

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la

VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

**Bouchra Naili**

Titre :

**Systemes d'équations non linéaires et applications**

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	<b>LAADJAL Baya</b>	UMKB	Président
Pr.	<b>Rajah Faouzia</b>	UMKB	Encadreur
Dr.	<b>TABRHA Ouarda</b>	UMKB	Examinatrice

Juin 2023

## DEDICACE

*Je dédie ce travail À :*

Madame **RAJAH Faouzia**, Ce mémoire est un témoignage de gratitude envers vous. Votre guidance experte, votre patience et votre soutien constant ont été essentiels dans la réalisation de ce travail. Merci d'avoir été une encadreuse exceptionnelle.

Mes chers parents "**Naili Mohamed** et **Daheur Saliha**", pour leurs amour inconditionnel, leurs soutien indéfectible et leurs sacrifices ont façonné la personne que je suis devenue et pour leurs patiences et leurs encouragements qui ne jamais cassé de me convenir durant mes années d'études

Mes frères "**Salah El Din** " et "**Yahia**"

Mes amies fidèles, qui ont partagé tant de rires, d'aventures et de souvenirs qui resteront à jamais gravés dans mon cœur..

Toute ma famille "**Naili** et **Daheur**"

**Tous ceux que j'aime**

## REMERCIEMENTS

Je remercie **Allah** le tout puissant pour m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail, que nous implorons afin de nous aider à atteindre nos aspirations,

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur, Madame **RAJAH Faouzia**, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions et les encouragements qu'il m'a apportés durant mon mémoire.

Mon sincère remerciement aux membres de jury **LAADJAL Baya** et **TABRHA Ouarda**

qui ont accepté de juger mon travail.

Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le meilleur d'eux-mêmes afin de nous assurer une formation de qualité.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université "**MOHAMED KHIDER, BISKRA.**"

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Je n'oublie pas de remercier ma famille d'être avec nous dans tous les moments.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Equations non linéaires</b>	<b>3</b>
1.1 Méthode numérique . . . . .	4
1.2 Méthode de Newton-Raphson . . . . .	5
1.2.1 Conditions de convergence . . . . .	8
1.2.2 Critère d'arrêt de Newton-Raphson . . . . .	8
1.3 Méthode de point fixe . . . . .	10
1.3.1 Conditions de convergence . . . . .	10
1.3.2 Critère d'arrêt de point fixe . . . . .	13
1.4 Méthode de bisection (dichotomie) . . . . .	14
<b>2 Systèmes d'équations non linéaires</b>	<b>16</b>
2.1 Méthode de Newton-Raphson . . . . .	17

2.2	Méthode de point fixe	20
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>24</b>
3.1	Système non linéaire et Semi-conducteur	24
3.1.1	Paramètres du modèle mathématique à une diode	26
3.1.2	Expression mathématique pour un module photovoltaïque	27
3.2	Méthode de Newton et GPS	28
3.3	Algorithme de Newton-Raphson au GPS	30
	<b>Conclusion</b>	<b>32</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>33</b>

# Table des figures

1.1 Méthode de Newton-Raphson( $\alpha = x^*$ )	7
1.2 Méthode de la sécante( $\alpha = x^*$ )	10
1.3 Méthode de Point fixe( $\alpha = x^*$ )	12
1.4 Méthode de dichotomie	15
3.1 Evolution de la production mondiale des différentes technologies de cellules PV	25

# Introduction

A la grande importance des systèmes d'équations non linéaires, on a proposé comme sujet d'étude dans notre mémoire car ces systèmes se retrouvent dans nombreuses applications scientifiques et technologiques, notamment en physique, en ingénierie, en économie et en biologie.

Un système d'équations non linéaires est composé de deux ou plusieurs équations avec une ou plusieurs variables non observées. Pour résoudre un système, il faut déterminer les valeurs de ces variables qui satisfont simultanément toutes les équations de ce système.

Malheureusement, il n'existe pas une méthode analytique générale permettant de découvrir la solution exacte parce que la résolution d'un système d'équations non linéaires est généralement plus difficile que la résolution d'un système d'équations linéaires. Donc, ont été obligé de trouver ces solutions qu'approximativement.

La méthode de Newton-Raphson et la méthode de point fixe ou même des méthodes basées sur des algorithmes d'optimisation ce sont des méthodes numériques extrêmement importantes dans ce domaine et elles sont généralement utilisées pour trouver les solutions cherchées sous certaines conditions. Pour faciliter l'étude, on propose tout d'abord quelques méthodes numériques dans le cas scalaire (cas où  $n = 1$ ) et on va faire après la généralisation dans le cas quelconque (cas où  $n > 1$ ). Logiquement, on a vu qu'on peut décomposer notre mémoire en trois chapitres principaux.

Dans le **premier chapitre**, nous allons discuter de quelques méthodes numériques concernant la résolution des équations non linéaires afin qu'elles puissent être appliquées généralement à des systèmes non linéaires. Notre objectif ici est de trouver les racines (les zéros) d'une équation non linéaire  $f(x) = 0$ , cela montre que la fonction  $f$  prend une forme non linéaire.

Dans le **deuxième chapitre**, on passe à la généralisation aux cas des systèmes non linéaires. Les méthodes proposées sont des suites itératives convergent vers la solution unique cherchée ; donc, il est obligatoire de connaître les conditions de convergence.

Pour démontrer la grande utilité des systèmes d'équations non linéaires dans plusieurs domaines scientifiques, on va proposer **deux applications**, la première est appliquée au Semi-conducteur et le but des systèmes non linéaires c'est : comment calculer le rendement de chaque cellule solaire. La deuxième application est consacrée à la positionnement d'un point quelconque dans l'espace par un GPS à l'aide de quelques satellites, donc le but est de trouver un vecteur pour positionner un point dans l'espace.

# Chapitre 1

## Equations non linéaires

Dans ce chapitre, on va présenter quelques méthodes numériques de résolution des équations non linéaires les plus connues pour faire une généralisation aux cas des systèmes non linéaires.

Notre but ici est de chercher les racines ou bien les zéros d'une équation non linéaire  $f(x) = 0$ ; évidemment la fonction  $f$  prend une forme non linéaire.

**Définition (1.1) :** On donne une fonction continue  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $x^*$  est une racine de l'équation non linéaire :

$$f(x) = 0; x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

*s'il vérifie :  $f(x^*) = 0$ .*

La détermination des racines exactes de l'équation non linéaire  $f(x) = 0$ ; lorsque l'expression de la fonction  $f$  est complexe; est un problème difficile à résoudre par les méthodes analytiques, c'est-à-dire : il n'est pas toujours possible de résoudre complètement ce problème pour toutes les formes de la fonction  $f$ ; en plus, il n'existe pas une méthode générale qui donne les zéros de  $f$ ; tout dépend de la forme de cette fonction.

## 1.1 Méthode numérique

Avant de commencer cette section, il faut citer une propriété très importante en analyse numérique qui est la séparation des racines. Cette propriété consiste à assurer l'existence et l'unicité d'une racine de l'équation non linéaire  $f(x) = 0$  dans l'intervalle d'étude pour faciliter après l'application de la méthode numérique.

Ceci fait par l'application directe du théorème des valeurs intermédiaires; c'est-à-dire : la fonction  $f$  doit être continue, monotone et elle faut changer son signe.

D'une manière générale, pour appliquer une méthode numérique de résolution d'une équation non linéaire  $f(x) = 0$ , il faut :

1. Construire itérativement une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^*, \text{ où } f(x^*) = 0.$$

2. Assurer la convergence de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $x^*$ ; le zéros de  $f$ .
3. Vérifier si cette convergence est globale sur  $[a, b]$  ou seulement locale.
4. Préciser après l'ordre de cette convergence.

Pour répondre à toutes ces questions, on présente tout d'abord quelques notions de bases :

**Définition (1.2)** (*Ordre de convergence*) : La convergence de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $x^*$  est dite d'ordre  $p \geq 1$  si :

$$\exists c > 0 : |x_{k+1} - x^*| \leq c |x_k - x^*|^p; \forall k \geq k_0.$$

**Définition (1.3)** (*convergence globale*) : La convergence de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $x^*$  est dite globale si :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^* ; \forall x_0 \in [a, b].$$

**Définition (1.4)** (*convergence locale*) : La convergence de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $x^*$  est dite locale si :

$$\exists \varepsilon > 0 : \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^* ; \forall x_0 \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon].$$

Prochainement, on va donner les méthodes numériques les plus utilisées dans les différents domaines scientifiques.

## 1.2 Méthode de Newton-Raphson

Dans ce qui suit, on note par  $x^*$  la racine exacte recherchée de (1.1) et  $x_0$  est une valeur initiale approchée; on suppose que  $f \in C^2$  au voisinage de  $x^*$ .

Analytiquement, en faisant appel au développement de Taylor d'ordre 2, ce qui donne :

$$f(x^*) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x^* - x_0)^2 ; \quad \zeta \in [x^*, x_0]. \quad (1.2)$$

On suppose  $f'(x_0) \neq 0$  et comme  $f(x^*) = 0$ , on a :

$$f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x^* - x_0)^2 \simeq 0.$$

Ce qui implique :

$$f(x_0) + x^* f'(x_0) - x_0 f'(x_0) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x^* - x_0)^2 = 0.$$

Par quelques calculs simples, on trouve :

$$x^* f'(x_0) = x_0 f'(x_0) - f(x_0) - \frac{f''(\zeta)}{2} (x^* - x_0)^2,$$

lorsqu'on divise par  $f'(x_0)$ , on obtient :

$$x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(\zeta)}{2f'(x_0)} (x^* - x_0)^2.$$

En négligeant le reste (l'erreur) :

$$R = \frac{-f''(\zeta)}{2f'(x_0)} (x^* - x_0)^2; \zeta \in [x^*, x_0].$$

Dans la première itération, la quantité :

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

sera noté par  $x_1$  ; c'est-à-dire :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Alors  $x_1$  est considéré comme valeur approchée améliorée de  $x^*$  ; on suit exactement les mêmes étapes aux voisinages de  $x_1, x_2, \dots$  on trouve enfin la suite récursive de Newton :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; k \in \mathbb{N}.$$

Il est très connu que la méthode de Newton-Raphson s'appelle aussi la méthode des tangentes ; parce que : géométriquement, l'équation de la tangente en  $x_0$  est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On suppose que cette tangente coupe l'axe des "x" en  $x_1$ , on a alors :

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0,$$

ce qui donne :

$$x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Supposant maintenant que la tangente en  $x_1$  coupe l'axe des  $x$  en  $x_2$ , on a alors :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

et ainsi de suite; donc, on obtient les itérations de Newton pour résoudre (1.1) :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Comme interprétation géométrique, on a :

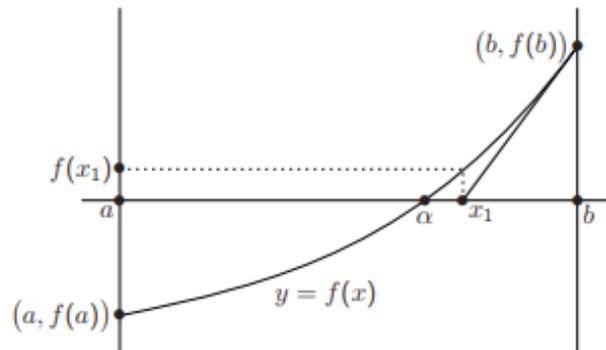


FIG. 1.1 – Méthode de Newton-Raphson ( $\alpha = x^*$ )

On a cité précédemment que cette suite converge vers la racine cherchée; donc évidemment, il faut assurer la convergence.

### 1.2.1 Conditions de convergence

Dans cette partie, on essaye de connaître sous quelles conditions la méthode de Newton-Raphson est convergente. Ces conditions est également connues sous le nom : "*Conditions de Fourier*". Si  $f \in C^2 [a, b]$ , vérifie :

1.  $f(a) \times f(b) < 0$ .
2.  $f'(x_0) \neq 0; \forall x_0 \in [a, b]$  (*stricte monotonie de f*).
3.  $f''(x_0) \neq 0; \forall x_0 \in [a, b]$  (*concavité de f dans le même sens*).

$f'(x)$  et  $f''(x)$  gardent des signes constantes dans  $[a, b]$ ; en plus, en choisissant  $x_0 \in [a, b]$ , tel que :  $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$ . Alors, les itérations de Newton convergent vers l'unique solution  $x^*$  de (1.1) dans l'intervalle  $[a, b]$ . [4]

Sous les conditions de Fourier, on peut appliquer la suite de Newton; mais la question qui se pose ici : à quel rang en arrêtant les calculs.

### 1.2.2 Critère d'arrêt de Newton-Raphson

$x^*$  est toujours la racine de l'équation (1.1) et  $x_0$  est une valeur approchée de  $x^*$ . On applique la formule de récurrence de Newton-Raphson, on obtient une suite des approximations  $(x_k)_k$ . Comme  $f$  est de classe  $C^2$  au voisinage de  $x^*$  alors : on peut écrire d'après le développement de Taylor d'ordre 1 :

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$f(x_k) = f(x^*) + f'(\zeta)(x_k - x^*); \zeta \in ]x_k, x^*[ ,$$

On divise par  $f'(\zeta)$ , on trouve :

$$\frac{f(x_k)}{f'(\zeta)} = \frac{f(x^*)}{f'(\zeta)} + (x_k - x^*)$$

Lorsqu'on néglige le terme :

$$R_1 = \frac{f(x^*)}{f'(\zeta)}.$$

On obtient, d'une part :

$$x_k - x^* = \frac{f(x_k)}{f'(\zeta)},$$

et d'autre part :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

ce qui implique :

$$x_{k+1} - x_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

En tenant compte l'approximation :  $f'(\zeta) \simeq f'(x_k)$  :

$$|x_k - x^*| \simeq |x_{k+1} - x_k|.$$

En plus, si on veut calculer une valeur approchée de  $x^*$  avec la précision attendue  $\varepsilon = 0,5 \times 10^{-k}$ , il faut prendre comme condition d'arrêt la formule suivante :

$$|x_{k+1} - x_k| \leq 0,5 \times 10^{-k}. \quad (1.3)$$

Avant d'achever cette section, on veut citer que **la méthode de la Sécante** introduites les fonctions scalaires est une variante de la méthode de Newton. En effet, on donne toujours une fonction  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et on cherche les racines de l'équation non linéaire  $f(x) = 0$ .

On obtient les techniques de la Sécante si on remplace  $f'(x_k)$  par sa dérivée approchée, on trouve alors :

$$\begin{cases} x^{(0)}, x^{(1)} \in \mathbb{R} \\ \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k), \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Il est clair que lorsqu'on veut procéder par la méthode de la sécante, on a besoin de deux valeurs initiales (c'est une méthode de deux pas) et nous permet de minimiser la régularité de la fonction  $f$  (on n'a pas besoin de calculer  $f'$ ). Dans cette méthode on perd la convergence quadratique et on peut même montrer qu'elle est convergente d'ordre  $d$ , où  $d$  est le nombre d'ordre.

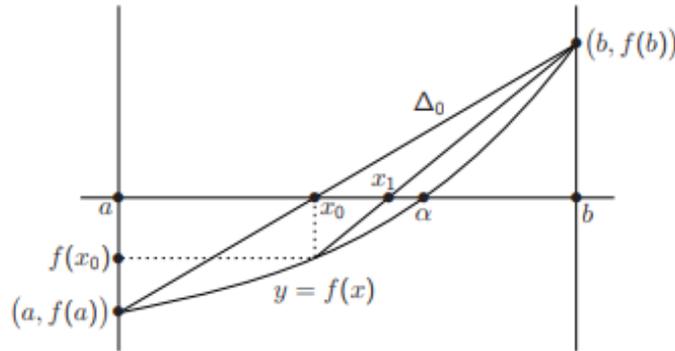


FIG. 1.2 – Méthode de la sécante ( $\alpha = x^*$ )

### 1.3 Méthode de point fixe

L'une des méthodes les plus importantes de résolutions numériques des équations non linéaires est la méthode du *point fixe*. Le principe de cette méthode est de transformer l'équation du type  $f(x^*) = 0$  en une équation équivalente  $g(x^*) = x^*$ , où la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; on dit alors que  $x^*$  est un point fixe.

Donc, on transforme le problème de recherche d'une racine de  $f(x) = 0$  en un problème de recherche du point fixe d'une autre fonction  $g(x) = x$ .

#### 1.3.1 Conditions de convergence

Cette méthode est également basée sur le théorème du point fixe.

**Théorème (1.1)** (*Point fixe*) :  $g$  est une fonction définie sur l'intervalle  $[a, b]$  et on suppose qu'elle vérifie les conditions suivantes :

1.  $g([a, b]) \subset [a, b]$  ; c'est-à-dire :  $\forall x \in [a, b] : a \leq g(x) \leq b$ .
2.  $g$  est une fonction strictement contractante, donc  $g$  est lipschitzienne de rapport  $L < 1$  ; alors :  $\exists L \in ]0, 1[$  ; tel que :

$$|g(x) - g(y)| \leq L |x - y| ; \forall x, y \in [a, b]. \quad (1.4)$$

sous ces conditions, il existe un point fixe unique  $x^* \in [a, b]$ . De plus si :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{k+1} = g(x_k) ; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$x_k \rightarrow x^*$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . [5]

**Preuve :** La démonstration du théorème de point fixe se décompose en deux parties. D'un côté, il faut démontrer l'existence et l'unicité de  $x^*$  pour la fonction  $g$  et d'un autre côté, la convergence de  $(x_k)_k$  vers  $x^*$ .

1. On démontre que  $g$  admet un point fixe unique.

⊗ *L'existence* : On pose :  $h(x) = g(x) - x$ . Il est clair que : la fonction  $h$  est continue sur  $[a, b]$ , en plus,  $g(a)$  et  $g(b) \in ]a, b[$  ; ce qui nous permet de déduire que :  $h(a) = g(a) - a > 0$  et  $h(b) = g(b) - b < 0$ , c'est-à-dire :  $h$  est continue et  $h(a) \times h(b) < 0$  ; alors :

$$\exists x^* \in ]a, b[ / h(x^*) = 0 \Rightarrow g(x^*) - x^* = 0 \Rightarrow g(x^*) = x^*.$$

Donc  $x^*$  est un point fixe de  $g$ .

⊗ *L'unicité* : On suppose que  $g$  admet deux points fixes distincts  $x_1^*$  et  $x_2^*$ , tel que :

$x_1^* = g(x_1^*)$  et  $x_2^* = g(x_2^*)$ . On a :

$$|x_1^* - x_2^*| = |g(x_1^*) - g(x_2^*)| \leq L |x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$$

C'est une contradiction ; c'est-à-dire : notre supposition au début est fausse, donc  $x_1^* = x_2^*$  (l'unicité du point fixe).

2. On veut démontrer que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^*$ . On considère la suite  $(x_k)_k$  de terme général :  $x_{k+1} = g(x_k)$  ;

$$\begin{aligned} |x_k - x^*| &= |g(x_{k-1}) - g(x^*)| \\ &\leq L |x_{k-1} - x^*| = L |g(x_{k-2}) - g(x^*)| \\ &\leq L^2 |x_{k-2} - x^*| \leq \dots \leq L^k |x_0 - x^*| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si  $k$  est suffisamment grand ( $k \rightarrow +\infty$ ), on trouve que le terme :  $L^k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Alors :  $|x_k - x^*|$  tend vers 0 ; ce qui nous permet de dire que la suite de point fixe  $(x_k)$  converge vers l'unique point fixe de  $g$ .

Comme interprétation géométrique, on a :

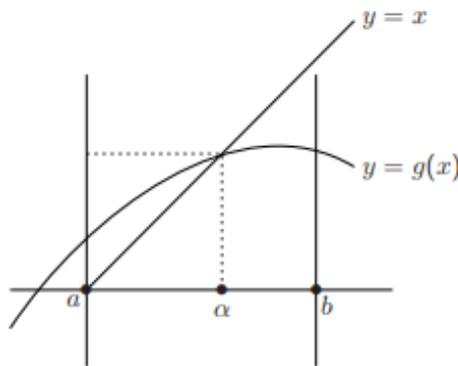


FIG. 1.3 – Méthode de Point fixe ( $\alpha = x^*$ )

La convergence de la méthode des itérations de point fixe est assurée par l'application directe du théorème du point fixe mais on veut connaître la condition d'arrêt de ces

itérations de calcul.

### 1.3.2 Critère d'arrêt de point fixe

Pour aboutir à notre but on donne une fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant aux hypothèses du théorème de point fixe et on construit  $(x_k)_k$  la suite des approximations définie par la relation :  $x_{k+1} = g(x_k); k \in \mathbb{N}$ .

*En effet, pour un entier  $k \in \mathbb{N}$  :*

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x^*| &= |g(x_k) - g(x^*)| \leq L |x_k - x^*| \\ &\leq L |x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - x^*| \\ &\leq L |x_k - x_{k+1}| + L |x_{k+1} - x^*|. \end{aligned}$$

*Puis, on déduit que :*

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x^*| - L |x_{k+1} - x^*| &\leq L |x_k - x_{k+1}| \\ (1 - L) |x_{k+1} - x^*| &\leq L |x_k - x_{k+1}|. \end{aligned}$$

*Donc :*

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k+1}|.$$

*Pour calculer une valeur approchée  $x_{k+1}$  de  $x^*$  avec la précision  $\varepsilon = 0,5 \times 10^{-k}$  et avec les itérations jusqu'à  $k + 1$  :*

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{L}{1 - L} 0,5 \times 10^{-k}.$$

**Remarque :** *On a :  $0 < L < 1$ . Dans le cas où  $2L < 1$  et  $L < 1 - L$ ; ce qui donne :*

$$\frac{L}{1 - L} |x_{k+1} - x_k| \leq |x_{k+1} - x_k|.$$

Alors en conséquence : on prend souvent comme critère d'arrêt la condition suivante :

$$|x_{k+1} - x_k| \leq 0,5 \times 10^{-k}.$$

## 1.4 Méthode de bisection (dichotomie)

L'idée de la méthode basée sur la construction d'une suite d'intervalles de plus en plus petits contenant une racine  $x^*$  de l'équation non linéaire (1.1).

**Théorème (1.3) :** *On suppose que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et vérifie :  $f(a) \times f(b) < 0$ , alors : il existe au moins  $x^* \in ]a, b[$ ; tel que :  $f(x^*) = 0$ . En plus, si on ajoute la monotonie de la fonction  $f$ , alors  $x^*$  est unique.*

**Principe de la méthode :**

On pose  $a = a_0$ ,  $b = b_0$  et  $[a, b] = [a_0, b_0] = I_0$  on divise l'intervalle  $I_0 = [a_0, b_0]$  en deux :  $[a_0, x_0]$  et  $[x_0, b_0]$ ; où  $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ ; et on fait le test suivant :

Si  $f(a_0) \times f(x_0) < 0$ , alors :  $x^* \in [a_0, x_0] = [a_1, b_1] = I_1$ .

Si  $f(x_0) \times f(b_0) < 0$ , alors :  $x^* \in [x_0, b_0] = [a_1, b_1] = I_1$ .

On divise l'intervalle qui contient la solution en deux et on va faire la même chose (on teste); et de là, on itère le procédé pour obtenir une suite d'intervalles emboîtés :

$I_k = [a_k, b_k]$ ;  $k \in \mathbb{N}^*$  comme suit :

On pose :

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

1. Si  $f(a_k) \times f(x_k) < 0$ , alors :  $x^* \in [a_k, x_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1}$ .

2. Si  $f(x_k) \times f(b_k) < 0$ , alors :  $x^* \in [x_k, b_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1}$ .

Enfin, on prend comme approximation de  $x^*$  la valeur  $x_k$ . [9]

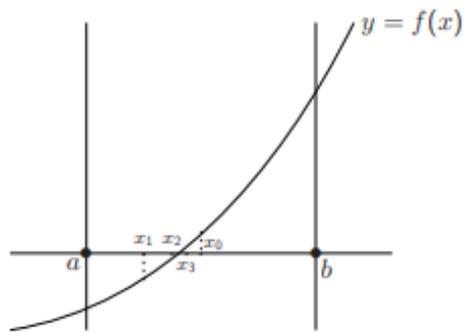


FIG. 1.4 – Méthode de dichotomie

# Chapitre 2

## Systemes d'equations non lineaires

Le probleme de resolution d'un systeme non lineaire de  $n$  equations avec  $n$  inconnues est un probleme tres utile aux applications. Donc, on propose dans ce chapitre les methodes numeriques les plus connues (*Newton-Raphson et point fixe*). Notre objectif ici est de faire une generalisation de quelques methodes qu'on a presente dans le premier chapitre (cas ou  $n = 1$ ).

**Position du probleme :** Pour faire la generalisation, on precise que  $n > 1$ , on donne une fonction  $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et on cherche un vecteur  $x^*$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui verifie l'equation vectorielle :  $f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}$ .

Autrement la fonction  $f$  est de  $\mathbb{R}^n$  a valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est-a-dire :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Ainsi le systeme s'ecrit sous sa forme explicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Il est clair que le système précédent est non linéaire si l'une des fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n$  est non linéaire.

Dans ce qui suit, on étudiera deux familles de méthodes pour la résolution approchée d'un système non linéaire (2.1) : Méthode de Newton-Raphson et la Méthode de Point fixe.

## 2.1 Méthode de Newton-Raphson

Dans cette section on va faire une généralisation à  $\mathbb{R}^n$  de la méthode de Newton qu'on a vu au chapitre 1 (cas scalaire). Donc, en tenant compte l'algorithme de Newton pour les équations à une seule variable et on considère le système non linéaire :

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n},$$

où la fonction vectorielle  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est toujours supposée de classe  $C^1$ .

Pour faire cette généralisation, On aura besoin d'introduire la notion d'une matrice

Jacobienne d'une fonction  $f$  et on la note  $J_f$  :

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

où les opérateurs  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ;  $i, j = 1, \dots, n$  désignent les dérivées partielles de  $f$ . Il est obligatoire de signaler ici que la méthode de Newton est applicable seulement dans le cas où la matrice  $J_f$  est inversible.

On introduit l'algorithme itératif de Newton-Raphson définit une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  et consacré à la résolution d'un système non linéaire :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_f^{-1}(x) f(x^{(k)}); k \geq 0. \end{cases}$$

Si la fonction  $f$  dont on cherche un zéro est linéaire et elle est définit par  $f(x) = Ax - b$ ; où  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}$ , alors, la méthode de Newton revient à résoudre le système linéaire  $Ax = b$ . En effet,  $J_f(x^{(k)}) = A$  et donc s'écrit  $Ax^{(k+1)} = b$ . Alors, cette équation est de la forme d'un système linéaire de  $n$  équations et  $n$  inconnues.

Autrement, si on écrit le système non linéaire précédent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}; \forall k \geq 0 \end{cases}$$

où l'accroissement  $\Delta x^{(k)}$  est choisi de manière à annuler le développement au premier ordre de  $f(x^{(k+1)})$ , c'est-à-dire :

$$f(x^{(k)}) + J_f(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} = 0.$$

Utilisant le développement de Taylor d'une fonction à plusieurs variables en trouvant :

$$\begin{aligned} f(x^{(k+1)}) &= f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) \\ &= f(x^{(k)}) + J_f(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} + \theta(\|\Delta x^{(k)}\|^2). \end{aligned}$$

Donc :

$$J_f(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)})$$

si  $\det(J_f(x^{(k)})) \neq 0$ . D'une manière plus simple lorsqu'on pose :

$$-J_f^{-1}(x) f(x^{(k)}) = \Delta x^{(k)},$$

et par une prémultiplication simple par la matrice Jacobienne, on trouve exactement la même formule. Il est clair que cette formule est un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues qui possède une solution unique. Ce système linéaire doit être résolu à chaque itération. Si  $k$  est petit, on peut exprimer la matrice Jacobienne inverse  $(J_f(x^{(k)}))^{-1}$  et le calcul de l'accroissement  $\Delta x^{(k)}$  par le produit matriciel. Mais dans les autres cas, Il faut faire appel à chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson à un algorithme numérique de résolution de système linéaire (méthode de Gauss, factorisation  $LU, \dots$ ).

Jusqu'à Maintenant, on peut conclure que la méthode de Newton-Raphson pour la résolution d'un système non linéaire est une suite de vecteurs et pour assurer la convergence de cette suite il faut vérifier quelques conditions.

Si  $f$  est de classe  $C^2$  et si la matrice Jacobienne  $J_f(x^*)$  est inversible, alors l'algorithme de Newton-Raphson converge lorsque  $x^{(0)}$  est choisi très proche de la solution  $x^*$  et la convergence est d'ordre 2.

L'avantage majeur de l'algorithme de Newton-Raphson dans l'ensemble des méthodes de résolution des systèmes non linéaire est sa rapidité de convergence, qui nécessite la minimisation de l'écart  $\|x^* - x^{(0)}\|$ .

Comme on a cité précédemment, la méthode de Newton nécessite à chaque étapes la résolution d'un système linéaire, où la matrice associée à ce système est la matrice Jacobienne qu'elle est couteuse en calcul.

Dans la section suivante, on présente une deuxième méthode très connue pour la résolution d'un système non linéaire.

## 2.2 Méthode de point fixe

Pour exposer l'algorithme de point fixe, on considère une fonction vectorielle :

$f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et on définit la fonction  $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  par  $g(x) = x + f(x)$ . On peut alors remarquer facilement que  $f(x) = 0$  si et seulement si  $g(x) = x$ , où  $g$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  notée :

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

On va faire les mêmes études qu'on a vues dans le cas scalaire. Alors, la méthode de point fixe pour résoudre un système d'équations non linéaires est aussi une suite itérative défini en fonction de  $g$  :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in D \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}); \forall k \geq 0, \end{cases}$$

où  $D$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $x^{(0)}, x^{(k)}$  et  $x^{(k+1)}$  trois vecteurs de  $D$ . On sait bien que la méthode de point fixe est performante et efficace si elle est convergente vers la solution cherchée. La convergence de cette suite est assurée par le théorème de point fixe.

Ce théorème fournit une condition suffisante de convergence de la méthode de point fixe. Pour étudier cette convergence, on introduit une norme de  $\mathbb{R}^n$  qu'on la note  $\|\cdot\|$ ; la norme matricielle correspondante à la matrice Jacobienne de la fonction  $g$  :

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

**Définition (2.1) :** *On dit qu'une fonction  $g$  est Lipschizienne dans  $D$  pour la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si :*

$$\exists L < 1 / \|g(a) - g(b)\| \leq L \|a - b\|; \forall (a, b) \in D^2.$$

On suppose que la fonction  $g$  est de classe  $C^1$ , on dit que  $g$  est contractante dans  $D$  pour la norme  $\|\cdot\|$  si et seulement si le rapport de Lipschiz  $L < 1$ ; c'est-à-dire :

$$\exists L < 1; \text{ tel que : } \|J_g(x)\| \leq L; \forall x \in D.$$

Dans ce qui suit, on présente le théorème clé pour la convergence de notre méthode.

**Théorème (2.1)** (point fixe) : *Soit  $D$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $g$  est contractante dans  $D$  et si  $g(D) \subset D$ . Alors : il existe un unique point fixe  $x^* \in D$  qui vérifie  $g(x^*) = x^*$ ; de plus :  $\forall x^{(0)} \in D$ , la suite définie par  $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$  converge vers ce point  $x^*$ .*

Pour démontrer ce théorème, on peut suivre les mêmes étapes que le cas scalaire.

On définit la suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  de vecteur initial  $x^{(0)} \in D$  et de terme général :

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

**Preuve :** Pour résoudre le système d'équations non linéaires  $f(x) = 0$ , où  $f$  est une fonction vectorielle définie sur l'espace  $D$ , on transforme  $f(x) = 0$  à  $g(x) = x$ . Tout d'abord, on veut démontrer l'existence et l'unicité de  $x^*$  ensuite, on démontre la convergence de la suite de point fixe vers ce point.

La suite  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  est convergente parce qu'elle est de Cauchy dans un espace complet  $D$ . En effet, par définition :  $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ ; on peut écrire pour tout  $k \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| &= \|g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})\| \\ &\leq L \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\ &\leq L^2 \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|, \end{aligned}$$

par récurrence rétrograde, on obtient :

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|; \forall k \geq 0,$$

ou encore, on peut démontrer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|x^{(k+p)} - x^{(p)}\| &\leq \|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}\| + \dots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &\leq \sum_{q=1}^p \|x^{(k+q)} - x^{(k+q-1)}\| \\ &\leq \sum_{q=1}^p L^{k+q-1} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \|x^{(1)} - x^{(0)}\| L^k (1 + L + \dots + L^{p-1}). \end{aligned}$$

Dans le deuxième membre de l'inégalité, on a une somme d'une suite géométrique, on trouve enfin :

$$\|x^{(k+p)} - x^{(p)}\| \leq \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \frac{L^k}{1-L}.$$

Car  $L < 1$  donc le deuxième terme tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ . Alors, notre suite est de Cauchy convergente parce que  $D$  est complet.

On sait bien que toute fonction strictement contractante, elle est continue; donc,

on a :  $g(x^{(k)})$  tend vers  $g(x^*)$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ . Lorsque  $k$  est suffisamment grand, on passe à la limite dans l'égalité :  $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ , on déduit que  $x^* = g(x^*)$ .

Pour l'unicité, on suppose qu'on a deux points fixes  $x_1^*$  et  $x_2^*$  de la fonction  $g$ , on a alors :  $x_1^* = g(x_1^*)$  et  $x_2^* = g(x_2^*)$ , ces points fixes vérifient :

$$\|g(x_1^*) - g(x_2^*)\| \leq L \|x_1^* - x_2^*\|$$

est une contradiction parce que  $L < 1$  ; donc le point fixe  $x^*$  est unique.

Si les hypothèses de ce théorème sont vérifiées : l'erreur commise pendant l'exécution de la méthode de point fixe est donnée par :

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

où  $L < 1$  étant la constante de lipschitz de la fonction  $g$ ; telle que :  $\|g(a) - g(b)\| \leq L \|a - b\|$  ou bien  $\|J_g(x)\| \leq L$ .

# Chapitre 3

## Applications

Pour démontrer la grande utilité des systèmes d'équations non linéaires dans plusieurs domaines scientifiques et pour faciliter l'étude, on va présenter deux applications célèbres ; la première au physique ; plus précisément au semi conducteur et la deuxième au GPS pour positionner un point  $M$  dans l'espace.

La première application qu'on va voir dans ce chapitre est un phénomène au physique qu'étudie l'effet de quelques paramètres au semi conducteur.

### 3.1 Système non linéaire et Semi-conducteur

On considère un échantillon de la longueur de Semi-conducteur soumis à des conditions instables par exemple : la lumière va et vient ou lumière latérale et nous le traduisons en forme d'équation puis on le divise par parties ; et dans chaque partie il y a des équations dans les points essentiels et les secondaires et chaque équation donne une matrice, après on mis ces matrices comme une boucle grâce au logiciel Silvaco ; qui est un programme de simulation de cellules solaires et il est travaillé pour les systèmes d'équations non linéaires.

Le but des systèmes non linéaires c'est : d'utiliser le moins de plaques et ils obtiennent

un bon rendement de chaque cellule solaire.

De nombreuses méthodes d'identification de paramètres ont été proposées afin de mieux comprendre les mécanismes physiques opérant à l'intérieur des cellules solaires et par conséquent, les différents paramètres influençant leurs caractéristiques. Leurs méthodes consistent notamment à augmenter le rendement de la cellule photovoltaïque qui est peut être réalisée avec de nombreux Semi-conducteurs. En réalité, il existe aujourd'hui trois filières technologiques principales :

-*Le silicium cristallin.*

-*Les couches minces.*

-*Les cellules organiques.*

Ces filières se partagent inégalement le marché comme le montre la figure :

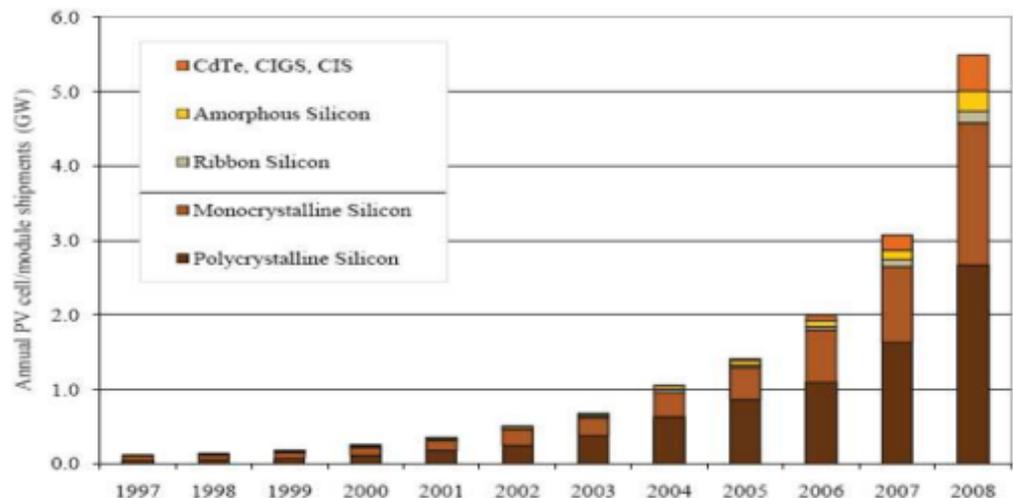


FIG. 3.1 – Evolution de la production mondiale des différentes technologies de cellules PV

Mais aussi à simuler son comportement et à optimiser ses différentes caractéristiques. Certaines des méthodes suggérées utilisent des mesures prises à différents niveaux de luminosité, tandis que d'autres utilisent des conditions d'obscurités et de lumière.

Les deux modèles les plus fréquemment utilisés dans ce domaine d'études sont le modèle à une exponentielle et deux exponentielle. Les paramètres du modèle à simple exponentielle (une seule diode) sont : le courant de saturation, la résistance série, le facteur d'idéalité, la résistance shunt et le photo-courant.

Pour trouver la valeur du courant  $I$  d'une cellule ou d'un système photovoltaïque en fonction de ses paramètres revient à résoudre l'équation non linéaire issue du modèle à une exponentielle.  $I$  est en fonction de :  $I_{sc}, I_{co}, I_s, I_d, R_s, R_{sh}$  qu'on va définir prochainement.

### 3.1.1 Paramètres du modèle mathématique à une diode

**LE COURANT GENERE PAR LA CELLULE** : Est donné par la loi de Kirchoff :

$$I = I_s - I_d - I_{Rsh-Rs};$$

$I$  : le courant délivré par la cellule.

$I_{sc}$  : le courant de court circuit.

$I_d$  : le courant de la diode.

$I_{sh}$  : le courant shunt.

$I_s$  : le courant série.

$$I_{sc} = \frac{G}{100} [I_{SCR} + K_i(T_c - T_r)];$$

$I_{SCR}$  : le courant de court circuit a la température de référence.

$K_i$  : le coefficient de température de court circuit.

$T_r$  : la température de référence.

**COURANT DE LA DIODE :**

$$I_D = I_s \left( \exp\left(\frac{q(V + I_{RS})}{AKT_c}\right) - 1 \right);$$

$I_s$  : le courant de saturation.

$q$  : la charge d'électron.

$A$  : le facteur d'idéalité de la jonction.

$K$  : la constante de Boltzmann.

$$I_S = I_{or} \left(\frac{T_c}{T_r}\right)^3 \exp\left(\frac{qE_g}{KA} \left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_c}\right)\right);$$

$I_{or}$  : le courant de saturation a la température de référence.

$E_g$  : l'énergie de gap d'un matériau semi-conducteur.

**3.1.2 Expression mathématique pour un module photovoltaïque :**

**TEMPERATURE DE LA CELLULE :**

$$\frac{NOCT - 20}{G} G + T_a;$$

$NOCT$  : température nominal de la cellule.

$T_a$  : température ambiante pour un nombre  $n_p$  de cellules connectées en parallèle.

$n_s$  : nombre de cellules connectées en série.

**RESISTANCES EQUIVALENTES :** La résistance shunt équivalente et la résistance

série équivalente sont données respectivement :

$$R_{SRT} = \frac{n_p}{n_s} R_{Sh} \text{ et } R_{ST} = \frac{n_s}{n_p} R_s.$$

Enfin, on donne l'expression mathématique pour un module photovoltaïque avec  $n_p * n_s$  cellules par la formule suivante :

$$I \left( 1 + \frac{R_{ST}}{R_{ShT}} \right) - n_p I_{sc} - n_p I_s \left( \exp \left( \frac{q \left( \frac{v}{n_s} + I R_{ST} \right)}{AKT_c} \right) - 1 \right) - \frac{v}{n_s R_{ShT}}.$$



## 3.2 Méthode de Newton et GPS :

Dans cette section, on donne une deuxième application qu'elle est très importante et très utile qui est la positionnement d'un point quelconque dans l'espace par un GPS à l'aide de quelques satellites.

Avant de commencer notre application, on considère les pseudo distances  $D_1, D_2$  et  $D_3$  au récepteur des satellites. Mathématiquement, pour définir  $D_1, D_2$  et  $D_3$ , on introduit la norme matricielle pour mesurer les distances aux satellites afin de trouver la position du point  $M(x, y, z)$ ; c'est-à-dire : trouver les trois composantes  $(x, y, z)$  qui former la solution du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} (D_1)^2 = \|S_1 M\|^2 = C^2(\Delta T_1)^2 \\ (D_2)^2 = \|S_2 M\|^2 = C^2(\Delta T_2)^2 \\ (D_3)^2 = \|S_3 M\|^2 = C^2(\Delta T_3)^2 \end{cases}$$

Autrement et plus de détails, on peut écrire le système non linéaire précédent

comme suit :

$$\begin{cases} (D_1)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = C^2(\Delta T_1)^2 \\ (D_2)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = C^2(\Delta T_2)^2 \\ (D_3)^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = C^2(\Delta T_3)^2 \end{cases}$$

Le but ici est de trouver le vecteur  $(x, y, z)^T$  pour positionner le point  $M$ . Pour aboutir à notre but, on utilise la méthode de Newton-Raphson adaptée à la résolution d'un système non linéaire  $f(x) = 0$  qu'on a exposé dans le deuxième chapitre.

Tout d'abord, en reformulant le système précédent comme une équation vectorielle de deuxième terme nulle. En effet, la fonction à plusieurs variables qui répond à notre problème est la suivante  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  qui associe chaque triplet  $(x, y, z)$  par :

$$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Pour  $i = 1, 2, 3$ , on a :

$$f_i(x, y, z) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - C^2(\Delta T_i)^2.$$

Pour cette fonction, en faisant appelle à l'algorithme de Newton-Raphson, on trouve alors l'équation itérative suivante :

$$\begin{cases} X^{(0)} \text{ vecteur initial donné} \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} + N^{(k)}; k \geq 0 \end{cases}$$

Pour chaque  $k$ , le vecteur  $N^{(k)}$  définit par :

$$J_f N^{(k)} = -f(x^{(k)}); X^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}).$$

La matrice jacobienne  $J_f$  :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

supposée inversible en chaque point  $X^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)})$  pour  $k \geq 0$ . bien sûr, les systèmes linéaires obtenus dans chaque étapes de cette méthode sont résolus par l'un des méthodes numériques connus (Gauss, factorisation LU, Cholesky, ...).

### 3.3 Algorithme de Newton-Raphson au GPS :

A partir d'un vecteur initial  $X^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$  et d'une valeur initiale  $k = 0$ , on répète les calculs jusqu'à la condition d'arrêt suivante :

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$$

est vraie; telle que :  $\varepsilon$  est une précision fixée. L'algorithme itératif suivant, nous permet de retrouver la position du récepteur ainsi que le temps de désynchronisation qui était connu au départ.

**ALGORITHME :** *Détermine la position d'un point quelconque dans l'espace.*

**Partie initiale :** *Une position initiale a été calculée avec 3 satellites et on a comme données initiales  $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$  à l'instant  $t_0$ .*

**Partie principale :** *On effectue les itérations avec une condition d'arrêt :*

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon,$$

*avec  $\varepsilon$  est la précision attendue donnée au début. Le dernier vecteur  $X^{(k+1)}$  est la*

racine approchée de l'équation vectorielle;  $f(x) = 0$ .

Les itérations effectuées sont basées sur la formule  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + N^{(k)}$ ; où  $N^{(k)}$  pour chaque itération est la solution du système linéaire :

$$J_f N^{(k)} = -f(X^{(k)}); k \geq 0,$$

donc :

$$X^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}).$$

**Partie finale :** Enfin, cet algorithme nous donne la position cherchée du point  $M(x, y, z)$ .

Pour atteindre une précision très élevée, on essaye toujours de bien choisir les valeurs initiales pour minimiser le nombre d'itérations nécessaires afin de réduire l'erreur commise.

# Conclusion

En conclusion, on peut dire que la recherche sur les systèmes d'équations non linéaires est également liée à la recherche sur la modélisation mathématique et l'analyse numérique.

A cette raison on a proposé dans le premier et le deuxième chapitre quelques méthodes numériques de résolution d'équations et systèmes non linéaires (*Newton-Raphson, Point fixe,...*). On a découvert après que ces méthodes sont des suites itératives converge vers la solution cherchée; on a donné ses définitions, ses conditions de convergence et ses erreurs entre les valeurs exactes et les valeurs approchées.

On a proposé après deux applications très importantes. La première dans le domaine de physique; on a découvert les cellules solaires et ces paramètres et la deuxième application, elle emploie plus de mathématiques et de ceci est vraiment significative et utile.

L'avenir des systèmes d'équations non linéaires est étroitement lié à celui de l'informatique et de la modélisation mathématiques et nous pouvons nous attendre à voir de nouvelles applications et développement dans ce domaine à mesure que la technologie continue de progresser.

# Bibliographie

- [1] Alaoui, M. A., & Bertelle, C. (2002). *Méthodes Numérique appliquées : cours et exercices corrigés et mise en œuvre en JAVA*.
- [2] Bakhvalov, N. S. (1976). *Méthodes Numériques : analyse, algèbre, équations différentielles ordinaires*. Editions Mir.
- [3] GOATIN, P. (2005). *Analyse Numérique : Université du Sud Toulon-Var ISITV-1ère année*.
- [4] Marie-Hélène Meurisse. *Méthodes Numériques : Algorithmes Numériques, Fondements théoriques et Analyse pratique. Cours, exercices et applications avec Matlab*.
- [5] Mustapha Lakrib. *Analyse Numérique : cours et exercices résolus, ellipses en février 2017*.
- [6] Quarteroni A., Sacco, R., & Saleri, F. (2008). *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer Science et Business Media.
- [7] Raphaële Herbin (2006-2007) *Cours d'analyse numérique : université Aix Marseille 1. Licence de mathématique*.
- [8] Reghiss, I., & Zaabat, M. (2013). *Simulation des cellules solaires*.
- [9] Walter, E. (2015). *Méthodes Numériques et optimisation : un guide du consommateur*.

## Résumé :

Dans notre mémoire, on a proposé l'étude des systèmes d'équations non linéaires parce que ce sujet se rencontre dans nombreux domaines scientifiques et techniques; notamment la physique, l'ingénierie, l'économie et la biologie....

On a proposé les méthodes numériques les plus utilisées pour trouver les solutions approchées de ces systèmes et pour les applications, on a fait deux: la première est consacrée au semi-conducteur et la deuxième est la méthode de Newton au GPS.

## Abstract :

In our memory, we study the non-linear equation systems. This subject has been proposed because is found in many scientific and technical fields; like the physics, engineering, economics and biology. We proposed the most used numerical methods to find the approximate solutions for these systems. For the applications, we proposed two: the first is dedicated to the semi-conductor and the second is the Newton method on the GPS.

## المخلص

في مذكرتنا ، تم تقديم دراسة جمل المعادلات الغير خطية لأن هذا الموضوع يطبق في العديد من المجالات العلمية والتقنية ، وخاصة في الفيزياء والهندسة والاقتصاد والبيولوجيا. تم طرح الطرق العددية الأكثر استخدامًا للحصول على الحلول المناسبة لهذه الجمل، وفيما يخص تطبيقاتها، تم تقديم اثنين: الأول مخصص للساكنة، والثاني هو طريقة نيوتن الخاصة بتحديد موقع نقطة ما في الفضاء.