

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

**BEZZAHI Samir**

---

Titre du mémoire :

**Modèle multiplicatif : Prévisions et Applications**

---

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	ABDELLI Jihane	UMK Biskra	Présidente
Prof.	YAHIA Djabrane	UMK Biskra	Encadreur
Dr.	ZOUAOUI Nour Elhouda	UMK Biskra	Examinatrice

**Soutenu Publiquement le : 18 Juin 2023**

# *Dédicace*

**Je dédie mon mémoire à...**

**Mes chers parents**, qui ont toujours été là pour moi, m'offrant leur amour inconditionnel et leur soutien indéfectible. Leur encouragement constant m'a donné la force de poursuivre mes rêves et de réaliser mes ambitions.

**Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude envers mon superviseur, Prof. Yahia Djabrane**, qui m'a guidé tout au long de ce projet avec ses conseils précieux et son expertise. Sa patience et sa compréhension ont été une source d'inspiration pour moi.

**Enfin, je voudrais remercier du fond du cœur ma sœur Basma et mes deux frères Oussama et Saifeddine** pour leur amour et leur soutien constants. Leur présence dans ma vie a été une bénédiction et je suis reconnaissant pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Que cette **dédicace** témoigne de ma reconnaissance envers chacun d'entre vous. Votre soutien et votre confiance ont été inestimables et ont contribué à ma réussite.

**Merci à vous tous d'avoir rendu ce voyage possible.**

**BEZZAHI SAMIR**

# Remerciements

**Tout d’abord**, je remercie **”Dieu”**, le Tout-Puissant, pour m’avoir accordé la santé, la force et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail. Sa bénédiction a été ma source de motivation constante.

**En terminant** ce mémoire, je ressens une profonde gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation. Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers ceux qui ont joué un rôle essentiel dans mon parcours académique et personnel.

**Je tiens à remercier** mes chers parents, **Lahcene** et **Ourida** , qui ont été mes piliers de soutien tout au long de mes études. Leur amour inconditionnel, leur encouragement et leur soutien moral, matériel et financier ont été d’une importance capitale. Je suis profondément reconnaissant pour leur confiance en moi et pour les sacrifices qu’ils ont consentis pour mon éducation. Ce mémoire est une humble marque d’amour et de reconnaissance à leur égard.

**Je tiens également à remercier** ma précieuse famille, **Basma**, **Oussama** et **Saifeddine**, qui ont été présents à chaque étape de mon parcours. Leur soutien, leurs encouragements et leur confiance en moi ont été une source d’inspiration et de motivation. Je suis honoré de les avoir à mes côtés et je les remercie du fond du cœur.

**Je suis également** reconnaissant envers mon directeur de mémoire, **M. Yahia Djabrane**, pour sa disponibilité, son encadrement attentif, ses conseils judicieux et ses remarques pertinentes. Sa guidance éclairée et son expertise ont grandement

contribué à l'élaboration de ce mémoire. Je le remercie pour son professionnalisme, sa rigueur et sa bienveillance.

Mes remerciements vont également aux membres du Jury, **Mme ABDELLI Jihane** et **Mme ZOUAOUI Nour Elhouda**. Merci d'avoir accepté de jugé et évalué mon travail.

**Je n'oublie** pas tous les enseignants qui ont enrichi mon parcours universitaire. Leurs connaissances partagées, leurs méthodes pédagogiques et leurs précieux enseignements m'ont permis d'acquérir les compétences nécessaires pour mener à bien ce travail.

**Enfin, je suis conscient** que ce mémoire est le fruit d'un travail personnel, mais il n'aurait pas pu être réalisé sans l'aide précieuse de nombreuses personnes que je ne peux pas toutes citer ici. Je leur adresse mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance. Qu'elles trouvent en cette dédicace l'expression de ma gratitude et de mon respect.

**Avec mes plus sincères remerciements,**

**BEZZAHI SAMIR**

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	ii
<b>Table des matières</b>	iv
<b>Table des figures</b>	vii
<b>Liste des tables</b>	ix
<b>Introduction</b>	1
<b>1 Analyse d'une série temporelle</b>	4
1.1 Série temporelle : définition et objectifs	5
1.2 Description d'une série temporelle	6
1.2.1 Composants de séries temporelles	6
1.2.2 Séries temporelles additives	7
1.2.3 Séries temporelles multiplicatives	7
1.3 Propriétés statistiques	8
1.3.1 Moments	8
1.3.2 Bruit blanc	9
1.4 Indicateurs d'estimation	12

1.5	Indices descriptifs d'une série temporelle	13
1.6	Exemples d'analyse de séries temporelles	14
1.6.1	Séries temporelles non saisonnières	14
1.6.2	Séries temporelles saisonnières	17
<b>2</b>	<b>Méthodes de lissage exponentiel pour la prévision</b>	<b>19</b>
2.1	Principe des méthodes de lissage exponentiel	20
2.2	Lissage exponentiel simple	21
2.2.1	Définition de la méthode	21
2.2.2	Explication de la formule de LS	22
2.2.3	Choix de la constante de lissage	24
2.2.4	Choix de la valeur initiale	25
2.3	Prévision à l'aide de LS	25
2.3.1	Évaluation de la précision du modèle LS	27
2.4	Lissage exponentiel double ou de Holt	29
2.4.1	Définition de la méthode	29
2.4.2	Méthodes de tendance amorties	32
2.4.3	Choix de la valeur initiale	33
2.5	Prévision à l'aide de LD	33
2.6	Prévision à l'aide des méthodes de tendance amortie	36
2.7	Évaluation de la précision des modèles de Holt	37
<b>3</b>	<b>Modèle multiplicatif : Prévision et Application</b>	<b>39</b>
3.1	Lissage exponentiel triple ou (de Holt-Winters)	40
3.1.1	Définition de la méthode	40

3.1.2	La méthode amortie de Holt-Winters	44
3.1.3	Prévision à l'aide de Holt-Winters	45
3.2	Prévision à l'aide des modèles ETS	48
3.2.1	Évaluation de la précision des modèles de ETS	50
3.2.2	Prévision à l'aide du modèle ETS (M, M, M)	50
	<b>Conclusion</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>
	<b>Annexe A : Logiciel R</b>	<b>56</b>
	<b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>	<b>59</b>

# Table des figures

1.1 Série temporelle additive . . . . .	7
1.2 Série temporelle multiplicative . . . . .	8
1.3 Représentation graphique d'un Bruit Blanc de taille 200 . . . . .	10
1.4 Représentation ACF du Bruit Blanc de Lag 100 . . . . .	11
1.5 Série sans tendance mais avec un changement de niveau. Source de données : World Bank . . . . .	14
1.6 Représentation ACF pour analyser nos données avec un Lag de 40. . . . .	15
1.7 Série montrant une tendance croissante non linéaire. Source de données : World Bank . . . . .	16
1.8 ACF pour analyser les données, avec un Lag de 20. . . . .	17
1.9 Série avec tendance et saisonnalité multiplicative . . . . .	18
1.10 ACF pour analyser les données avec un Lag de 40 . . . . .	18
2.1 LS avec deux constantes de lissage différentes . . . . .	27
2.2 Lissage et prévision en utilisant les méthodes LS et LD . . . . .	34
2.3 Prévision en utilisant Holt et Holt Amortie . . . . .	36
2.4 Prévision à l'aide des modèles de Holt. . . . .	37

3.1	Nombre de passagers pour les compagnies aériennes internationales	
	(1953-1960) : Série avec tendance et saisonnalité multiplicative.	40
3.2	Lissage des données en utilisant les méthodes HWSA et HWSM.	45
3.3	Prévision à l'aide de la méthode HWSM	48
3.4	Prévision à l'aide des méthodes ETS	49
3.5	Prévision à l'aide de la méthode ETS (M, M, M)	51

# Liste des tableaux

2.1	LS évalue selon les valeurs de alpha	28
2.2	Les valeurs des constantes utilisées dans LS et LD	35
2.3	Les valeurs de prévision à l'aide de LS et LD	35
2.4	Comparaison des performances prévisionnelles des quatre méthodes de Holt dans le cas où $h=5$	38
2.5	Comparaison des performances prévisionnelles des quatre méthodes de Holt dans le cas où $h=10$	38
3.1	Comparaison des performances de lissage des méthodes de HWSA et HWSM en utilisant des indicateurs d'estimation	46
3.2	Les constantes utilisées dans le modèle de HWSA et HWSM	47
3.3	Composantes saisonnières de l'année 1962. Méthodes HWSA et HWSM	47
3.4	Comparaison des performances des méthodes ETS dans la prédiction en utilisant des indicateurs d'estimation	50
3.5	Prévisions des 12 mois et leurs intervalles de confiances à l'aide de la méthode ETS (M, M, M)	52

# Introduction

*Le lissage exponentiel et les modèles multiplicatifs sont deux concepts importants dans l'analyse des séries temporelles, qui est la science de l'étude des données qui changent avec le temps. Grâce à ces méthodes, nous pouvons extraire des informations utiles des données historiques, telles que le niveau, la tendance et la saisonnalité, et déduire avec une bonne précision ce qui pourrait se produire à l'avenir. Ces méthodes ont de nombreuses applications dans différents domaines tels que l'économie, le commerce, l'environnement et la finance, où nous pouvons prédire le comportement du marché, les prix des actions, etc.*

*Historiquement, l'origine du lissage exponentiel remonte aux travaux du mathématicien français Poisson (1781-1845). Cependant, son développement dans le domaine de la prévision a eu lieu au XXe siècle grâce aux chercheurs américains Robert Brown (1923-2013) et Charles Holt (1921-2010). Ensuite, l'élève de Holt, Peter Winters, a ajouté un facteur saisonnier au modèle de Holt (1957) et l'a appelé le modèle Holt-Winters en 1960. Bien qu'il ait été découvert il y a plus de 60 ans, le lissage exponentiel reste l'une des applications prévisionnelles les plus importantes dans la pratique.*

*Le modèle multiplicatif est une méthode de lissage exponentiel, qui est une technique statistique qui attribue des poids différents aux données en fonction de leur ancienneté. Plus les données sont récentes, plus elles ont un poids important dans l'analyse.*

*Certains se demandent si la technique de lissage exponentiel peut gérer tous les types de séries chronologiques et comment choisir le modèle idéal pour chaque série et vérifier la précision des prévisions.*

*Pour répondre à ces questions, je vais détailler dans ce mémoire comment utiliser le lissage exponentiel et les modèles multiples dans l'analyse et la prévision des séries temporelles et comment choisir les constantes de lissage. Je vais utiliser les données de passagers aériens d'une compagnie internationale comme étude de cas pratique et comparer les performances des différents modèles pour estimer et prédire ces données. J'utiliserai également des mesures de précision d'estimation pour évaluer la qualité des prévisions.*

*Le but de ce mémoire est de mettre en lumière le rôle du modèle multiplicatif dans la prévision des séries chronologiques et d'expliquer comment appliquer les méthodes de lissage exponentiel dans les cas pratiques. L'importance de ce sujet réside dans sa capacité à nous aider à prendre des décisions éclairées dans différents domaines tels que la planification, la gestion et le contrôle, en montrant comment les méthodes de prévision peuvent être utilisées pour analyser les séries chronologiques et améliorer la précision des prévisions en choisissant les paramètres appropriés. J'ai également voulu mettre en évidence l'importance de la prévision dans le domaine de l'aviation et comment elle peut aider à déterminer la demande, l'offre et les prix.*

*J'ai choisi ce sujet parce qu'il combine la théorie des statistiques, des mathématiques et de la programmation, et c'est un domaine qui suscite mon intérêt et ma passion. De plus, ce sujet a de nombreuses autres applications dans différents domaines de la vie, tels que l'économie, la santé, l'ingénierie, etc. Mes autres motivations pour avoir choisi ce sujet sont mon désir de renforcer mes connaissances en analyse statistique et d'appliquer ces méthodes de manière pratique.*

*Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, j'ai expliqué certains concepts de base des séries temporelles et examiné divers exemples de séries chronologiques à l'aide d'outils statistiques graphiques, des tests ou des indicateurs statistiques théoriques. J'ai également identifié les modèles de séries temporelles, tels que la présence d'une tendance ou d'un facteur saisonnier ou d'aléatoire dans les données.*

*Dans le deuxième chapitre, j'ai utilisé des méthodes de lissage exponentiel pour construire des modèles prédictifs pour ces séries temporelles, et mesurer l'exactitude des prévisions à l'aide d'indicateurs d'estimation tels que l'erreur absolue moyenne et l'erreur quadratique moyenne.*

*De plus, dans un troisième chapitre, j'ai effectué une étude pratique sur une série temporelle réelle, à savoir le nombre de passagers pour les compagnies aériennes internationales (1953-1960), en utilisant des méthodes de lissage exponentiel. J'ai suivi une approche scientifique et académique dans ces chapitres, en utilisant le logiciel R pour analyser les données et appliquer correctement les méthodes de lissage exponentiel. Cela nous a aidés à obtenir des résultats applicables et interprétables, et à accroître les connaissances dans le domaine des sciences des données et de l'analyse des séries temporelles.*

# Chapitre 1

## Analyse d'une série temporelle

L'analyse des séries temporelles est une méthode statistique qui permet d'étudier l'évolution d'un phénomène au cours du temps. Elle vise à décrire, modéliser et prévoir le comportement d'une variable observée à des intervalles réguliers. Les séries temporelles sont utilisées dans de nombreux domaines, tels que l'économie, la finance, la météorologie ou la biologie.

Avant de présenter les modèles et les méthodes de prévision des séries temporelles, il est important de définir quelques concepts clés qui caractérisent le comportement d'une série temporelle. Parmi ces concepts, on trouve la stationnarité, l'autocorrélation, le bruit blanc et les indicateurs de précision. Ces notions permettent de mieux comprendre la structure d'une série temporelle et d'évaluer la qualité d'un modèle prédictif.

Dans ce chapitre, je vais introduire ces concepts et les outils disponibles pour réaliser l'analyse des séries temporelles

## 1.1 Série temporelle : définition et objectifs

**Définition 1.1.1** On appelle "série temporelle" ou *chronologique* ou *chronique* est une séquence de points de données qui se produisent dans un ordre successif sur une certaine période de temps  $t$ , où  $t$  appartient à l'ensemble des temps autorisés notée  $T$ . La notation générale utilisée pour représenter une série temporelle est

$$(X_t)_t, \quad t \in T.$$

On peut dire qu'une série temporelle est une suite d'observations répétées d'un même phénomène à des dates différentes. Les dates sont souvent équidistantes, sauf dans quelques cas. La période de données peut être :

- **Journalières** (cours d'une action en bourse)
- **Mensuelles** (nombre mensuelle de chômeurs)
- **Trimestrielles** (consommation trimestriel d'électricité)
- **Annuelles** (chiffre annuel des bénéfices des exportations)

Les raisons les plus importantes qui nous ont incités à effectuer une analyse de séries temporelles sont les suivantes :

- **Caractéristiques** : L'analyse des séries chronologiques nous permet de suivre les caractéristiques de la série telles que la tendance, la saisonnalité et le type de modèle.
- **Modélisation** : Voici une liste de quelques modèles mathématiques qui peuvent être utilisés :
  - les modèles de régression.
  - les modèles de type ARMA.
  - les lissages exponentiels .
- **Prévision** : Prédire les valeurs futures de la série.

## 1.2 Description d'une série temporelle

### 1.2.1 Composants de séries temporelles

Une série temporelle  $X_t$  est communément décomposée en "principalement" quatre composantes :

$$X_t = N_t + D_t + S_t + \varepsilon_t.$$

- **Niveau**  $N_t$  : est la composante principale présente dans toute série chronologique et signifie la valeur moyenne de la série.

- **Tendance**  $D_t$  : Augmentation ou diminution à long terme des données. La tendance peut être n'importe quelle fonction ,telle que linéaire ou exponentielle par exemple :

- tendance linéaire :  $D_t = a_0 + bt$

- tendance quadratique :  $D_t = a_0 + bt + ct^2$

- tendance exponentielle  $D_t = a_0 \exp(bt) + c$

- tendance logarithmique :  $D_t = a_0 \log(bt) + c$

avec  $a_0, b, c \dots$  sont des paramètres à déterminer.

- **Saisonnalité**  $S_t$  : Cycle répétitif dans la série avec des fréquences fixes (heure, jour, semaine, mois, année, etc). Il existe un modèle saisonnier d'une période connue fixe dans les données en raison de facteurs saisonniers tels que les vacances ou les changements météorologiques. L'effet saisonnier doit être pris en compte dans le modèle de prévision.

- **Bruit**  $\varepsilon_t$  : qui est la partie aléatoire de la série et qui affecte la précision de la prévision. Il s'agit d'un terme d'erreurs, centré et avec une faible intensité.

La combinaison des composants dans les séries temporelles peut être de trois types :

- **Additif,**
- **Multiplicatif,**
- **Mixte**

### 1.2.2 Séries temporelles additives

- **Mathématiquement** : Si les composantes de la série temporelle sont additionnées, la série temporelle obtenue est appelée **séries temporelles additives**.

La fonction mathématique de toute série temporelle additive peut être représentée par :

$$X(t) = Niveau + Tendance + Saisonnalité + Bruit.$$

- **Graphiquement** : nous pouvons dire que la série temporelle est additive si le modèle croissant ou décroissant de la série temporelle est similaire tout au long de la série.

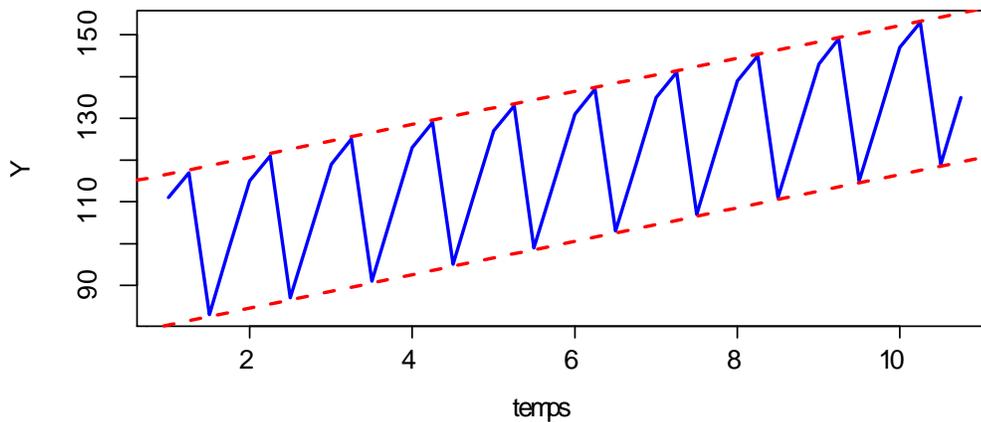


FIG. 1.1 – Série temporelle additive

### 1.2.3 Séries temporelles multiplicatives

- **Mathématiquement** : Si les composantes de la série chronologique sont multiplicatives ensemble, la série temporelle obtenue est appelée **séries temporelles multiplicatives**.

La fonction mathématique de la série temporelle multiplicative peut être représentée

par :

$$X(t) = \text{Niveau} * \text{Tendance} * \text{Saisonnalité} * \text{Bruit}.$$

• **Graphiquement** : nous pouvons dire que La série temporelle est multiplicative. si la schéma croissante ou décroissante de la série chronologique n'est pas la même au cours temps.

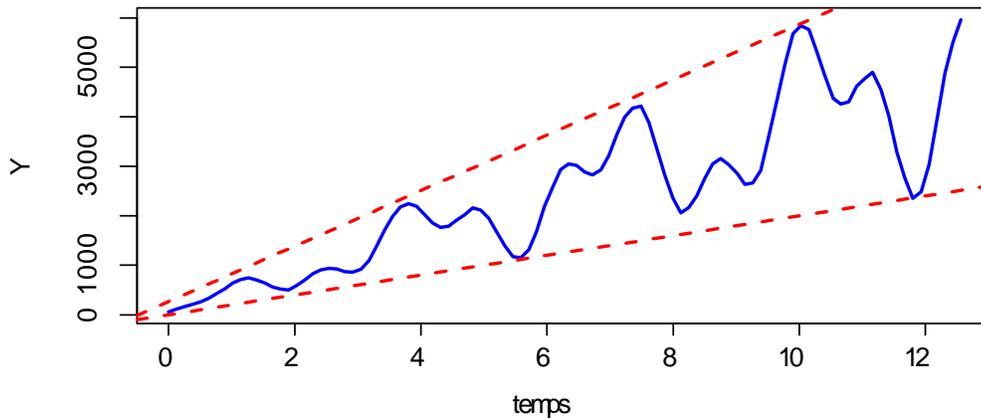


FIG. 1.2 – Série temporelle multiplicative

## 1.3 Propriétés statistiques

### 1.3.1 Moments

Les statistiques des séries temporelles utilisent certaines procédures tirées des statistiques classiques, dont les principes essentiels peuvent être résumés ici.

**Définition 1.3.1 "Moyenne"** *Sauf dans des cas particuliers, une série temporelle aura une moyenne définie comme suit :*

$$E(X_t) = \mu_x(t).$$

**Définition 1.3.2 "Covariance :** *A condition qu'il existe des moments de niveau supérieur, la covariance d'une série temporelle à l'instant 't' et au temps 's', notée  $\gamma_x(t, s)$ , définie par :*

$$\gamma_x(t, s) = Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_x(t))(X_s - \mu_x(s))].$$

**Définition 1.3.3 "Fonction d'autocovariance (ACVF)"**

$$\gamma_x(h) = \gamma_x(h, 0) = \gamma_x(t + h, t).$$

**Définition 1.3.4 "Fonction d'autocorrélation (ACF)"** *En particulier, le cas d'une série temporelle stationnaire est défini comme suit :*

$$\rho_x(h) = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)} = Corr(X_t, X_{t+h}).$$

*L'autocorrélation est une méthode idéale pour découvrir des tendances et des modèles dans les données de séries temporelles qui n'auraient autrement pas été découverts.*

**Définition 1.3.5 "Stationnarité"** *On dit la série temporelle stationnaire à condition que ses propriétés ne dépendent pas du temps auquel la série est observée, Ainsi, les séries temporelles avec des tendances, ou avec la saisonnalité, ne sont pas stationnaires.*

## 1.3.2 Bruit blanc

**Définition 1.3.6** *L'un des exemples les plus simples d'une série est le "Bruit Blanc", qui est une suite de variables aléatoires centré ( $E(\varepsilon_t) = 0$ ), de variance*

finie ( $\sigma^2 < \infty$ ) et de fonction d'autocovariance :

$$\gamma_x(t+h, t) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Notez que l'autocovariance ne dépend pas de  $t$  (dépend uniquement de  $h$ ), et donc toutes les propriétés sont indépendantes du temps et par définition, la série temporelle stationnaire.

Une série temporelle de bruit blanc est simplement une séquence de variables aléatoires non corrélées qui sont distribuées de manière identique. Si votre série temporelle est du bruit blanc, alors, par définition, elle est aléatoire. Vous ne pouvez pas raisonnablement le modéliser cela et nous ne pouvons pas prévoir les observations futures basées sur le passé - les autocorrélations à tous les décalages sont nulles. Dans la figure [1.3](#) suivante, nous allons créer une série de bruits blancs gaussiens avec  $n = 200$  observations, en langage R et effectuer quelques vérifications.

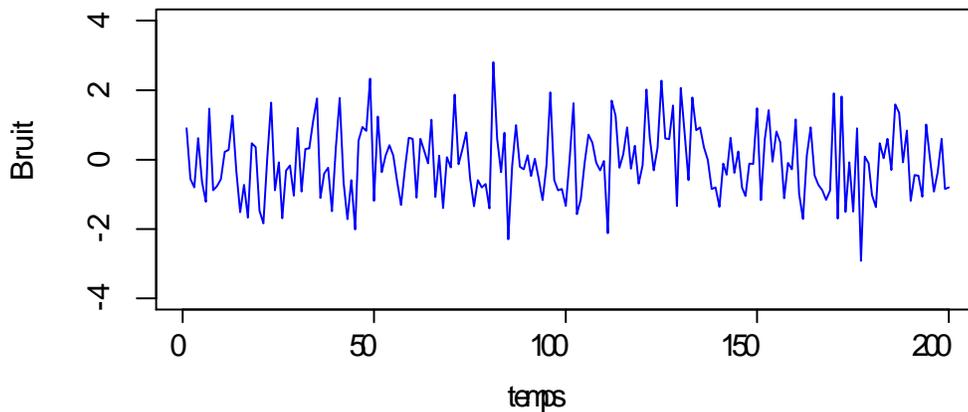


FIG. 1.3 – Représentation graphique d'un Bruit Blanc de taille 200

Comme vous pouvez le voir sur le graphique ci-dessus, la distribution est constante sur la moyenne et est complètement aléatoire. Il est difficile de prédire le prochain mouvement de la série temporelle.

Voyons maintenant l'ACF de la série dans la figure 1.4. L'autocorrélation représente l'association d'une séquence avec elle-même après un certain nombre d'unités de temps.

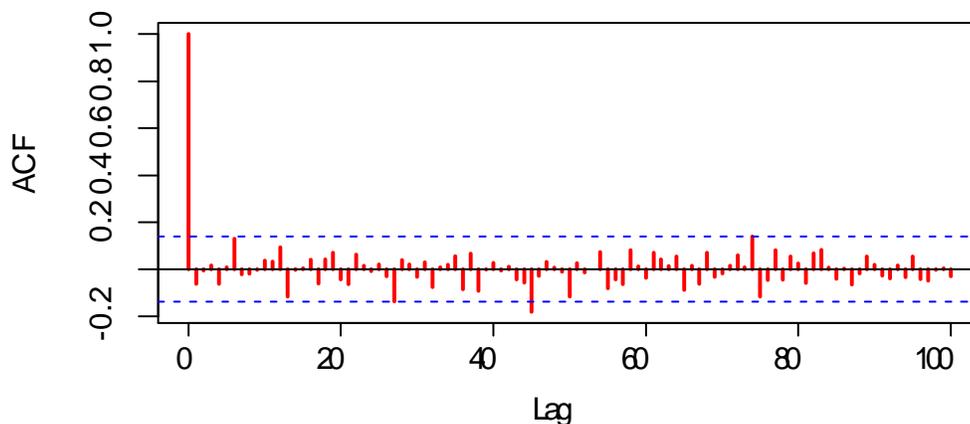


FIG. 1.4 – Représentation ACF du Bruit Blanc de Lag 100

Dans le graphique, nous avons des caractéristiques similaires qui nécessitent une explication :

- **Lignes bleue** : Ces lignes sont référentes à un intervalle de signification, les barres qui traversent ces lignes ont une signification statistique.
- **axe des Y** : représente les scores de corrélation, allant de -1 à 1.
- **axe des X** : représente le nombre de décalage.

Dans l'ACF (Autocorrélation Plot) ci-dessus, nous pouvons voir que tous les décalages sont dans la zone délimitée par les deux lignes bleues, cela indique qu'il n'y a presque aucune corrélation entre les observations à différents décalages.

**Remarque 1.3.1** *Si plus de 5 % des pics sont en dehors de l'intervalle de confiance, alors nous pouvons en déduire que la série n'est pas un "bruit blanc".*

## 1.4 Indicateurs d'estimation

Les indicateurs d'estimation sont des mesures utilisées pour déterminer l'exactitude d'un modèle statistique dans la prédiction des valeurs réelles.

**Définition 1.4.1** *"Erreur quadratique moyenne (MSE)" est la moyenne des différences au carré entre les valeurs prédites et les valeurs réelles dans un ensemble de données. Il est calculé comme suit :*

$$\text{MSE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - \hat{X}_t)^2,$$

où  $\hat{X}_t$  est la valeur prédite pour l'observation  $t$  et  $T$  est la taille de l'échantillon.

**Définition 1.4.2** *"RMSE" est la racine carrée de la MSE et nous donne l'écart moyen entre les valeurs prédites et les valeurs réelles dans un ensemble de données. Il est calculé comme suit :*

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}.$$

**Définition 1.4.3** *"Erreur moyenne absolue" (MAE) C'est la moyenne des valeurs absolues des erreurs entre les valeurs réelles et les valeurs prédites. Elle se calcule par la formule suivante :*

$$\text{MAE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |X_t - \hat{X}_t|.$$

**Définition 1.4.4** *"Erreur relative moyenne absolue" : (MAPE) C'est la moyenne des valeurs absolues des erreurs relatives entre les valeurs réelles et les valeurs pré-*

dites. Elle se calcule par la formule suivante :

$$\mathbf{MAPE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{|X_t - \hat{X}_t|}{X_t} \times 100 \right).$$

**Remarque 1.4.1** Plus la valeur de l'indicateur d'estimation est faible, plus le modèle est capable de prédire avec précision les valeurs réelles.

## 1.5 Indices descriptifs d'une série temporelle

Les indices descriptifs d'une série temporelle sont très importants pour obtenir une description précise des données. Voici quelques-uns des indices descriptifs courants qui peuvent être utilisés :

### **Indice de tendance centrale : "Moyenne empirique"**

Il est utilisé pour estimer la moyenne d'un ensemble de données et est défini comme suit :

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$$

### **Indices de dispersion : "Variance empirique"**

Il mesure le degré de dispersion des données autour de la moyenne. Plus la variance empirique est grande, plus les données sont dispersées et irrégulières. Et plus la variance empirique est petite, plus les données sont homogènes et convergentes et est défini comme suit

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}_t)^2$$

**"L'écart type empirique"** est une mesure la dispersion des données dans un échan-

tillon statistique par rapport à la moyenne empirique. Il peut être utilisé pour mesurer l'étendue de la dispersion des données autour de la moyenne empirique. Plus l'écart type est grand, plus les données sont dispersées et irrégulières. Et plus l'écart type est petit, plus les données sont homogènes et cohérentes.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\gamma}(0)}.$$

## 1.6 Exemples d'analyse de séries temporelles

### 1.6.1 Séries temporelles non saisonnières

#### a) Pas de tendance mais un changement de niveau

Nous allons analyser les données de série temporelle qui représentent la part des exportations de biens et services de l'Algérie vers le reste du monde. Ces données sont annuelles et couvrent la période 1960-2021.

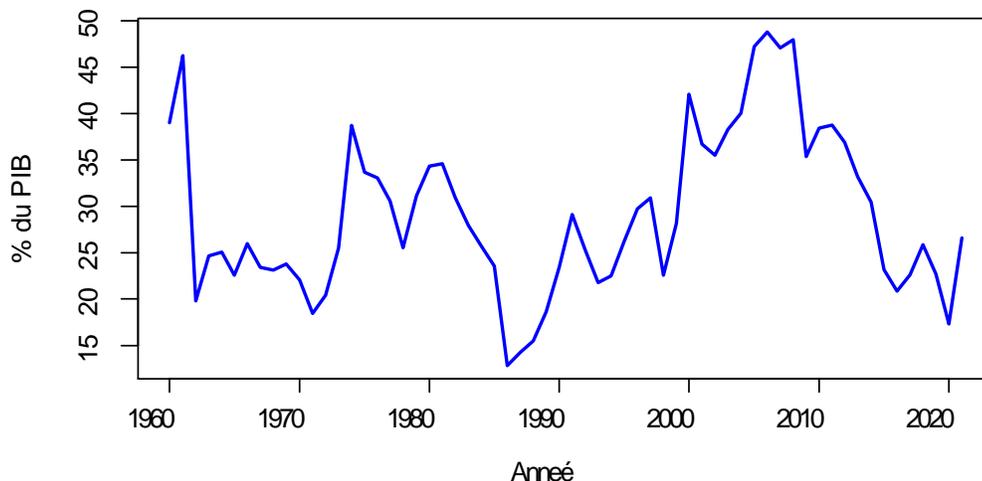


FIG. 1.5 – Série sans tendance mais avec un changement de niveau. Source de données : World Bank

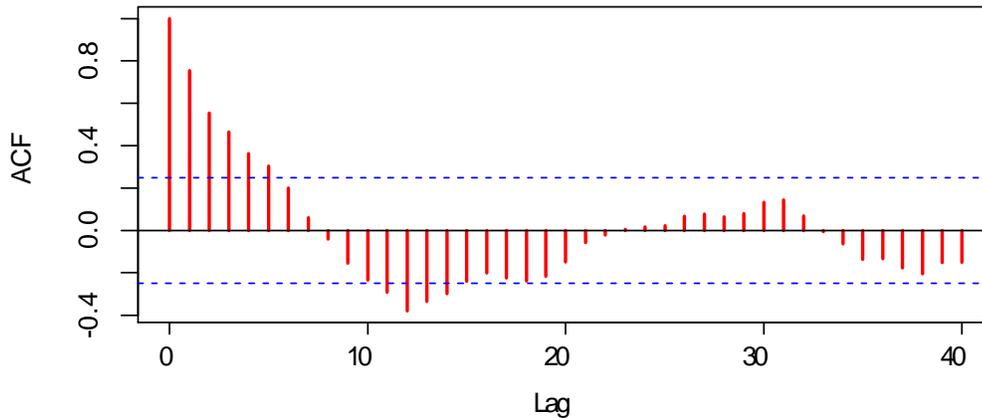


FIG. 1.6 – Représentation ACF pour analyser nos données avec un Lag de 40.

Nous remarquons la présence de plusieurs pics d'autocorrélation en dehors de l'intervalle de confiance de 5%, ce qui indique l'existence de fortes corrélations entre les retards. Les valeurs ACF de notre série indiquent une baisse régulière et rapide dans les premières périodes de retard et atteignent zéro à un retard de 7. Cela signifie que la série contient probablement un composant de niveau mais il n'y a pas de motifs clairs tels que la tendance ou la saisonnalité. Mais à la fin de la série, nous remarquons des fluctuations positives et négatives dans les valeurs ACF, indiquant des fluctuations et des variations dans les valeurs des données. Les fluctuations peuvent être réduites pour montrer le motif principal de la série.

Sur la base des fortes corrélations observées au début de la série temporelle de données, nous avons pu déterminer que les premières valeurs d'exportation ont un impact plus important sur les valeurs d'exportation futures par rapport aux dernières valeurs. Par conséquent, nous concluons que les valeurs d'exportation en début de la série temporelle contiennent des informations importantes sur les exportations futures, tandis que les dernières valeurs de la série ont un impact moins important.

## b) Présence d'une tendance croissante non linéaire

Nous allons analyser la série du produit intérieur brut (PIB) de la Chine en dollars américains. Ces données sont annuelles et couvrent la période de 1990 à 2021.

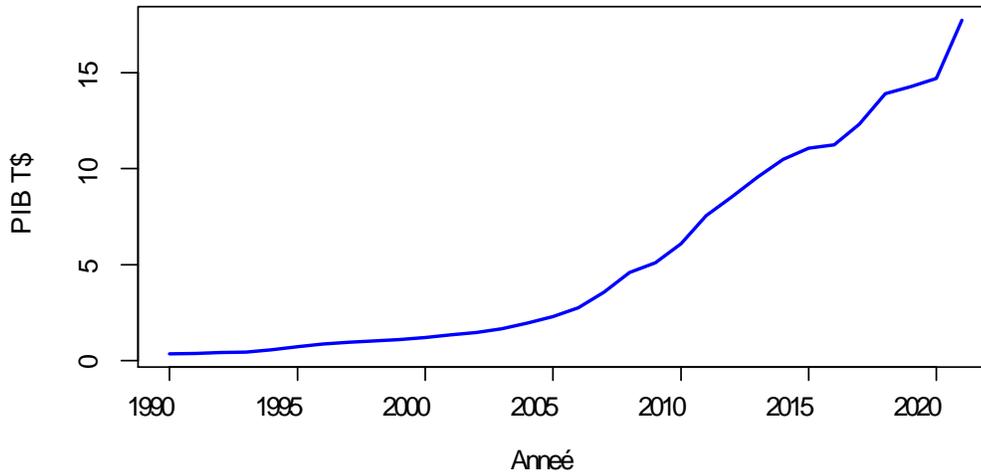


FIG. 1.7 – Série montrant une tendance croissante non linéaire. Source de données : World Bank

Lorsque nous examinons les valeurs de l'autocorrélation (ACF) de la série, nous constatons qu'il existe une forte corrélation entre les valeurs actuelles et les valeurs futures aux premiers décalages. Cela signifie que les valeurs actuelles ont un impact important sur les valeurs futures de la série, mais cet impact diminue avec le temps. Si la série était aléatoire, les valeurs d'autocorrélation seraient proches de zéro pour tous les décalages. Cependant, dans notre série, nous observons que les valeurs d'autocorrélation sont élevées aux premiers décalages et diminuent considérablement à mesure que le décalage augmente. Cela indique que notre série n'est pas aléatoire.

Il est connu que les données contenant une tendance présentent des valeurs ACF élevées et positives pour les petits décalages, qui diminuent lentement à mesure que le décalage augmente. C'est ce qui se passe dans notre série, où les valeurs ACF

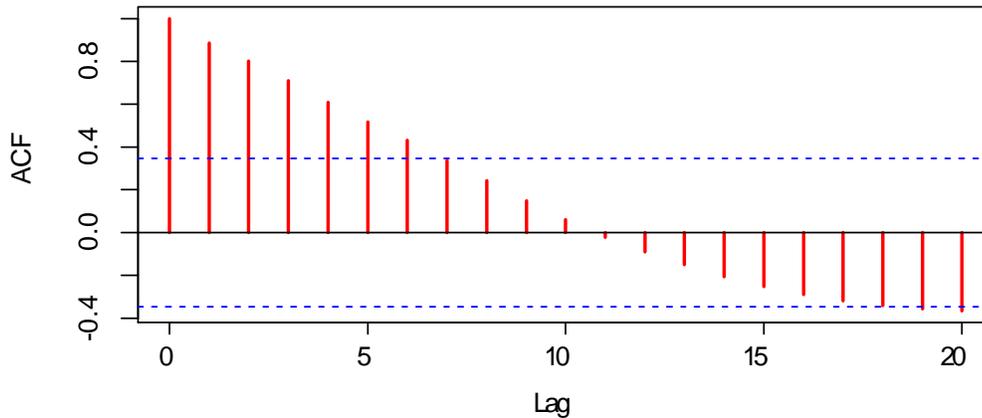


FIG. 1.8 – ACF pour analyser les données, avec un Lag de 20.

diminuent progressivement à mesure que le décalage augmente et ne montrent aucun motif périodique. Par conséquent, nous pouvons dire qu'il y a un modèle clair dans notre série et c'est la tendance, et il n'y a pas de saisonnalité dans les données.

On remarque que les valeurs de corrélation deviennent presque nulles pour les retards les plus élevés, à partir du retard 8. Cela indique que la série temporelle peut contenir une composante aléatoire, ce qui signifie qu'il existe des facteurs aléatoires imprévus qui affectent les données et rendent la relation entre les observations successives moins claire.

## 1.6.2 Séries temporelles saisonnières

### a) Série avec tendance et saisonnalité multiplicative

Nous allons analyser les données sur le nombre de passagers des compagnies aériennes internationales de 1953 à 1960, et les données se composent de 96 observations mensuelles. Les données `AirPassengers` ont été obtenues à partir du package standard `datasets` en langage R.

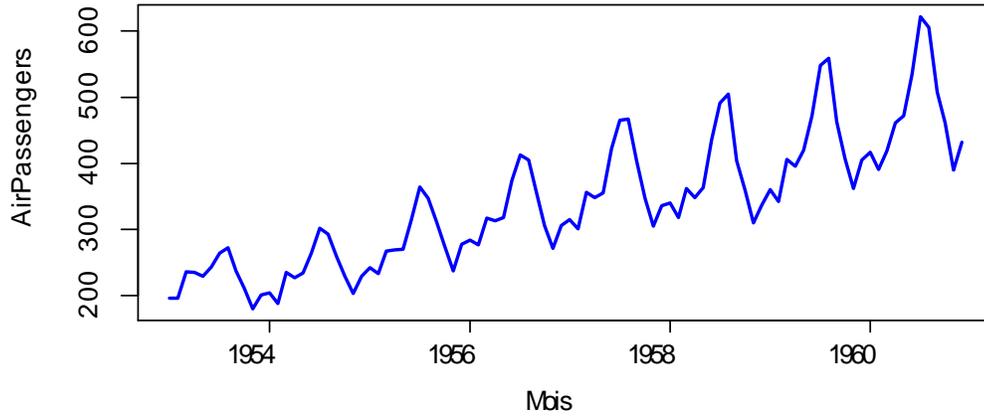


FIG. 1.9 – Série avec tendance et saisonnalité multiplicative

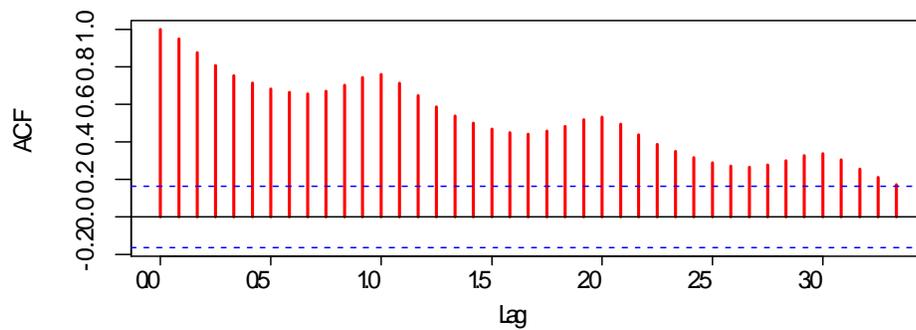


FIG. 1.10 – ACF pour analyser les données avec un Lag de 40

Il apparaît que l'acf diminue lentement avec l'augmentation du décalage et que les pics de décalage ne sont pas nuls. Ces informations indiquent que la série temporelle n'est pas aléatoire. La baisse lente de l'acf avec l'augmentation des retards indique que le nombre de passagers n'est pas constant, ce qui indique une tendance dans le mouvement des passagers. De plus, les corrélations croissantes à nouveau indiquent un modèle périodique, ce qui indique la saisonnalité dans la série.

# Chapitre 2

## Méthodes de lissage exponentiel pour la prévision

Les méthodes de lissage exponentiel sont une classe de techniques de prévision des données de séries temporelles qui impliquent d'attribuer différents poids aux observations passées, les plus récentes recevant des poids plus élevés. Ces méthodes sont utiles pour capturer les tendances et les modèles saisonniers dans les données, ainsi que pour lisser les fluctuations aléatoires, ce qui permet aux modèles et aux tendances d'être plus visibles. Ce type de prévision repose sur l'idée d'extrapoler le comportement passé et les tendances des données pour faire des suppositions éclairées sur les valeurs futures.

Les méthodes de lissage exponentiel peuvent être classées en trois types : simple, double et triple, selon qu'elles ne tiennent compte que du niveau, ou également de la tendance et de la saisonnalité de la série.

Dans ce chapitre, nous présenterons les concepts de base et les formules des méthodes de lissage exponentiel, et fournirons quelques exemples de leurs applications en prédiction.

## 2.1 Principe des méthodes de lissage exponentiel

Le lissage exponentiel est une technique pour réduire le bruit et la variance dans les données en utilisant un algorithme qui lisse les points de données. L'idée de base est de remplacer chaque point de données par une moyenne pondérée, de cette façon, les fluctuations aléatoires ou les valeurs aberrantes sont lissées, tout en préservant la tendance générale ou le modèle des données.

L'algorithme de lissage exponentiel est d'attribuer plus de poids aux observations les plus récentes et moins de poids aux plus anciennes, en utilisant la constante de lissage qui contrôle le taux de décroissance.

Le lissage exponentiel est similaire aux moyennes mobiles simples en ce sens qu'il estime les valeurs futures en fonction des observations passées, mais il existe une différence essentielle : les moyennes mobiles simples considèrent les observations passées de manière égale, tandis que le lissage exponentiel attribue des poids décroissants exponentiellement au fil du temps.

Le lissage exponentiel est généralement utilisé pour faire des prévisions à court terme, car les prévisions à long terme utilisant cette technique peuvent être assez peu fiables. Historiquement, il a été proposé pour la première fois par Robert Goodell Brown en 1956, puis élargi par Charles C. Holt en 1957. Ils ont proposé différentes formes de lissage exponentiel pour tenir compte des modèles constants, linéaires ou saisonniers dans les données. Plus tard, Peter Winters en 1960 a introduit le triple lissage exponentiel pour gérer également la saisonnalité multiplicative.

## 2.2 Lissage exponentiel simple

### 2.2.1 Définition de la méthode

**Définition 2.2.1** *”le lissage exponentiel simple (LS)” est une technique qui lisse les séries temporelles sans saisonnalité et avec une tendance localement constante en donnant plus de poids aux observations les plus récentes. Le but de cette technique est de prédire la valeur de la série à la période suivante ( $T + h$ ) à partir des données précédentes, où  $h$  est l’horizon de prévision. Cette méthode met à jour le composant de niveau pour chaque observation et, comme elle ne conçoit qu’un seul composant, elle n’utilise qu’un seul coefficient de pondération. La formule LS est :*

$$\widehat{X}_T(h) = \alpha X_T + (1 - \alpha)\widehat{X}_{T-1}(h) \quad (2.1)$$

où  $\widehat{X}_T(\mathbf{h})$  est la prévision pour la date  $T$  et à l’horizon  $h$ , i.e., pour la date  $T + h$ .

$X_T$  est la valeur observée pour la période  $T$ .

$\widehat{X}_{T-1}(\mathbf{h})$  est la prévision pour la date  $T - 1$  et à l’horizon  $h$ , i.e., pour la date  $T - 1 + h$ .

$\alpha$  est la constante de lissage compris entre 0 et 1.

**Définition 2.2.2** *”L’erreur de prévision” est la différence entre la valeur réelle d’une variable et sa valeur estimée par un modèle de prévision. C’est une mesure de la qualité et de la fiabilité d’un modèle. Plus l’erreur de prévision est faible, plus le modèle est précis et performant.*

**Remarque 2.2.1** L’équation 2.1 peut être écrite en termes d’erreur de prévision,

nous écrivons donc :

$$\begin{aligned}\widehat{X}_T &= \alpha X_T + (1 - \alpha)\widehat{X}_{T-1} \\ &= \alpha X_T + \widehat{X}_{T-1} - \alpha\widehat{X}_{T-1} \\ &= \widehat{X}_{T-1} + \alpha(X_T - \widehat{X}_{T-1})\end{aligned}$$

On en déduit l'équation suivante :

$$\widehat{X}_T = \widehat{X}_{T-1} + \alpha e_T \quad (2.2)$$

où :  $e_T = X_T - \widehat{X}_{T-1}$  est l'erreur de prévision.

### 2.2.2 Explication de la formule de LS

La prévision  $\widehat{X}_T$  est basée sur la pondération de la dernière observation  $X_T$  avec une valeur de poids  $\alpha$ , et la pondération de la dernière prévision  $\widehat{X}_{T-1}$  avec un poids de  $1 - \alpha$ . Ainsi, il peut être interprété comme une moyenne pondérée de la dernière. Pour expliquer cela, nous réécrivons l'équation (2.1) d'une autre manière :

$$\widehat{X}_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)\widehat{X}_{T-1}$$

Nous remplaçons  $\widehat{X}_{T-1}$  par son égalité :

$$\widehat{X}_T = \alpha X_T + (1 - \alpha) \left[ \alpha X_{T-1} + (1 - \alpha)\widehat{X}_{T-2} \right]$$

Nous remplaçons  $\widehat{X}_{T-2}$  par ce qu'il équivaut et nous obtenons l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{X}_T &= \alpha X_T + (1 - \alpha) \left[ \alpha X_{T-1} + (1 - \alpha) \left[ \alpha X_{T-2} + (1 - \alpha)\widehat{X}_{T-3} \right] \right] \\ &= \alpha X_T + \alpha(1 - \alpha)X_{T-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 X_{T-2} + \alpha(1 - \alpha)^3 \widehat{X}_{T-3}\end{aligned}$$

Si le processus de remplacement est répété de la même manière, le résultat est :

$$\widehat{X}_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)\alpha X_{T-1} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{T-1} \widehat{X}_1.$$

En particulier on peut choisir  $\widehat{X}_1 = X_1$  comme valeur initiale :

$$\widehat{X}_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)\alpha X_{T-1} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{T-1} X_1 \quad (2.3)$$

Nous remarquons que dans l'équation (2.3) les valeurs de  $X$  les plus anciennes ont un coefficient plus petit car plus nous remontons dans le temps, plus nous multiplions par  $1 - \alpha$ , qui est une valeur inférieure à 1. Par conséquent, les observations passées prennent des poids décroissants exponentiellement en raison du fait que la constante de lissage est inférieure à 1.

**Remarque 2.2.2** *On peut exprimer  $\widehat{X}_T$  comme une somme d'observations à poids décroissants, qui peut être écrite comme suit :*

$$\begin{aligned} \widehat{X}_T &= \alpha X_T + \alpha(1 - \alpha)X_{T-1} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{T-1} X_1 \\ &= \sum_{i=0}^{T-1} \alpha(1 - \alpha)^i X_{T-i}. \end{aligned}$$

**Notation 2.2.1** *Il est courant d'écrire l'équation de prédiction en utilisant les composants de ce modèle. Ainsi, le modèle LS peut être écrit en utilisant la composante de niveau et peut être écrit sous la forme suivante :*

$$\text{Équation de Prévission} : \widehat{X}_T = N_T$$

$$\text{Équation de Niveau} : N_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)N_{T-1}$$

*Cette équation récursive est connue sous le nom d'équation de mise à jour, elle donne le niveau de l'étape actuelle en fonction des estimations précédentes.*

### 2.2.3 Choix de la constante de lissage

- $\alpha$  **approchant 0** signifie que les prévisions futures dépendent davantage des valeurs passées et que les valeurs récentes ont peu d'impact sur les prévisions futures (en donnant plus de poids aux données anciennes)
- $\alpha$  **approchant 1** signifie que les valeurs prévisionnelles futures sont les résultats de l'observation récente (en donnant plus de poids aux observations récentes).
- Il faut donc trouver un compromis entre la stabilité et la réactivité des prévisions.

Il existe plusieurs méthodes pour choisir la constante de lissage :

- **La méthode du "jugement"** : consiste à choisir la constante de lissage en fonction de son expérience et de son intuition. On peut se baser sur des critères qualitatifs, comme la stabilité ou la réactivité du modèle, ou sur des critères quantitatifs, comme les erreurs de prévision. Cette méthode est simple et rapide, mais elle peut être subjective et imprécise.
- **La méthode empirique de "l'optimisation"** : consiste à tester différentes valeurs de la constante de lissage et à comparer les résultats obtenus en termes d'erreur de prévision. On peut utiliser des indicateurs comme l'erreur quadratique moyenne (MSE) ou l'erreur absolue moyenne (MAE) pour mesurer l'écart entre les prévisions et les observations réelles. On choisit alors la valeur qui minimise l'erreur de prévision. Cette méthode est plus précise, mais elle peut être complexe et coûteuse en termes de calcul. Elle s'exprime mathématiquement comme suit :

$$\hat{\alpha} = \arg \min \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} (e_t)^2 \right\} = \arg \min \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} (X_{t+1} - \hat{X}_t)^2 \right\}$$

On répète cette opération pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ , et on choisit celle avec la plus petite erreur.

**Remarque 2.2.3** *L'utilisation du terme "alpha" pour désigner le constante de*

*lissage dans le modèle statistique peut causer de la confusion pour le lecteur, car certains logiciels utilisent  $(1-\alpha)$  au lieu d' $\alpha$  pour représenter la valeur de ce coefficient. Pour éviter cette confusion, nous tenons à préciser que nous utilisons le logiciel R et la fonction "**Holtwinters**" qui accepte  $\alpha$  en entrée pour le coefficient de lissage.*

### 2.2.4 Choix de la valeur initiale

La valeur initiale  $X_1$  est le point de départ du lissage et a une influence sur les prévisions futures. On a les possibilités suivantes :

- 1) Prendre  $X_1$  égale à la valeur initiale de la série dans le cas où cette dernière est très fluctuante.
- 2) Prendre pour  $X_1$  la moyenne de toutes les données ;c'est surtout adéquat pour une série qui varie autour d'une valeur constante.
- 3) Prendre pour  $X_1$  la moyenne de quelques premières données ; si on a un compromis entre (1) et (2).

## 2.3 Prévision à l'aide de LS

Nous appliquons le LS pour prédire une série temporelle qui ne contient pas de tendance mais qui comprend des changements de niveau. Cette série est la même série qui a été étudiée dans le premier chapitre. Nous expliquerons comment choisir la constante de lissage  $\alpha$  approprié de deux manières :

- **La méthode du "jugement"**, après avoir étudié l'analyse de l'ACF de la série temporelle, nous avons observé des corrélations fortes entre les valeurs au début de la série, ce qui indique l'existence d'un motif récurrent dans la série. Par conséquent, nous nous attendons à ce que le constante de lissage soit relativement faible pour

donner de l'importance aux valeurs précédentes qui portent des informations sur ce motif.

Cependant, la série présente des fluctuations importantes à la fin, ce qui nous fait penser à prévoir une constante de lissage relativement élevé pour lisser ces fluctuations et conserver le motif présent au début de la série. Sur cette base, nous nous attendons à ce que le constante de lissage soit compris entre 0.7 et 0.9.

• **La méthode "d'optimisation"** : Afin de réduire l'effort de calcul, nous délèguons la tâche de déterminer la valeur optimale de  $\alpha$  à la machine (en utilisant le logiciel R). Un algorithme sera utilisé pour sélectionner de manière itérative une valeur qui minimise l'erreur quadratique moyenne et nous fournit la valeur optimale de  $\alpha$ . nous avons trouvé que la valeur optimale de  $\alpha$  est 0.8. ce qui confirme la validité de notre prévision où nous avons dit que la valeur élevée de  $\alpha$  se situerait dans cette plage entre 0.7 et 0.9.

Dans la figure suivante (2.1), nous simulons différentes valeurs d'alpha et appliquons le LS en utilisant la valeur optimale **d'alpha = 0.8**, qui représente les valeurs élevées. Nous avons également testé une faible valeur **d'alpha = 0.2**. Et nous avons choisi  $\mathbf{N}_1 = X_1 = \widehat{X}_1 = 39,04$  comme valeur initiale prévue car c'est le choix le plus approprié pour notre série qui montre de grandes fluctuations.

Le graphique montre clairement que la ligne rouge reflète la meilleure valeur de la constante de lissage **alpha**, qui est égale à 0,8, ce qui en fait la ligne la plus précise. Cette constante agit rapidement pour lisser les oscillations dans les dernières données et maintenir le motif de la série et l'importance des données antérieures. En revanche, la ligne verte suit une valeur relativement basse d'alpha, qui est égale à 0,2, ce qui conduit à une réduction du lissage et à la destruction du motif de la série, ce qui affecte négativement la précision de la prédiction.

Nous pouvons remarquer que le niveau de lissage optimisé prévoit que les exporta-

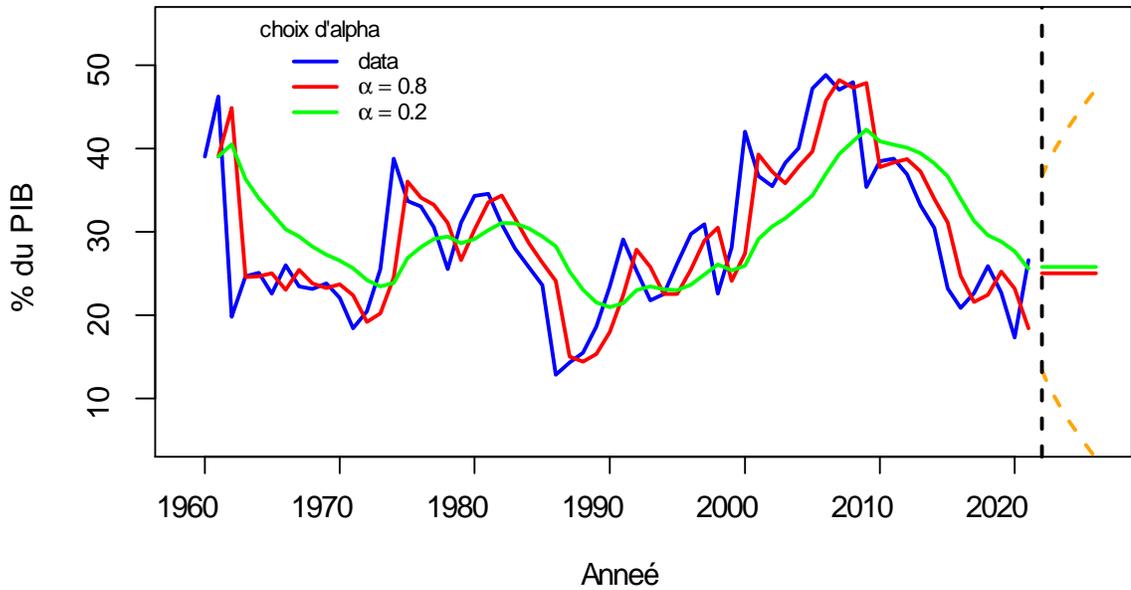


FIG. 2.1 – LS avec deux constantes de lissage différentes

tions auront une valeur d'environ 25% pour les cinq années à venir, ce qui paraît plausible.

**Remarque 2.3.1** *La valeur de la prédiction  $\hat{X}_{T+h} = 25.02$  ne dépend pas de l'horizon car la série est sans tendance.*

### 2.3.1 Évaluation de la précision du modèle LS

Nous évaluons la précision du modèle LS à l'aide des mesures **RMSE**, **MAE** et **MAPE**. Plus les mesures sont faibles, meilleur est le modèle.

	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.2$
<b>RMSE</b>	<b>5.89</b>	<b>7.68</b>
<b>MAE</b>	<b>4.10</b>	<b>6.42</b>
<b>MAPE</b>	<b>15.79%</b>	<b>25.02%</b>
<b>Évaluez le modèle</b>	<b>bon</b>	<b>mauvais</b>

TAB. 2.1 – LS évalue selon les valeurs de alpha

- Les valeurs de alpha dans le tableau montrent l'impact qu'elles ont sur la qualité des prévisions à l'aide des mesures d'erreur RMSE, MAE et MAPE. La valeur alpha optimale (0.8) est la plus appropriée car elle réduit le niveau d'erreur au minimum et augmente la précision du modèle LS.
- Dans ce cas, **RMSE = 5.89** indique que la prévision diffère de la valeur réelle des exportations d'une moyenne de **5.89** unités. Mais cette valeur ne reflète pas clairement l'efficacité du modèle, car il doit être proportionnel à la variabilité des données de notre série qui varie entre  $[Min(X_t) = 12.85, Max(X_t) = 48.81]$ . À cette fin, nous pouvons utiliser la formule suivante :

$$\text{RMSE ajusté} = \text{RMSE} / (\text{Max}(X_t) - \text{Min}(X_t))$$

Cela donne une valeur entre 0 et 1, où les valeurs proches de 0 signifient que le modèle est plus précis. Dans notre cas, la valeur du

$$\text{RMSE ajusté} = 5.89 / (48.81 - 12.85) = 0.16.$$

Cette valeur est comprise entre 0 et 1 et est relativement faible, ce qui signifie que le modèle LS est assez bon.

D'autre part, on voit que la valeur **MAE = 4.10** est plus petite et plus proche de la valeur RMSE. Cela signifie que le modèle est bon, car RMSE doit être plus grand que

MAE. En d'autres termes, si la valeur MAE est inférieure à RMSE, cela indique que le modèle peut estimer les valeurs réelles mieux. Pour cette raison, on peut utiliser les valeurs RMSE et MAE ensemble pour évaluer la qualité du modèle et son efficacité dans les prévisions.

**Conclusion 2.3.1** *Nos résultats montrent que le modèle LS atteint une grande précision dans la prédiction, ce qui indique son bon ajustement au modèle utilisé.*

## 2.4 Lissage exponentiel double ou de Holt

La technique de LS a été développée par Charles Holt en 1957. Holt a inventé une méthode pour prédire les données contenant une tendance en utilisant deux constantes de lissage : alpha et beta, qui correspondent respectivement au niveau et à la tendance. Cette méthode met à jour les composantes niveau et tendance pour chaque observation, et aide ainsi à s'adapter aux changements de tendance de manière plus efficace que le LS.

### 2.4.1 Définition de la méthode

**Définition 2.4.1** *La technique de "lissage exponentiel double d'Holt (LD)" est utilisée pour prévoir les séries temporelles qui présentent une tendance mais pas de saisonnalité. Cette méthode décompose la prévision en deux composants seulement : le niveau et la tendance, puis chaque composant est estimé séparément, puis ils sont combinés par l'une des méthodes disponibles (additive ou multiplicative) pour obtenir la valeur prévue.*

• **Méthode additive**

Nous exprimons la méthode additive en multipliant la composante de tendance par le pas de temps  $h$ , ce qui transforme les prévisions de constantes en une fonction linéaire de  $h$ . Par conséquent, ce modèle est appelé méthode de tendance linéaire de Holt (**HTA**) et est exprimée comme suit :

$$\widehat{X}_{T+h} = N_T + h * D_T$$

où :  $D_T$  représente la composante de tendance pour la période  $T$ .

$N_T$  représente la composante de niveau pour la période  $T$ .

$h$  représente l'horizon de prévision.

**Mise à jour de l'équation**

Les composantes de niveau  $N_T$  et de tendance  $D_T$  sont mises à jour à l'aide d'une paire d'équations mises à jour comme suit :

$$\text{Équation de Niveau} : N_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)(N_{T-1} + D_{T-1}) \quad (2.4)$$

$$\text{Équation de Tendance} : D_T = \beta(N_T - N_{T-1}) + (1 - \beta)D_{T-1} \quad (2.5)$$

L'équation (2.4) exprime que le niveau au temps  $T$  est une moyenne pondérée entre la valeur réelle au temps  $T$  et le niveau corrigé de la tendance de la période précédente  $T-1$ , où la constante de lissage  $\alpha$  détermine les poids alloués à chacun, Cette équation permet de mettre à jour le niveau de la série temporelle à chaque instant.

La formule (2.5) indique que la tendance au temps  $T$  est une moyenne pondérée entre la tendance de la période précédente et les informations les plus récentes sur le changement de niveau, où la constante de lissage  $\beta$  détermine les poids alloués à chacun. Cette équation met à jour la tendance de la série temporelle à chaque instant.

Les valeurs des constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , qui sont comprises entre 0 et 1, sont choisies en

minimisant un indicateur tel que la MSE. Ces constantes fonctionnent de manière similaire à la méthode de lissage exponentiel simple et affectent la vitesse de lissage. Des valeurs plus élevées pour les constantes accélèrent le lissage, tandis que des valeurs plus basses le ralentissent.

- **Méthode multiplicative**

La méthode de multiplicative est utilisée pour capturer la tendance exponentielle en élevant la composante de tendance à la puissance du pas de temps  $h$ , ce qui rend la tendance exponentielle, puis en la multipliant par la composante de niveau, ce qui transforme les prévisions en une fonction exponentielle de  $h$ .

Par conséquent, ce modèle est appelé méthode de tendance exponentielle multiplicative de Holt (**HTM**) et il est exprimé comme suit :

$$\widehat{X}_{T+h} = N_T * (D_T)^h$$

### Mise à jour de l'équation

J'ai précédemment parlé des équations de mise à jour du niveau et de la tendance dans la méthode additive, et maintenant je vais effectuer une petite modification sur celles-ci dans la méthode multiplicative comme suit :

$$\text{Équation de Niveau} : N_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)(N_{T-1} * D_{T-1})$$

$$\text{Équation de Tendance} : D_T = \beta(N_T/N_{T-1}) + (1 - \beta)D_{T-1}$$

Les valeurs  $\alpha$  et de  $\beta$  restent toujours comprises entre 0 et 1.

### 2.4.2 Méthodes de tendance amorties

Les résultats de la méthode de "LD" ont montré des changements excessifs dans les prévisions futures, entraînant des augmentations et des diminutions illimitées à long terme, et rendant ainsi ces prévisions irréalistes. Pour résoudre ce problème, les chercheurs Gardner et Mackenzie ont ajouté en 1985 une constante d'amortissement " $\phi$ " à la tendance temporelle des prévisions, qui réduit la pente temporelle des prévisions et empêche la sur-prédiction. Cette constante supplémentaire peut être considérée comme une aide pour obtenir des prévisions plus précises et logiques pour l'avenir. Après l'ajout de la constante d'amortissement  $\phi$  "phi", nous pouvons maintenant examiner l'équation de prévision et l'équation de mise à jour du niveau et de la tendance pour les méthodes additive et multiplicative, comme suit :

- **Méthode additive :**

$$\text{Équation de prévision : } \hat{X}_{T+h} = N_T + (\phi + \phi^2 + \dots + \phi^h)D_T$$

$$\text{Équation de Niveau : } N_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)(N_{T-1} + \phi D_{T-1})$$

$$\text{Équation de Tendance : } D_T = \beta(N_T \div N_{T-1}) + (1 - \beta)\phi D_{T-1}$$

- **Méthode multiplicative :**

$$\text{Équation de prévision : } \hat{X}_{T+h} = N_T * D_T^{(\phi + \phi^2 + \dots + \phi^h)}$$

$$\text{Équation de Niveau : } N_T = \alpha X_T + (1 - \alpha)(N_{T-1} * D_{T-1}^\phi)$$

$$\text{Équation de Tendance : } D_T = \beta(N_T \div N_{T-1}) + (1 - \beta)D_{T-1}^\phi$$

En plus des constantes de lissage  $\alpha$  et  $\beta$  (qui ont des valeurs comprises entre 0 et 1 comme dans la méthode de Holt), cette méthode comprend également une constante

d'amortissement  $0 < \phi < 1$ .

Si la valeur de la constante d'amortissement ( $\phi$ ) est égale à 1, cette méthode est équivalente à la méthode de Holt. Il convient de noter que dans les cas pratiques, la valeur de la constante d'amortissement ne peut pas être inférieure à 0,8 car l'amortissement a un impact important sur les valeurs. Par conséquent, des limites sont fixées pour la valeur de la constante d'amortissement ( $\phi$ ) entre 0,8 et 0,98.

**Remarque 2.4.1** *Plus la valeur de  $h$  est grande et se rapproche de l'infini, plus la constante d'amortissement se rapproche de zéro, ce qui signifie que les prévisions à court terme changent plus que les prévisions à long terme qui restent constantes.*

### 2.4.3 Choix de la valeur initiale

Lors du choix des valeurs initiales de la tendance, il est important de tenir compte du type de modèle (additif ou multiplicatif). Dans le modèle additif, on prend la pente de la tendance comme suit :  $D_1 = (X_T - X_1)/(T - 1)$  ou la pente des deux premiers points  $D_1 = X_2 - X_1$ . En ce qui concerne le modèle multiplicatif, il est préférable de laisser ce choix au logiciel R car cela peut être un peu compliqué. En général, la valeur initiale du niveau est choisie comme la valeur initiale de la série  $X_1$ .

## 2.5 Prévision à l'aide de LD

Au lieu du modèle LS, nous utiliserons le modèle LD pour adapter la série qui contient un niveau, une tendance et du bruit, sans être saisonnière. Ce modèle donne de meilleures estimations des trois composants. Nous avons déjà étudié cette série dans le premier chapitre et nous expliquerons maintenant comment le modèle LD diffère du modèle LS.

Nous appliquerons les modèles LS et LD aux données du PIB de la Chine en utilisant

des valeurs optimales des constantes de lissage alpha et bêta.

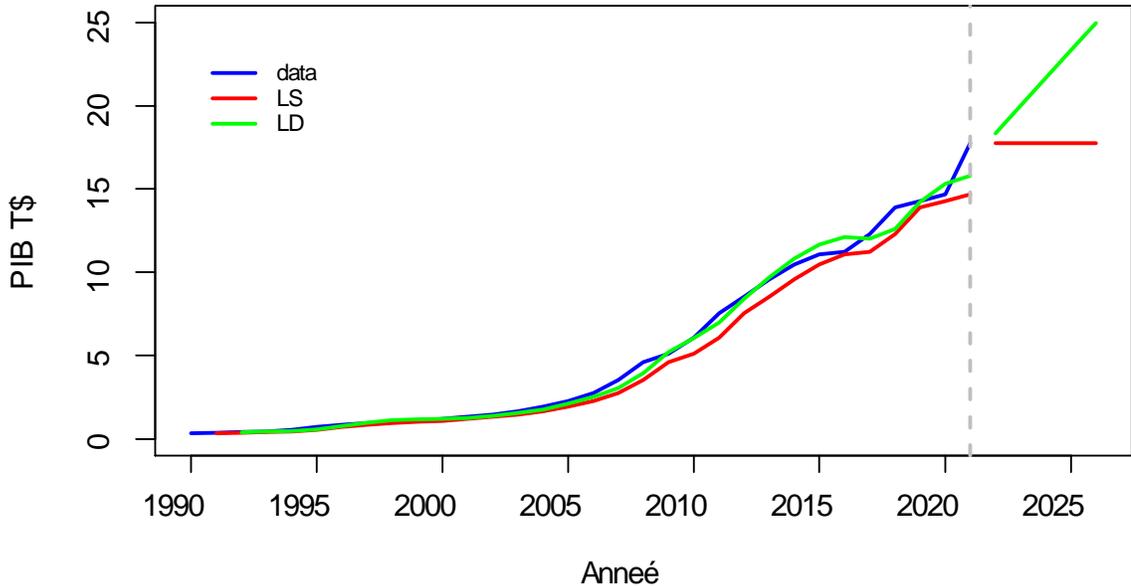


FIG. 2.2 – Lissage et prévision en utilisant les méthodes LS et LD

Le statement indique que la ligne rouge est située en dessous ou à côté de la ligne bleue, ce qui indique que les prévisions LS sont inférieures aux valeurs réelles dans une tendance à la hausse.

LS réduit les prévisions dans une tendance à la hausse et les augmente dans une tendance à la baisse. Par conséquent, cette méthode n'est pas fiable pour prédire la tendance, et le taux d'erreur augmente avec la durée. Par conséquent, la méthode LS convient aux séries temporelles sans tendance ni saisonnalité, ainsi qu'à la prévision à court terme.

Le trait vert représentant le modèle de LD se distingue par un meilleur suivi de la série lorsqu'une tendance haussière se produit, cela se fait en prévoyant des valeurs inclinées plutôt que des valeurs horizontales comme dans le modèle de LS. Cette

caractéristique se manifeste par l'absence de valeurs prévues sur une ligne horizontale mais plutôt sur une ligne inclinée.

	$N_{2021}$	$D_{2021}$	$\alpha$	$\beta$
<b>LS</b>	17.73	–	0.99	–
<b>LDH</b>	16.68	1.65	0.45	1

TAB. 2.2 – Les valeurs des constantes utilisées dans LS et LD

**Remarque 2.5.1** *La valeur de  $\beta = 1$  implique un lissage rapide de la tendance, en particulier pour les données récentes, car la tendance dans la série temporelle change de manière significative.*

Voici les prévisions pour les cinq prochaines années obtenues à l'aide de **LS** et **LD**.

	$LS$	$LD$	l'intervalle de confiance pour LS	l'intervalle de confiance pour LD
2022	17.73	18.34	[18.99 , 16.47]	[19.36 , 17.32]
2023	17.73	20	[19.51 , 15.94]	[21.39 , 18.61]
2024	17.73	21.66	[19.91 , 15.54]	[23.63 , 19.68]
2025	17.73	23.31	[20.25 , 15.20]	[26.04 , 20.59]
2026	17.73	24.97	[20.55 , 14.91]	[28.57 , 21.37]

TAB. 2.3 – Les valeurs de prévision à l'aide de LS et LD

**Remarque 2.5.2** *Les prévisions concernant du PIB au cours des cinq prochaines années semblent exagérées, avec une prévision d'augmentation de plus de sept trillions de dollars au cours de cette période, ce qui représente une augmentation très importante par rapport à l'augmentation de seulement cinq trillions de dollars au cours des cinq dernières années. Il est donc nécessaire de réfléchir à des moyens pour atténuer cette tendance croissante et améliorer les prévisions futures.*

## 2.6 Prévision à l'aide des méthodes de tendance amortie

Après avoir observé la méthode de Holt, nous avons constaté qu'il y avait une exagération dans les prévisions. Pour résoudre ce problème, nous avons décidé d'ajouter une constante d'amortissement " $\phi$ " et de la fixer à 0,85 pour réduire cette exagération dans les prévisions.  $HT_d$

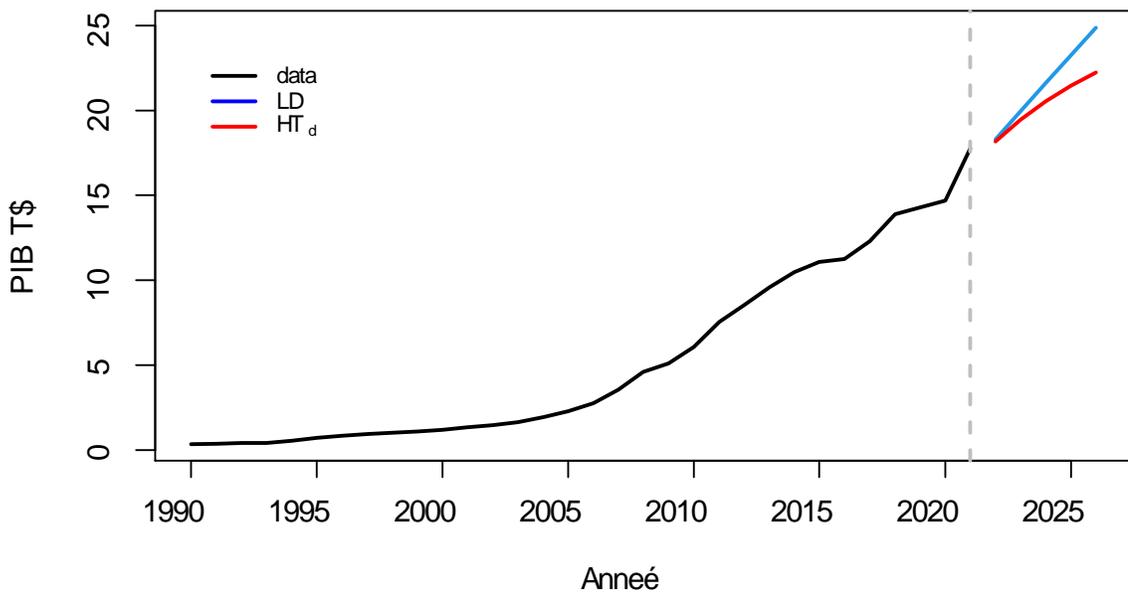


FIG. 2.3 – Prévision en utilisant Holt et Holt Amortie

Comme il est clairement visible dans le graphique ci-dessus, nous constatons que les prévisions de la méthode de Holt amortie s'aplatissent avec l'augmentation de l'horizon temporel, ce qui les rend plus réalistes pour l'avenir. En revanche, les prévisions de la méthode de Holt linéaire continuent de à augmenter indéfiniment, ce qui les rend irréalistes.

## 2.7 Évaluation de la précision des modèles de Holt

Représentons les prévisions des quatre modèles de Holt en utilisant les constantes de lissage et d'amortissement optimisées, puis comparons-les à travers une analyse visuelle. Le meilleur modèle peut être déterminé en fonction de sa capacité à suivre les tendances réelles des données, à s'adapter aux changements de tendance, et à la correspondance des prévisions avec les données réelles et leur capacité à prédire de nouvelles valeurs. Sur la base de ces critères, nous pourrions identifier le meilleur modèle de Holt.

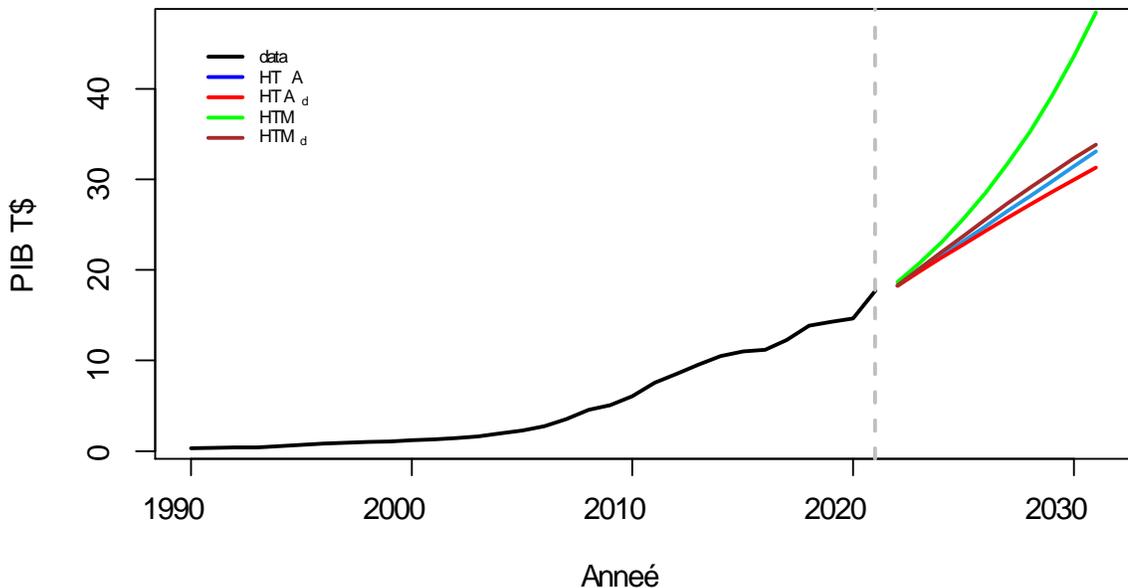


FIG. 2.4 – Prévision à l'aide des modèles de Holt.

D'après le graphique, les lignes marron et bleue semblent être les meilleures pour suivre les tendances des données réelles. Cependant, il convient de noter que se fier uniquement au graphique peut ne pas être suffisant pour déterminer le meilleur modèle. D'autres facteurs tels que les critères de précision des prévisions doivent être

pris en compte et testés pour déterminer le meilleur.

Nous calculerons maintenant les indicateurs de précision RMSE et MAPE pour les horizons de prévision  $h = 10$  et  $h = 5$ , et nous déterminerons le meilleur modèle pour prévoir le PIB de la Chine. Le meilleur modèle est celui qui donne la valeur la plus basse pour RMSE et MAE.

Cas : prévision pour les cinq prochaines années ( $h = 5$ ) :

	<i>HTA</i>	<i>HTA<sub>d</sub></i>	<i>HTM</i>	<i>HTM<sub>d</sub></i>
<i>RMSE</i>	1.18	2.29	1.26	1.43
<i>MAE</i>	0.78	1.41	0.85	0.89

TAB. 2.4 – Comparaison des performances prévisionnelles des quatre méthodes de Holt dans le cas où  $h=5$

Cas : prévision pour les dix prochaines années ( $h = 10$ ) :

	<i>HTA</i>	<i>HTA<sub>d</sub></i>	<i>HTM</i>	<i>HTM<sub>d</sub></i>
<i>RMSE</i>	2.15	7.22	2.27	4.97
<i>MAE</i>	1.42	3.57	1.54	2.56

TAB. 2.5 – Comparaison des performances prévisionnelles des quatre méthodes de Holt dans le cas où  $h=10$

Nous pouvons déduire du tableau que la meilleure méthode est HTA car elle a atteint les niveaux les plus bas pour les deux (MAE) et (RMSE) et donc c'est la plus précise

Nous remarquons que la valeur des erreurs augmente avec l'augmentation de l'horizon de prévision. Par conséquent, ces méthodes conviennent aux prévisions à court terme.

**Conclusion 2.7.1** *La méthode HTA est la plus appropriée pour prédire le PIB réel futur de la Chine. Vous pouvez compter sur cette méthode.*

## Chapitre 3

# Modèle multiplicatif : Prévision et Application

Dans ce troisième et dernier chapitre, nous réalisons une étude pratique sur une série temporelle réelle, à savoir le nombre de passagers pour les compagnies aériennes internationales (1953-1960). Il s'agit d'une série contenant tous ses composants, y compris la tendance et la saisonnalité et dont le modèle est multiplicatif. Les données se composent de 96 observations mensuelles, qui ont été obtenues à partir du package standard datasets en langage R. Cette série est présentée ci-dessous dans la figure

**3.1.**

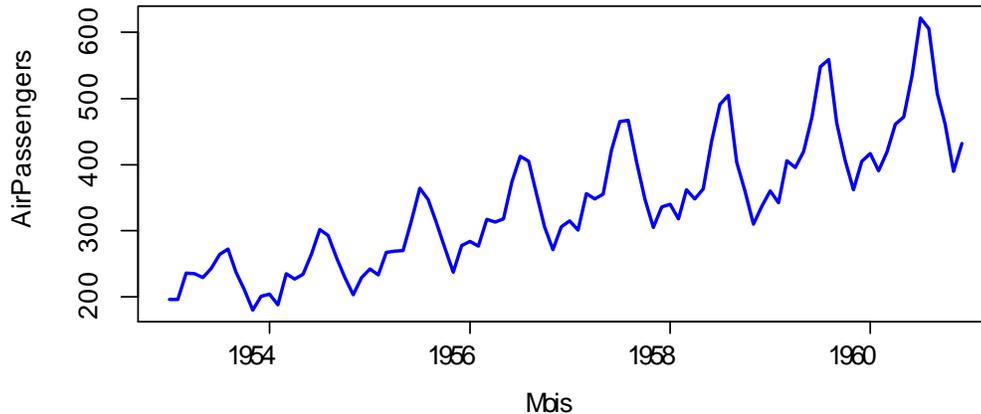


FIG. 3.1 – Nombre de passagers pour les compagnies aériennes internationales (1953-1960) : Série avec tendance et saisonnalité multiplicative.

### 3.1 Lissage exponentiel triple ou (de Holt-Winters)

Nous avons vu dans les méthodes de Holt qu'elles prennent en compte la tendance mais pas la saisonnalité. C'est pourquoi l'étudiant Peter Winters a développé en 1960 le modèle de son professeur en ajoutant une constante gamma, ce qui a conduit à la création d'un modèle à trois paramètres alpha, bêta et gamma connu sous le nom de lissage Holt-Winters à trois paramètres. Le modèle Holt-Winters permet de traiter la saisonnalité et la tendance ensemble, et prend en compte les changements de tendance ou leur absence ou les changements de saisonnalité. La méthode de calcul varie selon que le modèle est additif (saisonnalité stable) ou multiplicatif, c'est-à-dire le cas où la saisonnalité augmente ou diminue avec le temps (saisonnalité instable).

#### 3.1.1 Définition de la méthode

**Définition 3.1.1** *Le "lissage de Holt-Winters" (LHW) est une méthode de prévision pour les séries temporelles contenant des composantes de tendance et de saisonnalité. Cette méthode est une amélioration de la méthode de lissage linéaire*

de Holt qui ne calcule que la tendance. Le LHW met à jour le niveau, la tendance et la saisonnalité à chaque période en utilisant les constantes alpha, bêta et gamma. Cette méthode peut être utilisée pour les séries temporelles avec une saisonnalité additive ou multiplicative. Le LHW décompose la prédiction en composantes de la série temporelles, estime chaque composante séparément puis les combine pour calculer la valeur prévue.

• **La méthode de Holt-Winters avec saisonnalité additive (HWSA)**

Ce modèle représente une extension du modèle linéaire de Holt, où une composante saisonnière est ajoutée aux équations du modèle linéaire de Holt. Ce modèle est utilisé en cas de présence d'un motif saisonnier stable dans les données. Voici son équation :

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{T+h} &= N_T + h * D_T + S_{T+h-p} \quad , \quad \text{Si } 1 \leq h \leq p \\ \widehat{X}_{T+h} &= N_T + h * D_T + S_{T+h-2p} \quad , \quad \text{Si } p \leq h \leq 2p\end{aligned}$$

Où :

$D_T * h$  représente la composante de tendance pour la période  $T$  multipliée par  $h$  périodes à l'avance.

$N_T$  représente la composante de niveau pour la période  $T$ .

$S_{T+h-p}$  représente la composante saisonnière pour la période  $T + h - p$ . Cela signifie que la prédiction pour la période  $T + h$  prend en compte la saisonnalité de la période  $T + h - p$ .

$p$  représente la périodicité de la saisonnalité (par exemple,  $p = 12$  pour des données mensuelles).

### Mise à jour de l'équation

La mise à jour des valeurs des composants de l'équation de prévision se fait à l'aide d'équations de mise à jour spécifiques à chaque composant. Ces équations prennent en compte les valeurs des données réelles et les valeurs des composants des périodes précédentes pour calculer les valeurs des composants actuels. Les équations de mise à jour pour chaque composant sont les suivantes :

$$\text{Équation de Niveau} : N_T = \alpha(X_T - S_{T-p}) + (1 - \alpha)(N_{T-1} + D_{T-1})$$

$$\text{Équation de Tendance} : D_T = \beta(N_T - N_{T-1}) + (1 - \beta)D_{T-1}$$

$$\text{Équations Saisonnière} : S_T = \gamma(X_T - N_T) + (1 - \gamma)S_{T-p}$$

Les constantes de lissage ( $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ ) sont utilisées pour lisser successivement le modèle de niveau, de tendance et saisonnier. Comme nous l'avons vu dans les méthodes de lissage simple et de Holt, les trois constantes sont limitées entre 0 et 1. Les valeurs proches de 1 accélèrent le processus de lissage et donnent plus d'importance aux données récentes, tandis que les valeurs proches de 0 ralentissent le processus de lissage et donnent plus d'importance aux données anciennes.

Il est important de noter que chaque composant des séries temporelles n'a pas besoin d'afficher le même comportement. Par exemple, nous étudions la saisonnalité additive, mais la tendance peut être additive ou multiplicative, ce qui nous donne plusieurs modèles pour l'équation de prévision. Il est important de souligner que dans ce cas, la saisonnalité est additive. Maintenant, je voudrais examiner les taux de prévision avec une tendance multiplicative et une tendance additive

· L'équation de prévision de Holt-Winters avec une tendance additive et une saisonnalité additive (**HWTASA**) :

$$\hat{X}_{T+h} = N_T + h * D_T + S_{T+h-P}$$

· L'équation de prédiction de Holt-Winters avec une tendance multiplicative et une saisonnalité additive (**HWTMSA**) :

$$\widehat{X}_{T+h} = (N_T * (D_T)^h) + S_{T+h-P}$$

• **La méthode de Holt-Winters avec saisonnalité multiplicative (HWSM)**

Cette méthode est une extension du modèle linéaire de Holt pour faire face aux changements de saisonnalité. Elle nous permet de traiter la composante saisonnière instable en calculant la composante saisonnière comme un facteur multiplicatif dans les équations du modèle. Voici l'équation résultante :

$$\widehat{X}_{T+h} = (N_T + h * D_T) * S_{T+h-p} \quad , \quad \text{Si } 1 \leq h \leq p$$

$$\widehat{X}_{T+h} = (N_T + h * D_T) * S_{T+h-2p} \quad , \quad \text{Si } p \leq h \leq 2p$$

**Mise à jour de l'équation**

Nous apporterons une légère modification aux équations de mise à jour que nous avons vues dans la méthode additive, en divisant par la composante saisonnière ou le niveau pour garantir que les changements dans ces composantes n'affectent pas les autres mises à jour. Par exemple, dans l'équation de mise à jour du niveau, nous divisons par la composante saisonnière pour supprimer son effet sur la mise à jour. De même, dans l'équation de mise à jour de la saisonnalité, nous divisons par le niveau pour supprimer son effet sur la mise à jour. Les équations finales sont :

$$\text{Équation de Niveau} : N_T = \alpha(X_T/S_{T-p}) + (1 - \alpha)(N_{T-1} + D_{T-1})$$

$$\text{Équation de Tendence} : D_T = \beta(N_T - N_{T-1}) + (1 - \beta)D_{T-1}$$

$$\text{Équations Saisonnière} : S_T = \gamma(X_T/N_T) + (1 - \gamma)S_{T-p}$$

Il est important de noter que les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont comprises entre 0 et 1.

Nous pouvons déduire l'équation de prévision pour la méthode de Holt-Winters dans le cas de la tendance et de la saisonnalité multiplicatives (**HWTMSM**) comme suit :

$$\hat{X}_{T+h} = N_T * (D_T)^h * S_{T+h-p}$$

### 3.1.2 La méthode amortie de Holt-Winters

L'amortissement est possible avec les méthodes additives et multiplicatives de Holt-Winters. Une méthode qui fournit souvent des prévisions précises et fiables pour les données saisonnières est la méthode Holt-Winters avec une tendance amortie et une saisonnalité multiplicative :

$$\hat{X}_{T+h} = (N_T + (\phi + \phi^2 + \dots + \phi^h)D_T) * S_{T+h-p}$$

$$N_T = \alpha(X_T/S_{T-p}) + (1 - \alpha)(N_{T-1} + \phi D_{T-1})$$

$$D_T = \beta(N_T - N_{T-1}) + (1 - \beta)\phi D_{T-1}$$

$$S_T = \gamma(X_T/N_T) + (1 - \gamma)S_{T-p}$$

### 3.1.3 Prédiction à l'aide de Holt-Winters

Enfin, nous pouvons prévoir une série contenant tous ses composants, y compris la tendance et la saisonnalité. Nous prendrons la série analysée dans le premier chapitre, qui est une série avec une saisonnalité multiple et une tendance croissante, et nous appliquerons le modèle Holt-Winters. Nous utiliserons l'instruction `Holtwinters` dans Logiciel R pour déterminer les meilleures valeurs pour les constantes de lissage. Nous testerons également l'hypothèse de la saisonnalité additive, qui suppose que les variations saisonnières sont relativement constantes, et la saisonnalité multiplicative, qui permet aux variations saisonnières d'augmenter avec le niveau général des données. Nous comparerons la qualité du lissage entre ces deux options et choisirons la meilleure pour prédire le nombre le nombre de passagers internationaux des compagnies aériennes à l'avenir.

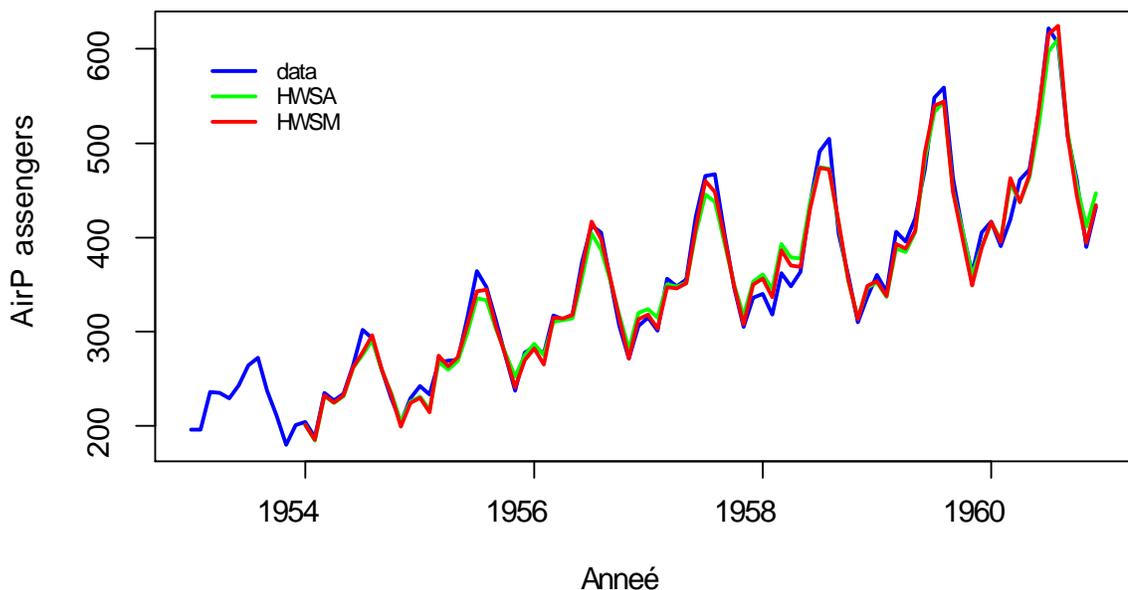


FIG. 3.2 – Lissage des données en utilisant les méthodes HWSA et HWSM.

En regardant les deux graphiques, il est clair que la ligne rouge était plus efficace pour suivre les données, offrant une meilleure correspondance entre les valeurs de lissage en utilisant la méthode de Holt multiplicative et les valeurs réelles. Il était également meilleur pour s'adapter aux changements dans les valeurs des données, tels que les pics et les creux. Cela indique qu'il est un bon choix lors de l'utilisation du modèle de saisonnalité multiplicative.

Pour vérifier si la méthode de Holt-Winters pour la saisonnalité multiplicative est la meilleure pour lisser les données, j'utiliserai les indicateurs d'estimation RMSE et MAE pour la comparer à la méthode de Holt-Winters avec saisonnalité additive.

	<i>MSE</i>	<i>RMSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i>
<i>HWSA</i>	199.33	14.11	10.98	0.03
<i>HWSM</i>	138.29	11.75	8.62	0.02

TAB. 3.1 – Comparaison des performances de lissage des méthodes de HWSA et HWSM en utilisant des indicateurs d'estimation

D'après le tableau, il est clair que les indices d'estimation pour HWSM sont inférieurs à ceux de HWSA. Cela signifie que HWSM a donné un lissage des données réelles plus précis que HWSA.

En regardant les résultats de lissage obtenus, nous pouvons voir les coefficients utilisés pour le lissage ainsi que les valeurs des coefficients pour le niveau ( $N$ ); la tendance ( $D$ ) et la saisonnalité ( $S_1, \dots, S_{12}$ ). Ces valeurs peuvent être utilisées pour comprendre comment fonctionne le modèle et comment les changements dans les données sont déterminés.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$N_{1962}$	$D_{1962}$
<i>HWSA</i>	0.21	0.05	1	480.54	3.27
<i>HWSM</i>	0.29	0.04	0.80	481.84	3.29

TAB. 3.2 – Les constantes utilisées dans le modèle de HWSA et HWSM

On remarque que la valeur de la constante de lissage  $\gamma$  diffère considérablement entre HWSA et HWSM, ce qui indique que le traitement de la saisonnalité diffère dans les deux méthodes. Dans HWSA, on suppose que les variations saisonnières sont relativement constantes dans le temps, tandis que dans HWSM, les variations saisonnières sont autorisées à augmenter avec le niveau général des données. De plus, on remarque que la valeur de la constante de lissage  $\alpha$  diffère légèrement, indiquant que le niveau est mis à jour légèrement différemment entre les méthodes.

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
<i>HWSA</i>	-28.5	-56.5	-23.6	10.4	16.5	73.1
<i>HWSM</i>	0.92	0.86	0.95	1	1.02	1.15
	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$
<i>HWSA</i>	151.3	132.6	31.7	-20	-90.2	-48.5
<i>HWSM</i>	1.33	1.30	1.08	0.96	0.81	0.89

TAB. 3.3 – Composantes saisonnières de l'année 1962. Méthodes HWSA et HWSM

**Conclusion 3.1.1** *Lorsque l'on compare les indicateurs d'estimation, il apparaît que le modèle **HWSM** fournit des estimations plus précises que le modèle **HWSA** pour lisser les données. Par conséquent, l'utilisation du modèle **HWSM** pourrait être un meilleur choix pour nous pour prédire le nombre de passagers internationaux des compagnies aériennes à l'avenir. Nous utiliserons donc, ce modèle **HWSM** avec  $h = 24$  pour prédire le nombre de passagers au cours des deux prochaines années.*

Les résultats sont données dans la figure 3.3 suivante.

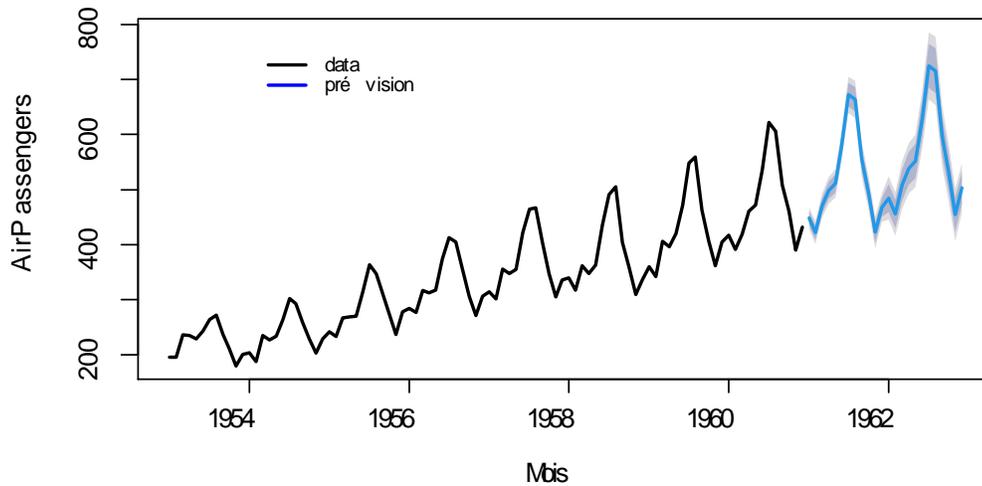


FIG. 3.3 – Prédiction à l'aide de la méthode HWSM

## 3.2 Prédiction à l'aide des modèles ETS

Nous cherchons toujours à améliorer la précision des prévisions. Pour ce faire, nous présenterons une nouvelle fonctionnalité qui nous permet de contrôler les méthodes de Holt et Winters en utilisant la fonction `ets()` disponible dans le logiciel statistique R. Nous pouvons choisir le type d'erreur, la tendance et la saisonnalité pour chaque composant du modèle. Les options disponibles sont :

- **Erreur** : additif "A", multiplicatif "M", inconnu "Z".
- **Tendance** : aucune "N", additive "A", multiplicative "M", inconnue "Z".
- **Saisonnalité** : aucune "N", additive "A", multiplicative "M", inconnue "Z".

Maintenant, faisons des prévisions en utilisant quatre modèles différents :

**Modèle 1** : erreur multiplicative, tendance et saisonnalité additives.

**Modèle 2** : erreur et tendance amortie additives, saisonnalité multiplicative.

**Modèle 3** : erreur, tendance et saisonnalité multiplicatives.

**Modèle 4** : erreur, tendance amortie et saisonnalité multiplicatives

Nous tenons à souligner que nous supprimerons les 24 derniers mois de nos données et les utiliserons comme ensemble de test. Ensuite, nous appliquerons différents modèles de prédiction aux données restantes et comparerons les résultats aux valeurs réelles.

**Remarque 3.2.1** *Nous laisserons les valeurs des constantes de lissage et de la constante d'amortissement au logiciel R pour les déterminer automatiquement et nous donner les valeurs optimales.*

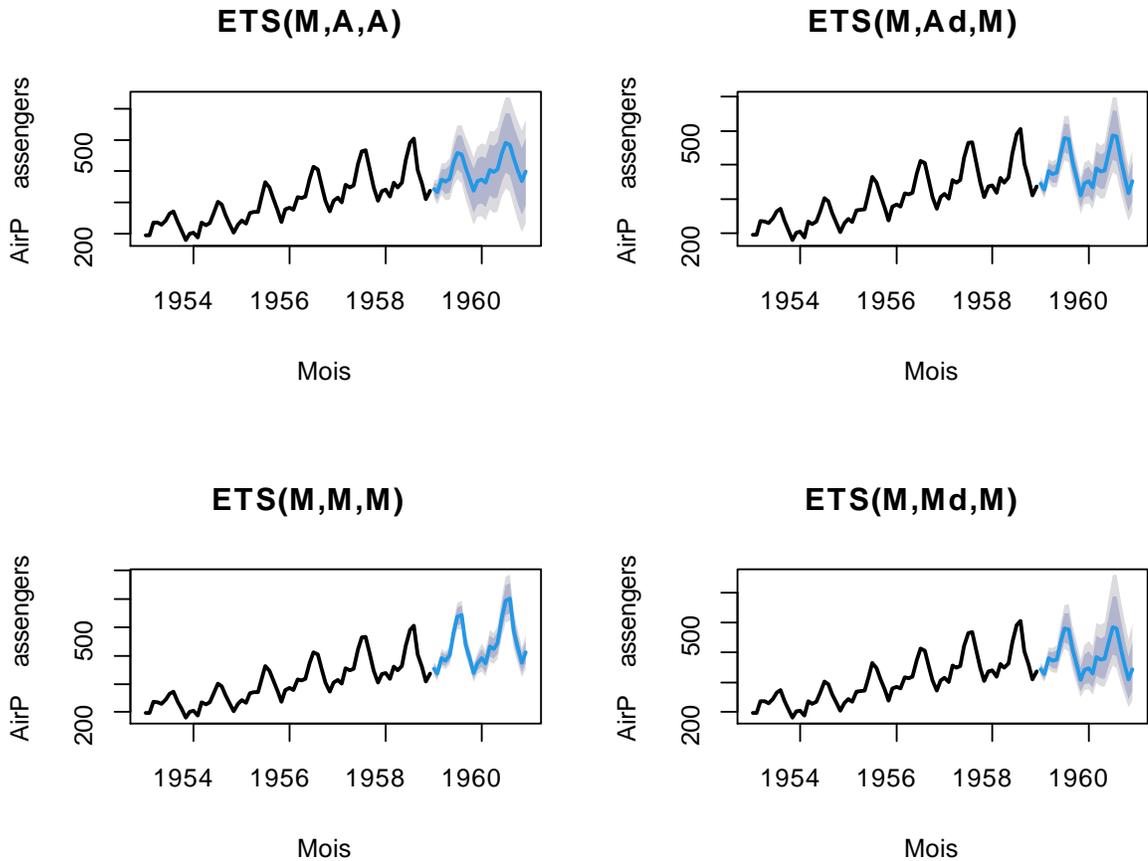


FIG. 3.4 – Prédiction à l'aide des méthodes ETS

### 3.2.1 Évaluation de la précision des modèles de ETS

J'ai supprimé 24 mois de données de passagers réelles et les ai utilisées comme référence pour tester mes prévisions. J'ai ensuite calculé les mesures d'erreur RMSE et MAPE pour comparer les prévisions aux données réelles et savoir à quel point elles sont précises. Je vais comparer les performances des quatre modèles dans la prédiction du nombre de passagers et choisir le meilleur modèle pour cette tâche.

	<i>RMSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i>
Modèle 1 "ETS(M,A,A)"	61.17	52	10.74
Modèle 2 "ETS(M,A <sub>d</sub> ,M)"	71.39	64.17	13.68
Modèle 3 "ETS(M,M,M)"	20.01	17.90	4.04
Modèle 4 "ETS(M,M <sub>d</sub> ,M)"	74.48	66.95	14.31

TAB. 3.4 – Comparaison des performances des méthodes ETS dans la prédiction en utilisant des indicateurs d'estimation

En comparant les indicateurs d'estimation des quatre modèles, nous constatons que le troisième modèle surpasse les autres dans la prédiction du nombre de passagers pour les compagnies aériennes internationales. Il atteint la valeur la plus basse de l'indicateur MAPE, qui est de 4,04%, ce qui signifie qu'il se rapproche davantage des valeurs réelles qui ont été supprimées. Par conséquent, nous choisissons le troisième modèle "ETS(M,M,M)" comme le meilleur modèle pour prédire les données futures.

### 3.2.2 Prédiction à l'aide du modèle ETS (M, M, M)

Après avoir prouvé la capacité du modèle ETS (M, M, M) à prédire avec une grande précision, nous souhaitons maintenant l'utiliser pour prédire le nombre de passagers internationaux des compagnies aériennes pour une période d'une année à venir, soit

$h = 12$  mois. Cela peut être réalisé en appliquant le modèle aux données historiques du nombre de passagers et en l'utilisant pour créer des prévisions pour l'avenir. Ce modèle repose sur l'hypothèse que le niveau, la tendance et la saisonnalité dans la série chronologique sont des composants multiplicatifs et que l'erreur dans les prévisions est également multipliée. Ce modèle est connu sous le nom de **”Multiplicatif,Multiplicatif,Multiplicatif”** et convient aux séries chronologiques qui montrent des tendances non linéaires et des changements périodiques d'amplitude saisonnière. La figure 3.5 suivante présente la série étudiée et les prévisions des 12 mois (en bleu) avec l'intervalle de confiance de la prévision (en gris) à l'aide de la méthode ETS (M, M, M).

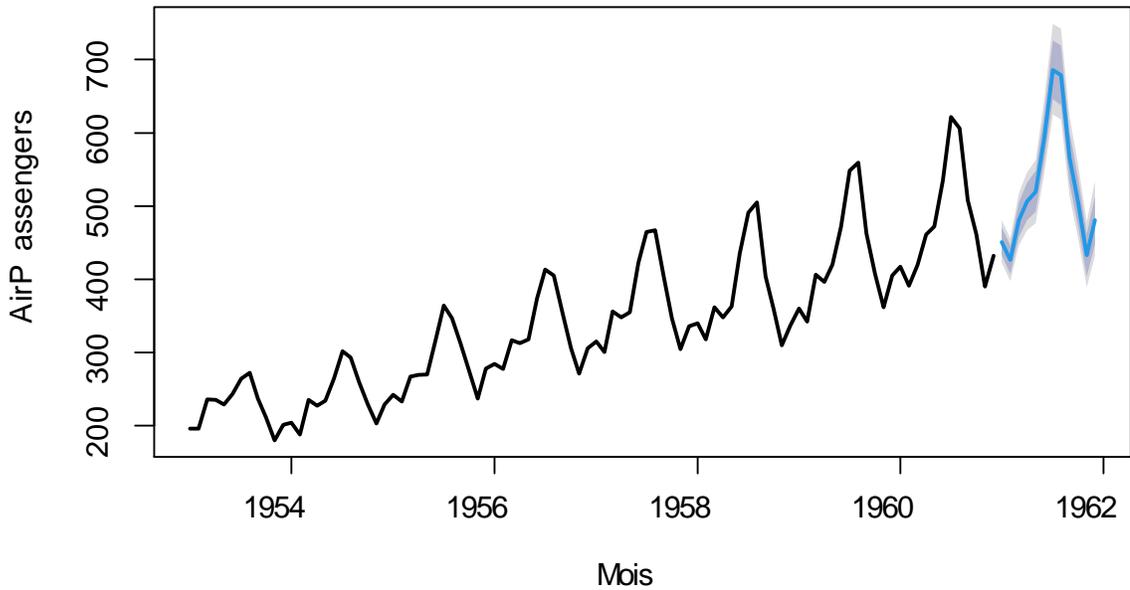


FIG. 3.5 – Prédiction à l'aide de la méthode ETS (M, M, M)

Les valeurs des prévisions des 12 mois et leurs intervalles de confiances sont données dans la table 3.5. Nous constatons que l'intervalle de confiance s'élargit au fur et à mesure que le temps avance, ce qui indique une augmentation de l'incertitude dans les attentes à long terme.

	ETS(M,M,M)	intervalle de confiance à 95%
Jan 1961	451.06	[422.46 , 481.08]
Feb 1961	426.22	[397.19 , 455.87]
Mar 1961	481.02	[446.43 , 517.72]
Apr 1961	505.88	[466.77 , 545.67]
May 1961	519.18	[477.08 , 562.41]
Jun 1961	592.91	[544.08 , 645.31]
Jul 1961	685.40	[625.43 , 748.93]
Aug 1961	678.62	[618.34 , 742.61]
Sep 1961	565.99	[514.41 , 622.45]
Oct 1961	504.55	[456.26 , 555.81]
Nov 1961	432.49	[388.94 , 478.53]
Dec 1961	480.61	[431.53 , 533.87]

TAB. 3.5 – Prévisions des 12 mois et leurs intervalles de confiances à l'aide de la méthode ETS (M, M, M)

# Conclusion

*Dans ce travail, nous avons étudié le sujet des modèles multiplicatifs et la prévision par lissage exponentiel des séries temporelles. Nous avons utilisé des données réelles et nous avons appliqué plusieurs méthodes de lissage exponentiel avec des modèles multiplicatifs. Nous avons évalué la qualité de la prévision en utilisant des critères tels que l'erreur absolue moyenne et l'erreur quadratique moyenne... A travers cette étude, nous sommes arrivés à des résultats importants liés au sujet étudié.*

*Premièrement, il n'existe pas de modèle unique qui puisse traiter toutes les formes de séries temporelles, et donc il faut choisir le modèle approprié en fonction des caractéristiques des données et des objectifs de la prévision. Deuxièmement, la technique de lissage exponentiel est une méthode efficace et flexible pour prévoir les séries temporelles qui contiennent des tendances et des saisonnalités différentes, car elle lisse les données pour montrer ces motifs. Troisièmement, les modèles multiplicatifs améliorent la qualité de la prévision en ajoutant des facteurs supplémentaires qui prennent en compte les changements dans le niveau, la tendance ou les saisons. Quatrièmement, les résultats que nous avons obtenus dans une étude appliquée sur le nombre de passagers sur les compagnies aériennes internationales pour l'année 1953 jusqu'à 1960, ont montré que le modèle multiplicatif  $ETS(M,M,M)$  qui inclut la tendance, la saisonnalité et l'aléatoire de manière multiplicative était plus précis que les autres modèles multiplicatifs.*

*Cependant, ces méthodes font face à certains défis, tels que la détermination des valeurs appropriées des constantes de lissage pour chaque modèle, ainsi qu'il existe une similitude et une différence entre les méthodes utilisées dans le lissage exponentiel et la prévision, ce qui nécessite d'étudier chaque méthode en détail et de comprendre ses avantages et ses inconvénients. De plus, ces méthodes ont une force dans certains cas et une faiblesse dans d'autres, donc elles ne peuvent pas être considérées comme une solution complète à tous les problèmes.*

*Enfin, nous devons noter que les modèles multiplicatifs augmentent la complexité des calculs et nécessitent des données suffisantes pour estimer les paramètres. Ils peuvent également devenir imprécis en cas de changements importants dans le comportement des séries temporelles ou lors de la prévision à long terme.*

*Cette étude offre une nouvelle piste et perspectives de recherche dans le domaine de la prévision des séries temporelles, où il apparaît le besoin d'autres études pour innover de nouvelles méthodes ou développer les méthodes existantes pour augmenter la précision de la prévision. Il y a aussi un besoin de tester ces méthodes sur d'autres données provenant de différents domaines pour déterminer leur applicabilité.*

# Bibliographie

- [1] Bouabdallah, S. (2020). Techniques de prévision. Université Mohamed Bou-diaf, Faculté d'économie, Département des sciences de gestion, M'sila. <https://elearning.univ-msila.dz/moodle/course/view.php?id=693>
- [2] Brockwell, P. J., Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting* (2nd ed.). Springer.
- [3] Cryer, J.D., Chan, K-S. (2008). *Time Series Analysis : With Applications in R* (2nd ed.). New York : Springer Science & Business Media.
- [4] Hyndman, R., Koehler, A., Ord, K., Snyder, R. (2008). *Forecasting with Exponential Smoothing : The State Space Approach*. Springer
- [5] Hyndman, R.J., Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting : Principles and Practice* (2nd ed). May 2023, from <https://otexts.com/fpp2/>.
- [6] Pardoux, C., Goldfarb, B. (2013). *Prévision à court terme : méthodes de lissage exponentiel*. Université Paris-Dauphine.
- [7] Tsay, R.S. (2010). *Analysis of Financial Time Series : Financial Econometrics* (3rd ed.). Hoboken, NJ : John Wiley & Sons.

# Annexe A : Logiciel R

R est un environnement de programmation pour les analyses de données, les graphiques et le machine learning. Il offre la possibilité de prévoir des modèles multiples avec la méthode du lissage exponentiel grâce au package R forecast. Les fonctions `ets`, `holt` et `HoltWinters` sont des exemples de méthodes de lissage exponentiel disponibles dans ces bibliothèques. Elles permettent de prédire des modèles multiples en ajustant les paramètres du modèle pour obtenir les meilleures prévisions possibles. Plus précisément :

- La fonction `ets()` permet de créer un modèle de lissage exponentiel pour une série temporelle, d'estimer ses coefficients et de déterminer le meilleur type de modèle (additif ou multiplicatif) en fonction du critère AIC.
- La fonction `holt()` permet de créer un modèle de Holt pour une série temporelle avec une tendance linéaire (amortie ou non), d'estimer ses coefficients et de déterminer les meilleures valeurs pour les constantes de lissage (alpha et beta).
- La fonction `HoltWinters()` permet de créer un modèle de Holt-Winters pour une série temporelle avec une tendance linéaire et une saisonnalité (additive ou multiplicative), d'estimer ses coefficients et de déterminer les meilleures valeurs pour les constantes de lissage (alpha, beta et gamma).

## **# Installation et chargement du package forecast**

```
install.packages("forecast")
```

```
library(forecast)

# Définition d'une série temporelle
y<- ts(data, frequency = 12) # Série mensuelle

# Création d'un modèle de ETS
model <- ets(y)

# Affichage des coefficients du modèle
summary(model)

# Tracé des données et des prévisions
plot(forecast(model, h = 12)) # Prévion pour 12 mois

# Création d'un modèle de Holt
model2 <- holt(y)

# Affichage des coefficients du modèle
summary(model2)

# Tracé des données et des prévisions
plot(forecast(model2, h = 12))

# Création d'un modèle de Holt-Winters
model3 <- HoltWinters(y)

# Affichage des coefficients du modèle
summary(model3)

# Tracé des données et des prévisions
plot(forecast(model3, h = 12))
```

· La fonction **”accuracy”** mesure la précision des prévisions en comparant les valeurs observées et les valeurs prédites. Elle renvoie plusieurs mesures d'erreur telles que le MAE, le RMSE, le MAPE et le MASE.

· La fonction **"tsCV"** calcule l'erreur de validation croisée pour les séries temporelles. Elle peut être utilisée pour évaluer la précision des prévisions pour différents modèles ou différentes valeurs de paramètres pour un modèle donné.

Voici quelques exemples de codes pour ces fonctions :

**# Calcul des erreurs de prévision avec tsCV**

```
e <- tsCV(y, ets, h = 12) # Erreurs pour un horizon de 12 mois
```

**# Calcul de l'erreur quadratique moyenne (MSE) :**

```
MSE <- mean(e^2, na.rm=TRUE)
```

**# Calcul des mesures d'exactitude avec accuracy :**

```
accuracy(model)
```

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\gamma_x(\mathbf{t}, \mathbf{s})$	une fonction de covariance
$\gamma_x(\mathbf{h})$	une fonction d'autocovariance
$\rho_x(\mathbf{h})$	une fonction d'autocorrélation
<i>MSE</i>	Mean Squared Error
<i>RMSE</i>	Root Mean Squared Error
<i>MAE</i>	Mean Absolute Error
<i>MAPE</i>	Mean Absolute Percentage Error
$\bar{X}$	la moyenne d'un échantillon
$\hat{\gamma}(0)$	la variance d'une variable aléatoire X.
$\hat{\sigma}$	l'écart-type d'une variable aléatoire X.
$\hat{X}_T(h)$	prévision au temps T et l'horizon h
$e_T$	l'erreur de prévision
$\alpha, \beta, et. \gamma$	le constante de lissage
$h$	l'horizon de prévision
$N_T$	le composant de niveau dans les modèles de prévision
$D_T$	le composant de tendance dans les modèles de prévision

$\phi$	le constante de l'amortissement
$LS$	Lissage Exponentiel Simple .
$LD$	Lissage Exponentiel Double
$HTA$	Holt avec Tendance Additive
$ATA_d$	Holt avec Tendance Additive Amortie
$HTM$	Holt avec Tendance Multiplicative
$HTM_d$	Holt avec Tendance Multiplicative Amortie
$HWSA$	Holt-Winters avec Saisonnalité Additive
$HWSM$	Holt-Winters avec Saisonnalité Multiplicative
$HWTASA$	Holt-Winters avec Tendance Additive et Saisonnalité Additive
$HWTMSA$	Holt-Winters avec Tendance Multiplicative et Saisonnalité Additive
$HWTMSM$	Holt-Winters avec Tendance Multiplicative et Saisonnalité Multiplicative
$ETS$	Modèle Erreur, Tendance, Saisonnalité
$ETS(M, A, A)$	Modèle Erreur, Tendance, Saisonnalité avec Erreur Multiplicative, Tendance Additive et Saisonnalité Additive
$ETS(M, A_d, M)$	Modèle Erreur, Tendance, Saisonnalité avec Erreur Multiplicative, Tendance Additive Amortie et Saisonnalité Multiplicative
$ETS(M, M, M)$	Modèle Erreur, Tendance, Saisonnalité avec Erreur Multiplicative, Tendance Multiplicative et Saisonnalité Multiplicative
$ETS(M, M_d, M)$	Modèle Erreur, Tendance, Saisonnalité avec Erreur Multiplicative, endance Multiplicative Amortie et Saisonnalité Multiplicative

## ملخص

تهدف هذه الدراسة إلى استخدام النماذج المضاعفة في التنبؤ بالتغيرات الزمنية وتقييم فعاليتها في التنبؤ. النماذج المضاعفة تعتبر نماذج إحصائية تجريبية تستخدم لوصف الأنماط والاتجاهات والموسمية في البيانات الزمنية. التنعيم الأسّي هو أسلوب يستخدم لتقدير المكونات الأساسية للسلسلة الزمنية مثل المستوى والاتجاه والموسمية. في هذا البحث، تم استخدام منهجية تحليلية وتطبيقية لاستعراض الاساسيات المتعلقة بالنماذج المضاعفة والتنعيم الأسّي، وتم تطبيق هذه النماذج على بيانات حقيقية للتحقق من قدرتها على التنبؤ. أظهرت النتائج أن النماذج المضاعفة تعتبر أدوات قوية ومرنة في التنبؤ، وتتفوق على النماذج الأخرى في بعض الحالات، خاصةً عندما تكون هناك اختلافات كبيرة بين المستويات المختلفة للبيانات، أو عندما تكون هناك اتجاهات أو مواسم غير منتظمة في البيانات.

## Résumé

*Cette étude vise à utiliser des modèles multiplicatifs pour prévoir les variables de séries temporelles et évaluer leur efficacité dans la prévision. Les modèles multiplicatifs sont des modèles statistiques expérimentaux utilisés pour décrire les motifs, les tendances et la saisonnalité dans les données de séries temporelles. Le lissage exponentiel est une méthode utilisée pour estimer les composantes de base de la série temporelle telles que le niveau, la tendance et la saisonnalité. Dans cette recherche, une méthodologie analytique et appliquée a été utilisée pour passer en revue les principes liés aux modèles multiplicatifs et au lissage exponentiel, et ces modèles ont été appliqués à des données réelles pour vérifier leur capacité à prédire. Les résultats ont montré que les modèles multiplicatifs sont des outils puissants et flexibles dans la prévision, et qu'ils surpassent les autres modèles dans certains cas, notamment lorsque les différences entre les différents niveaux de données sont importantes, ou lorsque les données présentent des tendances ou des saisons irrégulières.*

## Abstract

*This study aims to use multiplicative models to forecast time series variables and evaluate their effectiveness in forecasting. Multiplicative models are experimental statistical models used to describe patterns, trends and seasonality in time series data. Exponential smoothing is a method used to estimate the basic components of the time series such as level, trend, and seasonality. In this research, an analytical and applied methodology was used to review the principles related to multiplicative models and exponential smoothing, and these models were applied to real data to verify their ability to predict. The results showed that multiplicative models are powerful and flexible tools in forecasting, and that they outperform other models in some cases, especially when the differences between different levels of data are significant or when the data shows irregular trends or seasons.*