République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Analyse

Par

Ghoul Zoulikha

Titre :

Existence globale et explosion en temps fini pour certaine problème d'évolution

Devant le Jury :

Mr.	Fouzia RADJEH	MCA	U. Biskra	Président
Mr.	Mohamed BERBICHE	Professeur	U. Biskra	Rapporteur
Mme.	Ibrahim REZKI	MAA	U. Biskra	Examinateur

Soutenu Publiquement le .18./06/2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

À Mes chers parents,source de la vie et d'amour.

À ma chère sœurs et mes chers frères,source de joie et de bonheur.

(**EL HAMEL.FARHAT.ABD ELOUAHAB.MOHAMED.AICHA.REBIHA.TOURKIA.REGUIA.CHAHRAZED**)

À tous les membres de ma famille.

À toute personne qui occupe une place dans mon cœur(Mes crédits).

À mon mari BOUZID..

Remerciements

Tout d'abord je remercie ALLAH tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et la patience d'achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire monsieur Mohamed BERBICHE : Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse aussi mes remerciements aux Fouzia RADJEH et Ibrahim REZKI membres de jury pour avoir bien voulu juger ce travail.

Je remercie mes trés chers parents qui ont toujours été là pour moi,ils se tout sacrifié pour leur enfants n'ont épargné ni efforts ni santé.ils m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler.

Un salut du cœur à mes grands parents pour leurs prières et leurs encouragements.

Toute ma gratitude et mes chaleureux remerciements vont à ma chère soeur,à mes chers frères,à mes amies et à tout ma famille.

Résumé du mémoire

Dans ce mémoire, on étudie les questions liées à l'existence et à l'unicité des solutions globales et explosons pour l'équation d'évolution semi-linéaire du quatrième ordre.

Le problème qui est abordé ici est l'étude du modèle introduit par Boussinesq dans [1], posé dans l'espace R^n tout entier avec double termes dispersifs. On commençe par introduire le modèle mathématique et définir quelques fonctionnels et ensembles invariants. Ensuite, en exploitant la théorie du puits de potentiel, l'existence globale de la solution est fournie et dans le dernier chapitre, on étudie la propriété d'explosion via le puits de potentiel combiné à la méthode de la concavité.

Table des matières

Introduction

L'étude de Scott Russell [4] sur les ondes d'eau solitaires a motivé le développement des edp's nonlineaires pour la modélisation des phénomènes ondulatoires dans les fluides, les plasmas, les corps élastiques, etc.bien connu que l'équation de Boussinesq (Bq) peut être écrite sous deux formes de base

$$u_{tt} - u_{xx} + a u_{xxxx} = \left(u^2\right)_{xx} \tag{1}$$

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = \left(u^2\right)_{xx} \tag{2}$$

L'équation (2) est un modèle important qui represente l'approximation de la propagation des ondes de surfaces en eau peu profonde comme les autres équations de Boussinesq (avec u_{xxxx} au lieu de u_{xxtt}). Dans le cas où $a > 0$ (1) est linéairement stable et régit les petites oscillations transversales non linéaires d'une poutre élastique (voir [2] et ses références). On l'appelle la "bonne" équation de Boussinesq, tandis que l'équation avec $a < 0$ a reçu le nom de "mauvais" Boussinesq équation car elle a une instabilité linéaire. Équation (1) a été déduit pour la première fois par Boussinesq [4]. L'équation (2) est appelée équation de Boussinesq améliorée (IBq).

Les équations de Boussinesq en mécanique des fluides désignent un système d'équations d'ondes obtenu par approximation des équations d'Euler pour des écoulements incompressibles irrotationnels à surface libre. Elles permettent de prévoir les ondes de gravité comme ondes cnoïdales, ondes de Stokes, houle, tsunamis, solitons, etc. Ces équations ont été introduites par Joseph Boussinesq en 1872 et sont des exemples d'équations aux dérivées partielles dispersives.

L'équation de Boussiensq a été largement étudiée sous divers aspects des mathématiques et de la physique depuis le début des années 1960 après les phénomènes en physique, biologie, électronique et mécanique en utilisant la théorie des solitons. Il est également très apprécié pour ses nombreuses applications dans les études d'ingénierie côtière et océanique (c'est-à-dire tsunamiet modélisation des marées). De point de vue mathématique, l'etude des propriétés qualitatives des équaions d'evolution de Boussinesq impliquant des termes dispersives est également important pour de tels systèmes se produisant dans de divers problèmes de sciences appliquées, et attiré l'attention de nombreux mathematiciens et beaucoup d'efforts ont été faits pour établir les conditions suffisantes de l'existence, la non-existence de solutions globales et le comportement asymptotiques de divers problèmes aux limites associés voir [5],[6],[8],[10], [11], [9].

Le présent mémoire contient trois principaux chapitres :

Le premier chapitre est consacré à rappeler quelques notions élémentaires d'analyse fonctionnelle telles que les espaces de Banach, les espaces de Hilbert en particulier les espaces L^p, les espaces de Sobolev puis rappeler quelques définitions et propriétés importantes concernant la convergence faible, la convergence faible $*$ et la convergence forte ainsi que leurs propriétés et enfin on parle la méthode de Galerkin.

Dans le deuxieme chapitre on présente un problème de Cauchy du second ordre de double dispersion. non linéaire. On commence d'introduire la méthode de potentiel qui a été introduite en 1968 par Sattinger [7] afin de prouver l'existence globale de solutions pour des équations hyperboliques non linéaires. On vise à donner des conditions suffisantes et nécessaires sur les données initiales ainsi que sur les termes non linéaires à l'existence globale d'une solution à un tel problème. Pour ce faire, on utilise les méthodes variationnelles et l'existence des ensembles invariants de solutions.

Dans le troisieme chapitre, on établit l'existence de solutions globales et on obtient le temps fini d'explosion des solutions avec énergie initiale sous-critique et critique par méthode de puits de potentiel et méthode de concavité. De plus, la limite supérieure du temps d'explosion pour les solutions d'explosion t^* à temps fini est également dérivé.

....

Chapitre 1

Notions Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de fournir les outils de base nécessaires pour comprendre les concepts qui sera manipulé tout au cours de ce mémoire. On présente les définitions, ainsi que les propriétés directement utiles par la suite.

1.1 Rappel sur quelques outils d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Système d'équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1.1 *Un système d'équations aux dérivées partielles est un ensemble de plusieurs inconnus fonctions.*

Par exemple, on a une partie de l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0 \quad \text{équation de Laplace.}$$

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0 \ \text{ équation de transport.}$$

$$u_t - \Delta u = 0 \ \text{ Équation de diffusion(chaleur).}$$

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \ \text{ Équation des Ondes.}$$

$$iu_t + \Delta u = 0 \ \text{ Équation de Schroodinger.}$$

$$u_t + u_{xxxx} = 0 \ \text{ Équation du faisceau.}$$

Equations non linéaires

$$\Delta u = f(u) \text{ Equation de Poisson non linéaire.}$$

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0 \ \text{ Equation p-laplacienne.}$$

$$u_{tt} - \operatorname{div} a.(\nabla u) = 0 \ \text{ Equation des ondes équation non linéaire.}$$

$$u_t - \Delta u = f(u) \ \text{ Equation diffusion nonlinear (de la chaleur).}$$

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Espace de Banach

Définition 1.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique, on dit que une suite (x_n) est une suite de Cauchy de X, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \ \forall m \geq n_0, \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.2 *Soit (X, d) un espace métrique, on dit que X est un espace* *complet si et seulement si toute suite de Cauchy convergente.*

Définition 1.2.3 *Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit qu'une application N de E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ dénotée par $\|\cdot\|_E$ est une norme E si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies :*

1. $\forall x \in E; \|x\|_E = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}; \|\lambda x\|_E = |\lambda| \, \|x\|_E$ *(homogénéité).*
3. $\forall x, y \in E; \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple $(E, \|\cdot\|_E)$ est appelé espace normé.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé, on définit l'application d par

$$\begin{cases} d : E \times E \to \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \to \|x - y\| \end{cases}$$

d est une distance sur E, appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.2.4 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé. On dit que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach si l'espace métrique (E, d) où d est la distance associée à la norme standard $\|\cdot\|$ (i.e $d(x, y) = \|x - y\|$) est un espace complet.*

1.2.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.5 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que l'application*

$$h : E \times E \to \mathbb{K}$$

$$(u, v) \to h(u, v) = (u, v),$$

est un produit scalaire sur E s'il vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous u, v et $w \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1. $(u, v) = \overline{(u, v)}$ *(Hermitien).*
2. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$
3. $(u, u) \geq 0$ *et* $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ *(défini positif).*

Un espace vectoriel muini d'un produit scalaire est appelé espace prehilbertien.

Un espace de Hilbert $(H, (.,.))$ est un espace préhilbertien complet avec la norme $(u, u)^{\frac{1}{2}}$(i.e $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$).

1.2.3 Espaces de Lebesgue

Définition 1.2.6 *Soit $p \in \mathbb{R}$ $(1 \leq p < +\infty)$, on définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ } mesurable \text{ } et \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ définir par :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ } est \text{ } mesurable \text{ } et \text{ } \exists C > 0 tel \text{ } que \text{ } |u(x)| \leq C \text{ } p.p \text{ } sur \text{ } \Omega\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \inf \{C > 0, \ |u| \leq C \text{ } p.p \text{ } sur \text{ } \Omega\}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ *équipé de la norme* $\|\cdot\|_p$ *est un espace Banach space, pour tout* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Remarque 1.2.1 *Un exemple d'un espace de Hilbert est le cas* $p = 2$*,* L^2*est l'ensemble de fonctions carré intégrables sur* Ω*, qui se composent de toutes les fonctions mesurables complexes* f *vérifiant*

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

équipé d'une norme dans $L^2(\Omega)$ *définie par*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ *est naturellement équipé du produit scalaire suivant*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx, \text{ chaque fois que } f, g \in L^2(\Omega).$$

On peut considérer la généralisation suivante : pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $1 \leq r < \infty$*,*

$$L^r(\Omega; \mathbb{R}^m) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{mesurable telle que } \int_\Omega |f|^r \, dx < +\infty \right\}.$$

où $|\cdot|$ *désigne toute norme (par exemple la norme euclidienne) dans* $\mathbb{R}^m$*.*

Remarque 1.2.2 *On donne une définition équivalente pour l'espace* $L^r(\Omega; \mathbb{R}^m)$*.*

$$L^r(\Omega; \mathbb{R}^m) = \left\{ u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T; \; u_i \in L^r(\Omega); \; \forall i = 1; 2; ...; m \right\}.$$

L'espace $(L^r(\Omega;\mathbb{R}^m);\|u\|_{L^r(\Omega;\mathbb{R}^m)})$ *où*

$$\|u\|_{L^r(\Omega;\mathbb{R}^m)} = (\int_\Omega |u|^r \, dx)^{\frac{1}{r}},$$

est un espace de Banach. Dans le cas avec $r = 2$ *l'espace* $L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ *est équipé du produit scalaire suivant*

$$(u,v)_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)} = \int_\Omega (u,v)_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i(x).v_i(x)dx,$$

est un espace Hilbert.

Définition 1.2.7 *Soit* V *est un espace Banach et* $1 \leq p < \infty$*. On noté par* $L^p(0,T,V)$ *l'espace de fonctions mesurables,* $u :]0,T[\to V$ *tel que* $\int_0^t \|u(t)\|_V^p \, dt < \infty$*.*

La norme sur ces espaces donnée par :

$$\|u\|_{L^p(0,T,V)} = (\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Théorème 1.2.1 *L'espace* $(L^p(0,T,V),\|u\|_{L^p(0,T,V)})$ *est un espace de Banach. En particulier* $p = 2$*,* E *est un espace Hilbert,* $L^2(0,T,E)$ *est l'ensemble des fonctions* $f : t \in [0,T] \to E$ *vérifiant aux conditions suivantes :*

1. $t \to (f(t),g)_E$ *est une fonction mesurable, pour tous* $g \in E$
2. $\int_0^T \|f(t)\|_E^2 \, dt < +\infty$,

   avec le produit scalaire suivant :

$$(f,g)_{L^2(0,T,E)} = \int_0^T (f(t),g(t))_E dt.$$

$L^2(0, T, E)$ est un espace Hilbert.

Définition 1.2.8 *Soit V est un espace Banach, on définit $L^\infty(0, T, V)$ par :*

$$L^\infty(0, T, V) = \left\{ u : (0, T) \to V \text{ mesurables et } \|u\|_{L^\infty(0,T,V)} < \infty \right\},$$

où

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,V)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \|u(t)\|_V .$$

1.2.4 Espaces de distributions

Le support d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \to R$ ($\operatorname{supp} f$) est l'ensemble de tous les points où f ne s'anulle pas

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in R^n, f(x) \neq 0\}}.$$

Soit Ω est un ensemble ouvert non vide dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. On note par $D(\Omega)$ (ou $C_0^\infty(\Omega)$) l'ensemble de fonctions à valeurs réelle, infiniment différenctiable en Ω à support compact.

L'espace $D(\Omega)$ est appelé l'espace de fonctions tests.

Soit Ω est un ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Définition 1.2.9 *Une distribution T sur Ω est une application $T : D(\Omega) \to \mathbb{C}$ tel que*

1. (Linéarité) Pour tous φ,$\psi \in D(\Omega)$ et tous α, $\beta \in \mathbb{C}$,

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi).$$

2. (Continuité) Si $\varphi_n \to \varphi$ dans $D(\Omega)$, alors $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$. L'ensemble de toutes les distributions est noté par $D'(\Omega)$.

Définition 1.2.10 *(Différentiation des distributions dans $D'(\Omega)$) Si α est un multi-indices et $u \in D'(\Omega)$, la formule*

$$\langle \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_i}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Définition 1.2.11 *On note par $D'(0,T,V)$ l'espace de distributions définies sur $(0,T)$ à valeurs*

dans V, et pour $u \in L^p(0,T,V)$, on a :

$$u(\varphi) = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in D(0,T).$$

Le résultat suivant sur l'espace $L^p(0,T,V)$ est très utile pour la suite.

Lemme 1.2.1 *Soit $u \in L^p(0,T,V)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T,V)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, alors, la fonction $u : [0,T] \to V$ est continue.*

1.2.5 Espaces de Sobolev

Définition 1.2.12 *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. On définit l'espace Sobolev $H^1(\Omega)$ par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ v \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

L'application $(.,.)_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx \ \forall x \in \Omega,$$

est un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$. L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme :

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = (v,v)_{H^1(\Omega)}$$
$$= \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\,,.$$

où

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + ... + \left\|\frac{\partial v}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

est un espace Hilbert.

Définition 1.2.13 *Soit Ω est un ensemble ouvert non vide dans $\mathbb{R}^n$,$(n \geq 1)$ on définit l'espace Sobolev $H^1_0(\Omega)$ par :*

$$H^1_0(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega),\ \textit{tel que } v\,|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Espaces de Sobolev d'ordre superieur

Définition 1.2.14 *Soit Ω est un ensemble ouvert non vide dans $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, et $m \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in H^m(\Omega)$ si $u \in L^2(\Omega)$ et si tous ses dérivés au sens des distributions, jusqu'à l'ordre m sont encore dans $L^2(\Omega)$. i.e*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega),\ \forall\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \textit{ où } |\alpha| \leq m,\ \textit{nous avons } D^\alpha(u) \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Définition 1.2.15 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{R}$ où $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \textit{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^* \textit{ tel que } \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}...\partial_n^{\alpha_n}\}.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ équipé de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}, 1 \leq p < \infty,\ u \in W^{m,p}(\Omega),$$

est un espace Banach. L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ est la clôture de $D(\Omega)$ sur $W^{m,p}(\Omega)$.

Lorsque $p = 2$, on obtient $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

L'espace $H^m(\Omega)$ est équipé du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u\ \partial^\alpha v\ dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace Hilbert.

Deplus

1. Si $p \geq q$, $H^p(\Omega) \subset H^q(\Omega)$, avec injection continue.

2. L'espace $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, et on a ce qui suit :

$$D(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega),$$

   où $H^{-m}(\Omega)$ désigne le dual de $H_0^m(\Omega)$.

On a également

Théorème 1.2.2 *On suppose que Ω est de frontière régulière. Alors,*

1. *Si $1 \leq p < n$ alors $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour chaque $q \in [p, p^*]$ où $p^* = \frac{np}{n-p}$.*

2. *Si $p = n$ alors $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour chaque $q \in [p, \infty)$.*

3. *Si* $p \succ n$ *alors* $W^{1,p} \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$, *où* $\alpha = \frac{p-n}{p}$.

4. *pour tout* $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ *et pour* $\partial\Omega$ *suffisamment lisse, on a*

$$\|\varphi(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} . \tag{1.2}$$

1.3 Inégalités

Proposition 1.3.1 *(inégalité de Cauchy-Schwarz) Si* $f,\ g \in L^2(\Omega)$ *l'inégalité Cauchy-Schwarz est :*

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} . \|g\|_{L^2(\Omega)} .$$

Définition 1.3.1 *(inégalité de Hölder) Soit* E *espace mesurable,* $p,\ q \geq 1$ *tq :* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(E)$ *et* $g \in L^q(E)$ *alors le produit* $f.g \in L^1(E)$ *et on a :*

$$\|f.g\|_{L^1(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} . \|g\|_{L^q(E)} .$$

Dans les autres cas, pour $0 < p,\ q < +\infty$ *définir par* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, *si* $f \in L^p(E)$ *et* $g \in L^q(E)$ *alors le produit* $f.g \in L^r(E)$ *et*

$$\|f.g\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)} . \|g\|_{L^q(E)} .$$

Inégalité de Cauchy

Lemme 1.3.1 *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}_+$, *on a*

$$ab \leq \frac{\delta^2}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta^2}b^2.$$

Inégalité de Young

Lemme 1.3.2 *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité suivante*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

où, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 1.3.2 *(Produit de convolution) Soient f et g deux fonctions localement pertinentes. Le produit de convolution des fonctions f et g est la fonction :*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.3.1 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ où $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et on a*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

En plus $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

Théorème 1.3.2 *(Inégalité de Poincaré) Soit (a, b) un ouvert de $\mathbb{R}$ et $u \in H_0^1(a, b)$. Il existe alors une constante C (dépend de $b - a$) telle que*

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leq C \|u'\|_{L^2(a,b)} .$$

Dans le cas multidimensionnel on a,

Théorème 1.3.3 *Soit Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ on suppose que, Ω convexe et de frontière suffisamment régulière. Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tel que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega)$.

Lemme 1.3.3 *Soit $1 \leq p \leq r \leq q$, tel que $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, et $0 \leq \alpha \leq 1$, alors*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^{\alpha} \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}, \ \forall u \in L^p(\Omega).$$

1.3.1 Formule Green

Théorème 1.3.4 *Soit Ω est un ensemble ouvert non vide dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Si u et v sont dans $H^1(\Omega)$, alors*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x)dx,$$

où $(\eta_i)_{1\leq i\leq n}$ est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de Ω. Si $u, v \in H^1(\Omega)$ et si $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors :

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)dx.$$

1.4 Convergence faible, faible étoile et convergence forte

Définition 1.4.1 *(Convergence faible dans E) Soit $x \in E$ et soit $\{x_n\} \subset E$. On dit que $\{x_n\}$ converge faiblement vers x dans E, et on écrit $x_n \rightharpoonup x$ dans E, si*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \text{ pour tout } f \in E'.$$

Définition 1.4.2 *(Convergence faible dans $E^{'}$) Soit $f \in E^{'}$ et soit $\{f_n\} \subset E^{'}$. On dit que $\{f_n\}$ converge faiblement vers f en $E^{'}$, et on écrit $f_n \rightharpoonup f$ dans $E^{'}$, si*

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \text{ pour tous } x \in E^{''}.$$

Définition 1.4.3 *(Convergence faible *). Soit $f \in E'$ et soit $\{f_n\} \subset E'$. On dit que la suite $\{f_n\}$ converge faible * vers f dans E', et on écrit $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $E^{'}$, si*

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \text{ pour tous } x \in E.$$

Remarque 1.4.1 *Comme $E \subset E''$, nous avons $f_n \rightharpoonup f$ dans $E^{'}$. Lorsque E est réflexif, la dernière définition est la même, c'est-à-dire : la convergence faible dans $E^{'}$et la convergence faible étoiles coïncident.*

Définition 1.4.4 *(convergence forte). Let $x \in E$ (resp. $f \in E$) et let $\{x_n\} \subset E$ (resp. $\{f_n\} \subset E^{'}$). On dit que $\{x_n\}$ (resp. $\{f_n\}$) converge fortement vers x (resp. f), et on écrit $x_n \to x$ dans E (resp. $f_n \to f$ dans $E^{'}$), si*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_E = 0, (\textit{resp.} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{E'} = 0).$$

Définition 1.4.5 *(Convergence faible dans L^p avec $1 \leq p < +\infty$). Soit Ω une sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que la suite $\{x_n\}$ de L^p converge faiblement vers $f \in L^p(\Omega)$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)dx = \int_\Omega f(x)g(x)dx \text{ pour tout } g \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Théorème 1.4.1 *(Bolzano- Weierstrass). Si $\dim E < \infty$ et si $\{x_n\} \subset E$ borné, alors il existe $x \in E$ et une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ converge fortement vers x.*

Théorème 1.4.2 *(Compacité faible étoile, Banach-Alaoglu-Bourbaki). On suppose que E séparable et on considére $\{f_n\} \subset E^{'}$. Si $\{x_n\}$ est borné, alors il existe $f \in E^{'}$et une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ telle que $\{f_{n_k}\}$ converge faiblement * vers f dans E'.*

Théorème 1.4.3 *(Compacité faible, Kakutani-Eberlin). On suppose que E est réflexif et considére $\{x_n\} \subset E$. Si $\{x_n\}$ bornée, alors il existe $x \in E$ et une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $\{x_{n_k}\}$ converge faiblement * vers x dans E.*

Théorème 1.4.4 *(Compacité faible dans $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$). Etant donné $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, si $\{f_n\}$ est borné, alors il existe $f \in L^p(\Omega)$ et une suite $\{f_{n_k}\}$ de$\{f_n\}$ telle que $f_n \rightharpoonup f$ en $L^p(\Omega)$.*

Théorème 1.4.5 *(compacité faible étoile, dans $L^\infty(\Omega)$) Soit $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$, si $\{f_n\}$ est borné, alors il existe $f \in L^\infty(\Omega)$ et une suite $\{f_{n_k}\}$ de$\{f_n\}$ telle que $f_n \rightharpoonup f*$ en $L^\infty(\Omega)$. E est un espace Banach, si $(f_n)_n$ est une suite de E', alors $(f_n)_n$ convergent vers f au sens de faible convergence si et seulement si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tous $x \in E$.*

Théorème 1.4.6 *On suppose que (f_n) est une suite de fonctions mesurables telles que f_n converge simplement vers une fonction f lorsque n tend vers l'infini. Si $|f_n(x)| \leq g(x)$, où g est intégrable, alors*

$$\int |f_n - f| \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

et par conséquent

$$\int f_n \to \int f \text{ quand } n \to \infty$$

Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers f en L^1, alors il existe une sous-séquence $(f_{nk})_{k=1}^{\infty}$ tel que

$$f_{nk}(x) \to f(x)$$

Théorème 1.4.7 *L'espace $C_0(\Omega)$ est dense en $L^1(\Omega)$ c'est-à-dire*

$$\forall f \in L^1(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists f_1 \in C_0(\Omega) \text{ tel que } \|f - f_1\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

Définition 1.4.6 *Soit E un espace Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application défine par $\varphi_f(x) = (f, x)_E$. La topologie faible $\delta(E, E')$ sur E est la topologie la plus fine sur E rendant tous les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$ continues.*

1.4.1 Lemme de Aubin Lions

Théorème 1.4.8 ([3]) *Soient X_0, X et X_1 sont des espaces de Banach avec $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$. On suppose que X_0 est injecté dans X avec injection compact et que X est injecté continuement dans X_1, on suppose également que X et X_1 sont des espaces réflexifs. Pour $1 < p, q < +\infty$, soit $W = \{u \in L^p([0,t]; X_0) : u' \in L^q([0,t]; X_1)\}$. Alors W s'injecte dans $L^p([0,t]; X)$ est également compact.*

1.5 Approximation de Faedo-Galerkin

On considére le problème de Cauchy abstrait pour une équation d'évolution de second ordre dans un Espace Hilbert séparable avec le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$ associée

$$(p) = \begin{cases} u_{tt}(t) + A(t)u(t) = f(t), t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), u^{'}(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

où u est inconnu et f est une fonction donnée, définis de l'intervalle fermé $[0,T] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans un espace Hilbert réel séparable H. $A(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ sont des opérateurs linéaires dans H agissant dans l'espace énergétique $V \subset H$.

Supposons que $\langle A(t)u(t), v(t) \rangle = a(t; u(t), v(t))$, pour tous u, $v \in V$; où $a(t; ., .)$ est un continu bilinéaire

dans V. Le problème (p) peut être formulé comme suit : Trouvé la solution $u(t)$ de sorte que

$$(\tilde{p}) \begin{cases} u \in C([0,T]; V),\ u_t \in C([0,T]; H) \\ \langle u_{tt}(t), v \rangle + a(t; u(t), v(t)) = \langle f, v \rangle \text{ dans } D'(]0,T[) \\ u_0 \in V,\ u_1 \in H \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu avec le processus d'approximation de Fadeo-Galerkin.

Soit V^m un sous-espace de V avec la dimension finie d^m, et soit $\{w^{jm}\}$ une base de V^m telle que

1. $V^m \subset V(\dim V^m < \infty)$, $\forall m \in \mathbb{N}$
2. $V^m \to V$ tel qu'il existe un subspatial dense ϑ en V et pour tous les $v \in \vartheta$ nous pouvons obtenir la séquence

$\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \in V^m$ et $u^m \to u$ en V.

3. $V^m \subset V^{m+1}$ et $\overline{U_{m\in\mathbb{N}} V^m} = V$.

On définit la solution du problème approximatif

$$(P_m) = \begin{cases} u^m(t) = \sum\limits_{j=1}^{d^m} g^j(t) w^{jm}, \\ u^m \in C([0,T];V^m),\ u_t^m \in C([0,T];V^m),\ u^m \in L^2(0,T;V^m), \\ \langle u_{tt}^m(t), w^{jm}\rangle + a(t; u^m(t), w^{jm}) = \langle f, w^{jm}\rangle,\ 1 \leq j \leq d^m, \\ u^m(0) = \sum_{j=1}^{d^m} \zeta^j(t) w^{jm},\ u_t^m(0) = \sum_{j=1}^{d^m} \eta^j(t) w^{jm}, \end{cases}$$

où

$$\sum_{j=1}^{d^m} \zeta^j(t) w^{jm} \to u_0 \text{ en } V \text{ as } m \to \infty.$$

$$\sum_{j=1}^{d^m} \eta^j(t) w^{jm} \to u_1 \text{ en } V \text{ as } m \to \infty.$$

En vertu de la théorie des équations différentielles ordinaires, le système (P_m) a une solution locale unique qui s'étend à un intervalle maximal $[0, t_m[$ par le lemme de Zorn puisque les termes non linéaires ont la régularité appropriée. Dans la prochaine étape, on obtient des estimations a priori pour la solution, de sorte que peut être étendue à l'extérieur $[0, t_m[$ pour obtenir une solution définie pour tous $t > 0$.

Estimation a priori et convergence

Utilisation de l'estimation suivante

$$\|u^m\|^2 + \|u_t^m\|^2 \leq C\left\{\|u^m(0)\|^2 + \|u_t^m(0)\|^2 + \int_0^T \|f(s)\|^2\,ds\right\},\ 0 \leq t \leq T.$$

et le lemme de Gronwall nous déduisons que la solution um du problème approximatif (P_m) converge à la solution u du problème initial (P). L'unicité prouve que

u est la solution.

Lemme 1.5.1 *Soient* $T > 0$, $f \in L^1(0,T)$, $f \geq 0$ *a.e et* $c_1, c_2 \geq 0$, *soit* $\varphi \geq 0$ *presque tous où tels que* $f.\varphi \in L^1(0,T)$ *et*

$$\varphi(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^T f(s)\varphi(s)ds, \ t \in (0,T)$$

alors

$$\varphi(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \int_0^T f(s)ds\right), \ t \in (0,T).$$

Chapitre 2

Existence de la solution globale

Dans ce chapitre on s'intsresse à l'étude du problème de Cauchy suivant

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u = \Delta f(u), \ x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \ , \ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

où $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des fonctions connues et f une fonction vérifie l'hpothèse suivante

$$(H_0) \ \ f(u) = \begin{cases} a\,|u|^p \,, \ a > 0, \ 1 < p \leqslant \frac{n+2}{n-2} \text{pour } n \geqslant 3; \\ 1 \leq p < \infty \text{ pour } n = 1, 2. \end{cases}$$

D'abord pour le problème (2.1), (2.2) on introduit les fonctionnelles suivantes

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + \int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx, \\
I(u) &= \|u\|_{H^1}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx, \\
d &= \inf_{u \in N} J(u), \\
N &= \left\{ u \in H^1 \,| I(u) = 0, \|u\|_{H^1} \neq 0 \right\}.
\end{aligned}
$$

Clairement si $f(u)$ satisfait (H_0), les fonctionnelles ci-dessus sont bien définies sur $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.0.2 *Soit $f(u)$ vérifie l'hypothese (H_0), $u \in H^1$ et*

$$\varphi(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} uf(\lambda u)dx.$$

On suppose que $\int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx < 0$. Alors

1. *$\varphi(\lambda)$ croissante dans $0 < \lambda < \infty$.*
2. *$\lim_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$.*

Preuve. Ce lemme découle de

$$\varphi(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} uf(\lambda u)dx = -\lambda^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx.$$

■

Lemme 2.0.3 *Soit $f(u)$ vérifie (H_0), $u \in H^1$. Alors*

1. *$\lim_{\lambda \to 0} J(\lambda u) = 0$.*

2. *$I(\lambda u) = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u)$, $\forall \lambda \succ 0$.*

   En outre si $\int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx < 0$, alors

3. $\lim_{\lambda \to +\infty} J(\lambda u) = -\infty$.

4. *Dans l'intervalle $(0, \infty)$ il existe un $\lambda^* = \lambda^*(u)$ unique tel que*

$$\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) \mid_{\lambda=\lambda^*} = 0.$$

5. *$J(\lambda u)$ croissnte sur $0 < \lambda \leqslant \lambda^*$, et décroissante lorsque $\lambda^* \leqslant \lambda < \infty$ et prend son maximum en $\lambda = \lambda^*$*

6. *$J(\lambda u) > 0$ pour $0 < \lambda < \lambda^*$, $I(\lambda u) < 0$ pour $\lambda^* < \lambda < \infty$ et $I(\lambda^* u) = 0$.*

Preuve. Les assertions $(1) - (3)$ sont évidentes.

On note que $\int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx \neq 0$ implique $\|u\|_{H^1} \neq 0$ et

$$\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) = \lambda(\|u\|_{H^1}^2 - \varphi(\lambda)), \tag{2.3}$$

qui avec Lemma 2.0.2 donne (4) et (5). ■

Laffirmation (6) découle des parties (2) et (2.1).

Lemme 2.0.4 *Soit $f(u)$ satisfait (H_0), $u \in H^1$. Alors*

(i) Si $0 < \|u\|_{H^1} < r_0$, alors $I(u) > 0$;

(ii) Si $I(u) < 0$, alors $\|u\|_{H^1} > r_0$;

(iii) Si $I(u) = 0$ et $\|u\|_{H^1} \neq 0$, (, i.e. $u \in N$), alors $\|u\|_{H^1} \geqslant r_0$,où

$$r_0 = (\frac{1}{aC_*^{p+1}})^{\frac{1}{p-1}}, \; C_* = \sup_{u \in H^1, u \neq 0} \frac{\|u\|_{p+1}}{\|u\|_{H^1}}.$$

Preuve.

(i) Si $0 < \|u\|_{H^1} < r_0$, alors $I(u) > 0$ découle de

$$\int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx \leqslant |uf(u)|\, dx = a\, \|u\|_{p+1}^{p+1} \leqslant aC_*^{p+1}\, \|u\|_{H^1}^{p+1}$$
$$= aC_*^{p+1}\, \|u\|_{H^1}^{p-1}\, \|u\|_{H^1}^2 \prec \|u\|_{H^1}^2 .$$

(ii) Si $I(u) < 0$, alors $\|u\|_{H^1} > r_0$ découle de

$$\|u\|_{H^1}^2 < -\int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx \leqslant aC_*^{p+1}\, \|u\|_{H^1}^{p-1}\, \|u\|_{H^1}^2 .$$

(iii) Si $I(u) < 0$ et $\|u\|_{H^1} \neq 0$, alors on a

$$\|u\|_{H^1}^2 = -\int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx \leqslant aC_*^{p+1}\, \|u\|_{H^1}^{p-1}\, \|u\|_{H^1}^2 ,$$

qui avec $\|u\|_{H^1} \neq 0$ donne $\|u\|_{H^1} \geqslant r_0$.

■

Lemme 2.0.5 *Soit $f(u)$ satisfait (H_0). Alors*

i)
$$d \geqslant d_0 = \frac{p-1}{2(p+1)}\left(\frac{1}{aC_*^{p+1}}\right)^{\frac{2}{p-1}}. \tag{2.4}$$

ii) Si $u \in H^1$ et $I(u) < 0$, alors

$$I(u) < (p+1)(J(u) - d). \tag{2.5}$$

Preuve.

i) Pour tout $u \in N$, on a du Lemme 2.0.4 $\|u\|_{H^1} \geqslant r_0$ et

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} uf(u)dx$$
$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(u) = \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 \geqslant \frac{p-1}{2(p+1)}r_0,$$

ce qui donne (2.4).

ii) Soit $u \in H^1$ et $I(u) < 0$, le Lemme 2.0.3 assure l'existence d'un λ^* telle que $0 < \lambda^* < 1$ et $I(\lambda^* u) = 0$. De la définition de d on a

$$\begin{aligned} d \leqslant J(\lambda^* u) &= \frac{1}{2}\|\lambda^* u\|_{H^1}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda^* u)dx \\ &= \frac{1}{2}\|\lambda^* u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^* u f(\lambda^* u)dx \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|\lambda^* u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(\lambda^* u) \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)}\|\lambda^* u\|_{H^1}^2 = \lambda^{*2}\frac{p-1}{2(p+1)}H^1 \\ &< \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 . \end{aligned}$$

De ce dernier et

$$J(u) = \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(u)$$

on obtient

$$d < \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 = J(u) - \frac{1}{p+1}I(u).$$

Ce qui implique (2.5).

■

2.1 Ensembles invariants

Maintenant, on définit deux sous-ensembles de $H^1(\mathbb{R}^n)$ qui s'avéreront invariants sous le flot généré par le problème (2.1), (2.2). On pose

$$W = \left\{u \in H^1 \,|I(u) > 0,\ J(u) < d\right\} \cup \{0\};$$
$$V = \left\{u \in H^1 \,|I(u) < 0,\ J(u) < d\right\},$$

et

$$W^{'} = \left\{u \in H^1 \,|I(u) > 0, \right\} \cup \{0\};$$
$$V^{'} = \left\{u \in H^1 \,|I(u) < 0, \right\}.$$

On définit l'espace L par

$$L = \left\{u \in H^1 |\,(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u \in L^2\right\}$$

avec la norme

$$\|u\|_L^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u\right\|_{L^2}^2,$$

où $(-\Delta)^{-\alpha} v = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-2\alpha} \mathcal{F}(v)\right)$.

Ensuite, on commence à montrer l'invariance des sous-ensembles W et V de $H^1(\mathbb{R}^n)$ par le flot associé du problème (2.1), (2.2).

Théorème 2.1.1 ([11]) *Soit $f(u)$ vérifie (H_0), $u_0 \in H^1$, $u_1 \in L$. On suppose que $E(0) < d$. Alors les deux ensembles W et V sont invariants par le flot de (2.1),(2.2).*

Preuve. On ne prouve que l'invariance de $W^{'}$, la preuve de l'invariance de $V^{'}$

est similaire. On suppose que $u(t)$ une solution faible de problème (2.1),(2.2) avec $u_0 \in W'$, soit T le temps maximal d'existence de $u(t)$. Parsuite, on prouve que $u(t) \in W'$ pour $0 < t < T$. On montre par contradiction on suppose qu'il existe un $\bar{t} \in (0, T)$ tel que $u(\bar{t}) \notin W'$. Selon la continuité de $I(u(t))$ par rapport à t, il ya un $t_0 \in (0, T)$ tel que $u(t_0) \in \partial W'$. La définition de W' et (i) de Lemme 2.0.4 on a $B_{r_0} \subset W'$, où $B_{r_0} = \{u_1 \in H^1 \,| \|u\|_{H^1} < r_0\}$. On sait donc $0 \notin \partial W'$. Donc $u(t_0) \in \partial W$ i,e. $I(u_0(t)) = 0$ avec $\|u_0(t)\|$. La définition de d dit $J(u_0(t)) \geqslant d$, ce qui contredit

$$\frac{1}{2}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_t\right\|^2 + \|u_t\|^2) + J(u) \leqslant E(0) < d,\ 0 \leqslant t < T.$$

Ce qui achève la preuve. ■

Le corollaire suivant peut être conclu à partir du théorème ci-dessus 3.1.

Corollaire 2.1.1 *Soit $f(u)$ vérifie (H_0), soit $u_0 \in H^1$, $u_1 \in L$. On suppose que $E(0) < d$, alors*

(i) Toutes les solutions faibles du problème (2.1), (2.2) appartiennent à W à condition que $I(u_0) > 0$ ou $\|u_0\|_{H^1} = 0$.

(ii) Toutes les solutions faibles du problème (2.1),(2.2) appartiennent à V à condition que $I(u_0) < 0$.

On considére ensuite le cas $E(0) \leqslant 0$, qui est un cas particulier de la restriction d'énergie $E(0) < d$.

Corollaire 2.1.2 *Soit $f(u)$ vérifie (H_0), $u_0 \in H^1$, $u_1 \in L$. On suppose que $E(0) < 0$ ou $E(0) = 0$, $\|u_0\|_{H^1} \neq 0$. Alors toutes les solutions faibles du problème (2.1),(2.2) appartenant à V.*

Preuve. Soit $u(t)$ une solution faible du problème $(1.1), (1.2)$ avec $E(0) < 0$ ou $E(0) = 0, \|u_0\|_{H^1} \neq 0$, T soit le temps maximal d'existence de $u(t)$. Grace à

$$\frac{1}{2}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1\right\|^2 + \|u_1\|^2) + \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_0\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(u_0) = E(0),$$

on voit que si $E(0) < 0$ ou $E(0) = 0$ avec $\|u_0\|_{H^1} \neq 0$, alors $I(u_0) < 0$. Ainsi, du Corollaire 2.1.1, on obtient $u(t) \in V$ pour $0 \leqslant t < T$. ■

2.2 Existence globale

Soit $u_0 \in H$, $u_1 \in L$, $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ un système de fonction de base dans H. On construit les solutions approchées du problème(2.1), (2.2)

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j(x), \; m = 1, 2, ... \tag{2.6}$$

satisfaisant

$$((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{mtt}, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}w_s)+(u_{mtt}, w_s)+(u_m, w_s)+(\nabla u_m, \nabla w_s)+(f(u_m), w_s) = 0, \; s = 1, 2, ...m, \tag{2.7}$$

$$u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm}w_j(x) \to u_0(x) \text{ en } H \tag{2.8}$$

$$u_{mt}(x,0) = \sum_{j=1}^{m} b_{jm}w_j(x) \to u_1(x) \text{ en } L \tag{2.9}$$

Multiplication (2.7) par $g'_{sm}(t)$ et la somme des

$$\frac{d}{dt}E_m(t) = 0,$$

et

$$E_m(t) = E_m(0), \tag{2.10}$$

où

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \frac{1}{2}\left(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{mt}\right\|^2 + \|u_{mt}\|^2 + \|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2\right) + \int_{\mathbb{R}^n} F(u_m)dx, \\ F(u) &= \int_0^u f(s)ds. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lemme 2.2.1 *Soit $f(u)$ satisfait (H), $u_0 \in H^1$, $u_1 \in L$. Alors $F(u_0) \in L$. Pour la solution approchée u^m définie par (2.6)–(2.9) on tient $E_m(0) \to E(0)$ quand $m \to \infty$, où*

$$E(0) = \frac{1}{2}\left(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1\right\|^2 + \|u_1\|^2 + \|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2\right) + \int_{\mathbb{R}^n} F(u_0)dx.$$

Preuve. D'abord selon (H) on a

$$|F(u)| \leqslant \frac{a}{p+1}|u|^{p+1}, \ \forall u \in \mathbb{R},$$

où $2(1+\frac{1}{n}) \leqslant p+1 < \frac{2n}{n-2}$ pour $n \geqslant 3$, $2 < p+1 < \infty$ pour $n = 1, 2$. De ceci et $u_0 \in H^1$ on obtient $F(u_0) \in L^1$.

D'après (2.8), (2.9), on obtient que $m \to \infty$

$$\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{mt}(0)\right\|^2 + \|u_{mt}(0)\|^2 + \|u_m(0)\|^2 + \|\nabla u_m(0)\|^2 \to \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1\right\|^2 + \|u_1\|^2 + \|u_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2.$$

Ensuite, on prouve

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(u_m(0))dx \to \int_{\mathbb{R}^n} F(u_0)dx \text{ en } m \to \infty.$$

En fait, on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(u_m(0))dx - \int_{\mathbb{R}^n} F(u_0)dx\right| \leqslant |f(\varphi_m)|\,|u_m(0)-u_0|\,dx \leqslant \|f(\varphi_m)\|_r\,\|u_m(0)-u_0\|_q\,,$$
$$1<q,\ r<\infty,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1,$$

où $\varphi_m = u_0 + \theta(u_m(0)-u_0)$, $0<\theta<1$.

1. Si $n \geqslant 3$.Choisir $q=\frac{2n}{n-2}$, $r=\frac{2n}{n+2}$. On a

$$\|u_m(0)-u_0\|_q \leqslant C\,\|u_m(0)-u_0\|_{H^1} \to 0 \text{ en } m\to\infty,$$
$$\|f(\varphi_m)\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^n}(a\,|\varphi_m|^p)^r dx = A\,\|\varphi_m\|_{pr}^{pr}\,.$$

   De (H) on a $2 \leqslant pr \leqslant \frac{2n}{n-2}$, donc $\|f(\varphi_m)\|_r \leqslant C$.

2. Si $n=1,2$. On choisit $q=r=2$, alors on a

$$\|u_m(0)-u_0\|_q \leqslant \|u_m(0)-u_0\| \to 0 \text{ en } m\to\infty,$$
$$\|f(\varphi_m)\|_r^r = \|f(\varphi_m)\|^2 \leqslant A\,\|\varphi_m\|_{2p}^{2p}\,.$$

   Comme $2<2p<\infty$, on obtient $\|f(\varphi_m)\|_r < C$.

Ainsi, pour les deux cas ci-dessus, on a toujours

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(u_m(0))dx \to \int_{\mathbb{R}^n} F(u_0)dx \text{ lorsque } m\to\infty$$

et $E_m(0) \to E(0)$ lorsque $m\to\infty$. ■

Corollaire 2.2.1 *Soit $f(u)$, u_0 et u_1 remplir les conditions du Lemme 2.2.1. On suppose que $E(0)<d$. Alors $E_m(0)<d$ pour m suffisamment grand.*

Lemme 2.2.2 *Soit $f(u)$ vérifie (H), soit $u_0 \in H^1$, $u_1 \in L$, avec $E(0) < d$. On suppose que $I(u_0) > 0$ ou $\|u_0\|_{H^1}$, c-à-d $u_0 \in W'$. Alors, pour les solutions u_m définies par (2.6)-(2.9) vérifient $u_m \in W'$ pour $0 \leqslant t < \infty$ et suffisamment grand m.*

Preuve. On utilise la preuve par contradiction, on suppose qu'il existe un $\bar{t} > 0$ tel que $u_m(\bar{t}) \notin W'$ pour certains m suffisamment grand. Par suite, la continuité de $I(u_m)$ en ce qui concerne t il s'ensuit qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que $u_m(t_0) \in \partial W'$. D'autre part, de la définition de W' on a $0 \notin \partial W'$. Donc $I(u_m(t_0)) = 0$ et $\|u_m(t_0)\|_{H^1} \neq 0$ pour certains m suffisamment grands. De la définition de d, on obtient $J(u_m(t_0)) \geqslant d$, qui contredit (par (2.10))

$$E_m(t) = \frac{1}{2}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{mt}\right\|^2 + \|u_{mt}\|^2) + J(u_m) = E_m(0) < d,\ 0 \leqslant t < \infty \quad (2.12)$$

pour un m suffisamment grand. ■

Corollaire 2.2.2 *Sous l'hypothèse de Lemme 2.2.2 on a*

$$\|u_m\|_{H^1}^2 \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1}d,\ \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{mt}\right\|^2 + \|u_{mt}\|^2 \leqslant 2d,\ 0 \leqslant t < \infty, \quad (2.13)$$

pour un m suffisamment grand.

Preuve. D'après (2.12), on obtient que pour m suffisamment grand il y ait

$$\frac{1}{2}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{mt}\right\|^2 + \|u_{mt}\|^2) + \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_{mt}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(u_m) = E_m(0) < d,\ 0 \leqslant t < \infty,$$

qui avec $u_m(t) \in W'$ donne (2.13). ■

2.2.1 Existence globale

Théorème 2.2.1 ([11]) *Soit $f(u)$ vérifie (H), $u_0 \in H^1$, $u_1 \in L$. On suppose que $E(0) < d$, $I(u_0) > 0$ où $\|u_0\|_{H^1} = 0$. Alors problème (2.1), (2.2) admet une solution faible globale $u(t) \in L^\infty(0,\infty;H^1)$ avec $u_t(t) \in L^\infty(0,\infty;L)$ et $u(t) \in W$ pour $0 \leqslant t < \infty$.*

Preuve. Pour le problème (2.1) −(2.2), en construisant des solutions approchées $u_m(x,t)$ par (2.6)–(2.9). Du Corollaire 2.2.2, il s'ensuit que $\{u_m\}$ dans $L^\infty(0,\infty;H^1)$; $\{(u_m)_t\}$ dans $L^\infty(0,\infty;L)$ sont bornés respectivement. En outre par un argument similaire à celui dans la preuve de Lemme 2.2.1 on peut obtenir $\{f(u_m)\}$ sont bornés dans $L^\infty(0,\infty;L^r)$, où r est défini dans la preuve de Lemme 2.2.1. D'où il existe un u et une suite $\{u_v\}$ de $\{u_m\}$ telle que $v \to \infty$

$$
\begin{aligned}
u_v &\to u \text{ dans } L^\infty(0,\infty;H^1) \text{ faible * dans } Q = \mathbb{R}^n \times [0,T)\,;\\
u_{vt} &\to u_t \text{ dans } L^\infty(0,\infty;L) \text{ faible *};\\
f(u_v) &\to X = f(u) \text{ dans } L^\infty(0,\infty;L^r) \text{ faible *}.
\end{aligned}
$$

En intégrant (2.7) par rapport à t de 0 à t, on obtient

$$
\begin{aligned}
&((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{mt},(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}w_s)) + (u_{mt},w_s) + \int_0^t ((u_m,w_s) + (\nabla u_m,\nabla w_s) + (f(u_m),w_s))d\tau\\
&= ((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{mt}(0),(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}w_s)) + (u_{mt}(0),w_s). \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Soit $m = v \to \infty$ en (2.14), il vient

$$
\begin{aligned}
&((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t,(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}w_s)) + (u_t,w_s) + \int_0^t ((u,w_s) + (\nabla u,\nabla w_s) + (f(u),w_s))d\tau\\
&= ((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1,(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}w_s)) + (u_1,w_s), \forall s
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t,(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}v))+(u_t,v)+\int_0^t((u,v)+(\nabla u,\nabla v)+(f(u),v))d\tau\\
&=((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1,(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}v))+(u_1,v),\forall v\in H,\forall t\in[0,T)\,.
\end{aligned}
$$

D'autre part, de (2.8) et (2.9) on a $u(x,0)=u_0(x)$ dans H^1 et $u_t(x,0)=u_1(x)$ dans L.

Ensuite, on montre que u ci-dessus satisfait

$$
E(t)\leq E(0) \text{ pour tout } t\in[0,T) \tag{2.15}
$$

On note que l'injection $H^1\hookrightarrow L^{p+1}$ est compact pourvu que $2(1+\frac{1}{n})\leqslant p+1<\frac{2n}{n-2}$ pour $n\geqslant 3$; $2<p+1<\infty$ pour $n=1,2$. Ainsi de $\{u_m\}$ est borné en $L^\infty(0,\infty;H^1)$ il s'ensuit qu'il existe une suite $\{u_v\}$ de $\{u_m\}$ telle que

$$
u_v\to u \text{ dans } L^{p+1} \text{ fortement pour chaque } t>0 \text{ quand } v\to\infty.
$$

Donc

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^n}F(u_v)dx-\int_{\mathbb{R}^n}F(u)dx\right|\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|F(v_v)|\,|u_v-u|\,dx\leqslant\|f(v_v)\|_{\overline{r}}\,\|u_v-u\|_{\overline{q}}\,,
$$

où $\overline{q}=p+1$, $\overline{r}=\frac{p+1}{p}$, $u_v=u+\theta(u_v-u)$, $0<\theta<1$. De

$$
\|u_v-u\|_{\overline{q}}\to 0\ \text{ quand } v\to\infty,
$$

et

$$
\|f(v_v)\|_{\overline{r}}^{\overline{r}}=\int_{\mathbb{R}^n}(a\,|v_v|^p)^{\overline{r}}dx=a^{\frac{p+1}{p}}\,\|v_v\|_{p+1}^{p+1}\leqslant C
$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(u_v)dx \to \int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx \text{ en } v \to \infty.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + \|u_t\|^2 + \|u\|_{H^1}^2) &\leqslant \frac{1}{2}(\liminf_{v\to\infty}\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{vt}\right\|^2 + \liminf_{v\to\infty}\|u_{vt}\|^2 + \liminf_{v\to\infty}\|u_v\|_{H^1}^2) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\liminf_{v\to\infty}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{vt}\right\|^2 + \|u_{vt}\|^2 + \|u_v\|_{H^1}^2) \text{ (par(2.10))} \\
&= \liminf_{v\to\infty}(E_v(0) - \int_{\mathbb{R}^n} F(u_v)dx) = \lim_{v\to\infty}(E_v(0) - \int_{\mathbb{R}^n} F(u_v)dx) \\
&= E(0) - \int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx.
\end{aligned}$$

Ce qui donne $E(t) \leqslant E(0)$ pour $0 \leqslant t < \infty$. Par conséquent, $u(x)$ obtenu ci-dessus est une solution globale faible du problème (2.1), (2.2). Enfin du Corollaire 2.1.1 on obtient $u(t) \in W$ pour $0 \leqslant t < \infty$. ■

Corollaire 2.2.3 *Sous les conditions du théorème 2.2.1, pour la solution faible globale du problème (2.1), (2.2) donné dans le théorème 2.2.1, on a de plus*

$$u \in L^\infty(0, T; H).$$

Preuve. On a

$$(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_\tau d\tau + (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_0, \quad 0 \leqslant t < \infty$$

En appliquant la norme et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\right\| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_\tau\right\| d\tau + \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_0\right\| \\
&\leqslant T\max_{0\leqslant t\leqslant T}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\| + \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_0\right\|, \ 0 \leqslant t \leqslant T,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u \in L^{\infty}(0,T;L^2),\ \forall T > 0.$$

et

$$u(t) \in L^{\infty}(0,T;H),\ \forall T > 0.$$

■

Corollaire 2.2.4 *Si dans le théorème 2.2.1, l'hypothèse "$E(0) < d$, $I(u_0) > 0$ ou $\|u_0\|_{H^1} = 0$" est remplacé par "$0 < E(0) < d$, $\|u_0\|_{H^1} < r_0$", où r_0 est défini dans le Lemme 2.0.4. Alors la conclusion du théorème 2.2.1 tient toujours et*

$$\|u_0\|_{H^1}^2 \leqslant \frac{2(p+1)}{p-1}E(0),\ \ \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + \|u_t\|^2 \leqslant 2E(0),\ 0 \leqslant t < \infty$$

Preuve. On note que $\|u_0\|_{H^1} < r_0$ implique $0 < \|u_0\|_{H^1} < r_0$ ou $\|u_0\|_{H^1} = 0$. Si $0 < \|u_0\|_{H^1} < r_0$, Lemma 2.0.4 donne immédiatement $I(u_0) > 0$. Alors la preuve est complétée par le théorème 2.2.1 et

$$\frac{1}{2}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+\|u_t\|^2)+\frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2+\frac{1}{p+1}I(u) = E(t) \leqslant E(0) < d,\ 0 \leqslant t < \infty.$$

■

Chapitre 3

Explosion en temps fini

Dans ce chapitre, on étudie la non existence globale de la solution pour le problème (2.1),(2.2), puis on donne quelques conditions de bien-être global

3.0.2 Non existence globale

Théorème 3.0.2 *Que $f(u)$ satisfasse (H), $u_0 \in H$, $u_1 \in L$. Supposons que $E(0) < d$, $I(u_0) < 0$. Puis problème(2.1),*

(2.2) n'admet aucune solution globalement faible.

Preuve. Soit $u(t) \in L^\infty(0, \infty; H^1)$ avec $u_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L)$ solution faible quelconque du problème (2.1), (2.2), et T le temps maximal d'existence de $u(t)$. Maintenant, on doit montrer $T < \infty$. En utilisant la preuve par contradiction, on suppose que $T = +\infty$. Soit

$$\Phi(t) = \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u\right\|^2 + \|u\|^2 .$$

D'après la preuve du Corollaire 2.2.3 (à noter que dans la preuve du Corollaire 2.2.3 les hypothèses $u \in L^\infty(0,\infty;H^1)$, $u_t(t) \in L^\infty(0,\infty;L)$ et $u_0 \in H^1$ sont requis seulement), il s'ensuit que $\Phi(t)$ est bien défini pour $0 \leqslant t < \infty$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t) &= 2((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u) + 2(u_t, u),\\
\ddot{\Phi}(t) &= 2\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + 2\left\|u_t\right\|^2 + 2((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{tt}, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u) + 2(u_{tt}, u)\\
&= 2\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + 2\left\|u_t\right\|^2 + 2((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_{tt}, u) + 2(u_{tt}, u)\\
&= 2\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + 2\left\|u_t\right\|^2 - 2(\|u\|_{H^1}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)dx)\\
&= 2\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + 2\left\|u_t\right\|^2 - 2I(u).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

L'inégalité de Schwarz nous donne

$$\begin{aligned}
(\dot{\Phi}(t))^2 &= 4(((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t) + (u, u_t))^2\\
&= 4(((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t)^2 + (u, u_t)^2 + 2((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u, (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t)(u, u_t)\\
&\leqslant 4(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\right\|^2 \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + \|u\|^2\|u_t\|^2 + \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\right\|^2\|u_t\|^2 + \|u\|^2\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(\Phi^{\cdot}(t))^2 = 4\Phi(t)(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + \|u_t\|^2).$$

Donc

$$\Phi(t)\ddot{\Phi}(t) - \frac{p+3}{4}(\dot{\Phi}(t))^2 \geqslant \Phi(t)(-(p+1)(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + \|u_t\|^2) - 2I(u)).$$

De (2.15) on obtient

$$-(p+1)(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 + \|u_t\|^2) \geqslant 2(p+1)(J(u) - E(0)) > 2(p+1)(J(u) - d).$$

Donc par théorème 2.1.1 et (2.5) on a

$$\Phi(t)\ddot{\Phi}(t) - \frac{p+3}{4}(\dot{\Phi}(t))^2 \geqslant 2\Phi(t)((p+1)(J(u)-d) - I(u)) > 0$$

et

$$(\Phi^{-\alpha}(t))'' = \frac{-\alpha}{\Phi(t)^{\alpha+2}}(\Phi(t)\ddot{\Phi}(t) - (\alpha+1)(\dot{\Phi}(t))^2) < 0, \;\; \alpha = \frac{p-1}{4}, 0 < t < \infty. \tag{3.2}$$

D'autre part, de (3.1) et (2.5) on obtient

$$\ddot{\Phi}(t) \geqslant -2I(u) > 2(p+1)(d - J(u)) \geqslant 2(p+1)(d - E(0)) = \delta_0 > 0,$$

$$\dot{\Phi}(t) \geqslant \delta_0 t + \dot{\Phi}(0), 0 < t < \infty.$$

Il existe donc un $t_0 \geqslant 0$ tel que $\dot{\Phi}(t) > \dot{\Phi}(t_0) > 0$ pour $t > t_0$ et

$$\Phi(t) > \dot{\Phi}(t_0)(t - t_0) + \Phi(t_0) \geqslant \dot{\Phi}(t_0)(t - t_0), \;\; t_0 < t < \infty.$$

Par conséquent, il existe un $t_1 > 0$ tel que $\Phi(t_1) > 0$ et $\dot{\Phi}(t_1) > 0$. De ceci et (3.2) il s'ensuit qu'il existe un $T_1 > 0$ tel que

$$\lim_{t \to T_1} \Phi^{-\alpha}(t) = 0$$

et

$$\lim_{t \to T_1} \Phi(t) = +\infty, \tag{3.3}$$

qui contredit $T = +\infty$. Ainsi, la prouve est complete. ■

De Théorème **??** et Corollaire 2.1.2 ci-dessus on peut conclure.

Corollaire 3.0.5 *Soit $f(u)$ vérifie l'hypotese (H), soit $u_0 \in H$, $u_1 \in L$. On* *suppose que $E(0) < 0$ ou $E(0) = 0$, $\|u_0\|_{H^1} \neq 0$. Le problème (2.1), (2.2) n'admet aucune solution faible globale.*

De Théorèmes 2.2.1 et **??**, on peut obtenir une condition forte pour l'existence et la non-existence de la solution faible globale pour problème (2.1), (2.2) comme suit

Théorème 3.0.3 ([11]) *Soient $f(u)$, u_0 et u_1 identiques à ceux du théorème 2.2.1. On suppose que $E(0) < d$ le problème (2.1), (2.2) admet une solution faible globale et quand $I(u_0) < 0$ le problème (2.1), (2.2) n'admet aucune solution faible globale.*

Le théorème ci-dessus peut être suivie par une autre forme comme suit pour le problème (2.1), (2.2).

Théorème 3.0.4 ([11]) *Soit $f(u)$, u_0 et u_1 soient les mêmes que ceux du théorème **??**. On suppose que $E(0) < d_0$, où d_0 est défini dans Lemma **??**, c'est-à-dire*

$$d_0 = \frac{p-1}{2(p+1)}\left(\frac{1}{aC_*^{p+1}}\right)^{\frac{2}{p-1}}.$$

Alors si $\|u_0\|_{H^1} < r_0$ problème (2.1), (2.2) admet une solution faible globale ; et si $\|u_0\|_{H^1} \geqslant r_0$ problème (2.1), (2.2) n'a aucun solution faible globale, où r_0 est défini dans Lemma 2.0.4, c.-à-d.

$$r_0 = \left(\frac{1}{aC_*^{p+1}}\right)^{\frac{2}{p-1}}, \; C_* = \sup_{u \in H^1, u \neq 0} \frac{\|u\|_{p+1}}{\|u\|_{H^1}}.$$

Preuve. On compléte cette preuve en considérant les cas $\|u_0\|_{H^1} < r_0$ et cas $\|u_0\|_{H^1} \geqslant r_0$ séparément comme suit. ∎

1. La condition $\|u_0\|_{H^1} < r_0$ implique $0 < \|u_0\|_{H^1} < r_0$ où $\|u_0\|_{H^1} = 0$. Si $0 < \|u_0\|_{H^1} < r_0$, du Lemme 2.0.4 on peut dériver $I(u_0) > 0$ ce qui fait que le théorème 2.2.1 s'applique pour assurer que la solution faible existe globalement.

2. Si $\|u_0\|_{H^1} \geqslant r_0$ alors du fait que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_1\right\|^2 + \|u_1\|^2) + \frac{p-1}{2(p+1)}\|u_0\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(u_0) = E(0) < d_0 &= \frac{p-1}{2(p+1)}(\frac{1}{aC_*^{p+1}})^{\frac{}{p}} \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)}r_0^2.\end{aligned}$$

   On obtient $I(u_0) < 0$. Alors le théorème **??** donne qu'il n'y a aucune solution faible globale pour le problème (2.1), (2.2).

On note que $F(u_0) = \frac{a}{p+1}|u_0|^p u_0$. Donc si $u_0(x) \geqslant 0$ a.e. dans $\mathbb{R}^n$, alors à partir de $E(0) < d_0$ on peut obtenir $\|u_0\|_{H^1}^2 \leqslant \frac{p-1}{p+1}r_0^2 < r_0^2$.

On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 3.0.6 *Soient $f(u)$, u_0 et u_1 les mêmes que ceux du théorème 2.2.1. On suppose que $E(0) < d_0$ et a.e. dans $\mathbb{R}^n$. Alors problème (2.1), (2.2) admet une solution globalement faible.*

Conclusion

Ce travail etudie les propriétés qualitatives de certaine problème de Cauchy de l'équation de Boussinesq avec un terme de dispersion du quatrième ordre et une source non linéaire. Pour ce faire, on introduit d'abord la notion des ensembles invariants et quelques fonctionnelles énergétiques. En utilisant la méthode des puits de potentiel avec l'approximation de Galerkin, l'existence et l'unicité de la solution globale avec petites données ainsi que l'énergie initiale critique ont été discutée. De plus, on a étudié l'existence globale et l'explosion en temps fini des solutions avec une énergie initiale élevée en utilisant des inégalités différentielles ordinaires, les conditions sur l'explosion en temps fini des solutions sont données avec des hypothèses appropriées sur les valeurs initiales. De plus, les limites supérieure et inférieure du temps d'explosion sont également étudiées.

Bibliographie

[1] Boussinesq J. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. CR Acad. Sci. Paris. 1871 Jun 19 ;72(755-759) :1871.

[2] Levine, H.A., 1974. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu\_\{tt\} = -Au + \mathcal{F}(u)$. Transactions of the American mathematical society, 192, pp.1-21.

[3] Lions JL. Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires. Dunod ; 1969.

[4] Scott Russell J. Report on water waves. British Assoc. Report. 1844.

[5] A.M. Samsonov, E.V. Sokurinskaya, Energy exchange between nonlinear waves in elastic waveguides and external media, in : Nonlinear Waves in Active Media, Springer, Berlin, 1989, pp. 99–104..

[6] A.M. Samsonov, Nonlinear strain waves in elastic waveguide, in : A. Jeffrey, J. Engelbrecht (Eds.), Nonlinear Waves in Solids, in : CISM Courses and Lectures, vol. 341, Springer, Wien, 1994.

[7] Sattinger, D.H., 1968. On global solution of nonlinear hyperbolic equations. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 30, pp.148-172.

[8] Wang Shubin, Chen Guowang, Cauchy problem of the generalized double dispersion equation, Nonlinear Anal. 64 (2006) 159–173

[9] Liu Yacheng, On potential wells and vacuum isolating of solutions for semilinear wave equations, J. Differential Equations 192 (2003) 155–169.

[10] Liu Yacheng, Xu Runzhang, Potential well method for Cauchy problem of generalized double dispersion equations, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008) 1169–1187.

[11] Xu, Runzhang, and Yacheng Liu. "Global existence and nonexistence of solution for Cauchy problem of multidimensional double dispersion equations." Journal of Mathematical Analysis and Applications 359.2 (2009) : 739-751.

Résumé :

Dans ce mémoire, on étudie les questions liées à l'existence et à l'unicité des solutions globales et explosons pour l'équation d'évolution semi-linéaire du quatrième ordre. Le problème qui est abordé ici est l'étude du modèle introduit par Boussinesq dans [], posé dans l'espace R^n tout entier avec double termes dispersifs. On commençe par introduire le modèle mathématique et définir quelques fonctionnels et ensembles invariants. Ensuite, en exploitant la théorie du puits de potentiel, l'existence globale de la solution est fournie et dans le dernier chapitre, on étudie la propriété d'explosion via le puits de potentiel combiné à la méthode de la concavité.

:الملخص

في هذا العمل نقوم بدراسة الأسئلة المتعلقة بوجود ووحدانية الحلول الشاملة وانفجارها لمعادلة التطور غير الخطية من الدرجة الرابعة.

المطروح المشكلة التي تم تناولها هنا هي دراسة النموذج الذي قدمه Boussinesq في [] ، في الفضاء كله بشروط تشتت مزدوج. نبدأ بتقديم النموذج الرياضي وتحديد بعض الوظائف والمجموعات الثابتة. بعد ذلك ، من خلال استغلال نظرية الطاقة ، يتم توفير الوجود للحل الشامل ، وفي الفصل الأخير ندرس خاصية الانفجار من خلال إمكانية الجمع بين نظرية الطاقة وطريقة التقعر.

Abstract :

In this work we study questions related to the existence and uniqueness of global solutions and blow-up for semi linear evolution equation of fourth order.

The problem which addressed here is the study of the model introduced by Boussinesq []in, posed in the whole space with a double dispersive terms. We start with introducing the mathematical model and defining some functional and invariant sets. Next by exploiting the potential well theory the global existence of solution is provided and in the last chapter we study blow-up property via potential well combined with concavity method's