République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTE des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire présenté par

Hadji Nadjoua

En vue de l'obtention du Diplôme de

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Titre

Sur les espaces de Hardy variables

Membres du Comité d'Examen

Pr.	Menacer Tidjani	UMKB	Président
Dr.	Laadjal Baya	UMKB	Encadreur
Dr.	Guidad Derradji	UMKB	Examinateur

18 Juin 2023

Dédicace

Chaque ligne de ce travail, chaque mots et chaque lettre qu'il contient exprime mes respect à la famille HADJI.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents,

A tous mes frères et mes sœurs,

A toutes mes amies,

A tous mes formateurs pour leurs amabilités et tous qui m'ont aidé de pré ou de loin pour la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS

Avant tout je remercie Dieu "ALLAH" le tout puissant de m'avoir accordé la force, le courage et la patience pour terminer ce travail.

Mes remerciements s'adressent en particulier à Dr. LAADJAL Baya, pour sa grand patience, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux. J'en ai l'honneur de réaliser ce travail sous sa direction.

Je remercie également les membres du jury Pr. MENACER Tidjani et Dr. GUIDAD Derradji pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce modeste travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, Je voudrais associer à mes remerciements touts ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

La théorie des espaces fonctionnels à exposants variables est devenue un domaine de recherche intéressant en raison de son lien avec divers domaines tels que la modélisation des fluides électrorhéologiques, des fluides thermorhéologiques, dans l'étude du traitement d'images, dans les équations différentielles à croissance non standard, voir par exemple [4], [10], [15].

Les espaces de Lebesgue variables $L^{p(\cdot)}$ sont une généralisation des espaces L^p classiques, en remplaçant l'exposant constant p par une fonction exposant $p(.)$: intuitivement, ils sont constitués de toutes les fonctions f telles que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty.$$

Ces espaces ont été introduits par Orlicz [14] en 1931, mais font l'objet d'études plus poussées depuis le début des années 1990 en raison de leur intérêt intrinsèque. Kovćik et Rákosník [12] ont montré que les espaces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ont beaucoup de propriétés similaires aux espaces $L^p(\Omega)$-classiques, mais différentes de façon subtile. Les espaces de fonctions d'exposants variables ont été largement étudiés et utilisés dans l'analyse harmonique et les équations aux dérivées partielles, voir par exemple [2], [7], [13].

La théorie des espaces de Hardy dans $(\mathbb{R}^n)$ a été introduite par Stein et Weiss dans [16] et qui remplacent bien les espaces de Lebesgue classiques en particulier dans l'étude de la délimitation des divers opérateurs, par exemple les transformées de Reisz sont bornés sur les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, mais non bornés dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$. De plus les différentes caractérisations des espaces de Hardy leur permet d'être plus important et utile dans de nombreux problèmes et de jouer un rôle considérable dans divers domaines d'analyse tels que l'analyse harmonique et les équations aux dérivées partielles (voir par exemple [17], [9], [8]). En tant que généralisation des espaces de Hardy classiques, Nakai et Sawano ont introduit et étudié les espaces de Hardy à exposant variable $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et étudié leurs espaces duaux. L'objectif de ce travail est d'étudier les espaces de Hardy à exposant variable $H^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et ses différentes caractérisations.

Ce mémoire se compose de deux chapitres :

- Dans le premier chapitre nous allons donner quelques notions de base et préliminaires concernant les espaces de Lebesgue à exposant constant et variable et leurs propriétés intéressantes.
- Dans le deuxième chapitre nous allons étudier l'espace de Hardy variable et ses différentes caractérisations.

Chapitre 1

Espaces de Lebesgue

Dans ce chapitre, nous allons définir les espaces de Lebesgue classiques et variables, et mentionné quelques propriétés et résultats essentiels pour ce travail.

1.1 Espaces de Lebesgue à exposant constant

Les espaces de Lebesgue sont des espaces fondamentaux en théorie de l'intégration.

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 1.1 *[21] Soit $1 \leq p < +\infty$. On appelle espace de Lebesgue $\mathcal{L}^P(X)$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ qui sont mesurables et qui vérifient*

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{L}^P(X)$ est muni de la semi-norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exemple 1.1 *Considérons l'espace mesurable $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.*

La fonction valant 1 *en un point* x_0 *et nulle ailleurs a une norme égale à* 0 *sans être identiquement nulle.*

Pour faire de $\mathcal{L}^P(X)$ un espace normé, il faut identifier les fonctions qui sont égales presque partout : l'ensemble des classes d'équivalence cette relation est noté $L^P(X)$.

Définition 1.2 *L'espace* $\mathcal{L}^\infty(X)$ *(le cas* $p = +\infty$*) est défini comme l'ensemble des fonctions* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$ *mesurables telles qu'il existe un réel* $C > 0$ *avec* $|f| \leq C \quad \mu$*-presque partout.*
On le munit par la semi-norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf\left\{C > 0 : |f| \leq C \quad \mu - \textit{presque partout}\right\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence de cet espace pour la relation d'égalité presque partout forme l'espace $L^\infty(X)$.

Remarque 1.1 *On dit que* $p, q \in [1, +\infty]$ *sont des exposants conjugués si* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(avec la convention* $\frac{1}{\infty} = 0$*).*

Théorème 1.1 (inégalité de Young) *[19] Soient* $p, q \in]1, +\infty[$ *deux exposant conjugués. On a*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

Preuve. On peut supposer que $a, b > 0$ sans quoi c'est évident. Notons $x = p\ln(a)$ et $y = q\ln(b)$, de sorte que $a = e^{\frac{x}{p}}$ et $b = e^{\frac{y}{q}}$. Comme la fonction $t \to exp(t)$ est strictement convexe on a

$$\begin{aligned} ab &= \exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(x) + \frac{1}{q}\exp(y) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $x = y$ ie $a^p = b^q$. ■

Théorème 1.2 (Inégalité de Hölder) *[18]*

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. Alors, si f et g sont deux fonctions mesurables de $(X, \mathcal{M})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on a l'inégalité

$$\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

En particulier si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$ alors leur produit $fg \in L^1(X)$.

Preuve. Tout d'abord si $\|f\|_{L^p} = 0$ cela implique que $f = 0$ presque partout et par conséquent $fg = 0$ p.p, donc $\int |fg|\, d\mu = 0$, alors l'inégalité est vraie (c'est aussi le cas si $\|g\|_{L^q} = 0$).

On va maintenant supposer que $\|f\|_{L^p}$ et $\|g\|_{L^q}$ sont non nuls, alors on distingue plusieurs cas dépendant de la valeur de l'indice p.

1. Si $p = 1$ et donc $q = \infty$ on a de façon évidente $|fg| \leq \|g\|_{L^\infty} |f|$ p.p (par définition de $\|g\|_{L^\infty}$), donc en intégrant les deux côtés et en utilisant le fait que l'intégrale préserve l'inégalité et sa linéarité, on trouve

$$\begin{aligned}
\int |fg|\, d\mu &\leq \int \|g\|_{L^\infty} |f|\, d\mu \\
&\leq \|g\|_{L^\infty} \int |f|\, d\mu \\
&= \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

(bien sûr le cas $p = \infty$, $q = 1$ est identique).

2. Considérons à présent les cas $1 < p < \infty$. On prend alors $\alpha = \dfrac{1}{p} \in]0, 1[$ et on va se servir des propriétés de la fonction $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_\alpha(t) = t^\alpha - \alpha t$.

La dérivée première

$$\varphi'_\alpha(t) = \alpha(t^{\alpha-1} - 1),$$

est strictement décroissante sur tout $\mathbb{R}_+$ et elle ne s'annule qu'en $t = 1$, ce qui donne que φ_α admet un maximum en $t = 1$, c-à-d

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_\alpha(t) \leq \varphi_\alpha(1) = 1 - \alpha.$$

On va « homogénéiser » cette inégalité en prenant $t = \frac{u}{v}$ où $u \geq 0, v > 0$, on trouve alors une inégalité homogène de degré 1 par rapport à u, v :

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1 - \alpha)v.$$

On vérifie que cette inégalité reste vraie si $v = 0$ ou bien si u ou v sont égaux à $+\infty$. On se souvient que $\alpha = \frac{1}{p}$ et $(1 - \alpha) = \frac{1}{q}$. Pour $x \in X$ donné on applique cette inégalité aux valeurs suivantes

$$u = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p}, v = \frac{|g(x)|^p}{\|g\|_{L^q}^q},$$

on remarque que ces deux quantités sont homogènes de degré zéro par rapport à f et g, on obtient alors les inégalités ponctuelles suivante valables pour tout

$$x \in X : \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q},$$

en intégrant cette inégalité par rapport à μ on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \int |f(x)g(x)| \, d\mu(x) &\leq \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_{L^p}^p} \int |f(x)|^p \, d\mu(x) + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_{L^q}^q} \int |g(x)|^q \, d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

alors

$$\int |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} . \qquad \blacksquare$$

Corollaire 1.1 (Inégalité de schwartz) *[5] Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $\bar{\mathbb{R}}$ alors :*

$$\int |fg| \leq \sqrt{\int f^2}\sqrt{\int g^2}.$$

Preuve. Spécialisation du théorème de Hölder dans le cas $p = q = 2$. ■

Théorème 1.3 (Inégalité de Minkowski) *Soit $f, g \in L^p(X)$ pour $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$f + g \in L^p(X) \quad et \quad \|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Preuve. Distinguons les cas suivants :

1. Pour $p = 1$, soit $f, g \in L^1(X)$, on a $|f + g| \leq |f| + |g|$. On intégrant

$$\int_X |f + g|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu + \int_X |g|\, d\mu$$

   Alors

$$\|f + g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

2. Pour $p = +\infty$, soit $f, g \in L^\infty(X)$. Si $\|f\|_{L^\infty} \leq C$ et $\|g\|_{L^\infty} \leq C'$, alors $C + C'$ est un majorant essentiel de $f + g$ mais par définition de $\|.\|_\infty$: $\|f + g\|_{L^\infty} \leq C + C'$. En faisant $\|f\|_{L^\infty} \leq C$ et $\|g\|_{L^\infty} \leq C'$, on déduit de

$$\|f + g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$$

3. Supposons maintenant que $1 < p < \infty$.

   Comme l'inégalité est triviale si $\|f + g\|_{L^p} = 0$, on peut supposer que $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$.

   On commence par écrire

$$(f + g)^p = (f + g)(f + g)^{p-1} = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$$

$$|(f+g)^p| \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$$

Alors d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leq (\int_X |f|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leq (\int_X |g|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_X |(f+g)^p|\,d\mu \\
&\leq \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \\
&\leq (\int_X |f|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu)^{\frac{1}{q}} + (\int_X |g|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[(\int_X |f|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_X |g|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}\right]\left((\int_X |f+g|^{(p-1)q}\,d\mu)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}$$

comme $(p-1)q = p$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{(p-1)}{p}$ on a

$$\begin{aligned}
\int_X |(f+g)^p|\,d\mu &\leq \left[(\int_X |f|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_X |g|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}\right]\left((\int_X |f+g|^p\,d\mu)^{\frac{(p-1)}{p}}\right) \\
&\leq \left[(\int_X |f|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_X |g|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}\right]\left((\int_X |f+g|^p\,d\mu)^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \\
&\leq [\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}]\,\|f+g\|_{L^p}^{p-1}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.4 *[20] L'espace $(L^p(X), \|.\|_{L^p})$ est un espace vectoriel normé pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve. Soit $f, g \in L^p(X)$ et $\alpha \in \mathbb{k}$. pour démontrer que $L^p(X)$ est un espace vectoriel normé on va passer par 2 étapes :

1. $L^p(X)$ est un espace vectoriel : Puisque $L^p(X)$ est un sous ensemble de l'ensemble des fonctions mesurables sur X qui est un espace vectoriel, il suffit que montrer que $L^p(X)$ vérifie les propriété d'un sous espace vectoriel pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

   (a) Soient $\alpha \in \mathbb{k}$ et $f \in L^p(X)$ on a $|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p$, ce qui donne

   $$\int_X |\alpha f|^p \, d\mu = |\alpha|^p \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty,$$

   donc $\alpha f \in L^p(X)$.

   (b) Soit $f, g \in L^p(X)$, on a

   $$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \sup (|f|^p, |g|^p) \leq 2^p (|f|^p + |g|^p),$$

   donc

   $$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leq 2^p \int_X |f|^p \, d\mu + 2^p \int_X |g|^p \, d\mu < +\infty.$$

   Alors $f + g \in L^p(X)$.

2. $\|.\|_{L^p}$ est une norme :

   (i) Définie positive :

   $$\forall f \in L^P(X), \|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

et

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p} &= 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \int_X |f|^p \, d\mu = 0 \\ &\Longleftrightarrow |f|^p = 0 \\ &\Longleftrightarrow f = 0 \text{ p.p sur } X\end{aligned}$$

(ii) Homogénéité :

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall f \in L^P(X) : \|\alpha f\|_{L^p} &= \left(\int_X |\alpha f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_X |\alpha|^p |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(|\alpha|^p \int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha| \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \, \|f\|_{L^p} .\end{aligned}$$

(iii) Inégalité triangulaire :

$$\forall f, g \in L^P(X) : \|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

■

1.1.1 Convergence dominée de Lebesgue

Théorème 1.5 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ telle que :*

(i) *pour presque tout $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$;*

(ii) *il existe g dans $L^1(X,\mu)$, pour tout $n \geq 0$ et pour presque tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.*

Alors $f \in L^1(X)$ et $\int_X |f - f_n| \, d\mu \to 0$ quand $n \to \infty$.

Lemme 1.1 (Fatou) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur* X *à valeurs dans* $[0,+\infty]$ *et vérifie*

$$\int_X (\lim_{n\mapsto\infty} \inf f_n)d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf(\int_X f_n d\mu).$$

Théorème 1.6 (Fischer-Reisz) *L'espace* $L^p(X)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^p}$ *est un espace de Banach.*

1.2 Espaces de Lebesgue à exposant variable

Le but de ce paragraphe est d'introduire l'espace de Lebesgue à exposant variable et quelques propriétés similaires des espaces de Lebesgue classiques. Nous commençons par des notions fondamentales.

Dans ce qui suit nous admettons que Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ mesurable, de mesure positive.

1.2.1 Exposant variable

Définition 1.3 *[2] L'ensemble de toutes les fonctions Lebesgue-mesurables*

$$p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty].$$

est appelé l'ensemble des exposants variables, noté par $\mathcal{P}(\Omega)$.

Remarque 1.2 *Afin de faire la distinction entre les exposants variables et constants nous désignerons toujours les fonctions d'exposant variable par* $p(\cdot)$. *De plus l'exposant variable peut être non borné.*

Exemple 1.2 *:*

1. $\Omega = \mathbb{R}$, $p(x) = p$ *pour une certaine constante où* $1 \leq p \leq \infty$.

2. $\Omega = \mathbb{R}$, $p(x) = 2 + \sin(x)$.

3. $\Omega = (1, \infty)$, *soit* $p(x) = x$ *et si* $\Omega = (0, 1)$, *soit* $p(x) = \frac{1}{x}$.

Soit $E \subset \Omega$, pour tout $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ on définit

$$p_{-}(E) = ess \inf_{x \in E} p(x) \qquad p_{+}(E) = ess \sup_{x \in E} p(x).$$

Dans le cas $E = \Omega$, nous écrirons tout simplement $p_{-} = p_{-}(\Omega)$, et $p_{+} = p_{+}(\Omega)$. Nous définissons aussi les trois sous-ensembles canoniques de Ω :

$$\begin{aligned} \Omega_{\infty}^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}, \\ \Omega_{1}^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : p(x) = 1\}, \\ \Omega_{*}^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}. \end{aligned}$$

Définition 1.4 *L'exposant* $p'(\cdot)$ *conjugué de* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *est défini par l'équation*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \qquad \forall x \in \Omega.$$

(avec la convention que $\frac{1}{\infty} = 0$*).*

Propriété 1.1

$$(p'(.))_{+} = (p_{-})', (p'(.))_{-} = (p_{+})'.$$

1.2.2 Modulaire

La notion de modulaire est utilisée pour définir l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Définition 1.5 *[2] Étant donné* $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *et* f *une fonction mesurable de Lebesgue. Un modulaire associé à* $p(.)$ *est une fonctionnelle définie par la formule :*

$$\rho_{p(.),\Omega}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_{\infty}} |f(x)|^{p(x)} \, dx + \|f\|_{L^{\infty}(\Omega_{\infty})}.$$

- *Si* $f \notin L^{\infty}(\Omega_{\infty})$ *ou* $f(.)^{p(.)} \notin L^{1}(\Omega \diagdown \Omega_{\infty})$, *le modulaire est défini par* $\rho_{p(.),\Omega}(f) = +\infty$.
- *Lorsque* $|\Omega_{\infty}| = 0$ *(en particulier lorsque* $p_{+} < \infty$*), on pose* $\|f\|_{L^{\infty}(\Omega_{\infty})} = 0$.
- *Lorsque* $|\Omega \diagdown \Omega_{\infty}| = 0$, *alors* $\rho_{p(.),\Omega}(f) = \|f\|_{L^{\infty}(\Omega_{\infty})}$.

On peut écrire tout simplement $\rho_{p(.)}(f)$ ou $\rho(f)$.

Proposition 1.1 *Soit* $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. *Pour tout* f, $\rho(f) \geq 0$ *et* $\rho(|f|) = \rho(f)$.
2. $\rho(f) = 0$ *si et seulement si* $f(x) = 0$ *pour presque chaque* $x \in \Omega$.
3. *Si* $\rho(f) < \infty$ *alors* $f(x) < \infty$ *pour presque chaque* $x \in \Omega$.
4. ρ *est convexe, c-à-d*

$$\forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1 : \rho(\alpha f + \beta g) \leq \alpha \rho(f) + \beta \rho(g).$$

Proposition 1.2 *Soit* $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *si* $p_{+}(\Omega \diagdown \Omega_{\infty}) < \infty$, *alors pour tous* $\lambda \geq 1$

$$\rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_{+}(\Omega \diagdown \Omega_{\infty})} \rho(f)$$

De plus, si $p_{+} < \infty$ *et* $\lambda \geq 1$, *alors*

$$\lambda^{p_{-}} \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_{+}} \rho(f),$$

et si $0 < \lambda < 1$, *les inégalités inverses sont vraies.*

1.2.3 Espace $L^{p(.)}(\Omega)$

Définition 1.6 *[11] Étant donné* Ω, *et* $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$. *L'espace de Lebesgue à exposant variable* $L^{p(.)}(\Omega)$ *est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables* f *telles que*

$\rho_{p(.)}(f/\lambda) < \infty$ *pour un certain* $\lambda > 0$, *et on écrit :*

$$L^{p(.)}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable telle que } \exists \quad \lambda > 0 : \rho_{p(.)}(f/\lambda) < \infty \right\}.$$

Définition 1.7 *[11] Étant donné* Ω *et* $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *on définit* $L^{p(.)}_{loc}(\Omega)$ *par l'ensemble*

$$L^{p(.)}_{loc}(\Omega) := \left\{ f \text{ mesurable : } f \in L^{p(.)}(K) \text{ pour chaque ensemble compact } K \subset \Omega \right\}.$$

Proposition 1.3 *[11] Étant donné* Ω *et* $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *si* $p_+ < \infty$, *alors* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ *si seulement si*

$$\rho_{p(.),\Omega}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(.)}\, dx < \infty.$$

Théorème 1.7 *[2] Soit* Ω *un sous-ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$ *avec* $|\Omega| \neq 0$, $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$. *Alors* $L^{p(.)}(\Omega)$ *est une espace vectoriel.*
De plus si f *est une fonction mesurable, on a*

$$\|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(.)}(f/\lambda) \leq 1 \right\}$$

définie une norme sur $L^{p(.)}(\Omega)$.

Preuve. Nous prouverons que $\|.\|_{L^{p(.)}(\Omega)}$ a les propriétés suivantes :

1. Montrons

$$\|f\|_{p(.)} = 0 \iff f = 0$$

Si $f \equiv 0$, alors $\rho(f/\lambda) = 0 \leq 1$ pour tout $\lambda > 0$, et donc $\|f\|_{p(.)} = 0$.

Inversement, si $\|f\|_{p(.)} = 0$, alors

$$\forall \lambda > 0 : \rho(f/\lambda) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \left(\frac{f(x)}{\lambda} \right)^{p(x)} dx + \|f/\lambda\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \leq 1.$$

Nous considérons chaque terme du modulaire séparément. Il est immédiat que nous avons $\|f\|_{L^{\infty}(\Omega_{\infty})} \leq \lambda$; ainsi $f(x) = 0$ pour presque chaque $x \in \Omega_{\infty}$. De la même manière si $\lambda < 1$, d'après la proposition 1.2 on a

$$\lambda^{-p_-} \int_{\Omega \diagdown \Omega_{\infty}} |f(x)|^{p(x)} \, dx \leq 1$$

Donc, $\left\| f(.)^{p(.)} \right\|_{L^1(\Omega \diagdown \Omega_{\infty})} = 0$, et ainsi $f(x) = |f(x)|^{p(x)} = 0$ pour presque chaque $x \in \Omega \diagdown \Omega_{\infty}$. Ainsi $f \equiv 0$.

2. Montrons l'homogénéité

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha f\|_{p(.)} = |\alpha| \, \|f\|_{p(.)} \, .$$

Notons que si $\alpha = 0$, cela découle de (1). On fixe $\alpha \neq 0$; puis par un changement de variables on obtient

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{p(.)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho \left(|\alpha| \, f \diagup \lambda \right) \leq 1 \right\} \\
&= |\alpha| \inf \left\{ \lambda \diagup |\alpha| > 0 : \rho \left(f \diagup \left(\lambda \diagup |\alpha| \right) \right) \leq 1 \right\} \\
&= |\alpha| \inf \left\{ \mu > 0 : \rho(f \diagup \mu) \leq 1 \right\} \\
&= |\alpha| \, \|f\|_{p(.)}
\end{aligned}$$

3. Montrons l'inégalité triangulaire

$$\|f + g\|_{p(.)} \leq \|f\|_{p(.)} + \|g\|_{p(.)} \, .$$

On fixe $\lambda_f > \|f\|_{p(.)}$ et $\lambda_g > \|g\|_{p(.)}$; alors $\rho(f \diagup \lambda_f) \leq 1$ et $\rho(g \diagup \lambda_g) \leq 1$. Soit maintenant $\lambda = \lambda_f + \lambda_g$, alors par la propriété (4) de la proposition 1.1

$$\rho \left(\frac{f + g}{\lambda} \right) = \rho \left(\frac{\lambda_f}{\lambda} \frac{f}{\lambda_f} + \frac{\lambda_g}{\lambda} \frac{g}{\lambda_g} \right) \leq \frac{\lambda_f}{\lambda} \rho \left(f \diagup \lambda_f \right) + \frac{\lambda_g}{\lambda} \rho \left(g \diagup \lambda_g \right) \leq 1$$

donc

$$\|f+g\|_{p(.)} \leq \lambda_f + \lambda_g.$$

Si nous prenons maintenant l'infinimum sur tous ces λ_f et λ_g, on obtient l'inégalité recherchée.

■

Exemple 1.3 *Soit* $\Omega = (-2, 2)$ *et*

$$p(x) = \begin{cases} 1 & si \ -2 \leq x < 0, \\ 1/2 & si \ 0 < x < 2. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & si \ -2 \leq x < 0, \\ 2 & si \ 0 < x < 2. \end{cases}$$

alors

$$\rho(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, dx = \int_0^2 2^{1/2} dx = \sqrt{8} < \infty$$

d'où $f \in L^{p(x)}(\Omega)$. *De plus*

$$\begin{aligned} \rho(f/\lambda) &= \int_\Omega \left(\frac{f(x)}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{\frac{2}{\lambda}} dx \\ &= \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \leq 1 \implies \lambda \geq 8 \end{aligned}$$

D'où $\|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} = 8$.

Corollaire 1.2 *[2] Etant donné* Ω *et une fonction* $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$.

(i) *Si* $\| f \|_{L^{p(.)}(\Omega)} \leq 1$ *alors* $\rho(f) \leq \| f \|_{L^{p(.)}(\Omega)}$.

(ii) *Si* $\|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} > 1$ *alors* $\rho(f) \geq \| f \|_{L^{p(.)}(\Omega)}$.

De plus si on suppose que $|\Omega_\infty| = 0$ *alors*

(iii) si $\| f \|_{L^{p(.)}(\Omega)} \leq 1$, alors $\rho(f)^{\frac{1}{p_-}} \leq \| f \|_{L^{p(.)}(\Omega)} \leq \rho(f)^{\frac{1}{p_+}}$.

(iv) si $\| f \|_{L^{p(.)}(\Omega)} > 1$, alors $\rho(f)^{\frac{1}{p_+}} \leq \| f \|_{L^{p(.)}(\Omega)} \leq \rho(f)^{\frac{1}{p_-}}$.

1.2.4 Inégalité de Hölder

L'inégalité de Hölder est l'une des inégalités importantes dans l'analyse des équations différentielles partielles et l'analyse harmonique, alors il serait raisonnable de se demander si l'égalité de Hölder reste vraie dans le cas d'exposant variable, plus précisément nous avons ce qui suit .

Théorème 1.8 *Soient $p(.), p^{'}(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$, tel que $p^{'}(.)$ est l'exposant conjugué de $p(.)$. Pour tout $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ et $g \in L^{p^{'}(.)}(\Omega)$, on a $fg \in L^{1}(\Omega)$ et de plus*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq C_{p(.)} \|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} \|g\|_{L^{p'(.)}(\Omega)}$$

où

$$C_{p(.)} = \left(1 + \frac{1}{p_{-}} - \frac{1}{p_{+}}\right) \|\mathcal{X}_{\Omega_{*}}\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|\mathcal{X}_{\Omega_{\infty}}\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|\mathcal{X}_{\Omega_{1}}\|_{L^{\infty}(\Omega)} .$$

Preuve. Voir [1], [7]. ■

Si $p(.) = p = cste$, alors $p_{+} = p_{-}$ et $C_{p(.)} = 1$, ainsi on trouve l'inégalité classique de Hölder.

1.2.5 Convergence et complétude de $L^{p(.)}(\Omega)$:

Dans cette section nous considérons la convergence dans les espaces de Lebesgue à exposant variable.

Définition 1.8 *Soient $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^{p(.)}(\Omega)$.*

(i) *Convergence en modulaire : On dit que f_k converge vers f en modulaire si*

$$\exists \alpha > 0 : \rho\left(\alpha\left(f - f_k\right)\right) \rightarrow 0, \ \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

(ii) *Convergence en norme : On dit que f_k converge vers f en norme si*

$$\| f - f_k \|_{L^{P(.)}} (\Omega) \rightarrow 0, \ \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

Proposition 1.4 *Soit $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$. La suite de fonctions $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{p(.)}(\Omega)$ converge vers f en norme si et seulement si pour tout $\alpha > 0$, $\rho(\alpha(f - f_k)) \to 0$, quand $k \to \infty$.*

Preuve. Supposons que f_k converge vers f en norme. Soit $\alpha > 0$ l'homogénéité de la norme donne

$$\|\alpha(f_k - f)\|_{L^{p(.)}(\Omega)} = \alpha \|f_k - f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

en utilisant le corollaire 1.2 précédent pour tout k suffisamment grand on obtient

$$\rho(\alpha(f_k - f)) \leq \alpha \parallel f_k - f \parallel_{L^{p(.)}(\Omega)} .$$

Par conséquent,

$$p(\alpha(f_k - f)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Inversement, soit $\lambda > 0$ et soit $\alpha = \dfrac{1}{\lambda}$, alors pour tout k suffisamment grand

$$\rho((f_k - f)/\lambda) \leq 1$$

donc

$$\parallel f_k - f \parallel_{L^{p(.)}(\Omega)} \leq \lambda$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $\lambda > 0$ on trouve

$$\|f_k - f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

■

Théorème 1.9 *Si $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $L^{p(.)}(\Omega)$ est un espace complet.*

<u>**Conclusion :**</u> Si $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $L^{p(.)}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Chapitre 2

Espace Hardy

En 1968, Duren, Romberg et Shield (voir [6]) ont introduit les espaces de Hardy sur le disque unitaire complexe $\mathcal{D}$ où

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

2.1 Espace de Hardy constant

Définition 2.1 *1. Pour $0 < p < \infty$, nous définissons l'espace de Hardy $H^p = H^p(\mathcal{D})$ comme l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{D}$, telle que*

$$M_p(f,r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}},$$

reste borné pour tout $0 < r < 1$ c-à-d

$$H^p(\mathcal{D}) = \left\{f \in H(\mathcal{D}) : \sup_{0<r<1} M_p(f,r) < \infty\right\},$$

2. Pour $p = \infty$, nous définissons l'espace de Hardy $H^\infty(\mathcal{D})$ comme l'espace des fonc-

tions holomorphes bornées sur le disque unitaire $\mathcal{D}$, telle que

$$M_\infty(f,r) = \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right| < \infty.$$

Remarque 2.1 *Pour $0 < p \leq \infty$, si f est une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$ alors pour tout $0 < r < 1$, la fonction $M_p(f,r)$ est croissante. De plus :*

$$\sup_{0<r<1} M_p(f,r) = \lim_{r \overset{\leq}{\to} 1} M_p(f,r).$$

Corollaire 2.1 *:*

1. *Pour $0 < p < \infty$, on a*

$$H^p(\mathcal{D}) = \left\{ f \in H(\mathcal{D}) : \lim_{r \overset{\leq}{\to} 1} M_p(f,r) < \infty \right\},$$

2. *Si $f \in H^p(\mathcal{D})$ et pour $0 < p \leq \infty$, l'application*

$$\|f\|_{H^p} = \lim_{r \overset{\leq}{\to} 1} M_p(f,r),$$

est une norme sur $H^p(\mathcal{D})$.

Proposition 2.1 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, H^p est un espace de Banach.*

Définition 2.2 *Pour $0 < p < 1$ nous définissons.*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(e^{i\theta})\right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

la norme dans L^p. Cependant, si nous posons $d(f,g) = \|f-g\|_{L^p}^p$, l'espace L^p devient un espace métrique complet. Notons que

$$\|f+g\|_{L^p} \leq 2^{\frac{(1-p)}{p}} \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right).$$

Proposition 2.2 *Si $1 \leq p < q \leq \infty$, alors $H^q(\mathcal{D}) \subset H^p(\mathcal{D})$ et on a*

$$\forall f \in H^q(\mathcal{D}) : \|f\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^q}.$$

Exemple 2.1 *Si $0 < p < 1$, la fonction f où $f(z) = (1-z)^{-1}$ est dans H^p, mais elle n'est pas dans H^1 et donc pas dans un espace H^q pour tout $q \geq 1$, ce qui prouve que H^p n'est pas inclue dans H^1.*

2.2 Opérateur maximal de Hardy-Littlewood

Définition 2.3 *[2] Soit f une fonction localement intégrable définie sur $\mathbb{R}^n$. La fonction maximale (opérateur de Hardy-Littlewood) de f, est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

où le supremum est pris sur tous les cubes $Q \subset \mathbb{R}^n$ qui contiennent x et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Proposition 2.3 *L'opérateur de Hardy-Littlewood a les propriétés suivantes :*

1. *M est sous-linéaire :*

$$M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x),$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : M(\alpha f)(x) = |\alpha| Mf(x).$$

2. *Si f est non nulle sur un ensemble de mesure positif, alors sur tout ensemble borné Ω,*

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in \Omega : Mf(x) > \epsilon.$$

3. *Si f est non nulle sur un ensemble de mesure positif, alors* $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

4. *Si* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *alors* $Mf \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et* $\|Mf\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty}$.

Proposition 2.4 *Étant donné une fonction f localement intégrable, alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq Mf(x).$$

2.3 Espaces de Hardy variables

2.3.1 Caractérisation maximale

[3] Dans cette section, nous définissons les espaces de Hardy variables et nous donnons des caractérisations équivalentes en termes d'opérateurs maximaux, mais avant tout donnons d'abord quelques définitions.

Notons par S l'espace des fonctions de Schwartz munie par la famille des semi-normes $\|.\|_{\alpha,\beta}$ (avec α et β multi indices) où

$$\forall f \in S : \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right|.$$

Pour chaque entier $N > 0$, l'ensemble

$$S_N = \left\{ f \in S : \|f\|_{\alpha,\beta} \leq 1, |\alpha|, |\beta| \leq N \right\}.$$

Notons aussi S' l'espace des distributions tempérées. On dira qu'une distribution tempérée f est bornée si

$$\forall \Phi \in S : f * \Phi \in L^\infty$$

Définition 2.4 *Pour tout $\Phi \in S$ et $f \in S^{'}$, nous définissons trois opérateurs maximaux*

1. *L'opérateur maximal radial*

$$M_{\Phi,0}f = \sup_{t>0} \left| f * \Phi_t\left(x\right) \right|,$$

2. *L'opérateur maximal grand*

$$\mathcal{M}_N f\left(x\right) = \sup_{\Phi \in S_N} M_{\Phi,0} f\left(x\right),$$

où $\Phi_t\left(x\right) = t^{-n}\Phi\left(x/t\right)$, pour $t > 0$.

3. *L'opérateur maximal non tangentiel*

$$\mathcal{N} f\left(x\right) = \sup_{|x-y|<t} \left| P_t * f\left(y\right) \right|,$$

où P est le noyau de Poisson

$$P\left(x\right) = \frac{\Gamma\left(\left(n+1\right)/2\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{(n+1)/2}}$$

Définition 2.5 *On not $\mathcal{P}_0$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables*

$$p(.) : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$$

tel que $p_+ < \infty$.

Définition 2.6 *Soit $p(.) \in \mathcal{P}_0$, on dit $p(.) \in M\mathcal{P}_0$ si $p_- > 0$ et il existe p_0, $0 < p_0 < p_-$, tel que*

$$\|Mf\|_{p(.)/p_0} \leq C(n, p(.), p_0) \|f\|_{p(.)/p_0}.$$

Théorème 2.1 *Soit $p\left(.\right) \in M\mathcal{P}_0$, pour chaque $f \in S^{'}$, les assomptions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $\Phi \in S$ où $\displaystyle\int \Phi\left(x\right) dx \neq 0$, tel que $M_{\Phi,0} f \in L^{p(\cdot)}$,*

2. *Pour tout* $N > n/p_0 + n + 1$, $\mathcal{M}_N f \in L^{p(.)}$,

3. f *est une distribution bornée et* $\mathcal{N} f \in L^{p(.)}$.

De plus les normes $\|M_{\Phi,0} f\|_{p(.)}$, $\|\mathcal{M}_N f\|_{p(.)}$, $\|\mathcal{N} f\|_{p(.)}$ *sont équivalentes (les constantes d'équivalence dépend seulement de* $p(.)$ *et* n*).*

Définition 2.7 *Soit* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$. *Pour* $N > n/p_0 + n + 1$, *on définit l'espace* $H^{p(.)}$ *par l'espace des fonctions* $f \in S'$ *munie par*

$$\|f\|_{H^{p(.)}} = \|\mathcal{M}_N f\|_{p(.)} < \infty.$$

Remarque 2.2 *Les espaces* $H^{p(.)}$ *sont indépendants du choix de* $N > n/p_0 + n + 1$.

2.3.2 Densité de L^1 dans $H^{p(.)}$

Proposition 2.5 *étant donné* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$, *alors* $H^{p(.)}$ *est un espace complet munie par* $\|.\|_{H^{p(.)}}$.

Preuve. Voir [3]. ■

Proposition 2.6 *Soit* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$. *Alors l'intersection* $H^{p(.)} \cap L^1_{loc}$ *dense dans* $H^{p(.)}$.

Preuve. Voir [3]. ■

2.3.3 Décomposition atomique $(p(.), \infty)$ Atomes

Nous commençons par la définition de l'atome

Définition 2.8 *[3] soit* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$, *et* q, $1 < q \leq \infty$, *une fonction* $a(.)$ *est une* $(p(.), q)$ *atome si* $\operatorname{supp} p(a) \subset B = B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_0 - y| < r\}$ *pour un certain* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *et s'il satisfait*

(i) $\|a\|_q \leq |B|^{\frac{1}{q}} \|\mathcal{X}_B\|_{p(.)}^{-1}$,

(ii) $\int a(x)x^{\alpha}dx = 0$ *pour tous* $|\alpha| \leq \left[n\left(p_0^{-1}-1\right)\right]$.

En (i) nous interprétons $\dfrac{1}{\infty} = 0$. Ces deux conditions sont appelées la taille et les moments nulles d'un atome.

Remarque 2.3 *Si* $p_0 > 1$ *(ce qui peut arriver si* $p_- > 1$*), alors* $\left[n\left(p_0^{-1}-1\right)\right] < 0$*, et ceci se traduit par qu'on'a pas besoin de la condition* (ii)*.*

Dans la suite de cette section, nous considérons le cas $q = \infty$.

Théorème 2.2 *Supposons* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$*. Alors, une distribution* f *est dans* $H^{P(.)}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement s'il existe un ensemble de* $\{a_j\}$ *de* $(p(.),\infty)$*-atomes de support inclut dans les boules* $\{B_j\}$*,et coefficients non négatifs* $\{\lambda_j\}$ *tels que*

$$f = \sum_j \lambda_j a_j$$

où la série converge en $H^{P(.)}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{H^{p(.)}} \approx \inf\left\{\left\|\sum_j \lambda_j \frac{\mathcal{X}_{B_j}}{\left\|\mathcal{X}_{B_j}\right\|_{p(.)}}\right\|_{p(.)} : f = \sum_j \lambda_j a_j\right\}.$$

Lemme 2.1 *Soit* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$*. On suppose* $\{a_j\}$ *est une suite de* $(p(.),\infty)$*-atomes de support inclut dans les boules* $B_j = (x_j, r_j)$*, et que* $\{\lambda_j\}$ *est une suite non négative qui satisfait*

$$\left\|\sum_j \lambda_j \frac{\mathcal{X}_{B_j}}{\left\|\mathcal{X}_{B_j}\right\|_{p(.)}}\right\|_{p(.)} < \infty$$

Alors, la série $f = \sum_j \lambda_j a_j$ *converge dans* $H^{P(.)}(\mathbb{R}^n)$*, et*

$$\|f\|_{H^{p(.)}} \leq C\left(n, p(.), p_0\right)\left\|\sum_j \lambda_j \frac{\mathcal{X}_{B_j}}{\left\|\mathcal{X}_{B_j}\right\|_{p(.)}}\right\|_{p(.)}.$$

Lemme 2.2 *Soit* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$. *si* $f \in H^{p(.)}$, *alors il existe* $(p(.), \infty)$ *atomes* $\{a_{k,j}\}$, *où leurs supports est inclues dans les boules* $B_{k,j}$, *et des coefficients non négatifs* $\{\lambda_{k,j}\}$ *tels que*

$$f = \sum_{k,j} \lambda_{k,j} a_{k,j},$$

De plus

$$\left\| \sum_{k,j} \lambda_{k,j} \frac{\mathcal{X}_{B_{k,j}}}{\left\| \mathcal{X}_{B_{k,j}} \right\|_{p(.)}} \right\|_{p(.)} \leq C\left(n, p(.), p_0\right) \|f\|_{H^{p(.)}}.$$

2.3.4 Décomposition atomique $(p(.),q)$ Atome

Nous considérons la décomposition atomique lorsque $q < \infty$. Notre premier résultat principal est que lorsque q est suffisamment grand, l'analogue du théorème 2.2 est vrai.

Décomposition atomique infinie à l'aide d'atomes $(p(.),q)$

Nous étendons le théorème 2.2 en donnant une décomposition atomique utilisant l'atome $(p(.), q)$.

Théorème 2.3 *[3] Supposons* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$. *Alors, une distribution* f *est dans* $H^{P(.)}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement pour* $q > 1$ *suffisamment grand, s'il existe un collection* $\{a_j\}$ *de* $(p(.), \infty)$*-atomes de support inclut dans les boules* $\{B_j\}$, *et coefficients non négatifs* $\{\lambda_j\}$ *tels que*

$$f = \sum_j \lambda_j a_j$$

où la série converge en $H^{P(.)}(\mathbb{R}^n)$.

$$\|f\|_{H^{p(.)}} \simeq \inf \left\{ \left\| \sum_j \lambda_j \frac{\mathcal{X}_{B_j}}{\left\| \mathcal{X}_{B_j} \right\|_{p(.)}} \right\|_{p(.)} : f = \sum_j \lambda_j a_j \right\}.$$

Remarque 2.4 *Notons la norme de l'opérateur maximal par* $\|M\|_{(p(.)/p_0)'}$. *Alors il suffit de prendre* $q > \max(1, p_+, p_0(1 + 2^{n+3} \|M\|_{(p(.)/p_0)'}))$.

Lemme 2.3 *Soit* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$. *il existe* $q = q(p(.), p_0, n) > \max(p_+, 1)$ *tel que si* $\{aj\}$ *est une suite de* $(p(.), q)$ *atomes, où leurs supports est inclues dans les boules* $B_j = B(x_j, r_j)$, *et* $\{\lambda_j\}$ *est une suite non négative qui satisfait*

$$\left\| \sum_j \lambda_j \frac{\mathcal{X}_{B_j}}{\left\| \mathcal{X}_{B_j} \right\|_{p(.)}} \right\|_{p(.)} < \infty$$

alors la série $f = \sum_j \lambda_j a_j$ *converge dans* $H^{P(.)}(\mathbb{R}^n)$, *et*

$$\|f\|_{H^{p(.)}} \leq C\left(n, p(.), p_0, q\right) \left\| \sum_j \lambda_j \frac{\mathcal{X}_{B_j}}{\left\| \mathcal{X}_{B_j} \right\|_{p(.)}} \right\|_{p(.)}.$$

Décompositions atomiques finies

Soit $q < \infty$ et $H_{fin}^{p(.),q}$ le sous-espace de $H^{p(.)}$ constitué de tous les fonctions f qui ont des décompositions en sommes finies d'atomes $(p(.), q)$.

Théorème 2.4 *[3] Soit* $p(.) \in M\mathcal{P}_0$, *et fixons également* q *comme dans le 2.3. Pour* $H_{fin}^{p(.),q}$ *on définie*

$$\|f\|_{H_{fin}^{p(.),q}} = \inf \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\mathcal{X}_{B_j}}{\left\| \mathcal{X}_{B_j} \right\|_{p(.)}} \right\|_{p(.)} : f = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j \right\}$$

où l'infinimum est pris sur toutes les décompositions finies de f *utilisant* $(p(.), q)$ *atomes* a_j, *où leurs supports est inclues dans les boules* B_j. *Alors* $\|f\|_{H^{p(.)}} \simeq \|f\|_{H_{fin}^{p(.),q}}$.

Conclusion

Les espaces fonctionnels à exposants variables sont largement utilisés dans la modélisation mathématique tels que la modélisation des fluides électrorhéologiques et thermorhéologiques, ...etc. Par conséquent, il est intéressant d'explorer et d'étudier ce type d'espaces comme les espaces de Hardy avec des exposants variables dans différentes situations. Dans ce travail, nous avons donné quelques résultats liés à ce type d'espaces. D'abord, nous avons donné quelques définitions, notations et quelques notions mathématiques sur les espaces de Lebesgue à exposant constant et variable, ensuite nous avons étudié les espaces de Hardy à exposant constant et l'opérateur de Hardy-Littlewood. Enfin, nous avons étudié les espaces de Hardy à exposant variable et la caractérisation maximale et nous avons établi sa décomposition atomique.

A l'avenir, si j'aurais la chance de poursuivre la recherche scientifique J'aime bien de suivre cet axe de recherche, pour pouvoir comprendre et explorer quelques résultats sur les espaces Hardy variables.

Bibliographie

[1] Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Martell, J. M. and Pérez, C. (2006) *The boundedness of classical operators on variable L^p spaces.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31, pp $239-264$.

[2] Cruz-Uribe, D. and Fiorenza, A. (2013) *Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis, Applied and Numerical Harmonic Analysis.* Birkhäuser/Springer, Heidelberg.

[3] Cruz-Uribe, D. and Wang, L.A.D.(2014) *Variable Hardy Space.* Indiana Univ. Math. J, 63, pp $447-493$.

[4] Chen, Y., Levine, S., Rao, R., (2006) *Variable exponent, linear growth functional in image processing.* SIAM J. Appl. Math. $66, 1383-1406$.

[5] Christophe Antonini et all. (2021) *Espaces L^p et espaces L^p*.cours.

[6] Duren, P. L., Romberg, B. W. and Shields, A. L. (1969) *Linear functional on H^p spaces with* $0<p<1$. J. Reine Angew, Math 238, pp. $32-60$.

[7] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö and M. Ružicka, (2011) *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2017, Springer, Heidelberg.

[8] Fefferman, C. and Stein, E.M. (1972) *H^p spaces of several variables.* Acta math, 129 , n.1, pp $137-193$.

[9] Grafakos, L. (2014) Modern Fourier Analysis, third, *Graduate texts in mathematics*, 250, Springer, Verlag New York Inc.

[10] Halsey, T.C. (1992) *Electrorheological fluids.* Science $258, 761 - 766$.

[11] Heraiz Rabah. (2017) *Some properties of variable herz type besov spaces and applications, Submitted for the degree of doctorate , Mathematics and Informatics, Functional* Analysis, Mohamed Boudiaf University – M'sila.

[12] Kovaáck, O. and Rákosník, J. (1991) *On spaces* $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Math.* J. 41 ,$592 - 618$.

[13] Martinez, S., and Wolanski, N.(2008) *A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces*, Adv. Math. 218, $1914 - 1971$.

[14] Orlicz, W., (1931) Über *konjugierte exponentenfolgen*, Stud. Math. $3, 200 - 211$.

[15] Ružicka, M., (2000) *Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1748, Springer, Berlin.

[16] Stein, E., Weiss, G. (1960) *On the theory of harmonic functions of several variables. I. the theory of* H^p*-spaces, Acta Math.*$103, 25 - 62$.

[17] Stein, E.M. (1993) Harmonic analysis : Real variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory integrals, Princeton Univ. Press. Princeton, NJ.

[18] Stéphane Nonnenmacher. (2021) Probabilités, *Théorie de la mesure*, Intégration. paris.

[19] Thierry Gallay. (2009) *Théorie de la mesure et de l'intégration.* Grenoble.

[20] Zeriahi A. (2011) *Les espaces de Lebesgue* L^p. (cours).

[21] https ://www.bibmath.net/dico/index.php ?action=affiche&quoi=./l/lebesgue espace.html. (Lien d'un site internet).

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

L^p	Espace de Lebesgue classique.
$\|.\|_{L^p}$	Norme de espace Lebesgue.
Ω	Sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$.
$p(.)$	Exposant variable.
$\mathcal{P}(\Omega)$	Ensemble d'exposants variables.
$L^{p(.)}$	Espace Lebesgue à exposant variable.
$\mathcal{D}$	Disque unitaire complexe.
H^p	Espace de Hardy.
$H(\mathcal{D})$	Espaces des fonctions holomorphes.
S	Espace des fonctions de Schwartz.
$\|.\|_{\alpha,\beta}$	Semi-norme de S.
S'	Espace des distributions tempérées.
$p'(.)$	Exposant variable conjugué.
$(p(.), q)$	Un atome.
$\|f\|_{H^{p(.)}}$	Norme d'espace Hardy.
Q	Cubes de $\mathbb{R}^n$.
$H_{fin}^{p(.),q}$	Sous-espace de $H^{p(.)}$.
$\mathcal{X}$	Fonction caractéristique.
$\mathbb{R}^n$	Espace euclidien a n dimension.
$\rho_{p(.),\Omega}(f)$	Modulaire.
α, β	Multi indices.

Résumé

Le but de ce mémoire est de définir les espaces de Hardy à exposants constants et variables et d'étudier leurs différentes propriétés et d'établir leurs décompositions atomiques et pour ceci nous avons utilisé le passage des espaces de Lebesgue classiques vers les espaces de Lebesgue variables où nous avons mentionné certaines de ses caractéristiques.

Mots clés : Espace de Lebesgue, espace de Hardy, décomposition atomique.

Abstract

The purpose of this dissertation is to define Hardy spaces with constant and variable exponents and to study their different properties and to establish their atomic decompositions and for this we have used the transition from classical Lebesgue spaces to variable Lebesgue spaces where we have mentioned some of its characteristics.

Key words : Lebesgue space, Hardy space, atomic decomposition.

الملخص

الغرض من هذه المذكرة هو تعريف فضاءات هاردي ذات الأسس الثابتة والمتغيرة ودراسة خصائصها المختلفة وتأسيس تحليلاتها الذرية. ولهذا استخدمنا الانتقال من فضاءات لوبيغ الكلاسيكية إلى فضاءات لوبيغ المتغيرة مع ذكر بعض خصائصها .

الكلمات المفتاحية: فضاء لوبيغ، فضاء هاردي، التحليل الذري.