

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la

VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Analyse**

Par

TOUAM Ouahiba

Titre :

**Résolution numérique des EDP par la méthode des itérées
variationnelles**

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	MENACER TIDJANI	UMKB	Président
Dr.	KACI FATMA	UMKB	Encadreur
Dr.	GHEDJEMIS FATIHA	UMKB	Examinatrice

18 Juin 2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

À celui qui m'a indiqué la bonne voie en me rappelant que la volonté fait les
grands

À mon père Cherif

A celle qui a attendue avec patience le fruit de son éducation

À ma mère GUEMIDA Mebarka

Le meilleur de toutes les mamans Ma profonde gratitude et raison de ma vie,
symbole de sacrifice pour moi et de courage.

À tous ceux qui me sont chères :

À mes sœurs **Noura, Souad, Rebiha**, mes frères **Elhoussein, Saleh, Said, Messaoud, Ibrahim, Hicham, Djalal, Oualid**. Aux femmes de mes frères **Zohra.G, Zoulikha.B, Hayat.T, Messaouda.B, Zahra.k**. Aux hommes de mes sœurs **TOUAM Boufateh, TEREA Djalal dia elhak**. À mes grands-parents paternels : **TOUAM Messaoud** et **TANACH Rebiha**, grands-parents maternels : **GUEMIDA Ibrahim** et **BARKAT Saadia**. À mes neveux et mes nièces spécialement **Ahmad** et **Abdellah**.

À toute la famille TOUAM et GUEMIDA.

À mes professeurs de l'université « **Mohamed Khider-Biskra** ». À toutes mes amies, **Khaoula.D, Oum hani.D, Khadidja.B, Nour elhoda.G, Radhia.B, Sana.G, Yousra.DJ, Zahra.B, Chaima.A, Karima.A, Messaouda.k, Siham.S, Hadjer.A, Abir.N, Khaoula.CH, Hanan.CH, Fatima.G, Asma.B.**

Tous mes collègues de la spécialité analyse mathématique, promo **2023**

Toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de ce travail.

À tous ceux qui aiment ce pays.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le Dieu tout puissant d'avoir donné la force, le courage, la patience et la volonté pour terminer ce travail.

Je remercie ma famille pour leurs aides durant mon étude et leurs soutiens.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadrante Madame "**FATMA KACI**". Je le remercie de m'avoir encadré, guidé, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants, intervenant et toute les personnes qui, par leur paroles leurs écrits, leurs conseils et leur critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie également les enseignants de département de mathématiques : **Dr : Tidjani Menacer, Dr : Lazhar TAMER, Dr : Abdelhakim NECIR, Dr : Baya LAADJA, Dr : Fatah BENATIA, Mokhtar HAFAYED, Yahya DJABRANE, Dr : BOUGHERARA Saliha, Dr : Abedelghani BELLAGOUN.**

Je remercie les enseignants de lycée **ELGORMI Mohamed** spécifiquement **Salah GHERBIA, Rabeh SAOUDI, Hadjira BAHZAZ, Malika ATAOUA, Souad TOUAM, Hayat RAGDI, Abdelhlim MAZROUUA.**

Enfin, je remercie toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de cet modeste étude : Foulla.Y, Zolukha.G, Amira.T, Salma.CH, Takai eddine.B, Ayoub.T, Loubna.Z, Abir.T, Soundes.M, Ezzobir.B, Samir.B, Sadika.Y, Hamza, R., Aissa.M.

Ouahba Touam

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
List of Figures	v
List of Tables	vi
Introduction	1
1 Généralités	3
1.1 Introduction :	3
1.2 Définition d'une EDP :	3
1.3 Ordre d'une EDP :	4
1.4 EDP linéaires et non linéaires	5
1.4.1 Quelques EDP linéaires	5
1.4.2 Quelques EDP non linéaires	6
1.5 EDP Homogènes et non homogènes	7
1.6 Solution d'une EDP	7

1.6.1	Conditions aux limites	8
1.6.2	Conditions initiales	9
1.7	Une EDP bien posée	9
2	Méthode des itérées variationnelles (MIV)	10
2.1	Introduction	10
2.2	Description de la méthode	11
2.3	Application de la méthode (MIV) aux équations différentielles ordi- naire (EDOs)	14
2.3.1	Les EDOs linaires d'ordre un	14
2.3.2	Les EDOs linaires d'ordre deux	18
3	Résolution des EDPs par MIV	22
3.1	Introduction	22
3.2	Problème linéaire	22
3.3	Problème homogène	24
3.4	Problème non linéaire	26
3.4.1	Problème 1	26
3.4.2	Problème 2	30
	Conclusion	34
	Bibliographie	34
	Annexe A : Programme de Matlab	37

Table des figures

2.1	Les approximations par MIV de problème (2.27)	21
3.1	Approximation par MIV (n=3) de problème (3.5)	26
3.2	Approximation par MIV (n=3) de problème (3.8)	28
3.3	Approximation par MIV (n=3) de problème (3.10)	32

Liste des tableaux

3.1	Table d'erreur par MIV (n=1) et par MDF pour $t=0.01$	30
3.2	Table d'erreur par MIV (n=1) et par MDF.	33

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) jouent un rôle fondamental dans la modélisation et la compréhension de nombreux phénomènes en science et en ingénierie. De nombreux problèmes du monde réel, tels que la dynamique des fluides, le transfert de chaleur et la mécanique quantique, peuvent être décrits par des EDP. Cependant, résoudre analytiquement ces équations est souvent difficile, ce qui nécessite le développement de méthodes numériques pour obtenir des solutions approximatives. La méthode d'itération variationnelle (MIV) pour résoudre des EDP est une technique numérique puissante qui fournit une solution itérative par séries, elle nous permet d'approximer les solutions des EDP avec une bonne précision. Cette méthode a été introduite par J.H. He en 1999 [2] et a depuis suscité beaucoup d'intérêt en raison de son efficacité pour résoudre un large éventail de problèmes non linéaires.

Notre travail porte sur la résolution numérique des EDP par la méthode des itérées variationnelles.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter quelques notions de base sur ce que nous allons couvrir dans les deux prochains chapitres tel que : définition d'une EDP, ordre d'une EDP, EDP linéaire et non linéaire...

Le deuxième chapitre sera consacré à la description de la méthode des itérées variationnelles et à l'application de cette dernière aux quelques équations différentielles ordinaires.

Dans le troisième chapitre, nous allons résoudre numériquement quelques équations

différentielles partielles (linéaires et non linéaires) par la méthode des itérées variationnelles. Nous allons également faire une étude comparative avec la méthode des différences finies pour le cas non linéaire.

Le mémoire sera clôturer par une conclusion et un annexe sur les programmes en Matlab utilisés.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction :

Ce chapitre va nous fournir de toutes les définitions dont nous avons besoin dans les chapitres qui suivent. Pour plus de définitions et d'exemples, le lecteur peut consulter [6], [8]

1.2 Définition d'une EDP :

Une équation aux dérivées partielles (EDP)(parfois appelée équation différentielle partielle) est une équation qui contient la dépendante variable (la fonction inconnue), et ses dérivées partielles. On sait que dans l'équation différentielle ordinaire(EDO), la variable dépendante $Z = Z(x)$ dépend seulement sur une variable indépendante x . Contrairement aux EDO, la variable dépendante dans Les EDP, $Z = Z(x, t)$ ou $Z = Z(x, y, t)$, doivent dépendre de plus d'une variable indépendant. Si $Z = Z(x, t)$, alors la fonction Z dépend de la variable indépendante x , et sur la variable temporelle t . Cependant, si $Z = Z(x, y, t)$, alors la fonction Z dépend sur les variables spatiales x, y et sur la variable temporelle t .

Les équations suivantes sont des exemples des EDP :

$$Z_t = kZ_{xx} \tag{1.1}$$

$$Z_t = k(Z_{xx} + Z_{yy}) \tag{1.2}$$

$$Z_t = k(Z_{xx} + Z_{yy} + Z_{ss}) \tag{1.3}$$

qui décrivent le flux de chaleur dans un espace unidimensionnel, un espace bidimensionnel, et espace tridimensionnel respectivement. Dans (1.1), la variable dépendante $Z = Z(x, t)$ dépend sur la position x et sur la variable temporelle t . Cependant, dans (1.2), $Z = Z(x, y, t)$ dépend de trois variables indépendantes, les variables spatiales x, y et la variable temporelle t . Dans (1.3), la variable dépendante $Z = Z(x, y, s, t)$ dépend de quatre variables indépendantes, les variables spatiales x, y et s et la variable temporelle t .

1.3 Ordre d'une EDP :

L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle la plus élevée qui apparaît dans l'équation. Par exemple, les équations suivantes :

$$Z_x - Z_y = 0 \tag{1.4}$$

$$Z_{xx} - Z_t = 0 \tag{1.5}$$

$$Z_y Z Z_{xxx} = 0 \tag{1.6}$$

sont des EDP du premier ordre, du deuxième ordre et du troisième ordre respectivement.

- L'équation $Z_t = Z_{xx} + Z_{yy}$ est d'ordre *deux* puisque la dérivée partielle la plus

élevée contenue dans cette équation est Z_{xx} ou Z_{yy} .

- L'équation $Z_x + Z_y = 0$ est d'ordre un puisque la dérivée partielle la plus élevée contenue dans cette équation est Z_x ou Z_y .

1.4 EDP linéaires et non linéaires

Les équations différentielles partielles sont classées comme **linéaires** ou **non linéaires**. Une équation différentielle partielle est dite linéaire si :

1. la puissance de la variable dépendante et de chaque dérivée partielle contenue dans l'équation est un .
2. les coefficients de la variable dépendante et les coefficients de chaque dérivées partielle sont des constantes ou des variables indépendantes.

Cependant, si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite, l'équation est dite non linéaire.

Exemple 1.4.1

- Soit l'équation suivant $xZ_{xx} + yZ_{yy} = 0$, la puissance de chaque dérivée partielle Z_{xx} et Z_{yy} est un . De plus, les coefficients parmi les dérivées partielles sont les variables indépendantes x et y respectivement. Par conséquent, la EPD est linéaire.
- Considerons l'équation $ZZ_t + xZ_x = 2$, bien que la puissance de chaque dérivée partielle soit un , mais Z_t a la dépendante variable Z comme son coefficient. Par conséquent, l'EDP est non linéaire.

1.4.1 Quelques EDP linéaires

Comme indiqué précédemment, les équations aux dérivées partielles linéaires apparaissent dans de nombreux domaines scientifiques et applications, telles que l'équa-

tion de diffusion et l'équation d'onde. Dans ce qui suit, nous énumérons certains des modèles bien connus :

1. L'équation de la chaleur dans un espace unidimensionnel est donnée par

$$Z_t = kZ_{xx} \tag{1.7}$$

où k est une constante.

2. L'équation d'onde dans l'espace unidimensionnel est donnée par

$$Z_{tt} = c^2Z_{xx} \tag{1.8}$$

où c est une constante.

3. L'équation de Laplace est donnée par

$$Z_{xx} + Z_{yy} = 0 \tag{1.9}$$

1.4.2 Quelques EDP non linéaires

Les équations aux dérivées partielles apparaissent dans différents domaines de physique mathématique et ingénierie, y compris dynamique des fluides, physique des plasmas, théorie quantique des champs, propagation des ondes non linéaires et fibres optiques non linéaires. Dans ce qui suit, nous énumérons certains des modèles non linéaires bien connus qui sont d'un grand intérêt :

1. L'équation d'advection est donnée par

$$Z_t + ZZ_x = f(x, t) \tag{1.10}$$

2. L'équation des hamburgers est donnée par

$$Z_t + ZZ_x = \alpha Z_{xx} \quad (1.11)$$

3. L'équation de Korteweg de-Vries (KdV) est donnée par

$$Z_t + aZZ_x + bZ_{xxx} = 0 \quad (1.12)$$

1.5 EDP Homogènes et non homogènes

Les équations aux dérivées partielles sont également classées comme **homogènes** ou **non homogènes**. Une équation différentielle partielle de n'importe quel ordre est dite homogène si chaque terme de la EDP contient la variable dépendante Z ou l'une de ses dérivées, sinon, c'est ce qu'on appelle une EDP non homogène. Ceci peut être illustré par des exemples.

Nous allons classer les équations aux dérivées partielles suivantes comme homogènes ou non homogènes :

- $Z_t = 4Z_{xx}$ les termes de l'équation ne contiennent que des dérivées partielles de Z , il est donc une EDP homogène.
- $Z_t = Z_{xx} + x$ l'équation est une EDP non homogène, car un terme contient la variable indépendant x .

1.6 Solution d'une EDP

Une solution d'une EDP est une fonction Z telle qu'elle vérifie l'équation en discussion et remplit également les conditions données. En d'autres termes, pour que vous satisfaisiez l'équation, le côté gauche de la EDP et le côté droit doivent être iden-

tiques en substituant la solution résultante. Ce concept sera illustré par examiner les exemples suivants.

- L'équation $Z(x, t) = \sin xe^{-4t}$ est une solution de la EDP suivante $Z_t = 4Z_{xx}$.

$$\text{Puisque : } \begin{cases} \text{le côté gauche} = Z_t = -4 \sin xe^{-4t} \\ \text{le côté droit} = 4Z_{xx} = -4 \sin xe^{-4t} \end{cases} .$$

1.6.1 Conditions aux limites

Comme indiqué ci-dessus, la solution générale d'un EDP est de peu d'utilité. Une solution particulière est fréquemment requis qui satisfera aux conditions prescrites. Etant donné une EDP qui contraque le comportement mathématique d'un phénomène physique dans un domaine borné D , la variable dépendante Z est habituellement prescrite à la limite du domaine D . Les données limites sont appelées conditions aux limites. La Conditions aux limites sont données dans trois types définis comme suit :

1. **Conditions aux limites de Dirichlet** : Dans ce cas, la fonction Z est généralement prescrite à la limite du domaine délimité. Pour une tige de longueur L , où $0 < x < L$, les conditions aux limites sont définies par $Z(0) = a, Z(L) = b$, où a est b sont constantes. Pour une plaque rectangulaire, $0 < x < L_1, 0 < y < L_2$, les conditions aux limites $Z(0, y), Z(L_1, y), Z(x, 0)$ et $Z(x, L_2)$ sont généralement prescrite. Les conditions aux limites homogeneous sont dites homogènes si la variable dépendante Z en point quelconque de borne est nul, sinon les conditions aux limites sont dites non homogènes.
2. **Conditions aux limites de Neumann** : Dans ce cas, la dérivée normale $\frac{dZ}{dn}$ de Z le long de la normale extérieure à la limite est prescrite. Pour une tige de longueur L , les Conditions aux limites de Neumann sont de la forme $Z_x(0, t) = a, Z_x(L, t) = b$.
3. **Conditions aux limites mixtes** : Dans ce cas, une combinaison linéaire du

variable dépendante Z et la forme normale $\frac{dZ}{dn}$ est prescrite à la frontière.

Il est important de noter qu'il n'est pas toujours nécessaire que le domaine soit borné, cependant une ou plusieurs parties de la frontière peuvent être à l'infini.

1.6.2 Conditions initiales

Il a été indiqué précédemment que les EDP surviennent principalement pour régir les phénomènes physiques tels que la distribution de chaleur, les phénomènes de propagation des ondes et les phénomènes quantiques mécanique. La plupart des EDP, comme l'équation de diffusion et l'équation d'onde, dépend du temps t . En conséquence, les valeurs initiales de la variable dépendante Z à l'heure de départ $t = 0$ doit être prescrite. Pour le cas l'équation de chaleur, la valeur initiale $Z(t = 0)$, qui définit la température à l'heure de départ, devrait être prescrites. Pour l'équation d'onde, les conditions initiales $Z(t = 0)$ et $Z_t(t = 0)$ devrait également être prescrit.

1.7 Une EDP bien posée

Une équation différentielle partielle(EDP) est dite bien posée si une solution unique qui satisfait à l'équation et les conditions prescrites existent, et à condition que la solution unique obtenue est stable. La solution d'une EDP est dite stable si un petit changement dans les conditions ou les coefficients de la EDP se traduit par un petit changement dans la solution.

Chapitre 2

Méthode des itérées variationnelles (MIV)

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier comment la méthode des itérées variationnelles (MIV) nouvellement développé s'est avéré efficace et fiable pour la résolution numérique et exacte des problèmes donnés. La méthode d'itération variationnelle a été établie par Ji-Huan [3, 4, 5]. Elle est maintenant utilisée pour gérer une grande variété d'équations linéaires et non linéaires, homogènes et non homogènes. La méthode fournit rapidement des approximations successives convergentes vers la solution exacte si bien sûr le problème donné admet une solution.

La méthode d'itérées variationnelle est appliquée pour résoudre une grande classe des problèmes linéaires et non linéaires avec des approximations convergeant rapidement vers les solutions exactes. L'idée principale de cette méthode est de construire une forme fonctionnelle de correction en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs doivent être choisis de telle sorte que sa correction de la solution est supérieure à son approximation initiale, appelée fonction d'essai.

De plus, Il a été récemment noté que le MIV, ainsi que d'autres méthodes analytiques sont considérées comme des techniques efficaces pour résoudre différents problèmes non linéaires, sans avoir les hypothèses restrictives générales.

2.2 Description de la méthode

Afin d'illustrer la méthodologie de la méthode MIV [1], nous commençons par considérer l'équation différentielle de la forme :

$$L(Z(t)) + N(Z(t)) = f(t) \quad (2.1)$$

Où L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire et $f(t)$ est la source de termes non homogènes. Selon la méthode d'itération variationnelle, nous présentons une fonctionnelle de correction pour l'équation (2.1) sous la forme :

$$Z_{n+1}(x) = Z_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) [LZ_n(\xi) + N\tilde{Z}_n(\xi) - f(\xi)] d\xi \quad (2.2)$$

Où λ est un multiplicateur de Lagrange général, notant que dans cette méthode λ peut être une constante ou une fonction peut être identifié de manière optimale via la théorie variationnelle qui sera vu plus tard. \tilde{Z}_n est une valeur restreinte et ceci signifie qu'elle se comporte comme une constante, d'où $\delta\tilde{Z}_n = 0$, où δ est la dérivée variationnelle.

Pour une utilisation complète de MIV, nous devons suivre deux étapes :

1. La détermination du multiplicateur de Lagrange $\lambda(\xi)$ qui sera identifié de manière optimale.
2. La substitution du résultat de l'étape 1 dans l'équation (2.2) où les restrictions doivent être omises.

En prenant la variation de l'équation (2.2) par rapport à la variable indépendante Z_n , nous obtenons :

$$\frac{\delta Z_{n+1}}{\delta Z_n} = 1 + \frac{\delta}{\delta Z_n} \int_0^x \lambda(\xi) [LZ_n(\xi) + N\tilde{Z}_n(\xi) - f(\xi)] d\xi \quad (2.3)$$

$$\delta Z_{n+1} = \delta Z_n + \delta \int_0^x \lambda(\xi) (LZ_n(\xi)) d\xi \quad (2.4)$$

L'intégration par partie a généralement été utilisée pour la détermination du multiplicateur de Lagrange $\lambda(\xi)$. En d'autres termes, nous pouvons utiliser :

$$\begin{aligned} \int_0^x \lambda(\xi) Z_n'(\xi) d\xi &= \lambda(\xi) Z_n(\xi) \Big|_0^x - \int_0^x \lambda'(\xi) Z_n(\xi) d\xi. \\ \int_0^x \lambda(\xi) Z_n''(\xi) d\xi &= \lambda(\xi) Z_n'(\xi) \Big|_0^x - \lambda'(\xi) Z_n(\xi) \Big|_0^x + \int_0^x \lambda''(\xi) Z_n(\xi) d\xi. \\ \int_0^x \lambda(\xi) Z_n'''(\xi) d\xi &= \lambda(\xi) Z_n''(\xi) \Big|_0^x - \lambda'(\xi) Z_n'(\xi) \Big|_0^x + \lambda''(\xi) Z_n(\xi) \Big|_0^x - \int_0^x \lambda'''(\xi) Z_n(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.5)$$

et ainsi de suite. Ces identifiants sont obtenus par intégration par parties.

- Si $LZ_n(\xi) = Z_n'(\xi)$ dans l'équation (2.4), alors l'équation devient

$$\delta Z_{n+1} = \delta Z_n + \delta \int_0^x \lambda(\xi) (Z_n'(\xi)) d\xi \quad (2.6)$$

En calculant l'intégrale de (2.6) par partie et en utilisant (2.5), on obtient :

$$\delta Z_{n+1} = \delta Z_n + \delta \lambda(\xi) Z_n(\xi) \Big|_0^x - \int_0^x \lambda'(\xi) \delta Z_n(\xi) d\xi \quad (2.7)$$

$$\delta Z_{n+1} = \delta Z_n (1 + \lambda) \Big|_{\xi=x} - \int_0^x \lambda'(\xi) \delta Z_n(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

La condition extrême de Z_{n+1} nécessite que $\delta Z_{n+1} = 0$. Cela signifie que le côté gauche de (2.8) est égal à zéro, et par conséquent, le côté droit doit également être

égal à zéro. On obtient ainsi les conditions stationnaires :

$1 + \lambda|_{\xi=x} = 0$ et $\lambda'|_{\xi=x} = 0$ et cela implique que $\lambda = -1$.

• Si $LZ_n(\xi) = Z_n''(\xi)$ dans l'équation (2.4), alors l'équation devient

$$\delta Z_{n+1} = \delta Z_n + \delta \int_0^x \lambda(\xi) Z_n''(\xi) d\xi \quad (2.9)$$

En intégrant l'équation (2.9) par partie et en utilisant (2.7), nous obtenons

$$\delta Z_{n+1} = \delta Z_n + \delta \lambda (Z_n)'|_0^x - (\lambda' \delta Z_n)|_0^x + \int_0^x \lambda''(\xi) \delta Z_n(\xi) d\xi$$

Ou équivalent à

$$\delta Z_{n+1} = \delta Z_n (1 - \lambda')|_{\xi=x} - \delta \lambda ((Z_n)')|_{\xi=x} + \int_0^x \lambda'' \delta Z_n d\xi \quad (2.10)$$

La condition extrême de Z_{n+1} nécessite que $\delta Z_{n+1} = 0$. Cela signifie que la côté gauche de (2.10) est égal à zéro, et par conséquent, le côté droit doit également être égal à zéro. Ceci donne les conditions stationnaires $1 - \lambda'|_{\xi=x} = 0$, $\lambda|_{\xi=x} = 0$ et $\lambda''|_{\xi=x} = 0$ et ceci implique que $\lambda = \xi - x$.

Après avoir déterminer le multiplicateur de Lagrange $\lambda(\xi)$, les approximations successives Z_{n+1} , $n \geq 0$ de la solution $Z(x)$ a été facilement obtenue en utilisant la fonction sélective $Z_0(x)$. Cependant, pour la convergence rapide, la fonction $Z_0(x)$ doit être sélectionnée en utilisant les conditions initiales comme suit :

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= Z(0) , \text{ pour le premier ordre } Z_n' \\ Z_0(x) &= Z(0) + xZ'(0) , \text{ pour le second ordre } Z_n'' \\ Z_0(x) &= Z(0) + xZ'(0) + \frac{1}{2}x^2Z''(0) , \text{ pour la } 3^{\text{ème}} \text{ commande } Z_n''' \\ &\vdots \end{aligned}$$

Et ainsi de suite. Par conséquent, la solution $Z(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(x)$.

$$\begin{aligned} Z', \lambda &= -1 \\ Z'', \lambda &= \xi - x \\ Z''', \lambda &= \frac{-1}{2}(\xi - x)^2 \\ &\vdots \\ Z^n, \lambda &= (-1)^n \frac{(\xi - x)^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

2.3 Application de la méthode (MIV) aux équations différentielles ordinaire (EDOs)

2.3.1 Les EDOs linaires d'ordre un

Considérons le problème à valeur initiale (PVI) suivant [9] :

$$Z'(t) + p(t)Z(t) = q(t), Z(0) = \alpha \quad (2.11)$$

On voudrais appliquer la méthode MIV à l'équation (2.11) la fonctionnelle de correction est donnée comme suit :

$$Z_{n+1}(x) = Z_n(x) + \int_0^x \lambda(t) [Z'_n(t) + p(t)\tilde{Z}_n(t) - q(t)] dt \quad (2.12)$$

En suivant les etapes de la méthode données dans la section precedente, nous obtenons

$$\delta Z_{n+1} = \delta(1 + \lambda|_{t=x})Z_n - \delta \int_0^x \lambda' Z_n(t) dt \quad (2.13)$$

Nous avons vu que la condition d'extremum sur Z_{n+1} exige que $\delta Z_{n+1} = 0$, cela

signifie e que le côté gauche de (2.13) est nul, et par conséquent le côté droit devrait être 0 également. Cela donne les conditions stationnaires :

$$\begin{cases} 1 + \lambda|_{t=x} = 0 \\ \lambda'|_{t=x} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Qui donne $\lambda = 1$. Substituons cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans 2.12 on obtient la formule de l'itération :

$$Z_{n+1}(x) = Z_n(x) - \int_0^x [Z'_n(t) + p(t)\tilde{Z}_n(t) - q(t)]dt \quad (2.15)$$

Puisque $Z(0) = \alpha$, nous pouvons prendre la première approximation de $Z_0 = \alpha$. Nous obtenons les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= \alpha \\ Z_1(x) &= Z_0(x) - \int_0^x [Z'_0(t) + p(t)Z_0(t) - q(t)]dt \\ Z_2(x) &= Z_1(x) - \int_0^x [Z'_1(t) + p(t)Z_1(t) - q(t)]dt \\ Z_3(x) &= Z_2(x) - \int_0^x [Z'_2(t) + p(t)Z_2(t) - q(t)]dt \\ &\vdots \\ Z_{n+1}(x) &= Z_n(x) - \int_0^x [Z'_n(t) + p(t)Z_n(t) - q(t)]dt \end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 *Considerons le problème suivant :*

$$\begin{cases} Z'(x) - 2Z = 4 \\ Z(0) = 0 \end{cases}$$

Ici $LZ = Z'$; $NZ = Z$ et $p(x) = -2$; $q(x) = 4$. Nous voudrions le problème considéré

par la MIV. Le problème est sous la forme d'équation (2.11). d'où les $(n + 1)^{ème}$ approximation est donnée comme suit :

$$Z_{n+1}(x) = Z_n(x) - \int_0^x [Z'_n(t) - 2Z_n(t) - 4]dt \quad (2.16)$$

Choisissez $Z_0(x) = Z(0)$. Substitution $n = 0$ dans l'équation (2.16), nous obtenons

$$Z_1(x) = Z_0(x) - \int_0^x [Z'_0(t) - 2Z_0(t) - 4]dt$$

En simplifiant, nous obtenons

$$Z_1(x) = 0 - \int_0^x [0 + 2 * 0 - 4]dt = 4x.$$

Substituant $n = 1$ dans l'équation (2.16), on obtient

$$\begin{aligned} Z_2(x) &= Z_1(x) - \int_0^x [Z'_1(t) - 2Z_1(t) - 4]dt \\ &= Z_1(x) - \int_0^x [4 - 8t - 4]dt \\ &= 4x + \frac{8x^2}{2}. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Z_3(x) &= Z_2(x) - \int_0^x [Z'_2(t) - 2Z_2(t) - 4]dt \\ &= 4x + \frac{8x^2}{2} + \frac{8x^3}{3}. \\ Z_4(x) &= 4x + \frac{8x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^4}{3 * 4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_5(x) &= 4x + \frac{8x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^4}{3 * 4} + \frac{32x^5}{3 * 4 * 5} \\
 &= 2\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!}\right) - 2 \\
 &\vdots \\
 Z_{n+1}(x) &= 2\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \dots\right) - 2 \\
 &= 2e^{2x} - 2.
 \end{aligned}$$

Exemple 2.3.2 *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} Z'(x) - 2x = \cos x \\ Z(0) = 0 \end{cases}$$

La formule d'itération de variation pour le problème considéré est

$$Z_{n+1}(x) = Z_n(x) - \int_0^x [Z'_n(t) - 2t - \cos t] dt \tag{2.17}$$

En substituant $n = 0$ dans (2.17) on obtient

$$Z_1(x) = Z_0(x) - \int_0^x [Z'_0(t) - 2t - \cos t] dt \tag{2.18}$$

Choisissons $Z_0(x) = 0$. Ensuite, l'équation (2.18) se réduit à

$$Z_1(x) = - \int_0^x [-2t - \cos t] dt = x^2 + \sin x \tag{2.19}$$

En substituant $n = 1$ dans l'équation (2.17), nous obtenons

$$\begin{aligned} Z_2(x) &= Z_1(x) - \int_0^x [Z_1'(t) - 2t - \cos t] dt \\ &= Z_1(x) - \int_0^x [2t + \cos t - 2t - \cos t] dt = Z_1(x) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Z_k(x) = x^2 + \sin x \text{ pour } k = 1.2.3\dots$$

Nous pouvons observer que dans la première itération elle-même, nous avons obtenu la solution exact.

2.3.2 Les EDOs linaires d'ordre deux

Considérons la problème PVI suivant [9] :

$$\begin{cases} Z'' + aZ' + bZ = g(x) \\ Z(0) = \alpha \\ Z'(0) = \beta \end{cases} \quad (2.20)$$

La fonctionnelle de correction, selon la (MIV) de cette équation, s'écrit :

$$Z_{n+1}(x) = Z_n(x) + \int_0^x \lambda(t) [Z_n''(t) + a\tilde{Z}_n'(t) + b\tilde{Z}_n(t) - g(t)] dt \quad (2.21)$$

En appliquant les étapes de la méthode MIV, nous obtenons :

$$\delta Z_{n+1} = \delta(1 - \lambda'|_{t=x})Z_n + \delta\lambda Z_n' + \delta \int_0^x \lambda'' Z_n(t) dt \quad (2.22)$$

La condition d'existence des extrémums pour Z_{n+1} exige que $\delta Z_{n+1} = 0$. Cela veut

dire le côté droit devrait être égale à 0. Cela donne les conditions stationnaires :

$$\begin{cases} 1 - \lambda'|_{t=x} = 0 \\ \lambda|_{t=x} = 0 \\ \lambda''|_{t=x} = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Ce qui donne

$$\lambda(t) = t - x \quad (2.24)$$

On remplace cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans (2.21), on obtient la formule itérative suivante après avoir enlevé la restriction sur Z_n et Z_{n+1} :

$$Z_{n+1}(x) = Z_n(x) + \int_0^x (t - x)[Z_n''(t) + aZ_n'(t) + bZ_n(t) - g(t)]dt \quad (2.25)$$

Avec les conditions initiales $Z(0) = \alpha$, $Z'(0) = \beta$, nous pouvons obtenir les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= \alpha + \beta x \\ Z_1(x) &= Z_0(x) + \int_0^x (t - x)[Z_0''(t) + aZ_0'(t) + bZ_0(t) - g(t)]dt \\ Z_2(x) &= Z_1(x) + \int_0^x (t - x)[Z_1''(t) + aZ_1'(t) + bZ_1(t) - g(t)]dt \\ Z_3(x) &= Z_2(x) + \int_0^x (t - x)[Z_2''(t) + aZ_2'(t) + bZ_2(t) - g(t)]dt \\ &\vdots \\ Z_{n+1}(x) &= Z_n(x) + \int_0^x (t - x)[Z_n''(t) + aZ_n'(t) + bZ_n(t) - g(t)]dt \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on trouve la solution exacte :

$$Z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{n+1}(x) \quad (2.26)$$

Exemple 2.3.3 *Considérons le problème IVP suivant :*

$$\begin{cases} Z''(x) - 5Z'(x) + 4Z(x) = 0 \\ Z(0) = 2 \\ Z'(0) = 5 \end{cases} \quad (2.27)$$

La solution exacte de celui-ci est $Z(x) = e^x + e^{4x}$. Variation la formule d'itération pour le problème considéré est

$$Z_{n+1}(x) = Z_n(x) + \int_0^x (t-x)[Z_n''(t) - 5Z_n'(t) + 4Z_n(t)]dt \quad (2.28)$$

Choisissez $Z_0(x) = 2 + 5x$. En substituant $n = 0$ dans l'équation (2.28), nous obtenir

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= Z_0(x) + \int_0^x (t-x)[Z_0''(t) - 5Z_0'(t) + 4Z_0(t)]dt \\ &= -\frac{10x^3}{3} + \frac{17x^2}{2} + 5x + 2 \end{aligned}$$

De même, en substituant $n = 1, 2, 3, \dots$ dans (2.28), nous obtenons

$$\begin{aligned} Z_2(x) &= \frac{2x^5}{3} - 7x^4 + \frac{65x^3}{6} + \frac{17x^2}{2} + 5x + 2. \\ Z_3(x) &= -\frac{4x^7}{63} + \frac{67x^6}{45} - \frac{55x^5}{6} + \frac{257x^4}{24} + \frac{65x^3}{6} + \frac{17x^2}{2} + 5x + 2. \\ Z_4(x) &= \frac{2x^9}{567} - \frac{46x^8}{315} + \frac{122x^7}{63} - \frac{136x^6}{15} + \frac{205x^5}{24} + \frac{257x^4}{24} \\ &\quad + \frac{65x^3}{6} + \frac{17x^2}{2} + 5x + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_5(x) &= -\frac{4x^{11}}{31185} + \frac{13x^{10}}{1575} - \frac{107x^9}{567} + \frac{2341x^8}{1260} - \frac{1837x^7}{252} + \frac{4097x^6}{720} \\
 &\quad + \frac{205x^5}{24} + \frac{257x^4}{24} + \frac{65x^3}{6} + \frac{17x^2}{2} + 5x + 2 \\
 &\quad \vdots \\
 Z_n(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \\
 &\quad + \left(1 + 4x + \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^4}{4!} + \frac{(4x)^5}{5!} + \dots\right)
 \end{aligned}$$

Et la $n^{\text{ème}}$ approximation est donnée par

$$Z_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(4x)^k}{k!}$$

Par conséquent :

$$Z(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(x) = e^x + e^{4x}$$

est la solution exacte du problème (2.27).

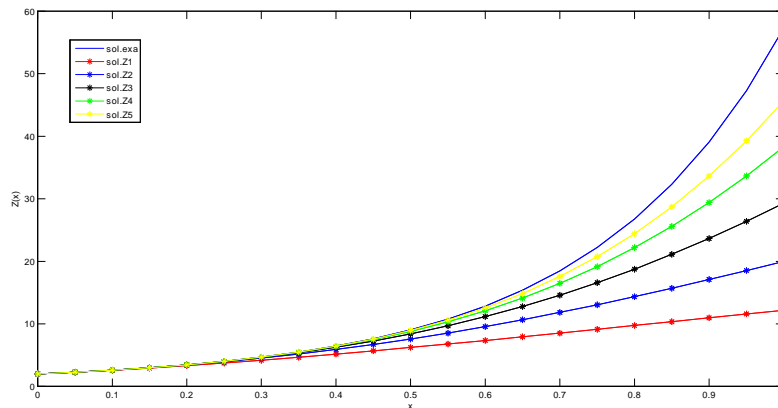


FIG. 2.1 – Les approximations par MIV de problème (2.27)

Chapitre 3

Résolution des EDPs par MIV

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de faire une application de la méthode des itérées variationnelles aux quelques équations différentielles partielles. Pour le cas non linéaire, nous allons comparer les résultats pour $n = 1$ avec des résultats obtenus par la méthode des différences finies.

3.2 Problème linéaire

Considérons l'équation différentielle partielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} Z_x + Z_y = 2x + 2y \\ Z(0, y) = y^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

La fonctionnelle de correction de l'équation (3.1) est

$$Z_{n+1}(x, y) = Z_n(x, y) + \int_0^x \lambda(\xi) \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \xi}(\xi, y) + \frac{\partial \tilde{Z}_n}{\partial y}(\xi, y) - 2\xi - 2y \right) d\xi \quad (3.2)$$

Les conditions stationnaires sont les suivantes :

$$\begin{cases} 1 + \lambda|_{\xi=x} = 0 \\ \lambda'|_{\xi=x} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Cela donne $\lambda = -1$.

En substituant cette valeur du multiplicateur de Lagrange $\lambda = -1$ dans la fonctionnelle (3.2) que donne la formule d'itération suivante :

$$Z_{n+1}(x, y) = Z_n(x, y) - \int_0^x \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \xi}(\xi, y) + \frac{\partial Z_n}{\partial y}(\xi, y) - 2\xi - 2y \right) d\xi, n \geq 0 \quad (3.4)$$

Apartir de condition donnée, nous pouvons $Z_0(x, y) = Z(0, y) = y^2$.

En utilisant cette sélection en (3.4), nous obtenons les approximation successives suivants sélectionner :

$$\begin{aligned} Z_0(x, y) &= y^2. \\ Z_1(x, y) &= Z_0(x, y) - \int_0^x \left(\frac{\partial Z_0}{\partial \xi}(\xi, y) + \frac{\partial Z_0}{\partial y}(\xi, y) - 2\xi - 2y \right) d\xi = x^2 + y^2. \\ Z_2(x, y) &= Z_1(x, y) - \int_0^x \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \xi}(\xi, y) + \frac{\partial Z_1}{\partial y}(\xi, y) - 2\xi - 2y \right) d\xi = x^2 + y^2. \\ Z_3(x, y) &= Z_2(x, y) - \int_0^x \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \xi}(\xi, y) + \frac{\partial Z_2}{\partial y}(\xi, y) - 2\xi - 2y \right) d\xi = x^2 + y^2. \\ &\vdots \\ Z_n(x, y) &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Cela donne la solution exacte en

$$Z(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(x, y) = x^2 + y^2.$$

Nous remarquons que la solution exacte de problème (3.1) est apparue dès les calculs de la première approximation par MIV.

3.3 Problème homogène

Considérons l'équation différentielle partielle homogène suivante :

$$\begin{cases} Z_x + Z_y = Z \\ Z(x, 0) = 1 + e^x \end{cases} \quad (3.5)$$

La fonctionnelle de correction de l'équation (3.5) est donnée par :

$$Z_{n+1}(x, y) = Z_n(x, y) + \int_0^y \lambda(\xi) \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \xi}(x, \xi) + \frac{\partial \tilde{Z}_n}{\partial y}(x, \xi) - \tilde{Z}_n(x, \xi) \right) d\xi \quad (3.6)$$

Comme présenté précédemment, les conditions stationnaires sont :

$$\begin{cases} 1 + \lambda|_{\xi=x} = 0 \\ \lambda'|_{\xi=x} = 0 \end{cases}$$

Qui donnera $\lambda = -1$.

En substituant cette valeur du multiplicateur de Lagrange ($\lambda = -1$) dans la fonctionnelle (3.6) la formule d'itération est :

$$Z_{n+1}(x, y) = Z_n(x, y) - \int_0^y \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \xi}(x, \xi) + x \frac{\partial Z_n}{\partial x}(x, \xi) - 3Z_n(x, \xi) \right) d\xi \quad (3.7)$$

Comme précédemment, nous pouvons poser $Z_0(x, y) = Z(x, 0) = 1 + e^x$ et cela nous permet de obtenir les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} Z_0(x, y) &= 1 + e^x \\ Z_1(x, y) &= Z_0(x, y) - \int_0^y \left(\frac{\partial Z_0}{\partial \xi}(x, \xi) + \frac{\partial Z_0}{\partial x}(x, \xi) - Z_0(x, \xi) \right) d\xi \\ &= 1 + e^x + y. \\ Z_2(x, y) &= Z_1(x, y) - \int_0^y \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \xi}(x, \xi) + \frac{\partial Z_1}{\partial x}(x, \xi) - Z_1(x, \xi) \right) d\xi \\ &= 1 + e^x + y + \frac{1}{2!}y^2. \\ Z_3(x, y) &= Z_2(x, y) - \int_0^y \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \xi}(x, \xi) + \frac{\partial Z_2}{\partial x}(x, \xi) - Z_2(x, \xi) \right) d\xi \\ &= 1 + e^x + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3. \\ &\vdots \\ Z_n(x, y) &= e^x + (1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + \dots) \end{aligned}$$

Cela donne une solution exacte en

$$Z(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(x, y) = e^x + e^y.$$

Nous remarquons que la suite des approximations successives par MIV de problème (3.5) converge vers la solution exacte $e^x + e^y$, puisque ces approximations ne sont que la formule de Taylor de la fonction e^y .

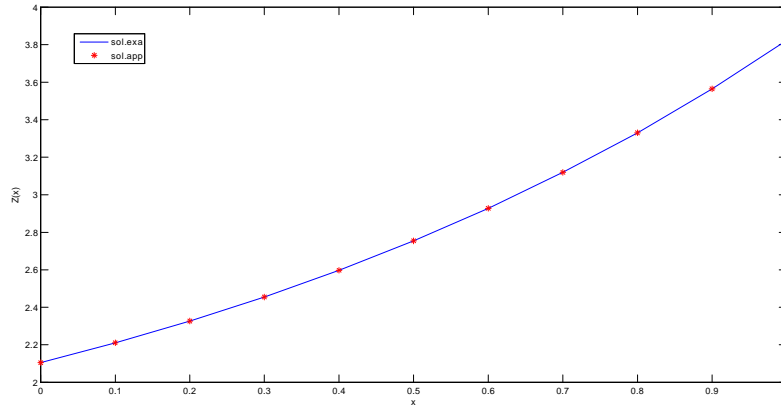


FIG. 3.1 – Approximation par MIV (n=3) de problème (3.5)

3.4 Problème non linéaire

De même, comme l'état précédent, cette méthode d'itération variationnelle gère des problèmes non linéaires d'une manière parallèle à celle utilisée pour les problèmes simples. L'étape principale consiste à déterminer le multiplicateur de Lagrange $\lambda(\xi)$, par la suite ces approximations progressives pourraient être acquises à côté d'une manière récursive.

3.4.1 Problème 1

Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} Z_t + ZZ_x = 1 + t \cos x + \cos x \sin x \\ Z(x, 0) = \sin x \end{cases} \quad (3.8)$$

La fonctionnelle de correction pour cette équation est donné par :

$$Z_{n+1}(x, t) = Z_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \xi}(x, \xi) + \tilde{Z}_n \frac{\partial \tilde{Z}_n}{\partial x}(x, \xi) - 1 - \xi \cos x - \cos x \sin x \right) d\xi \quad (3.9)$$

Les conditions stationnaires donnent $\lambda = -1$. Sur cette base, nous obtenons la formule d'itération :

$$Z_{n+1}(x, t) = Z_n(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \xi}(x, \xi) + Z_n \frac{\partial Z_n}{\partial x}(x, \xi) - 1 - \xi \cos x - \cos x \sin x \right) d\xi.$$

Par sélectionnement $Z_0(x, t) = \sin x$, nous obtenons les approximations successives suivant :

$$\begin{aligned} Z_0(x, t) &= \sin x \\ Z_1(x, t) &= Z_0(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial Z_0}{\partial \xi}(x, \xi) + Z_0 \frac{\partial Z_0}{\partial x}(x, \xi) - 1 - \xi \cos x - \cos x \sin x \right) d\xi \\ &= t + \sin x + \frac{t^2 \cos x}{2}. \\ Z_2(x, t) &= Z_1(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \xi}(x, \xi) + Z_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x}(x, \xi) - 1 - \xi \cos x - \cos x \sin x \right) d\xi \\ &= t + \sin x + \frac{t^4 \sin x}{8} - \frac{t^3(2 \cos^2 x - 1)}{6} + \frac{t^5 \cos x \sin x}{20}. \\ Z_3(x, t) &= Z_2(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \xi}(x, \xi) + Z_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x}(x, \xi) - 1 - \xi \cos x - \cos x \sin x \right) d\xi \\ &= t + \sin x - \frac{t^4 \cos x}{48} - \frac{t^6 \cos x}{48} - \frac{t^8 \cos x}{768} + \frac{t^6 \sin x}{480} + \frac{t^{10} \sin x}{6400} \\ &\quad + \frac{t^4 \cos(3x)}{16} - \frac{t^7 \cos(2x)}{140} + \frac{t^8 \cos(3x)}{256} + \frac{t^9 \cos(4x)}{1080} - \frac{11t^5 \sin(2x)}{120} \\ &\quad - \frac{t^6 \sin(3x)}{160} + \frac{t^7 \sin(4x)}{252} - \frac{t^9 \sin(2x)}{1152} - \frac{3t^{10} \sin(3x)}{6400} - \frac{t^{11} \sin(4x)}{17600}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Le problème (3.8) a comme solution exacte la fonction suivante :

$$Z(x, y) = t + \sin x.$$

La forme analytique de la solution n'a pas apprise dans les calculs des trois approximations, mais la figure 3.2, nous montre que par exemple Z_3 donne une bonne approximation de la solution.

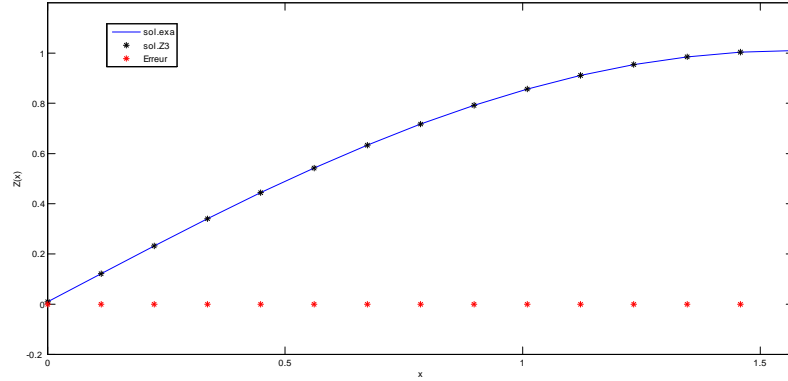


FIG. 3.2 – Approximation par MIV ($n=3$) de problème (3.8)

Comparaison avec la méthode des différences finies :

La méthode des différences finies (MDF) est une méthode numérique qui consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage. Le lecteur peut consulter les références suivantes pour plus de détails [2], [7].

Nous proposons un problème aux limites équivalent au problème (3.8). Ce problème s'écrira alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_t + Z Z_x = 1 + t \cos x + \cos x \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ Z(x, 0) = \sin x, x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ Z(0, t) = 1, t > 0 \\ Z(1, t) = 1 + t, t > 0 \end{array} \right.$$

Nous allons résoudre le problème par la méthode des différences finies. On construit alors un schéma d'Euler explicite de (3.8).

Soit $h = \frac{\pi}{2N}$ et $k = \frac{1}{M}$ et posons $\lambda = \frac{k}{2h}$. On se donne les points suivants :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \frac{\pi}{2}$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = 1$$

La valeur $Z(x_i, t_j)$ est la solution exacte de problème aux points (x_i, t_j) pour $i = 0 \dots N$ et $j = 0 \dots M$. Notons par Z_i^j l'approximation de $Z(x_i, t_j)$.

Nous utiliserons les approximations suivantes :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{Z_i^{j+1} - Z_i^j}{k}, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{Z_{i+1}^j - Z_{i-1}^j}{2h}$$

Nous obtenons le schéma discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_i^{j+1} = Z_i^j - \lambda Z_i^j (Z_{i+1}^j - Z_{i-1}^j) + k(1 + t_j \cos(x_i) + \cos(x_i) \sin(x_i)) \\ Z_i^0 = \sin(ih), i = 1 \dots N - 1 \\ Z_0^j = jk, j = 1 \dots M \\ Z_N^j = 1 + jk, j = 1 \dots M \end{array} \right.$$

valeur x_i	Sol exact	Err par MIV* 10^{-4}	Err par MDF
0	0.0100	0.5000	0
0.1745	0.1836	0.4924	0.0017
0.3491	0.3520	0.4698	0.0031
0.5236	0.5100	0.4330	0.0042
0.6981	0.6528	0.3830	0.0048
0.8727	0.7760	0.3214	0.0048
1.0472	0.8760	0.2500	0.0042
1.2217	0.9497	0.1710	0.0031
1.3963	0.9948	0.0868	0.0017
1.5708	1.0100	0	0

TAB. 3.1 – Table d’erreur par MIV ($n=1$) et par MDF pour $t=0.01$.

Discussion :

La table 3.1 nous affiche les erreurs commises en calculant la solution numérique de problème (3.8) par MIV pour $n = 1$ et par MDF sur 10 points (t fixé).

Pour $t = 0.01$, nous remarquons que l’approximations donnée par MIV est meilleur que celle donné par MDF.

3.4.2 Problème 2

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} Z_t + ZZ_x = x + t + xt^2 \\ Z(x, 0) = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

En procédant comme avant, nous obtenons la formule d'itération :

$$Z_{n+1}(x, t) = Z_n(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \xi}(x, \xi) + Z_n \frac{\partial Z_n}{\partial x}(x, \xi) - x - \xi - x\xi^2 \right) d\xi \quad (3.11)$$

La sélection $Z_0(x, t) = 1$ à partir de la condition initiale donnée les approximations successives rapprochement :

$$Z_0(x, t) = 1.$$

$$\begin{aligned} Z_1(x, t) &= Z_0(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial Z_0}{\partial \xi}(x, \xi) + Z_0 \frac{\partial Z_0}{\partial x}(x, \xi) - x - \xi - x\xi^2 \right) d\xi \\ &= \frac{xt^3}{3} + \frac{t^2}{2} + tx + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2(x, t) &= Z_1(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \xi}(x, \xi) + Z_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x}(x, \xi) - x - \xi - x\xi^2 \right) d\xi \\ &= -\frac{xt^7}{63} - \frac{t^6}{36} - \frac{2xt^5}{15} - \frac{5t^4}{24} + xt + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3(x, t) &= Z_2(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial Z_2}{\partial \xi}(x, \xi) + Z_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x}(x, \xi) - x - \xi - x\xi^2 \right) d\xi \\ &= -\frac{xt^{15}}{59535} - \frac{t^{14}}{31752} - \frac{4xt^{13}}{12285} - \frac{53t^{12}}{90720} - \frac{4xt^{11}}{2475} - \frac{t^{10}}{360} + \frac{2xt^9}{567} \\ &\quad + \frac{11t^8}{2016} + \frac{4xt^7}{105} + \frac{41t^6}{720} + xt + 1. \end{aligned}$$

⋮

De même que le problème précédent, la forme analytique de la solution n'apprue pas même après le calcul de plusieurs approximations. Il est facile de vérifier que la fonction $Z(x, t) = 1 + xt$ est une solution du problème (3.10), ce qui vient à penser qu'il nous reste juste à montrer que le terme qui vient après $1 + xt$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ . La figure 3.3 confirme notre remarque.

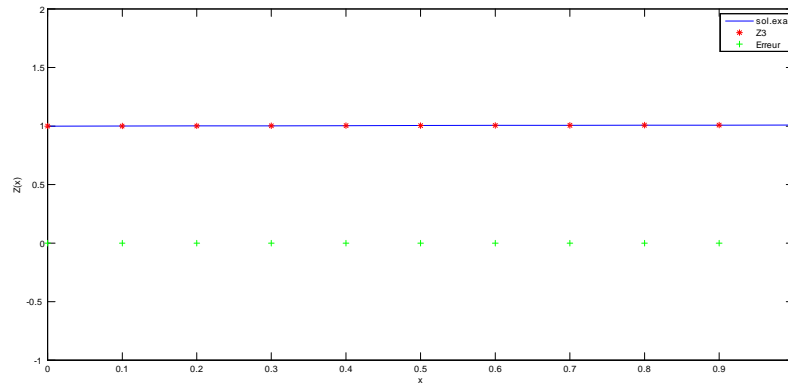


FIG. 3.3 – Approximation par MIV (n=3) de problème (3.10)

Comparaison avec la méthode des différences finies :

La problème aux limites équivalent au problème (3.10) s'écrira :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_t + ZZ_x = x + t + xt^2, x \in [0, 1] \\ Z(x, 0) = 1, x \in]0, 1[\\ Z(0, t) = 1, t > 0 \\ Z(1, t) = 1 + t, t > 0 \end{array} \right.$$

Le schéma d'Euler explicite de problème (3.10) en utilisant l'approximation centrée de Z_x est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_i^{j+1} = Z_i^j - \lambda Z_i^j (Z_{i+1}^j - Z_{i-1}^j) + k(x_i + t_j + x_i t_j^2) \\ Z_i^0 = 1, i = 1 \dots N - 1 \\ Z_0^j = 1, j = 1 \dots M \\ Z_N^j = 1 + jk, j = 1 \dots M \end{array} \right.$$

Valeur x_i	Err par MIV*10 ⁻³			Err par MDF*10 ⁻³		
	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
0	0.05000	0.2000	0.4500	0	0	0
0.1	0.05003	0.2003	0.4509	0	0.0991	0.2974
0.2	0.05007	0.2005	0.4518	0	0.0992	0.2980
0.3	0.05010	0.2008	0.4527	0	0.0993	0.2985
0.4	0.05013	0.2011	0.4536	0	0.0994	0.2990
0.5	0.05017	0.2013	0.4545	0	0.0995	0.2995
0.6	0.05020	0.2016	0.4554	0	0.0996	0.3000
0.7	0.05023	0.2019	0.4563	0	0.0997	0.3005
0.8	0.05027	0.2021	0.4572	0	0.0998	0.3010
0.9	0.05030	0.2024	0.4581	0	0.0999	0.3015
1.	0.05033	0.2027	0.4590	0	0	0

TAB. 3.2 – Table d’erreur par MIV ($n=1$) et par MDF.

Discussion :

La table 3.2 nous affiche les erreurs lors du calcul de l’approximation de problème (3.10) par MIV ($n = 1$) et par MDF pour trois différentes valeurs de t . Nous remarquons que , pour tout t choisit, la méthode FDM donne la meilleure approximation.

Conclusion

L'objectif principal de ce travail est de mener une étude numérique de quelques EDP par la méthode des itérées variationnelles (MIV). Les exemples montrent la validité et le grand potentiel de cette méthode. Dans le cas des EDP non linéaires, nous avons comparé la première approximation obtenue par MIV ($n = 1$) avec une approximation obtenue par la méthode des différences finies (MDF). Les résultats nous permettent de tirer une conclusion importante : La première approximation par MIV peut être meilleur que celle donnée par MDF comme le montre le problème non linéaire 1 et vice versa ; la méthode MDF peut donner une bonne approximation meilleur que celle obtenue par MIV ($n = 1$) comme le montre le problème non linéaire 2. Le principal avantage de la méthode MIV est la flexibilité de donner des solutions approchées à des problèmes non linéaires sans linéarisation ni discrétisation.

Bibliographie

- [1] Ayalew, H. (2022). Solutions of Volterra Fredholm integro-Ordinary Differential Equations by Using Variational Iteration Method. Bahir Dar University College of Sciences.
- [2] Jędrzejewski, F. (2005). Introduction aux méthodes numériques. Springer Science & Business Media.
- [3] He, J. H. (1999). Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique : some examples. International journal of non-linear mechanics, 34(4), 699-708.
- [4] He, J. H. (2000). Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. Applied mathematics and computation, 114(2-3), 115-123.
- [5] He, J. H. (2006). Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations. International journal of Modern physics B, 20(10), 1141-1199.
- [6] Lesfari, A. (2015). Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles : cours et exercices corrigés. Ellipses.
- [7] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2008). Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications. Springer Science & Business Media.
- [8] Wazwaz, A. (2009). Théorie des Equatis et des ondes solitaires partielles (p. 4-12). Springer

- [9] Zellal, M. (2014). Résolution des équations différentielles par les méthodes variationnelles et homotopiques (Mémoire de Magister). Faculté Des Sciences Exactes Et Appliquées, Université d'Oran.

Annexe A : Programme de Matlab

```
% Problème 2 MIV
```

```
syms x t
```

```
Z0 = 1;
```

```
u = x + t + x * t^2;
```

```
I = diff(Z0, t) + Z0 * diff(Z0, x) - u;
```

```
II = int(I, t);
```

```
Z1 = simplify(Z0 - II)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
I1 = diff(Z1, t) + Z1 * diff(Z1, x) - u;
```

```
II1 = int(I1, t);
```

```
Z2 = simplify(Z1 - II1)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
I2 = diff(Z2, t) + Z2 * diff(Z2, x) - u;
```

```
II2 = int(I2, t);
```

```
Z3 = simplify(Z2 - II2)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Les courbes
```

```
a = [0 : 0.1 : 1];
```

```
n = length(a);
y1a = ones(1, n);
y2a = ones(1, n);
for i = 1 : n
y1a(i) = subs(Z1, [x, t], [a(i), 0.01]);
end
for i = 1 : n
y2a(i) = subs(Z3, [x, t], [a(i), 0.01]);
end
fex = @(x)1 + (0.01) * x;
plot(a, fex(a), 'b-')
hold on
plot(a, y2a, 'r*')
for i = 1 : n
Err1(i) = abs(fex(a(i)) - y1a(i));
end
for i = 1 : n
Err2(i) = abs(fex(a(i)) - y2a(i));
end
Err1'
plot(a, Err2, 'g+')
axis([0 1 -1 2])
xlabel('x')
ylabel('Z(x)')
```

```
legend('sol.exa','Z3','Erreur')
```

```
% Problème 2 MDF
```

```
L = 1;
```

```
T = 1;
```

```
M = 100;
```

```
N = 10;
```

```
h = L/N;
```

```
k = T/M;
```

```
lambda = k/2 * h;
```

```
Zex = @(x)1 + x. * (0.01);
```

```
% les valeurs initiales
```

```
for i = 1 : N + 1
```

```
x(i) = (i - 1) * h;
```

```
Z(i, 1) = 1;
```

```
end
```

```
for j = 1 : M + 1
```

```
t(j) = (j - 1) * k;
```

```
Z(1, j) = 1;
```

```
Z(N + 1, j) = 1 + (t(j));
```

```
end
```

```
% solution
```

```
for j = 1 : M
```

```
for i = 2 : N
```

```
Z(i, j + 1) = Z(i, j) - lambda * Z(i, j) * (Z(i + 1, j) - Z(i - 1, j)) + k * (x(i) + t(j) +
```

```
x(i) * t(j)^2);  
end  
end  
figure(1)  
mesh(x, t, Z')  
figure(2)  
plot(x, Z(:, 2))  
C = Z(:, 2);  
hold on  
plot(x, Zex(x), 'r*')  
for i = 1 : N + 1  
Err(i) = abs(Zex(x(i)) - C(i));  
end  
Err'
```

المخلص

يرتكز عملنا على الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام الطريقة التكرارية المتغيرة .

قدمنا في البداية ، بعض المفاهيم الأساسية (تعريف المعادلات التفاضلية الجزئية ، ترتيب المعادلات التفاضلية الجزئية ، المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية ...) .

في ما يلي ، ركزنا على اعتماد طريقة التكرار المتغير و تطبيقها على بعض المعادلات التفاضلية العادية .
أخيرا ، قمنا بحل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية (الخطية وغير الخطية) عدديا بالطريقة التكرارية المتغيرة وقمنا أيضا بإجراء دراسة مقارنة باستخدام طريقة الفروق المنتهية للحالة غير الخطية .
وفي النهاية، عرضنا برامج Matlab المستعملة في الدراسة .

الكلمات المفتاحية :

المعادلات التفاضلية الجزئية - طريقة التكرار المتغير- طريقة الاختلاف المحدود .

Résumé

Notre travail porte sur la résolution numérique des EDP par la méthode des itérées variationnelles (MIV).

Au début, on a introduit quelques notions de base (définitions d'une EDP, ordre d'une EDP, EDP linéaire et non linéaire...). Ensuite, on a focalisé sur la description de la méthode MIV puis l'appliquer sur quelques équations différentielles ordinaires. Finalement on a résolu numériquement quelques équations différentielles partielles (linéaires et non linéaires) par la méthode MIV et aussi faire une étude comparative avec la méthode des différences finies pour le cas non linéaire. Finalement, on a présenté quelques programmes en Matlab utilisés durant notre étude.

Mots clés : L'équations différentielle partielle – la méthode des itérées variationnelles – la méthode des différences finies.

Abstract

Our work focuses on the numerical resolution of PDEs by variational iteration method (VIM).

At the beginning, we introduced some basic notions (definitions of a PDE, order of a PDE, linear and nonlinear PDE...). Then, we focused on the description of the VIM method then apply it on some ordinary differential equations. Finally we numerically solved some partial differential equations (linear and nonlinear) by the VIM method and also made a comparative study with the finite difference method for the nonlinear case. Finally, we presented some Matlab programs used during our study.

Key words: The partial differential equations –variational iteration method – finite difference method.