17)$$

et

$$u_2(\xi) = \frac{3S(t)}{g(t)} \csc^2 \left[ \frac{1}{2k} \sqrt{-\frac{S(t)}{h(t)}} \xi \right] \quad (4.18)$$

En imposant à la relation  $\frac{1}{2k} \sqrt{-\frac{S(t)}{h(t)}}$  d'être égale à l'unité, la vitesse s'écrit :

$$v(t) = \frac{1}{t} \int_0^t [(f(t) + \beta(t)g(t)) - 4h(t)k] dt \quad (4.19)$$

et les solutions de solitons sont exprimées par :

$$V_1(x, t) = -\frac{12k^2h(t)}{g(t)} \sec^2 [k((x - v(t)t))] - \beta(t) \quad (4.20)$$

$$V_2(x, t) = -\frac{12k^2h(t)}{g(t)} \csc^2 [k((x - v(t)t))] - \beta(t) \quad (4.21)$$

## 2. Pour $S(t)h(t) > 0$

À partir des Eqs.(4.15) et (4.16), les solutions de type solitons sont

$$u_1(\xi) = \frac{3S(t)}{g(t)} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}} \xi \right] \quad (4.22)$$

et

$$u_2(\xi) = -\frac{3S(t)}{g(t)} \operatorname{csch}^2 \left[ \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}} \xi \right] \quad (4.23)$$

En imposant à la relation  $\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}}$  d'être égale à l'unité, la vitesse s'écrit :

$$v(t) = \frac{1}{t} \int_0^t [(f(t) + \beta(t)g(t)) + 4h(t)k] dt \quad (4.24)$$

et l'amplitude  $A(t) = \frac{12k^2h(t)}{g(t)}$

et les solutions de solitons sont exprimées par :

$$V_1(x, t) = \frac{12k^2h(t)}{g(t)} \operatorname{sech}^2 [k((x - v(t)t)) - \beta(t)] \quad (4.25)$$

$$V_2(x, t) = -\frac{12k^2h(t)}{g(t)} \operatorname{csch}^2 [k((x - v(t)t)) - \beta(t)] \quad (4.26)$$

Nous remarquons d'après (4.19) et (4.24) que la vitesse d'impulsion  $v(t)$  est affectée par les coefficients qui dépendent du temps  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$  et  $\beta(t)$ . On note que pour les deux cas, les solutions exactes sont identiques avec celles trouvées en [1] par la méthode d'ansatze.

## 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'équation de  $KdV$ , qui contient des coefficients dépendant du temps. Les solutions de type soliton sont obtenues en employant la méthode

de la variable fonctionnelle.

Il est important de noter que dans notre méthode, la recherche des solutions se fait par intégration directe du système, tandis que par les méthodes d'ansatze, la solution est d'abord supposée. La présente méthode peut être appliquée aux équations d'évolution non-linéaires avec des coefficients dépendant du temps, et avec des termes de perturbation.

# Bibliographie

- [1] A.M. Wazwaz, *Appl.Math. and Comput.* 217 (2010) 2277–2281.
- [2] H. Triki, A.M. Wazwaz, *Appl. Math. Comput.* 214 (2009) 370–373.
- [3] H. Triki, A.M. Wazwaz, *Phys. Lett. A* 373 (2009) 2162–2215.
- [4] A. Biswas, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 14 (2009) 3226–3229.
- [5] A. Biswas, *Phys. Lett. A* 372 (2008) 4601–4602.
- [6] M. Dehghan, A. Shokri, *Math. Comput. Simul.* 79 (2008) 700–715.
- [7] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [8] W. Hereman, A. Nuseir, *Math. Comput. Simul.* 43 (1997) 13–27.
- [9] A.M. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theorem*, Springer and HEP, Berlin, 2009.
- [10] A.M. Wazwaz, *Can. J. Phys.* 87 (12) (2010) 1227–1232.
- [11] A.M. Wazwaz, *Nonlinear Anal. Ser. A : Theory,Methods Appl.* 72 (2010) 1314–1318.
- [12] A.M. Wazwaz, *Zeitschrift fur Naturforschung A (ZNA)* 65a (2010) 173–181.
- [13] A.M. Wazwaz, *Appl. Math. Comput.* 190 (2007) 1198–1206.
- [14] A.M. Wazwaz, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 12 (8) (2007) 1395–1404.
- [15] A.M. Wazwaz, *Appl. Math. Comput.* 192 (2007) 479–486.
- [16] A.M. Wazwaz, *Appl. Math. Comput.* 199 (1) (2008) 133–138.
- [17] A.M. Wazwaz, *Appl. Math. Comput.* 201(1) (2008) 489–503.
- [18] A.M. Wazwaz, *Phys. Lett. A* 373 (2009) 1844–1846.

# Conclusion générale

Dans ce travail, on a traité certaines classes d'équations aux dérivées partielles modélisant la propagation d'ondes types qui décrivent des situations physiques appropriées. On a décrit quelques méthodes récentes et importantes, pour résoudre de manière exacte les solutions des ondes de déplacement pour les équations de type de Korteweg-de Vries ( $KdV$ ) qui renferme l'équation non linéaire de Schrödinger et l'équation complexe de Korteweg-de Vries modifiée ( $mKdV$  Couplée).

Nous avons présenté des méthodes de décomposition : la méthode d'Adomian et la méthode de perturbation artificielle dans le but de séparer le terme non linéaire dans l'équation d'évolution. Ces deux méthodes sont appliquées aux deux équations d'ondes non linéaires, telles que l'équation cubique de Schrödinger ( $CNLS$ ) et l'équation complexe de Korteweg-de Vries modifiée ( $CMKdV$ ).

Nous avons montré aussi que la méthode d'Adomian fournit un bon accord avec les solutions exactes. Souvent un nombre restreint de termes permet d'arriver aux solutions exactes.

Enfin, nous avons appliqué un nouveau développement basé sur la méthode de la variable fonctionnelle à la recherche des solutions exactes pour une famille d'équations d'ondes non-linéaires. En appliquant cette méthode, nous avons obtenu des solutions analytiques exactes des ondes de déplacement pour trois modèles décrivant des situations variées de la physique mathématique notamment, l'équation de  $KdV$ , la forme généralisée du système de Boussinesq, et l'équation d'onde longue régularisée ( $RLW$ ). En se basant sur les résultats obtenus de ces systèmes typiques, nous avons également analysé par un simple changement de la fonction inconnue l'effet de l'exposant négatif sur les solutions obtenues et on a observé que :

- La forme généralisée du système de Boussinesq avec un exposant positif admet pour  $b > 0$  et ( $b < 0$ ), des solutions périodiques (de type solitons). Ces solutions deviendront de type compactons (solutions solitaires de *Pattern*) pour un exposant négatif.

- Les ondes longues régularisées ( $RLW$ ) avec un exposant positif admettent pour

$\left(\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1} > 0\right)$  et  $\left(\frac{k}{b\alpha_0\alpha_1} < 0\right)$ , des solutions solitaires "Pattern" (type compactons). Ces solutions deviendront des solutions de type solitons (solutions périodiques) pour un exposant négatif.

Nous avons étudié aussi l'équation de  $KdV$  à coefficients dépendant du temps et avec le terme de force. Elle peut être aussi employée pour d'autres applications faisant inclure des couplages associés avec des coefficients variables.

## Perspectives

Pour des recherches futures, nous souhaitons faire des investigations sur :

- Les équations non-linéaires de Schrödinger couplées ( $CNLS$ ) ayant des coefficients variables.

- L'interaction des ondes solitaires avec les polarisations orthogonales : il reste des questions très intéressantes qui ont besoin des réponses au sujet de l'interaction des ondes solitaires pour l'équation de  $CMKdV$ . Par exemple, il est intéressant de poser la question et de savoir, comment une interaction non-linéaire de deux ondes solitaires, dans lesquelles la différence de polarisation initiale ayant un angle aigu, change probablement leurs polarisations initiales. Il serait également intéressant de se demander la question si une collision lance le processus d'excitation des réponses avec une polarisation différente de l'originale. De tels problèmes sont actuellement à l'étude pour fournir un aperçu sur les phénomènes de dynamique de polarisation liés à l'équation de  $CMKdV$ .

- L'étude de l'équation généralisée de  $Burgers-KdV$  avec la méthode de la variable fonctionnelle.

- L'introduction de la méthode de la variable fonctionnelle concernant les équations des ondes d'ordre 4.

## ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية وذلك باستخدام طرق الفصل التقريبية. قدمنا طرق الفصل التالية: طريقة Adomian والاضطراب الاصطناعي، بهدف فصل الحدود غير الخطية في معادلة التطور لمعادلة شرودنجر المكعبة (CNLS) والمعادلة المركبة (mKdV). أثبتنا قوة طريقة Adomian لإيجاد حلول تقريبية ووجد أن النتائج العددية في اتفاق جيد مع الحلول الدقيقة. أما بالنسبة لطريقة الفصل الثانية التي تحقق شروط تصحيح النظام لكي يقترب من الحل الدقيق، باستعمال عدد معين من الحدود المستخدمة في هذه السلسلة يمكننا من الحصول على الدقة القصوى من الحل التقريبي باستعمال تحويل فوريي. وأخيراً، طبقنا طريقة جديدة تعتمد على أسلوب المتغير الضمني للعثور على حلول دقيقة لمجموعة من معادلات الموجات غير الخطية. عند تطبيق هذا الأسلوب، حصلنا على حلول دقيقة للموجات الثلاثة خصوصاً، معادلة (KdV)، و النظام المعمم لـ Boussinesq، و معادلة الموجة الطويلة (RLW). بناءً على نتائج هذه النظم الثلاثة، درسنا أيضاً تأثير الأس السالب على الحلول التي تم الحصول عليها. لقد أظهرنا أن هذه الطريقة بسيطة ومباشرة وفعالة لإيجاد الحلول الدقيقة لمجموعة من المعادلات غير الخطية ذات معاملات ثابتة ومتغيرة.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التفاضلية الجزئية، طرق الفصل، طريقة الاضطراب، طريقة Adomian، طريقة المتغير الضمني

## Résumé:

Ce manuscrit présente une étude sur les équations différentielles aux dérivées partielles, en utilisant des méthodes approximatives.

Nous avons présenté les méthodes de décomposition: la méthode d'Adomian et la méthode de perturbation artificielle dans le but de séparer le terme non linéaire dans l'équation d'évolution spécifique. Ces deux méthodes sont appliquées au deux équations non linéaire, l'équation cubique de Schrödinger (CNLS) et l'équation complexe de Korteweg-de Vries modifiée respectivement.

Nous avons prouvés la puissance de la méthode d'Adomian en trouvant les solutions approximatives et on a constaté que les résultats numériques sont en bon accord avec les solutions exactes.

Pour la deuxième méthode de décomposition qui permet d'obtenir les termes de correction ordre-par-ordre de la solution approximée du problème original, dont le nombre de termes utilisés dans la série, la solution suggérée peut d'une manière satisfaisante reproduire les fonctions originales. La précision maximale de la solution approximative peut être obtenue après un nombre restreint de termes en utilisant la transformé de Fourier.

Enfin, Nous avons appliqué un nouveau développement basé sur la méthode de la variable fonctionnelle pour trouver les solutions exactes pour une famille d'équations d'ondes non-linéaires.

En appliquant cette méthode, nous avons obtenu des solutions exactes des ondes de déplacement pour trois modèles dans la physique mathématique notamment, l'équation de KdV, forme généralisée du système de Boussinesq, et l'équation d'onde longue régularisée (RLW). Basant sur les résultats de ces systèmes typiques, nous avons également analysé l'effet de l'exposant négatif sur les solutions obtenues. Des structures d'ordre supérieur est obtenue facilement et délicatement.

Nous avons montré que cette méthode est un outil simple, directe et efficace pour trouver les structures exactes des solutions à une variété d'équations d'ondes non-linéaires à coefficients constants et variables.

**Mots clés:** équations aux dérivées partielles, décomposition, perturbation artificielle, Adomian, variable fonctionnelle.

## Abstract

This manuscript presents a study on partial differential equations, using approximate methods.

We presented the decomposition methods: the Adomian method and artificial perturbation method in order to separate the nonlinear term in the specific evolution equation. Both methods are applied to two nonlinear equations, the cubic equation Schrödinger (CNLS) and the complex equation of Korteweg-de Vries.

We have proven the powerful features of the Adomian method for finding approximate solutions and we have found that the numerical results are in good agreement with exact solutions.

For the second decomposition method that achieves the correction terms order-by-order approximated solution of the original problem, the number of terms used in the series, the suggested solution can satisfactorily reproduce the original function. The maximum precision of the approximate solution can be obtained after a limited number of terms.

Finally, we applied a new development based on the functional variable method to find the exact solutions for a family of equations of nonlinear waves.

Applying this method, we obtained exact solutions of displacement waves for three models in mathematical physics especially, the KdV equation, generalized form of the Boussinesq system, and the regularized long wave equation (RLW). Based on the results of these typical systems, we also analyzed the effect of the negative exponent on the solutions obtained. Structures of the higher order is obtained easily.

We showed that this method is a simple, direct and effective to find exact solutions to a variety of equations of nonlinear waves.

We showed that this method is a simple tool, direct and effective to find exact solutions to a variety of non-linear wave equations with constant and variable coefficients.

**Keywords:** Partial differential equations, decomposition, artificial perturbation, Adomian, functional variable.