République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : analyse

Par

ABDEDAIM Abdelmadjid

Titre :

Sur Quelques Méthodes Numériques Pour Résoudre Les Equations Integro-Différentielles De Volterra

Membres comité du jury :

Dr.	KABOUL Hanane	UMKB	Président
Dr.	LAIADI Abdelkader	UMKB	Encadreur
Dr.	HAMDI Soumia	UMKB	Examinatrice

19Juin 2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère **ALOUI Aicha** et mon pére **Khaled**

- Amis des sentiers

-A mes frères.

- Pour tous les membres de la famille **ABDEDAIM** et **ALOUI**

-A toute mes amis.

- Mon ancien professeur et superviseur **LAIADI Abdelkader**

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

ABDEDAIM Abdelmadjid

REMERCIEMENTS

Je remercie **ALLAH** le clément et le mésirécordieux.

La réalisation de ce travail n'aurait pas pu se faire sans l'appui de plusieurs personnes que je tiens à remercier

En premier lieu, je remercie mes parents car grâce à eux que j'ai pu continuer mes études à un niveau si avancé.

Je remercie mon encadreur **Dr : LAIADI Abdelkader** qui m'a guidé dans ma projet et m'aidé à trouver des solutions pour avancer. Ainsi que les professeurs : **KABOUL Hanane** et **HAMDI Soumia** qui m'ont acceptés de présider les jurys de soutenance.

Je suis particulièrement reconnaissant au **Dr : KACI fatma** pour son aide, sans oublier de remercier tous mes professeurs du primaire à l'université.

En fin, je remercie toutes les personnes, amis, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Table des figures **v**

Liste des tables **vi**

Abréviations et Notations **vii**

Introduction **1**

0.1 Équations différentielles ordinaires 3

0.1.1 Solution d'une équation différentielle 4

0.1.2 Relation avec les équations différentielles 6

0.1.3 Équations intégrales 7

0.1.4 Transformation de Laplace 9

1 Équations intégro-différentielles de Volterra linéaires **12**

1.1 Classification des équations intégro-différentielle 12

1.1.1 Équation Intégro-Différentielles $(E.I-D)$ 12

1.1.2 Équation intégro-différentielle de Fredholm : 13

1.1.3 Équation intégro-différentielle de Volterra : 13
1.1.4 Existence et Unicité des solutions 14
1.2 Résolution analytique de quelques équations intégro-différentielles de Volterra 15
1.2.1 Méthode de solution sous forme de la série 15
1.2.2 Méthode de décomposition d'Adomian 18
1.2.3 Méthode de transformation de Laplace 22

2 Résolution numérique des équations intégro-différentielles de Volterra 25

2.1 Polynome de Tchebyshev 25
2.2 Méthode de collocation- Tchebychev 26
2.3 Méthode de Galerkin-Tchebychev 28
2.4 Exemple illustratif 29

Conclusion 32

Bibliographie 33

Matlab 35

2.5 programme de c-T matlab : 35
2.6 programme de G-T matlab : 37

Table des figures

2.1 Solution exacte et solution approchée par(c-T) pour N =8 30

2.2 Solution exacte et solution approchée par(G-T) pour N =8 31

Liste des tableaux

1 Les transformation de Laplace de quelques fonctions usuelles. 11

2.1 Méthode de collocation Tchebychev,erreur. 30

2.2 Méthode de Galerkin -Tchebychev ,erreur. 31

Annexe B : Notations

$C([a,b])$	:	L'espace de fonction continue sur l'intervalle
$[a,b]$	:	Intervalle réel.
$k(x,t)$	:	Noyau de l'opérateur intégral A.
A	:	Opérateur intégral compact.
$(E.I-D)$	:	Équation Intégro-Différentielles.
φ	:	Fonction inconnue.
$c-T$	:	Méthode de collocation Tchebychev.
$G-T$	:	Méthode de Galerkin-Tchebychev.
EDO	:	Équation différentielle ordinaire .
TL	:	Transformée de Laplace.

Introduction

L'équation différentielle intégrale de Volterra, également connue sous le nom d'équation, mathématiques. Cette équation a été étudiée par le scientifique italien Alessandro Volterra au 18ème siècle.

L'équation différentielle intégrale de Volterra a la forme suivante :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

Le but de la résolution de l'équation différentielle intégrale de Volterra est de déterminer la fonction $\varphi(x)$.

La résolution de l'équation différentielle intégrale de Volterra est d'une grande importance dans de nombreux domaines, tels que la physique, l'économie et l'informatique. Des exemples peuvent être, par exemple, le calcul du mouvement d'un objet dans le domaine de la physique financière dans le domaine de l'économie, ou la résolution des problèmes de les systèmes informatiques dans le domaine de l'informatique.

Notre mémoire contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre : nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base utilisées dans ce travail et sur les équations intégrales.

Le deuxième chapitre : Savoir les définitions importantes sur des équations intégro-différentielles, consacre sur les méthodes analytiques pour résolution exacte de l'équation integro-différentielle de Volterra linéaire, nous intéressons sur la méthode de résolution sous forme série, la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode de la transformation de Laplace.

Dans le troisième chapitre : est consacré essentiellement à présenter diverses méthodes de résolution numérique des équations intégro-différentielles de Volterra, surtout d'exhiber des méthodes d'approximation, telles que les méthodes de collocation - Chebyshev et la méthode de Galerkin-Chebyshev et d'illustrer la validation de ces méthodes par des exemples instructifs.

Généralités sur les équations différentielles ordinaires

0.1 Équations différentielles ordinaires

En général, dans de nombreuses applications mathématiques, la variable indépendante dont dépendent les fonctions connues est notée : x, t ... Les fonctions inconnues sont notées :$y(x), z(x)$....

Les dérivés en général par rapport à x sont désignés par :

$$y' = \frac{dy}{dx}, y' = \frac{d^2y}{dx^2}, ..., y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Définition 0.1.1 *[10]*

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation mathématique liant une fonction inconnue $y(x)$ de la variable réelle x à certaines de ses dérivées $y', y'', ..., y^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$ et des fonctions connues de la variable x. C'est-à-dire :

$$F\left(x, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

On appelle ordre d'équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans l'équation (1)

Exemple 0.1.1 $y\prime + xy = e^x$ *est une équation différentielle du premier ordre.*

$y'' + 4xy = 0$ *est une équation différentielle du second ordre.*

$y^{(9)} - xy'' = x^2$ *est une équation différentielle d'ordre 9.*

Définition 0.1.2 *[10]*

On appelle équation différentielle linéaire toute équation de la forme :

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x)\,.$$

où les fonctions $x \to a_i(x)\,, 0 \leq i \leq n$ *; sont appelées coefficients de l'équation. La fonction* $x \to g(x)$ *est appelée le second membre. Si* g *est nulle, alors l'équation est dite homogène ou sans second membre. L'équation différentielle*

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0.$$

est appelée équation différentielle homogéne associée.

Si $x \to a_i(x)\,, 0 \leq i \leq n$*, sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à coefficients constants.*

0.1.1 Solution d'une équation différentielle

On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle -c'est-à-dire- une fonction $y = u(x)$ de la variable indépendante x définie dans l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et on vérifie de cette équation en tout point de cet intervalle. L'intervalle I est l'intervalle de définition de la solution $y = u(x)$.

Conditions initiales

Nous pouvons également chercher des solutions qui satisfiant certaines conditions à un certain point x_0 :

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Ce type de condition est appelé condition primaire (conditions initiales).

Exemple 0.1.2 1. *La fonction $x \to y(x) = \cosh x$ est une solution de l'équation différentielle $(y')^2 - y^2 = -1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale $y(0) = 1$.*

2. *La fonction $x \to y(x) = \tan x$ est une solution de l'équation différentielle $y' - y^2 = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.*

Solutions générale, particulière et singulière

Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions. Les solutions de l'équation différentielle d'ordre n. $F\left(x, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}\right) = 0$ dépend en général de n constantes arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

Définition 0.1.3 (Solutions générale et particulière)

1. *La famille de solutions (y_λ) d'indice $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ est appelée solution (ou intégrale) générale.*
2. *Une solution particulière est obtenue en imposant une condition initiale sur y_λ.*

Définition 0.1.4 (Solutions singulières)

Il arrive parfois qu'en plus de la solution générale on ait des solutions particulières $y = \varphi_0(x), y = \varphi_1(x), ...,$ qui ne s'obtiennent pour aucune valeur de λ, on dit que ce sont des solutions singuliées.

On peut vérifier que $y^2 + (yy^{'})^2 = 1$ admet pour solutions $y_\lambda = \pm\sqrt{1-(x-\lambda)^2}, \lambda \in \mathbb{R}$ et deux fonctions $\bar{y}_1 = -1$, $\bar{y}_2 = 1$. Les solutions $\bar{y}_1$et $\bar{y}_2$ qui n'appartiennent pas à la famille y_λ sont des solutions singulières.

0.1.2 Relation avec les équations différentielles

Lemme 0.1.1 *[11],[8]*

Pour toute fonction $\varphi(x)$,

$$\int_a^x \int_a^s \varphi(t)dtds = \int_a^x (x-t)\varphi(t)dt$$

En général, on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} ... \int_a^{x_{n-1}} \varphi(x_n)dx_n dx_{n-1}...dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-x_1)^{n-1}\varphi(x)dx_1 \qquad (2)$$

Preuve. Soit $g(s) = \int_a^s \varphi(t)dt$

$$\int_a^x \int_a^s \varphi(t)dtds = \int_a^x g(s)ds = \int_a^x 1.g(s)ds$$

$$= [sg(s)]_a^x - \int_a^x sg'(s)ds \ \ (\textit{intégration par parties})$$

$$= xg(x) - ag(a) - \int_a^x s\varphi(s)ds$$

$$= x\int_a^x \varphi(t)dt - 0 - \int_a^x t\varphi(t)dt = \int_a^x (x-t)\,\varphi(t)dt$$

■

Exemple 0.1.3 *Soit l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante :*

$$\varphi'(x) - \frac{1}{4}\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{4}x^2 - 2\ , \quad \varphi(0) = 0 \qquad (3)$$

Intégrant les deux côtés de l'équation(3) *et en utilisant les conditions initiales, et la* *formule*(2) *on obtient*

$$\varphi(x) - \frac{1}{4}\int_a^x \int_a^x \varphi(t)dtdt = \frac{1}{12}x^3 - 2x$$

d' où

$$\varphi(x) - \frac{1}{4}\int_a^x (x-t)\,\varphi(t)dt = \frac{1}{12}x^3 - 2x$$

0.1.3 Équations intégrales

Opérateur intégral linéaire

Définition 0.1.5 *Soit* $k : C[a,b] \times C\,[a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur* $C\,[a,b]$ *définit par la formule suivante :*

$A : \varphi \in C[a,b] \to A\varphi \in C[a,b]$

$$(A\varphi)\,(x) = \int\limits_a^b k\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt$$

où la fonction $k\,(x,t)$ *s'appelle le noyau de l'opérateur intégral* A*.*

Équation intégrale

Définition 0.1.6 *L'équation intégrale est toute équation dans laquelle la fonction inconnue* $\varphi(x)$ *apparaît sous le signal d'intégration dans l'équation et l'équation suivante est considérée comme l'un des modèles d'équations intégrales*

$$\alpha\,(x)\,\varphi\,(x) = f\,(x) + \lambda \int k\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt \tag{4}$$

où $\alpha\,(x)$, $f\,(x)\,, k\,(x,t)$ *sont des fonctions données, la fonction* $\varphi(x)$ *qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer ,* $\alpha\,(x)$ *est un paramètre réel ou complexe différent de zéro. La fonction* $k\,(x,t)$ *est appelée noyau* *de l'équation intégrale.*

Remarque 0.1.1 *Si* $f \equiv 0$ *l'équation* (4) *est dite homogène, sinon*

Équations intégrales de Volterra : La forme la plus classique de Volterra linéaires équations intégrales est de la forme

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt$$

où les limites de l'intégration sont fonction de x et la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît linéairement sous le signe intégrale.

1. Si la fonction $\alpha(x) = 1$, alors l'équation devient tout simplement

   $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt$$

   et cette équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra du second type.

2. Si $\alpha(x) = 0$, alors l'équation devient

   $$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,dt = 0$$

   qui est connu comme l'équation de Volterra du premier type.

Équation intégrale de Fredholm :

Définition 0.1.7 *[4]*

On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm du seconde espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x) \ , \ x \in [a,b] \tag{5}$$

où φ est une fonction inconnue, $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonction connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

Définition 0.1.8 *[4]*

On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce une équation de la forme :

$$\lambda \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \quad , \quad x \in [a,b] \tag{6}$$

1. *Si $f(x) = 0$ .L'équation (5)est dite équation intégrale linéaire homogène*
2. *Si $f(x) \neq 0$.Est appelée (5)équation intégrale linéaire non homogène*

0.1.4 Transformation de Laplace

Définition 0.1.9 *[6]*

Nous définissons maintenant la transformation de Laplace d'une fonction continue par morceaux $f(t)$ de la variable réelle t définie sur le demi-axe $t \geq 0$ par :

$$L\left[f(t); t \to p\right] = L[f(t)] = F(p) = \overline{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{7}$$

et transformation de Laplace inverse par :

$$f(t) = L^{-1}\left[\overline{f}(p); p \to t\right] = L^{-1}\left[F(p)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\overline{f}(p)e^{pt}dp \tag{8}$$

où $\delta = \operatorname{Re} p > 0$.

Remarque 0.1.2 – *Certains auteurs utilisent la variable s au lieu de p.*

– *La fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel pour l'existence de sa transformation de Laplace.*

– *Dans la notation d'opérateur* (7) *est exprimée comme*

$$L\left[f(t);t\rightarrow p\right]=\overline{f}(p) \tag{9}$$

et la relation dans l'équation (8) *est exprimée comme*

$$L^{-1}\left[\overline{f}(p);p\rightarrow t\right]=f(t) \tag{10}$$

La convolution de deux fonctions

Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions continues par morceaux et sont de quelques ordre exponentiel pour un grand t et pour tout $t\geq 0$. Alors la convolution de ces fonctions est notée $f*g\ (t)$ est définie par

$$f*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du \tag{11}$$

La relation ci-dessus dans l'équation(11) est également connu sous le nom de faltung ou résultant de $f(t)$ et $g(t)$. Par définition

$$\begin{aligned}f*g(t)&=\int_0^t f(u)g(t-u)du\\&=\int_0^t f(t-v)g(v)dv\\&=f(t)*g \end{aligned} \tag{12}$$

Formulaires des transformées de Laplace usuelles

Le tableau suivant resumé la TL de fonctions usuelles :

$f(t)(t \geq 0)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$
c	$\frac{c}{p}, \quad c \in \mathbb{R}, p \neq 0$
ct^n	$\frac{cn!}{p^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}, p \neq 0$
e^{ct}	$\frac{1}{p-c}, \quad c \in \mathbb{R}, c \neq p$
$t^n e^{ct}$	$\frac{n!}{(p-c)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}, c \neq p$
$\sin ct$	$\frac{c}{p^2+c^2}, \quad c \in \mathbb{R}$
$\cos ct$	$\frac{p}{p^2+c^2}, \quad c \in \mathbb{R}$
$\sinh ct$	$\frac{c}{p^2-c^2}, \quad c \in \mathbb{R}, \lvert c\rvert \neq p$
$\cosh ct$	$\frac{p}{p^2-c^2}, \quad c \in \mathbb{R}, \lvert c\rvert \neq p$

TAB. 1 – Les transformation de Laplace de quelques fonctions usuelles.

Chapitre 1

Équations intégro-différentielles de Volterra linéaires

1.1 Classification des équations intégro-différentielle

1.1.1 Équation Intégro-Différentielles $(E.I-D)$

Une équation intégro-différentielle $(E.I-D)$ est une équation composée de deux opérations intégrale et différentiel qui impliquent la fonction inconnue φ. Nous intéressons aux types les plus simples qui concerne les $(E.I-D)$ unidimentionnelle (la fonction inconnue φ depende d'un variable). La forme générale d'une équation intégro-differentielle linéaire d'ordre n est :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

où

Ω : une ensemble fermé, borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension finie.

λ :un paramètre numérique.

k :le noyau de opérateur intégrale.

f :la fonction donnée.

φ :la fonction inconnue.

$\varphi^{(n)}$:la dérivée $n-ième$ de φ.

La fonction φ est vérifie les conditions intiales.

1.1.2 Équation intégro-différentielle de Fredholm :

Une équation de la forme(1.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation linéaire de Fredholm. L'équations intégro-différentielle de Fredholm apparaît dans la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

Des exemples de Fredholm intégro-différentielles

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{x}{3} + \int_0^1 x\varphi(t)dt \quad \text{avec } \varphi(0) = 0$$

et

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\varphi(t)dt \quad \text{avec } \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$$

1.1.3 Équation intégro-différentielle de Volterra :

Les équations intégro-différentielle de Volterra de première espèce, de seconde espèce ou homogène sont définies de la même manière précédente sauf que la borne d'intégration supérieure est variable, c-à-d, $b = x$: L'équations intégro-différentielle de Volterra apparaît dans la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

Exemples de l'équations l'integro-différentielle de Volterra sont

$$\varphi'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x t\varphi(t)dt \quad \text{avec } \varphi(0) = 0$$

et

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) = 1 - x - (\sin x + \cos x) - \int_0^x t\varphi(t)dt \quad \text{avec } \varphi(0) = -1, \varphi'(0) = 1$$

1.1.4 Existence et Unicité des solutions

Plusieur chercheurs sont étudiés l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

Si l'équation intégrale de Volterra admet une solution alors il existe plusieurs méthodes pour chercher la formule explicite de cette solution par exemple

Méthodes analytiques :

a La méthode de solution sous forme de série.

b La méthode de décomposition d'Adomian.

c La méthode de la transformation de Laplace.

Méthodes numériques :

– Méthode de collocation- Tchebychev.

– Méthode de Galerkin-Tchebychev.

1.2 Résolution analytique de quelques équations intégro-différentielles de Volterra

Dans cette section, nous présenterons quelques méthodes mathématiques pour l'obtenir solution des équations différentielles intégrales de Volterra, pour plus de détails voir [13]

1.2.1 Méthode de solution sous forme de la série

Nous concentrerons sur l'étude de l'équation intégrale qui implique le noyau séparable de la

$$k(x,t) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x)h_i(t)$$

où les fonctions $g_i(x)$ et $h_i(t)$, $(i = 1, ..., n)$ seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes. Examinons une équation intégro-différentielle de Volterra comme indiqué ci-dessous :

$$\varphi^{(n)}(x) - g(x)\int_0^x h(t)\varphi(t)dt = f(x), \quad \varphi^{(k)}(0) = a_k, \ 0 \leq k \leq n-1 \tag{1.2}$$

Supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation (1.2)est une fonction analytique et peut donc être représentée par un développement en série au point ordinaire $x = 0$ donné par

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{1.3}$$

oú les coefficients a_k sont les constantes inconnues qui doivent être déterminés.

Exemple 1.2.1 *Soit l'équation Intégro-différentielle de Volterra suivante*

$$\varphi''(x) = x\cosh x - \int_0^x t\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0 \ , \ \varphi'(0) = 1 \tag{1.4}$$

remplacons l'équation (1.3) *dans*(1.4) *et en utilisant le développement de Taylor de la fonction* $\cosh x$, *nous obtenons*

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = x(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}) - \int_0^x t\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt \tag{1.5}$$

Utilisons les conditions initiales, nous avons $a_0 = 0$,*et* $a_1 = 1$ *:*

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+... = x(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+...)-(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}a_2x^4+...) \tag{1.6}$$

En identifiant les coefficients des monômes de même puissance en x *dans les deux membres, nous trouvons*

$$a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = 0, ...$$

En générale

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, n \geq 0$$

la solution $\varphi(x)$ *de l'équation* (1.3) *peut être écrite sous forme de série comme suit*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...\\ &= \sinh x\end{aligned}$$

Exemple 1.2.2 *Utilisez la méthode de solution sous forme série pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra*

$$\varphi'(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt \quad , \ \varphi(0) = 0 \tag{1.7}$$

Son remplacement par $\varphi(x)$ *de la série*

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{1.8}$$

dans les deux côtés de l'équation (1.7) *conduit à*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = 1 + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt \tag{1.9}$$

Différencier le côté gauche une fois par rapport à x *, et l'évaluation de l'intégrale sur le côté droit, nous trouvons*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k \tag{1.10}$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} x^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k \tag{1.11}$$

où nous avons unifié l'exposant de x *les deux côtés et utilisé* $a_0 = 0$ *de la condition initiale donnée. Assimiler les coefficients de puissances comme de* x *à la fois côté de* (1.11) *donne la relation de récurrence*

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{k\,(k+1)}, k \geq 1 \tag{1.12}$$

où ce résultat donne

$$a_{2k} = 0, a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!} \tag{1.13}$$

Pour $k \geq 0$ *. Par substitution de ce résultat dans* (1.8) *donne la solution de série*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned} \tag{1.14}$$

qui converge vers la solution exacte

$$\varphi(x) = \sinh x \tag{1.15}$$

1.2.2 Méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian [12],[13] donne la solution sous forme d'une série infinie de termes qui peuvent être rédéterminés. Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra définie par

$$\varphi^{(n)}(x) - \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad \varphi^{(k)}(0) = a_k,\ 0 \leq k \leq n-1 \tag{1.16}$$

Chercher une expression pour $\varphi(x)$ qui sera dérivée de l'équation (1.16) . Cela peut être fait en intégrant les deux membres de l'équation (1.16) de 0 á x autant de fois que l'ordre de dérivée impliqué. Par conséquent, nous obtenons

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt\right) \tag{1.17}$$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k$ est obtenue en utilisant les conditions initiales, et L^{-1}est un opérateur d'intégration. Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de décomposition en définissant la solution $\varphi(x)$ de l'équation (1.16) par une série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{1.18}$$

Par substitution de l'équation (1.18) dans (1.17), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t))dt\right) \tag{1.19}$$

Nous avons

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1}(f(x)) \tag{1.20}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\varphi_n(t)dt\right), \quad n \geq 0 \tag{1.21}$$

Exemple 1.2.3 *Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante*

$$\varphi''(x) = x + \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0 \ , \ \varphi'(0) = 1 \tag{1.22}$$

Applicons l'opérateur intégral L^{-1}

$$L^{-1}(.) = \int_a^x \int_a^x (.)dxdx$$

aux deux membres de l'équation (1.22) *c-á-d, en intégrant les deux membres de l'équation* (1.22) *deux fois de* 0 *á* x*, et en utilisant les conditions données*

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)dt\right)$$

En suivant le schéma de décomposition, c-á-d, les équations (1.20), *nous trouvons*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= x + \frac{1}{3!}x^3 \\
\varphi_1(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)\,\varphi_0(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 \\
\varphi_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11} \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

La solution $\varphi(x)$ *de l'équation* (1.22) *donnée par*

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11}$$

La solution exacte est

$$\varphi(x) = \sinh(x)$$

Exemple 1.2.4 *Utiliser la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra :*

$$\varphi'(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt \quad , \varphi(0) = 0 \tag{1.23}$$

Application de l'opérateur intégral L^{-1} *définie par*

$$L^{-1}(.) = 1 + \int_a^x (.)dx \tag{1.24}$$

des deux côtés de (1.23) *c'est à dire intégrant les deux côtés de* (1.23) *une fois de* 0 *à x, et en utilisant la condition initiale donnée nous obtenons*

$$\varphi(x) = x + L^{-1}(\int_0^x \varphi(t)dt). \tag{1.25}$$

Utilisation de la série de décomposition (1.18), *et en utilisant la relation de récurrence*(1.21)*on obtient*

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= x \\ \varphi_1(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x \varphi_0(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{3!}x^3 \\ \varphi_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x \varphi_1(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{5!}x^5 \\ \varphi_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x \varphi_2(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{7!}x^7 \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned} \tag{1.26}$$

et ainsi de suite. cela donne la solution sous forme de série

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + ... \tag{1.27}$$

et par conséquent la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \sinh(x)$$

1.2.3 Méthode de transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace a été utilisée pour résoudre des équations intégrales de Volterra du premier et du deuxième type.

Les détails et les propriétés du procédé de la transformation de Laplace sont présentés dans le premier chapitre.

Si le noyau $K(x,t)$ de l'équation intégrale

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.28}$$

dépend de la différence $x - t$, il est alors appelé un noyau de différence. L'équation intégro–différentielle peut donc être exprimée comme

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt \tag{1.29}$$

Considérons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$qui possèdent les conditions nécessaires de l'existence de transformation de Laplace pour chacun. Que les transformées de Laplace pour les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont données par :

$$\pounds\{f(x)\} = F(s) \quad , \quad \pounds\{g(x)\} = G(s) \tag{1.30}$$

Le produit de convolution de Laplace ses deux fonctions sont définies par :

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \tag{1.31}$$

où

$$(g*f)(x) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt \tag{1.32}$$

Rappelons que

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) \tag{1.33}$$

On peut montrer facilement que la transformation de Laplace du produit de convolution $(f * g)(x)$ est donnée par :

$$\pounds\left\{(f * g)(x)\right\} = \pounds\left\{\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right\} = F(s)G(s) \tag{1.34}$$

Pour résoudre les équations intégro-différentielles de Volterra en utilisant la méthode de transformation de Laplace, il est essentiel d'utiliser les transformations de Laplace des dérivées de $\varphi(x)$. Nous pouvons facilement montrer que :

$$\pounds\left\{\varphi^{(n)}(x)\right\} = s^n \pounds\left\{\varphi(x)\right\} - s^{n-1}\varphi(0) - s^{n-2}\varphi'(0) - ... - \varphi^{(n-1)}(0) \tag{1.35}$$

Cela donne tout simplement

$$\begin{aligned}
\pounds\left\{\varphi'(x)\right\} &= s\pounds\left\{\varphi(x)\right\} - \varphi(0) \qquad (1.36)\\
&= sU(s) - \varphi(0)\\
\pounds\left\{\varphi''(x)\right\} &= s^2\pounds\left\{\varphi(x)\right\} - s\varphi(0) - \varphi'(0)\\
&= s^2U(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0)\\
\pounds\left\{\varphi'''(x)\right\} &= s^3\pounds\left\{\varphi(x)\right\} - s^2\varphi(0) - s\varphi'(0) - \varphi''(0)\\
&= s^3U(s) - s^2\varphi(0) - s\varphi'(0) - \varphi''(0)\\
\pounds\left\{\varphi^{(4)}(x)\right\} &= s^4\pounds\left\{\varphi(x)\right\} - s^3\varphi(0) - s^2\varphi'(0) - s\varphi''(0) - \varphi'''(0)
\end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.

Nous appliquons d'abord la transformation de Laplace à deux côtés de(1.29), utilisent la transformation de Laplace pour la dérivée de $\varphi(x)$, puis résoudre pour $U(s)$.

Nous utilisons ensuite la transformation inverse de Laplace des deux côtés de l'équation résultante pour obtenir la solution $\varphi(x)$ de l'équation.

Exemple 1.2.5 *Utiliser la méthode de transformation de Laplace pour résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra :*

$$\varphi'(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt \quad , \varphi(0) = 0 \tag{1.37}$$

Notez que le noyau $k(x-t) = 1$*. Prenant la transformation de Laplace de part et d'autre de* (1.37) *donne :*

$$\pounds\left\{\varphi'(x)\right\} = \pounds\left\{1\right\} + \pounds\left\{1 * \varphi(x)\right\} \tag{1.38}$$

On obtient

$$sU(s) - \varphi(0) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}U(s) \tag{1.39}$$

On utilise la condition initiale donnée puis on résoud pour $U(s)$ *, nous trouvons*

$$U(s) = \frac{1}{s^2 - 1} \quad , s > 1 \tag{1.40}$$

En prenant la transformation de Laplace inverse des deux côtés de (1.40)*, la solution exacte est donnée par :*

$$\varphi(x) = \sinh x$$

Chapitre 2

Résolution numérique des équations intégro-différentielles de Volterra

2.1 Polynome de Tchebyshev

Définition 2.1.1 *[5]*

– *Le Polynôme de Tchebyshev de premiére espéce* $T_n(x)$ *de dégrée* n *est défini par la formule suivante*

$$T_n(x) = cos(n \ \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

– *Les premiers de ces Polynômes sont*

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

– *La relation de récurrence*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, ...$$

– *le polynôme de Tchebychev de degré n admet exactement n racines réelles données par*

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi\,(2k+1)}{2n}\right), \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$
$$T_i\,(x_k) = \cos\left(k\frac{\pi\,(2k+1)}{2n}\right), \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

2.2 Méthode de collocation- Tchebychev

On considère l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante :

$$\varphi'\,(x) - \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad \text{avec } \varphi(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq x \leq b \tag{2.1}$$

où $k(x,t)$ est une fonction continue et carré integrable, $f(x)$ est une fonction connue, $\varphi\,(x)$ la fonction inconnue.

Maintenant nous employons la technique de la méthode de collocation. Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $\varphi\,(x)$ comme suit

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x) \tag{2.2}$$

alors

$$\varphi'(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i'(x) \tag{2.3}$$

où T_i sont les polynome de Chebyshev de degré i $(i = 0, 1, ..., n)$ et c_i, sont des paramètres inconnus, à déterminé.

On remplace (2.2) et (2.3) dans l'équation(2.1), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{n} c_i T_i'(x_j) - \int_a^{x_j} \left[k(x_j, t) \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(t) \right] dt = f(x_j) \ , \ j = 0, 1, ..., n$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left[T_i'(x_j) - \int_a^{x_j} k(x_j, t) T_i(t) dt \right] = f(x_j) \ , \ j = 0, 1, ..., n. \tag{2.4}$$

Les conditions initiales de probléme(2.1) sont donnés

$$\varphi(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(a) = \alpha. \tag{2.5}$$

Les inconnus c_i $(i = 0, 1, ..., n)$ sont déterminés en résolvant le système d'équations (2.4) et (2.5).

L'équation (2.4) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \omega\left(x_j\right) = f(x_j) \quad , \ j = 0, 1, ..., n \tag{2.6}$$

où

$$\omega\left(x_j\right) = T_i'(x_j) - \int_a^{x_j} k(x_j, t) T_i(t) dt \quad , \ j = 0, 1, ..., n$$

Alors les équations de collocation sont obtenues en prend des points xj

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \omega_{ij} = f_{\ j} \quad , \ j = 0, 1, ..., n \tag{2.7}$$

L'équation (2.6) représente un système linéaires de n connue qui s'écrit sous la forme

$$Ac = F$$

où

$$A = \omega_{ij}, \quad i, j = 0, 1, ..., n$$

$$c = c(c_{0,}c_1, ..., c_n)^t$$

$$F = (f_0, f_1, ..., f_n)^t$$

$$c = A^{-1}F$$

si det $A \neq 0$.

La substitution de ces valeurs dans (2.2) donne la solution approximative.

2.3 Méthode de Galerkin-Tchebychev

On considère l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante :

$$\varphi'(x) - \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad \text{avec } \varphi(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq x \leq b \tag{2.8}$$

où $k(x,t)$ est une fonction continue et carré integrable, $f(x)$ est une fonction connue, $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Maintenant nous employons la technique de la méthode de Galerkin. Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $\varphi(x)$ comme suit

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x) \tag{2.9}$$

alors

$$\varphi'(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i'(x) \tag{2.10}$$

où T_i sont les polynome de Chebyshev de degré i $(i = 0, 1, ..., n)$ et c_i, sont des paramètres inconnus, à déterminé.

On remplace (2.9) et (2.10) dans l'équation(2.8), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{n} c_i T_i'(x_j) - \int_a^{x_j} \left[k(x_j,t) \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(t) \right] dt = f(x) \ .$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left[T_i'(x_j) - \int_a^{x_j} k(x_j,t) T_i(t) dt \right] = f(x). \tag{2.11}$$

Alors les équations de Galerkin sont obtenues en multipliant les deux côtés de (2.11) par T_i et puis en intégrant en ce qui concerne x de a à b, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left[\int_a^b \left[T_i'(x_j) - \int_a^x k(x,t) T_i(t) dt \right] T_i(x) dx \right] = \int_a^b T_i(x) \ f(x) dx \tag{2.12}$$

les conditions initiales de probléme(2.8) sont donné

$$\varphi(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(a) = \alpha \tag{2.13}$$

Les inconnus c_i $(i = 0, 1, ..., n)$ sont déterminés en résolvant le système d'équations (2.12) et (2.13).

La substitution de ces valeurs dans (2.9) donne la solution approximative.

2.4 Exemple illustratif

Exemple 2.4.1 *Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra de seconde espèce*

$$\varphi'(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt \quad , \varphi(0) = 0$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, *la solution exacte donnée par*

$$\varphi_{ex}(x) = \sinh x$$

TABLE1 : *Nous présentons la solutions approchée* φ_T *et la solution exacte* $\varphi_{ex}(x)$ *obtenue par la méthode de collocation Tchebychev, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour* $N = 8$.

Val de x	Solex φ_{ex}	Solap φ_{c-T}	Error$_T$
0	0	-4.156675004196586e-13	4.156675004196586e-13
0.125	0.125325775241115	0.125325772736658	2.504457002812941e-09
0.25	0.252612316808168	0.252612314333860	2.474308043176610e-09
0.375	0.383851067913615	0.383851065333755	2.579859228508822e-09
0.5	0.521095305493747	0.521095302793219	2.700528578536421e-09
0.625	0.666492264456616	0.666492261579639	2.876976668968754e-09
0.75	0.822316731935830	0.822316728851310	3.084519646645578e-09
0.875	0.991006637144295	0.991006633778104	3.366190811689021e-09
1	1.175201193643801	1.175201190043740	3.600061138087085e-09

TAB. 2.1 – Méthode de collocation Tchebychev,erreur.

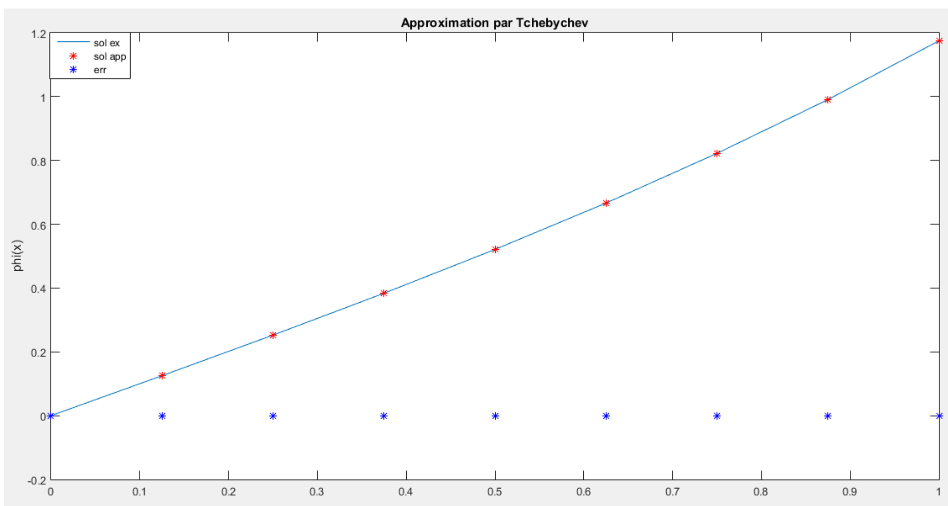

FIG. 2.1 – Solution exacte et solution approchée par(c-T) pour N =8

Exemple 2.4.2 *Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra de seconde espèce*

$$\varphi'(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt \quad , \varphi(0) = 0$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, *la solution exacte donnée par*

$$\varphi_{ex}(x) = \sinh x$$

Table 2. *Nous présentons la solutions approchée* φ_{GT} *et la solution exacte* $\varphi_{ex}(x)$ *obtenues par la méthode Galerkin -Tchebychev, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour* $N = 8$

Val de x	Solex φ_{ex}	Solap φ_{G-T}	Error$_T$
0	0	-6.244409433975307e-10	6.244409433975307e-10
0.125	0.125325775241115	0.125325774109315	1.131785027364538e-09
0.25	0.252612316808168	0.252612315322468	1.485737120138220e-09
0.375	0.383851067913615	0.383851066031515	1.882107234941880e-09
0.5	0.521095305493747	0.521095303373647	2.120050024423392e-09
0.625	0.666492264456616	0.666492262170616	2.285996038420128e-09
0.75	0.822316731935830	0.822316729408430	2.527413642955390e-09
0.875	0.991006637144295	0.991006634495195	2.649119227489936e-09
1	1.175201193643801	1.175201190923301	2.720484726381756e-09

TAB. 2.2 – Méthode de Galerkin -Tchebychev ,erreur.

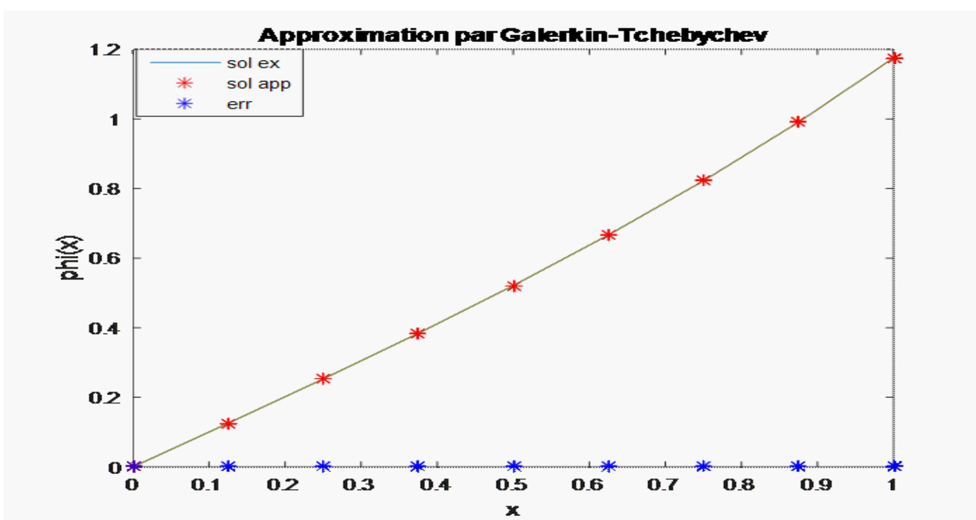

FIG. 2.2 – Solution exacte et solution approchée par(G-T) pour N =8

Conclusion

En conclusion, l'équation intégrale-différentielle de Volterra est un outil puissant pour la modélisation mathématique des systèmes dynamiques complexes. Sa résolution peut être difficile, mais grâce aux différentes méthodes disponibles, il est possible d'obtenir des solutions numériques satisfaisantes, dans notre mémoire, nous avons remarqué que la solution numérique approchée est très proche de la solution analytique. Son utilisation dans divers domaines de la science et de l'ingénierie témoigne de son importance et de sa pertinence continue.

Bibliographie

[1] Brunner. H, On the numerical solution of Volterra–Fredholm integral equation by collocation methods. SIAM J. Numer. Anal. 27(4), 87–96 (1990).

[2] DIF Zeyneb, Sur des Equations Intégro-Différentielles, Mémoire de master. Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2021

[3] HASSAINE Oum elkhair,Transformation de Laplace et applications,Mémoire de master. Université Mohamed Khider de BISKRA,2019

[4] Maadadi Asma, Étude et Construction de Méthodes Numériques pour Quelques Équations Intégro-Différentielles, thése de doctorat, Université de Bordj Bou Arréridj, 2018.

[5] Mason John C and David C. Handscomb, Chebyshev polynomials. CRC press, 2002.

[6] Patra Baidyanath, An introduction to integral transforms. CRC press, 2018.

[7] Rahman. M. M, Hakim. M. A, Kamrul Hasan. M, Alam. M. K and Nowsher Ali. L, Numerical Solutions of Volterra Integral Equations of Second kind with the help of Chebyshev Polynomials. Annals of Pure and Applied Mathematics, 1(2), 158-167 (2012).

[8] Rahmoune. A, Equations intégrales linéaires et non linéaires. Analyse et techniques de résolution : 44-46 (2018).

[9] Stewart, James. Essential calculus : Early transcendentals. Cengage Learning, 2012.

[10] Tenenbaum Morris and Harry Pollard, Ordinary differential equations : an elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences. Courier Corporation, 1985.

[11] Wazwaz Abdul-Majid. Linear and nonlinear integral equations. Vol. 639. Berlin : Springer, 2011.

[12] Wazwaz Abdul-Majid, A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equations,Appl. Math. Comput., 127, 405-414 (2002).

[13] Wazwaz Abdul-Majid, A First Course in Integral Equations,World Scientific, Singapore, 1997.

Annexe A :Matlab

2.5 programme de c-T matlab :

```
xn=[0 :0.125 :1] ;
Ex=@(x) sinh(x) ;%solution exacte
%polynomes Chebyshev
syms x
syms x n
%Chebyshev
T=chebyshevT([0, 1, 2, 3, 4,5,6,7,8], x) ;
TT= @(n) (diff(T(n))-int(T(n))) ;
%%%%%Matrix
n=length(xn) ;
A=ones(n,n) ;
for j=1 :n
A(1,j)=subs(T(j),x,xn(1)) ;
end
for i=2 :n
for j=1 :n
```

```
A(i,j)=subs(TT(j),x,xn(i)) ;
end
end
%%%%%%%%%%Vecteur B
B=ones(n,1) ;
B(1)=0 ;
%%%%%%vecteur C
C=inv(A)*B ;
%Solution
for i=1 :n
sol(i)=C'*subs(T,x,xn(i))' ;
end
sol ;
Ge=Ex(xn(1 :n)) ;
Err=abs(sol-Ge) ;
plot(xn,Ge)
hold on
plot(xn,sol,'r*')
plot(xn,Err,'b*')
legend('sol ex','sol app','err')
title('Approximation par Tchebychev')
xlabel('x')
ylabel('phi(x)')
```

2.6 programme de G-T matlab :

```
xn=[0 :0.125 :1] ;
Ex=@(x) sinh(x) ;%solution exacte
%polynomes Chebyshev
syms x
syms x n m
%Chebyshev
T=chebyshevT([0, 1, 2, 3, 4,5,6,7,8], x) ;
TT= @(n,m) (diff(T(n))-int(T(n)))*T(m) ;
IT=@(n,m) int(TT(n,m),0,1) ;
%%%%%Matrix
n=length(xn) ;
A=ones(n,n) ;
for j=1 :n
A(1,j)=subs(T(j),x,xn(1)) ;
end
for i=2 :n
for j=1 :n
A(i,j)=IT(j,i) ;
end
end
%%%%%%%%%%Vecteur B
B=zeros(n,1) ;
Tf=@(n) int(T(n),0,1) ;
```

```
for i=2 :n
B(i)=(Tf(i)) ;
end
%%%%%%vecteur C
C=inv(A)*B ;
%Solution
for i=1 :n
sol(i)=C'*subs(T,x,xn(i))' ;
end
sol ;
Ge=Ex(xn(1 :n)) ;
Err=abs(sol-Ge)
plot(xn,Ge)
hold on
plot(xn,sol,'r*')
plot(xn,Err,'b*')
legend('sol ex','sol app','err')
title('Approximation par Galerkin-Tchebychev')
xlabel('x')
ylabel('phi(x)')
```

Résumé :

Dans cette mémoire nous avons étudié les équations intégrales et différentielles de Volterra, où nous avons mentionné certains de leurs types, et le but est de résoudre ces équations par des méthodes analytiques si nous le pouvons, et si nous ne pouvons pas le faire, nous recourons à méthodes approchées numériques utilisant certaines méthodes de résolution.

Mots clés :

- Équations intégrales différentielles de Volterra.
- Méthodes de solution analytique.
- Méthodes de résolution approximative.

Abstract :

In this memory we have studied the integral and differential equations of Volterra, where we have mentioned some of their types, and the goal is to solve these equations by analytical methods if we can, and if we can not do it, we resort to approximate numerical methods using certain resolution methods.

Keywords

- Volterra differential integral equations.
- Analytical solution methods.
- Approximate resolution methods.

ملخص

قمنا في هذه المذكرة بدراسة المعادلات التكاملية التفاضلية لفولتيرا , حيث تطرقنا إلى ذكر بعض أنواعها , والهدف هو حل هذه المعادلات بالطرق التحليلية إن أمكننا ذلك وإذا تعذر علينا نلجأ إلى الطرق التقريبية العددية باستعمال بعض طرق الحل.

الكلمات المفتاحية

- المعادلات التكاملية التفاضلية لفولتيرا.
- طرق الحل التحليلية.
- طرق الحل التقريبية.