

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Mathématiques Appliquées**”

Option : **Probabilité**

Par **DAKHIA Zoubida**

Titre :

Sur les méthodes numériques de résolution des EDS

Devant le Jury :

Mr.	LABED Boubakeur	Pr	U. Biskra	Président
Mme.	LABED Saloua	Dr	U. Biskra	Rapporteur
Mme.	BOUGHERARA Saliha	Dr	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 18/06/2023

Dédicace



♣ Je dédie ce travail à ♣



♣Ma mère et mon père♣



♣Ma sœur et mes frères♣



♣Mes amis ♣

Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu, le Tout-Puissant, de m'avoir donné la force, de suivre, ainsi que l'audace de sur monter toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer ma gratitude au directrice de recherche

f Dr. Labed Saloua *f*

Pour sa supervision de ce travail,

et je le remercie pour sa présence et ces précieux conseils

Mes remerciements vont également aux membres du jury :

f Pr. LABED Boubakeur & D.r BOUGHERARA Saliha *f*

pour leur acceptation d'évaluer et de juger ce travail.

Je remercie profondément :

f Ma famille *f*

f Mes amis *f*

ainsi que les personnes qui m'ont soutenu

de près ou de loin

lors de la réalisation de ce mémoire.

Merci.

Notations et symboles

v.a	Variable aléatoire.
MB	Mouvement brownien.
$\mathbb{P} - ps$	Prèsque sûrement pour la mesure de probabilité \mathbb{P} .
EDS	Equation différentielle stochastique.
\mathbb{L}^2	Espace des processus de carré intégrables.
Ω	Un ensemble fondamentale non vide.
$dt \otimes d\mathbb{P}$	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ avec la mesure de $d\mathbb{P}$.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Notations et symbols	ii
Table des matières	iv
Table des figures	vi
Introduction	1
1 Rappel et compléments de probabilités	3
1.1 Processus stochastique	3
1.1.1 Martingale	6
1.1.2 Mouvement brownien	6
1.2 Intégrale stochastique	7
1.2.1 Cas des processus étagé	8
1.2.2 Cas général	8
1.2.3 Propriétés de l'intégrale stochastique	9

TABLE DES MATIÈRES

1.2.4	Intégrale par rapport a un processus d'Itô	10
1.2.5	Formule d'Itô	12
2	Équations différentielles stochastiques	15
2.1	Exemples des EDS	16
2.2	Inégalités utiles	17
2.3	Existence et unicité de solution des EDS	19
2.3.1	Notations	19
2.3.2	Théorème d'existence et d'unicité	20
3	Méthodes numériques de résolution des EDS	27
3.1	Simulation d'un mouvement brownien	27
3.1.1	Discrétisation du temps	29
3.1.2	Simulation de la trajectoire	29
3.2	Développement stochastique de Taylor	33
3.2.1	Formule stochastique d'Itô Taylor	33
3.2.2	Méthodes explicites de Taylor au sens de la convergence forte	36
3.3	Simulation des équations différentielles stochastiques	38
3.3.1	Schéma d'Euler -Maruyama	38
3.3.2	Schéma de Milstein	42
	Conclusion	44
	Bibliographie	45

Table des figures

Fig 3.1 :Trajectoire de mouvement brownien.....	31
Fig 3.2 :Simulation de 10000 trajectoires du mouvement brownien.....	32
Fig 3.3 : Comparaison d'Euler-Maruyama et d'unetrajectoire de l'EDS...	41
Fig 3.4 : Comparaison de l'approximation de Milstien et d'une trajectoire de l'EDS	43

Introduction

Les équations différentielles stochastiques sont une extension des équations différentielles ordinaires dans lesquelles des termes aléatoires sont inclus. Elles sont utilisées pour modéliser des systèmes dont le comportement est influencé par des facteurs aléatoires ou incertains.

La résolution des EDS peut être appliquée à divers domaines, tels que la finance mathématique, la modélisation des écosystèmes, la biologie, la physique, la chimie, l'économie, etc., où des processus stochastiques sont impliqués et où il est important de prendre en compte l'incertitude et le bruit.

Dans ce travail, on s'intéresse par des méthodes numériques de résolution des EDS qui sont des techniques utilisées pour approximer les solutions d'équations différentielles, généralement à l'aide d'ordinateurs. Ces méthodes sont essentielles dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie pour résoudre des problèmes complexes qui ne peuvent pas être résolus analytiquement et pose des défis supplémentaires par rapport aux EDO ordinaires, en raison de la présence de termes stochastiques.

La première méthode numérique fut introduite en 1768 par Leonhard Euler. Depuis un grand nombre de techniques ont été développées : elles se basent sur la discrétisation de l'intervalle d'étude en un certain nombre de pas.

Les méthodes numériques couramment utilisées pour résoudre les EDS comprennent les méthodes de discrétisation temporelle telles que la méthode d'Euler-Maruyama, la méthode de Milstein et les méthodes de Runge-Kutta stochastiques...etc. Ces méthodes approximent la solution stochastique en utilisant des itérations discrètes dans le temps et des échantillons aléatoires.

Ce travail est organisé de la manière suivante :

1. Le premier chapitre est de nature introductif et permet d'introduire les concepts et résultats d'analyse stochastique outils essentiels pour les autres chapitres telles que, mouvement brownien, l'intégrale stochastique et les trois formules d'Itô.
2. Dans le deuxième chapitre, nous commençons par présenter des exemples d'EDS et des inégalités utiles et essentiellement on s'intéresse au problème d'existence et d'unicité de solution d'EDS.
3. Le troisième chapitre est consacré à l'étude des méthodes numériques de résolution des EDS et de calculer des approximations numériques des solutions de ces équations, nous commençons par présenter des simulations d'un mouvement brownien et comme les EDS contiennent des termes aléatoires, il n'est généralement pas possible de trouver une solution analytique exacte. Par conséquent, les méthodes numériques fournissent des estimations numériques des trajectoires du processus stochastique associé à l'EDS et on a choisi deux méthodes : la méthode d'Euler-Maruyama et la méthode de Milstein.

Chapitre 1

Rappel et compléments de probabilités

Dans ce chapitre, nous allons étudier les principales notions de calcul stochastique qui est une extension du calcul différentielle et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continu remplacent les fonctions, les martingales et le mouvement brownien qui nous seront utiles tout au long de ce travail.

1.1 Processus stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition 1.1.1 (*Processus stochastique*) Soit $T \subseteq \mathbb{R}_+$. Toute famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d est appelée processus stochastique.

1. Si T est un ensemble fini, le processus X_t est un vecteur aléatoire.
2. Si $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{Q}^+$, X_t est un processus à temps discret (suite de variables aléatoires).

3. Si $T = \bar{\mathbb{R}}_+$ ou $T = [0, a]$, $a \in \mathbb{R}^+$, X_t est un processus à temps continue.

Remarque 1.1.1 Soit l'application :

$$\begin{aligned}\Omega \times T &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (w, t) &\rightarrow X_t(w).\end{aligned}$$

* Si $t \in T$ fixé, l'application : $w \in \Omega \rightarrow X_t(w)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

* Si $w \in \Omega$ fixé, l'application : $t \in T \rightarrow X_t(w)$ est appelé trajectoire du processus.

Définition 1.1.2 (Processus mesurable) Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit mesurable si l'application $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est mesurable, c'est-à-dire :

$$\{(t, w) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega / X_t^1(w) \leq x_1, \dots, X_t^d(w) \leq x_d\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Définition 1.1.3 (Modification) On dit que un processus X est une modification d'un processus Y si $\forall t \in T$ on a $P(X_t = Y_t) = 1$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in T, \quad X_t(w) = Y_t(w) \quad \mathbb{P} - ps.$$

On dit aussi que X et Y sont stochastiquement équivalente.

Définition 1.1.4 (Indistinguishable) Deux processus X et Y sont dit indistinguishable si $\mathbb{P} - ps$ les trajectoires de X et de Y sont les mêmes, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \quad \forall t \in T) = 1.$$

Définition 1.1.5 (Filtration) Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus stochastique à temps continu. Une filtration est une famille croissante $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de sous tribus de \mathcal{F} , c'est-à-dire : $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall 0 \leq s \leq t < +\infty$.

Remarque 1.1.2 Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.6 (Filtration naturelle) La filtration naturelle d'une processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est définie par : $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$.

\mathcal{F}_t^X est la classe des évènements que l'on peut identifier au temps t .

Remarque 1.1.3 1. Une filtration $\{\mathcal{G}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ est dite plus grosse que la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

2. Une filtration est continue à droit si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$

3. Une filtration est continue à gauche si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-} = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s)$.

4. On dit que les condition usuelle (ou habituelles) sont satisfaites si l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complet et que la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est complet et continue à droit.

Définition 1.1.7 (Processus continue) Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique, on dit continue si tout leurs trajectoires sont continue.

Définition 1.1.8 1. (**Processus cadlåg**) Le processus $(X_t)_t$ est dit cadlåg si les trajectoires sont continue à droit et a des limite à gauche $\forall w \in \Omega$.

2. (**Processus caglåd**) Le processus $(X_t)_t$ est dit caglåd si les trajectoires sont continue à gauche et a des limite à droit $\forall w \in \Omega$.

Définition 1.1.9 (Processus adapté) Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ si (X_t) est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \in T$.

Remarque 1.1.4 Tout processus est adapté à sa filtration naturelle.

Définition 1.1.10 (Processus progressivement mesurable) On dit qu'un processus $(X_t)_t$ est progressivement mesurable si pour tout $t \in T$, l'application $(w, s) \rightarrow X(s, w)$ définie sur $\Omega \times [0, t]$ dans \mathbb{R}^d est mesurable par rapport à $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, t])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.1.1 Martingale

Définition 1.1.11 Soit $(X_t)_t$ un processus stochastique $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté et intégrable $(\mathbb{E} |X_t| < \infty)$. On dit que X est une martingale par rapport à \mathcal{F}_t (\mathcal{F}_t -martingale), si

$$\forall s \leq t, \quad \mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s) \quad \mathbb{P} - ps.$$

1.1.2 Mouvement brownien

Définition 1.1.12 On appelle mouvement brownien tout processus stochastique W_t à valeurs réelles tel que :

1. $W_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s., $W(t)$ est $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté à trajectoire continue.
2. $\forall s \leq t$, $W_t - W_s$ est une variable aléatoire gaussien, centré de variance $(t - s)$.
3. $\forall n \geq 1, \forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \dots \leq t_n$, les variables $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0})$ sont indépendantes.
4. Pour tout (t, s) , $W_{t+s} - W_t$ est indépendante de la tribu du passé avant t .

Remarque 1.1.5 1. Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi gaussienne centré de variance t donc de densité

$$(2\pi t)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{-x^2}{2t} \right\}.$$

2. On dit qu'un mouvement brownien part d'un point x si $W_0 = x$.

Propriétés :

Soit W_t un mouvement brownien et pour tout $t \in [0, T]$, \mathcal{F}_t est la filtration naturelle alors :

- a. $-W_t$ est aussi un mouvement brownien.
- b. $Cov(W_s, W_t) = \min(s, t) = s \wedge t$.
- c. W_t est une \mathcal{F}_t -martingale.
- d. $(W_t^2 - t)_{t \in [0, T]}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.
- e. Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, $\left(\exp \left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right) \right)_{t \in [0, T]}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.

1.2 Intégrale stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré où $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration de \mathcal{F} satisfait les conditions habituelles et $W_t = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien

défini dans un espace de probabilité. L'objectif dans ce paragraphe est de définir

$$\int_0^t \theta(s) dW_s, \text{ avec } (\theta(s))_s \text{ un processus donné.}$$

1.2.1 Cas des processus étagé

Définition 1.2.1 Un processus $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ est dit élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ et un processus discret $(\alpha(i))_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$

telque $\alpha(i)$ est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable et que $\theta_t = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(i) 1_{]t_i, t_{i+1}[}(t)$. L'intégrale $\pi = \int_0^t \theta(s) dW(s)$ d'un processus élémentaire $\alpha(i)$ est une variable aléatoire tel que :

$$\pi_t = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(i) (W(\min(t, t_{i+1})) - W(\min(t_i, t))).$$

Maintenant nous associons à un processus θ élémentaire le processus

$$\pi_t = \left(\int_0^t \theta(s) dW(s) \right)_{0 \leq t \leq T}.$$

Proposition 1.2.1 Si $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus élémentaire, alors $\mathbb{E}(\pi_t) = 0$ et $Var(\pi_t) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \theta^2(s) ds \right) = \|\theta\|_{\mathbb{L}^2([0, T])}^2$.

1.2.2 Cas général

Soit Γ l'espace des processus θ_t càglàd tel que $\mathbb{E}(\int_0^t \theta_s^2 ds) < +\infty$.

Le processus étagé appartient à Γ , on dit que $\theta^n \rightarrow \theta$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T])$ si $\mathbb{E} \int_0^t |\theta_s^n - \theta_s|^2 ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On sait que $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T], \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert, donc on peut définir pour tout $\theta \in \Gamma$, $\int_0^t \theta(s) dW(s)$. Si $\theta \in \Gamma$, il existe un processus étagés θ^n : telle que :

$$\theta^n(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\theta}_j^n 1_{]t_j, t_{j+1}[}(s);$$

$\theta_j^{\sim n}$ mesurable par rapport à \mathcal{F}_{t_j} , tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^n(s) = \theta(s)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T])$.

On sait que $\int_0^t \theta^n(s) dW(s)$ existe est égale à $\sum_{j=0}^{n-1} \theta_j^{\sim n} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$. On définit

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \theta_s^n dW_s = \int_0^t \theta_s dW_s$ dans l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Alors :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \theta_s dW_s \right) = 0, \text{Var} \left(\int_0^t \theta_s dW_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \theta_s^2 ds \right),$$

puisque

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \theta^n(s) dW(s) \right) = 0, \text{VAR} \left(\int_0^t \theta^n(s) dW(s) \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t (\theta^n(s))^2 ds \right).$$

On note Λ l'ensemble $\mathbb{L}_{loc}^2(\Omega \times [0, T]) = \left\{ \theta \text{ adapté càglàd, } \forall t > 0, \mathbb{E} \left(\int_0^t \theta^2(s) ds \right) < \infty \right\}$.

Proposition 1.2.2 Soient $\theta \in \Lambda$ et $\beta \in \Lambda$ deux processus, a et b deux constantes, alors :

$$\int_0^t (a\theta(s) + b\beta(s)) dW(s) = a \int_0^t \theta(s) dW(s) + b \int_0^t \beta(s) dW(s).$$

1.2.3 Propriétés de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1. Mesurabilité, $\forall t \geq 0$ $\mathbf{I}(X)_t$ est \mathcal{F}_t -mesurable.
2. Martingale, pour $s \geq k$

$$E[\mathbf{I}(X) | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s dW_s | \mathcal{F}_k \right] = \int_0^k X_s dW_s.$$

3. Linéarité

$$\int_0^t X_s dW_s + \int_0^t Y_s dW_s = \int_0^t (X_s + Y_s) dW_s \quad \text{et} \quad \alpha \int_0^t X_s dW_s = \int_0^t \alpha X_s dW_s.$$

4. Additivité, pour $0 \leq s \leq k \leq t \leq T$:

$$\int_0^t X_s dW_s = \int_0^k X_s dW_s + \int_k^t X_s dW_s.$$

5. Isométrie d'Itô

$$E[\mathbf{I}^2(X)_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right].$$

1.2.4 Intégrale par rapport a un processus d'Itô

Définition 1.2.2 (Processus d'Itô) On dit qu'un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeur réelle est un processus d'Itô si :

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad X(t) = x + \int_0^t b(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW(s), \quad \mathbb{P} - p.s, \quad (1.1)$$

avec x est \mathcal{F}_0 -mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable vérifiant :

$$\int_0^T |b(s)| ds < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \|\sigma(s)\|^2 ds < +\infty, \quad \text{avec} \quad \|\sigma\| = \text{trace}(\sigma\sigma^*),$$

le coefficient b s'appelle le drift, σ est le coefficient de diffusion.

Remarque 1.2.1 En peut écrire l'équation (1.1) d'une manière différentielle comme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t)dt + \sigma(t)dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Définition 1.2.3 Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô définie par :

$$\begin{cases} dX_t = b(t)dt + \sigma(t)dW_t, \\ \text{et} \\ dY_t = b'(t)dt + \sigma'(t)dW_t. \end{cases}$$

Alors, les variations quadratiques sont donnée par :

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t (\sigma(s))^2 ds, \quad \langle Y, Y \rangle_t = \int_0^t (\sigma'(s))^2 ds,$$

et la covariation quadratique entre X_t et Y_t est donnée par :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma(s)\sigma'(s)ds.$$

Définition 1.2.4 Soit $\theta \in \Lambda$ et X_t un processus d'Itô (1.1), alors :

$$\int_0^t \theta(s)dX(s) = \int_0^t \theta(s)b(s)ds + \int_0^t \theta(s)\sigma(s)dW(s).$$

1.2.5 Formule d'Itô

Première formule d'Itô

Théorème 1.2.1 Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô, tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s,$$

pour toute fonction deux fois continûment différentiable, (ie $f \in \mathbb{C}^2$) alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s,$$

ou, par définition :

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) b(s) ds + \int_0^t f''(X_s) \sigma(s) dW_s,$$

et la variation quadratique

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t (\sigma(s))^2 ds.$$

Deuxième formule d'Itô

Théorème 1.2.2 Si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction deux fois continûment différentiable en x et une fois continûment différentiable en (t, x) , ($f \in C^{1,2}$) alors :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s, \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s. \end{aligned}$$

Troisième formule d'Itô

Théorème 1.2.3 Soient X_t^1 et X_t^2 deux processus d'Itô issus de x^1 (resp de x^2) de coefficient de dérive b^1 (resp b^2), de diffusion σ^1 (resp σ^2) et portées respectivement par deux browniens W_t^1 et W_t^2 corrélés avec coefficient ρ .

On suppose que b^i, σ^i sont $(\mathcal{F}_t^{W^i})$ -adaptés. Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de classe \mathbb{C}^2 à dérivées bornées, alors :

$$\begin{aligned} f(X_t^1, X_t^2) &= f(x^1, x^2) + \int_0^t f'_1(X_s^1, X_s^2) dX_s^1 + \int_0^t f'_2(X_s^1, X_s^2) dX_s^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{11}(X_s^1, X_s^2) (\sigma^1(s))^2 + 2\rho f''_{12}(X_s^1, X_s^2) \sigma^1(s) \sigma^2(s) \\ &\quad + f''_{22}(X_s^1, X_s^2) (\sigma^2(s))^2 ds, \end{aligned}$$

où f'_i désigne la dérivée par rapport à x_i et f''_{ij} la dérivée seconde par rapport à x_j puis x_i ; $i, j = 1, 2$.

Proposition 1.2.3 (*Formule d'intégration par partie*) : Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô, on a :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t b(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s, \\ Y_t = Y_0 + \int_0^t b'(s) ds + \int_0^t \sigma'(s) dW_s, \end{cases}$$

alors d'après la troisième formule d'Itô, on a :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s,$$

tel que : $\langle X, Y \rangle$ s'appelle le crochet de X et Y .

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques

Pour modéliser un phénomène mathématique qui exprime une équation différentielle perturbée par le bruit aléatoire, nous allons définir un nouveau type d'équation différentielle appelée équations différentielles stochastiques. Nous allons maintenant présenter une équation différentielle ordinaire qui a la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt,$$

cette type d'équation est utilisée pour exprimer l'évolution de certains systèmes. Si nous ajoutons le terme aléatoire représenté par σdW_t , où W_t désigne un mouvement brownien et σ est une constante, on trouve une équation différentielle perturbée par le bruit aléatoire de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dW_t.$$

Par le même principe, on peut généraliser l'équation précédente en faisant des facteurs b et σ liés au temps t et aussi prend σ à dépendre de l'état à l'instant t , on obtient :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

le coefficient b s'appelle le drift et σ s'appelle la diffusion.

2.1 Exemples des EDS

La plupart des modèles d'actifs financiers reposent sur des EDS.

Exemple 2.1.1 – Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck : pour $n = d = 1$ et $c \in \mathbb{R}$ l'unique solution de

$$dX_t = dW_t + cX_t dt, \quad X_0 = x$$

est $X_t = xe^{ct} + \int_0^t e^{c(t-s)} dW_s$.

– **Le modèle de Black-Scholes :** pour $n = d = 1$ et $\sigma, r \in \mathbb{R}$ l'unique solution de :

$$dX_t = \sigma X_t dW_t + rX_t dt, \quad X_0 = x$$

est $X_t = x \exp\left(\sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$.

– **Le modèle à volatilité locale (ou modèle de Dupire) :** pour $n = d = 1, r \in \mathbb{R}$, et $\eta : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\exists K > 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, |\eta(t, x)| + |x| |\partial_x \eta(t, x)| \leq K,$$

l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \eta(t, X_t) X_t dW_t + rX_t dt, \quad X_0 = x$$

admet une unique solution

$$X_t = x \exp \left(\int_0^t \eta(s, X_s) dW_s + \left(r - \frac{1}{2} \int_0^t \eta^2(s, X_s) ds \right) \right).$$

2.2 Inégalités utiles

On va citer quelques inégalités qui seront utilisés dans la suite.

Lemme de Gronwall

Lemme 2.2.1 *Soit $T > 0$ et ϕ une fonction positive bornée sur $[0, T]$, on suppose qu'il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$, telles que pour tout $t \in [0, T]$ si :*

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(s) ds,$$

alors

$$\forall t \in [0, T], \quad \phi(t) \leq \alpha \int_0^t \exp(\beta s) ds.$$

Inégalité de Young

On dit que deux nombres $p, q > 1$ sont conjugués au sens de Young, si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

L'inégalité de Young dit que si p et q sont conjugués et si $a, b \geq 0$, alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

avec égalité si et seulement si $ap = bq$. Si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$.

Inégalité de Hölder

L'inégalité de Hölder dit que si $p, q > 1$ sont conjugués au sens de Young, alors :

$$\int_D (f(x)g(x)) d\mu(x) \leq \left(\int_D |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \cdot \left(\int_D |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{1/q}.$$

Si $p = q = 2$, devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité Burthoder-devis-Gundy

Théorème 2.2.1 ("BDG") *Soit $p > 0$ un réel, il existe deux constante C_p et c_p telle que pour toute martingale continue X nulle en zéro on a :*

$$c_p E \left[\langle X, X \rangle_T^{\frac{p}{2}} \right] \leq E \left[\sup_{t \geq 0} |X_t|^p \right] \leq C_p E \left[\langle X, X \rangle_T^{p/2} \right].$$

2.3 Existence et unicité de solution des EDS

Comme on vu dans la section 2.1, que les EDS ont des solutions exactes et ça n'est pas toujours, donc pour le cas général on prouve un théorème d'existence et unicité.

2.3.1 Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t), \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, soient n et m des entiers positifs $(W_t)_{t \geq 0}$ désigne un mouvement brownien à valeur dans \mathbb{R}^d et x une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n et soit aussi b et σ deux fonctions tel que :

$$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m},$$

où $\mathbb{M}^{n \times m}$ désigne l'ensemble des matrices $n \times m$.

Notre objective est de résoudre l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (2.1)$$

La solution de l'équation (2.1) est un processus X_t continue \mathcal{F}_t -adapté telle que les deux intégrales : $\int_0^t b(s, X_s) ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ ont une sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

est satisfaite $\forall t \in [0, T]$ $\mathbb{P}.p.s.$

Maintenant on donne le théorème qui permet d'avoir l'existence et unicité d'une solution avec la preuve.

2.3.2 Théorème d'existence et d'unicité

Quelles sont les conditions sur le drift b et la diffusion σ pour qu'il y ait une solution à l'équation (2.1) et de plus cette solution est elle unique ?

Conditions : On suppose que :

(H_1) Les deux fonctions b et σ sont continues.

(H_2) Il existe une constante strictement positive C^2 telle que $\forall t \in [0, T]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C^2 |x - y|, \\ (ii) \quad |b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq C^2 (1 + |x|^2). \end{array} \right.$$

(H_3) La condition initiale $X_0 = x$ est indépendante de $(W_t)_{t \geq 0}$ et de carré intégrable i.e : $\mathbb{E}[X^2(0)] < +\infty$.

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), l'équation (2.1) possède une solution unique à trajectoire continue pour tout $t \leq T$. De plus cette solution vérifie $\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right) < +\infty$.*

Preuve. l'existence : Pour obtenir l'existence de solution on va utiliser la méthode d'approximation de Picard.

En définissant la suite $(X^n)_{n \geq 0}$ telle que $X^0 = x$ et $(X^{n+1})_{n \geq 0}$ est la solution du système de l'EDS suivantes :

$$X_t^{n+1} = x + \int_0^t b(s, X_s^n) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dW_s. \quad (2.2)$$

Vérifiant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E} |X^n(t)|^2 \leq C_n,$$

pour cela, supposons que $\mathbf{E} [|X^n(t)|^2] \leq C_n$ et nous montrons que $\mathbf{E} |X^{n+1}(t)|^2 \leq C_{n+1}$.

On a

$$|X^{n+1}(t)|^2 = \left| x + \int_0^t b(s, X^n(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X^n(s)) dW(s) \right|^2.$$

Par l'inégalité $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, on trouve l'estimation suivante :

$$|X^{n+1}|^2 \leq 3 \left(|x|^2 + \left| \int_0^t b(s, X^n(s)) ds \right|^2 + \left| \int_0^t \sigma(s, X^n(s)) dW(s) \right|^2 \right),$$

par passage à l'espérance mathématique, on obtient :

$$\mathbb{E} |X^{n+1}(t)|^2 \leq 3 \left(\mathbb{E} |x|^2 + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t |b(s, X^n(s))| ds \right)^2 \right] \right) + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X^n(s)) dW(s) \right)^2 \right]. \quad (2.3)$$

Par l'isométrie d'Itô et l'hypothèse (H_2) (ii), le troisième terme à droite devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(s, X^n(s)) dW(s) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t |\sigma(s, X^n(s))|^2 ds \right] \quad (2.4) \\ &\leq C^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t (1 + X^n(s)) ds \right] \\ &\leq C^2 \int_0^t (1 + \mathbb{E} [|X^n(s)|^2]) ds. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** et (H_2) (ii), le deuxième terme à droite

devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t b(s, X^n(s)) ds \right)^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t ds \right) \left(\int_0^t |b(s, X^n(s))|^2 ds \right) \right] \quad (2.5) \\ &\leq T \mathbb{E} \left[\int_0^t |b(s, X^n(s))|^2 ds \right] \\ &\leq TC^2 \left[\int_0^t (1 + \mathbb{E} |X^n(s)|^2) ds \right]. \end{aligned}$$

Retour à l'équation (2.3) et en substituant les deux estimations (2.4) et (2.5) comme x est une variable aléatoire de carré intégrable, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|X^{n+1}(t)|^2 \right] &\leq 3 \left(\mathbb{E} |x|^2 + TC^2 \left[\int_0^t (1 + \mathbb{E} |X^n(s)|^2) ds \right] + C^2 \int_0^t (1 + \mathbb{E} |X^n(s)|^2) ds \right) \\ &\leq 3 \left(\mathbb{E} |x|^2 + C^2(T+1) \int_0^t (1 + \mathbb{E} |X^n(s)|^2) ds \right) \\ &\leq 3 \left(\mathbb{E} |x|^2 + C^2(T+1)T(1+C_n) \right) = C_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\mathbb{E} |X_t^{n+1}|^2 < +\infty$.

Maintenant on va majorer par récurrence la quantité : $\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, t]} |X^{n+1}(t) - X^n(t)|^2 \right]$, alors :

$$\begin{aligned} X^{n+1}(t) - X^n(t) &= \int_0^t (b(s, X^n(s)) - b(s, X^{n-1}(s))) ds \\ &\quad + \int_0^t (\sigma(s, X^n(s)) - \sigma(s, X^{n-1}(s))) dW(s), \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Doob, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 \right] &\leq 2\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t |b(x, X^n(s)) - b(s, X^{n-1}(s))| ds \right)^2 \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma^2(s, X^n(s)) - \sigma^2(s, X^{n-1}(s)) ds \right], \end{aligned}$$

par l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** et l'isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 \right] \leq 2T \mathbb{E} \left[\int_0^t |b(s, X^n(s)) - b(s, X^{n-1}(s))|^2 ds \right] \\ + 2 \mathbb{E} \left[\int_0^t |\sigma(s, X^n(s)) - \sigma(s, X^{n-1}(s))|^2 ds \right],$$

d'après l'hypothèse (H_2) (i), on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 \right] \leq 2(T+1)C^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t |X^n(s) - X^{n-1}(s)|^2 ds \right],$$

par conséquence :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 \right] \leq \underbrace{2(T+1)C^2}_{=C} \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} |X^n(u) - X^{n-1}(u)|^2 \right] du, \quad (2.6)$$

nous réappliquons la même technique une autre fois, en obtenaient :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} |X^n(u) - X^{n-1}(u)|^2 \right] \leq C \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq u} |X^{n-1}(r) - X^{n-2}(r)|^2 \right] dr \quad (2.7)$$

en substituant l'estimation (2.6) à l'inégalité (2.7), on trouve :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 \right] \leq C \int_0^t \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq u \leq s} |X^n(u) - X^{n-1}(u)|^2 \right) ds, \\ \leq C \int_0^t \left(C \int_0^s \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq u} |X^{n-1}(r) - X^{n-2}(r)|^2 \right] dr \right) ds, \\ \leq C^2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq u} |X^{n-1}(r) - X^{n-2}(r)|^2 \right] \int_0^t \left(\int_0^s dr \right) ds, \\ \leq \frac{C^2 T^2}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq u} |X^{n-1}(r) - X^{n-2}(r)|^2 \right],$$

nous appliquons la même technique plusieurs fois, en obtiennent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 \right] &\leq \frac{C^n T^n}{n!} \sup_{0 \leq s \leq T} \left[|X^1(s) - X^0(s)|^2 \right], \\ &\leq A \times \frac{C^n T^n}{n!}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**, on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 > \frac{1}{2^{n+1}} \right] \leq \frac{A \times \frac{(CT)^n}{n!}}{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} = 4A \times \frac{(4CT)^n}{n!}.$$

Il vient donc que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 > \frac{1}{2^{n+1}} \right] \leq 4A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4CT)^n}{n!} = 4A \cdot \exp(4CT) < \infty.$$

Donc par le lemme de **Borel-Cantelli**, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 > \frac{1}{2^{n+1}} \right] = 0,$$

utilisant l'égalité $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ on obtient l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 \leq \frac{1}{2^{n+1}} \right] = 1.$$

Donc :

$$\sup_{0 \leq s \leq T} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|^2 \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \text{et } n_0 \in \mathbb{N}.$$

En remarquant que la suite $(X^n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans un espace de Banach, donc elle converge dans le même espace, alors il existe un processus

continu $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, tel que :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^n - X_t| \rightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

Donc, $\mathbb{P} - p.s.$, $(X^n)_{n \geq 0}$ converge vers processus continu X_t .

L'unicité : Supposons que $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont deux solutions de l'équation

(2.1) pour tout $t \in [0, T]$, alors :

$$X_t - Y_t = \int_0^t [b(s, X_s) - b(s, Y_s)] ds + \int_0^t [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)] dW_s.$$

D'après l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|X_t - Y_t|^2] &\leq 2\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^2 \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^2 \right], \end{aligned} \tag{2.8}$$

utilisant l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** et l'hypothèse (H_2) (i) on trouve l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (b(s, X(s)) - b(s, Y(s))) ds \right|^2 \right] &\leq T\mathbb{E} \left[\int_0^t |b(s, X(s)) - b(s, Y(s))|^2 ds \right] \\ &\leq TC^2 \int_0^t \mathbb{E} (|X(s) - Y(s)|^2) ds. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Maintenant par utilisation de la propriété d'isométrie d'Itô et la condition (H_2)

(i), on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, Y(s))) dW(s) \right|^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t |\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, Y(s))|^2 ds \right] \\ &\leq C^2 \int_0^t \mathbb{E} [|X(s) - Y(s)|^2] ds. \end{aligned} \tag{2.10}$$

En substituant les deux estimations (2.9) et (2.10) dans (2.8), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|X(t) - Y(t)|^2] &\leq 2TC^2 \int_0^t \mathbb{E} [|X(s) - Y(s)|^2] ds + 2C^2 \int_0^t \mathbb{E} [|X(s) - Y(s)|^2] ds \\ &\leq 2(TC^2 + C^2) \int_0^t \mathbb{E} [|X(s) - Y(s)|^2] ds. \end{aligned}$$

Finalement en utilisant **le lemme de Granwall**, on trouve :

$$\mathbb{E} (|X(t) - Y(t)|^2) = 0.$$

■

Chapitre 3

Méthodes numériques de résolution des EDS

Les méthodes numériques de résolution sont des techniques qui permettent d'approximer une solution numérique aux EDS, lorsqu'il n'existe pas de solution analytique.

Il existe plusieurs méthodes numériques pour résoudre les EDS, chaque méthode ayant ses avantages et ses inconvénients en termes de précision, de temps de calcul, de stabilité et de convergence. Dans ce chapitre on donne quelques-unes des méthodes les plus couramment utilisées.

3.1 Simulation d'un mouvement brownien

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien avec la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$. La construction de l'intégrale stochastique par rapport à $(W_t)_{t \geq 0}$ à l'aide d'une procédure d'approximation basée sur la propriété d'isométrie ne donne pas vraiment d'intuition sur cette intégrale. L'outil principal qui permet de comprendre l'inté-

gration stochastique est la formule d'Itô. Le résultat suivant concernant la variation quadratique du mouvement brownien est une étape clé dans la dérivation de cette formule.

On a vu dans le chapitre 1, que W_t suit la loi gaussienne centré de variance t , alors les moments d'ordre $k \in \mathbb{N}$ sont données par :

$$\begin{cases} \mathbb{E} \left[(W_t)^{2k} \right] = \frac{(2k)!}{2^k k!} t^k, \\ \mathbb{E} \left[(W_t)^{2k+1} \right] = 0. \end{cases}$$

Proposition 3.1.1 Soit $t > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $t_k = \frac{kt}{N}$ pour $k \in \{0, \dots, N\}$.

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - t \right)^2 \right] = \frac{2t^2}{N}.$$

Preuve. Puisque $W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \hookrightarrow \mathcal{N} \left(0, \frac{t}{N} \right)$,

$$\mathbb{E} \left((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right) = \text{Var} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \frac{t}{N},$$

par linéarité de l'espérance on déduit que :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{N-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t}{N} = t.$$

Ainsi

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - t \right)^2 \right] = \text{Var} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \text{Var} \left((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right),$$

par indépendance de l'incrément brownien . Alors :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right) &= \mathbb{E} \left[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^4 \right] - \left(\mathbb{E} \left[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \right] \right)^2 \\ &= \frac{4!}{2^2 \times 2!} \left(\frac{t}{N} \right)^2 - \frac{t^2}{N^2} = \frac{3t^2}{N^2} - \frac{t^2}{N^2} = \frac{2t^2}{N}. \end{aligned}$$

■

3.1.1 Discrétisation du temps

Pour simuler le mouvement brownien qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps. Il s'agit de repartir l'intervalle $[0, T]$ en N périodes égales.

Soit Δt la longueur d'une période de temps tel que $\Delta t = \frac{T}{N}$. Nous simulerons le mouvement brownien au temps $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ etc.

La propriété d'indépendance de la définition du mouvement brownien implique que

$$(W_{n\Delta t} - W_{(n-1)\Delta t}, \quad n \in \mathbb{N})$$

est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi $\mathcal{N}(0; \Delta t)$.

3.1.2 Simulation de la trajectoire

Pour simuler une trajectoire du mouvement brownien jusqu'à l'instant $[T = (\Delta t N)]$, il suffit de :

- Générer N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite $Z_n, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}$.

– Nous simulerons donc

$$\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{n\Delta t} = W_{(n-1)\Delta t} + \sqrt{\Delta t}Z_n, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{cases}$$

– Approcher la trajectoire par interpolation linéaire ou par une fonction en escalier.

Voici le programme de simulation donné par le logiciel Matlab :(voir, [4], page 68).

```

1   %programme de simulation du mouvement brownien standard
2   rng(1)
3   T=1;n=1000;dt=T/n;
4   dW=zeros(1,n);
5   W=zeros(1,n);
6   dW(1)=sqrt(dt)*randn;
7   W(1)=dW(1);
8   for j=2:n
9       dW(j)=sqrt(dt)*randn;
10      W(j)=W(j-1)+dW(j);
11   end
12   plot(0:dt:T,[0,W],'r--')
13   xlabel('t','FontSize',16)
14   ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)

```

La figure suivante représente la simulation du mouvement brownien donné par le

code Matlab :(voir, [4], page 69) .

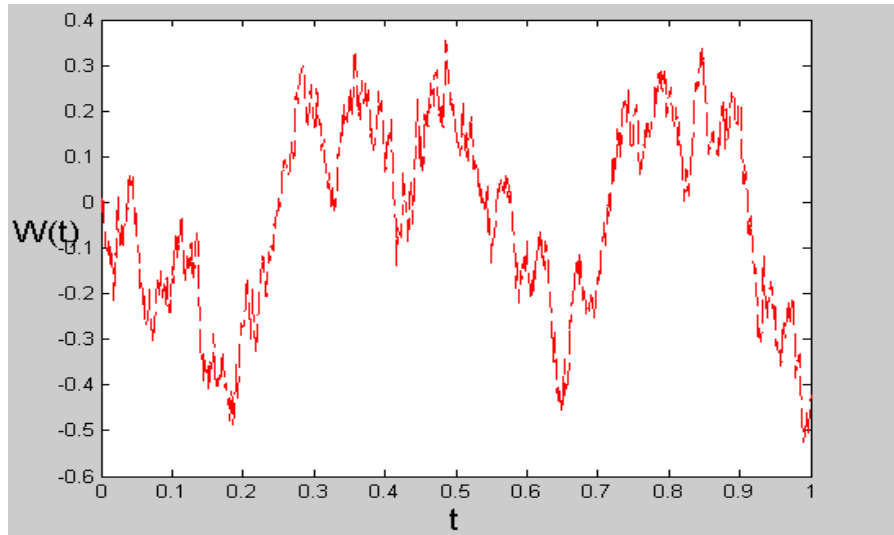


Fig 3.1 : Trajectoire de mouvement brownien

Maintenant on va simuler plusieurs trajectoires $m = 10000$, le résultat est illustrés par le code Matlab :(voir, [4], page 70) .

```

1   %Simulation de plusieurs trajectoires du mouvement brownien
2   clear all;
3   n=50;
4   m=10000;
5   dt=0.0001;
6   z=normrnd(0,1,m,n);
7   W=zeros(m+1,n);
8   temps=zeros(m+1,1);
9   for i=1:m
10      W(i+1,:)=W(i,:)+sqrt(dt)*z(i,:);
11      temps(i+1,1)=temps(i,1)+dt;
12   end
13   plot(temps,W);

```

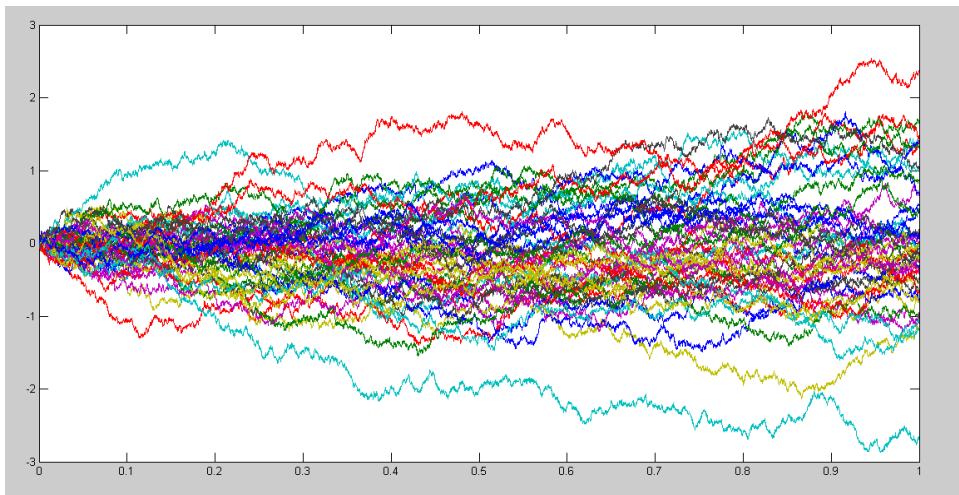


Fig 3.2 : Simulation de 10000 trajectoires du mouvement brownien

Remarque 3.1.1 Plus la longueur de l'intervalle de temps Δt est petite, meilleure sera notre approximation.

3.2 Développement stochastique de Taylor

Dans cette partie, on s'intéresse au développement stochastique de Taylor, ce dernier est une généralisation de la formule déterministe de Taylor. Cette expression stochastique est appelée formule de Taylor-Itô puisque elle est basée essentiellement sur la formule d'Itô. A partir de ce développement, plusieurs approximations d'ordre supérieur peuvent être obtenues.

3.2.1 Formule stochastique d'Itô Taylor

Les formules de Taylor sont largement connues dans le cas déterministe. On considère l'équation différentielle ordinaire unidimensionnelle suivante :

$$\frac{d}{dt}X_t = a(X_t) \quad (3.1)$$

avec la condition initiale $X(t_0) = X_{t_0}$, pour $t \in [t_0, T]$, $t_0 \geq 0$. On écrit l'équation (3.1) sous la forme :

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds \quad (3.2)$$

pour justifier la construction suivante, on suppose que la fonction a satisfait certaines propriétés de régularité. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable, alors on a :

$$\frac{d}{dt}f(X_t) = a(X_t) \frac{\partial}{\partial x}f(X_t) \quad (3.3)$$

en utilisant l'opérateur $L = a \frac{\partial}{\partial x}$, on peut écrire l'équation (3.3) sous la forme intégrale

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t Lf(X_s) ds, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.4)$$

Pour le cas particulier $f(x) = x$, on obtient $Lf = a$, $L^2f = La, \dots$ et l'équation

(3.4) devient

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds \quad (3.5)$$

on applique la relation (3.4) à la fonction $f = a$, on obtient

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s La(X_z) dz \right) ds = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s La(X_z) dz ds. \quad (3.6)$$

L'équation (3.5) représente la formule simple de Taylor de X_t . On peut appliquer successivement la relation (3.3) aux fonctions $f = La, f = L^2a, \dots, L^{r+1}a$, on obtient la formule classique de Taylor

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \sum_{l=1}^r \frac{(t-t_0)^l}{l!} L^l f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} L^{r+1} f(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{r+1}, \quad (3.7)$$

pour $t \in [t_0, T], r = 1, 2, 3, \dots$

Pour la construction des méthodes numériques, le but est d'obtenir une formule stochastique ayant les mêmes propriétés que dans le cas déterministe. Pour ce faire, il ya plusieurs possibilités l'une d'elles est basée sur l'application successive de la formule d'Itô à l'équation différentielle stochastique. En effet, soit X_t la solution de l'équation autonome :

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t a(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s \quad (3.8)$$

on suppose que $a(X_s)$ et $b(X_s)$ sont deux fonctions suffisamment régulières à valeurs réelles satisfaisant la condition de croissance bornée, alors pour toute fonction

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable, la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left(a(X_s) \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s) \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t b(X_s) \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dW_s \\ &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 f(X_s) dW_s \end{aligned} \quad (3.9)$$

pour tout $t \in [t_0, T]$, avec :

$$L^0 = a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L^1 = b \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Pour $f(x) = x$, on a $L^0 f = a$, $L^1 f = b$, dans ce cas, l'équation (3.9) se réduit à l'équation

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s. \quad (3.11)$$

On peut procéder de la même manière, en appliquant la formule d'Itô respectivement aux fonctions $f = a$ et $f = b$, on obtient

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left(b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z \right) dW_s \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R \end{aligned}$$

avec le reste

$$\begin{aligned} R &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z dW_s. \end{aligned}$$

De la même manière, on applique la formule d'Itô à la fonction $f = L^1b$, on obtient :

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + L^1b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s + \bar{R} \quad (3.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{R} = & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1a(X_z) dW_z ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0b(X_z) dz dW_s \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^0L^1b(X_u) dudW_z dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^1L^1b(X_u) dW_u dW_z dW_s. \end{aligned} \quad (3.13)$$

On remarque que cette formule simple d'Itô Taylor dépend des intégrales

$$\int_{t_0}^t ds, \quad \int_{t_0}^t dW_s, \quad \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s \quad (3.14)$$

et le reste de développement dépend aussi des intégrales multiples d'Itô.

3.2.2 Méthodes explicites de Taylor au sens de la convergence forte

Dans cette partie, on va utiliser la formule stochastique de Taylor pour établir des méthodes numériques itératives stochastiques au sens fort, dites approximations fortes de Taylor. Pour simplifier les notations, on utilise les opérateurs

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d a^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m b^{k,j} b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \quad (3.15)$$

$$\tilde{L}^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d \tilde{a}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (3.16)$$

$$L^j = \tilde{L}^j = \sum_{k=1}^d b^{k,j} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (3.17)$$

pour $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, d$, où

$$\tilde{a}^k = a^k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \tilde{L}^j b^{k,j}. \quad (3.18)$$

De plus, on écrit les intégrales multiples d'Itô sous la forme :

$$I_{(j_1, \dots, j_l)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \dots \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1}^{j_1} \dots dW_{s_l}^{j_l}, \quad (3.19)$$

avec la convention

$$W_t^0 = t, \quad (3.20)$$

pour tout $t \geq 0$.

On utilise aussi la notation $f = f(\tau_n, Y_n)$ dans toutes les méthodes et pour chaque fonction donnée f définie de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. En général, on suppose que le processus d'Itô considéré satisfait l'EDS non-autonome au sens d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b^j(s, X_s) dW_s^j. \quad (3.21)$$

3.3 Simulation des équations différentielles stochastiques

Il s'agit d'approcher numériquement la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad (3.22)$$

partant d'un point X_0 donné.

Par définition, la solution du problème (3.22) sur l'intervalle $[0, T]$ est un processus stochastique $(X_t, t \in [0, T])$, à trajectoires continues, vérifiant pour tout $t \in [0, T]$,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Pour approcher cette solution, il existe plusieurs méthodes de simulations parmi que nous allons étudiées sont : **Schéma d'Euler-Maruyama** et **Schéma de Milstein** qui sont basées sur le développement stochastique de Taylor Itô.

3.3.1 Schéma d'Euler -Maruyama

Cette méthode est considérée comme la méthode la plus simple des approximations fortes de Taylor et consiste à calculer une approximation de X_t sur une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$. Soit $(X_t, t \in [0, T])$ le processus de diffusion solution de (3.22). Fixons un pas de temps $\Delta t > 0$ et notons τ_j la suite des instants de discrétisation, $\tau_j = j\Delta t, j \geq 0$.

Soit (ΔW_j) la suite des incréments de la discrétisation correspondante du mou-

vement brownien $(W_t; t \geq 0)$ avec :

$$\Delta W_j = W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j}, \quad j \geq 0.$$

Le schéma d'Euler-Maruyama est donnée par :

$$X_{j+1} = X_j + b(X_j, t_j) \Delta t + \sigma(X_j, t_j) (\Delta W_j),$$

par définition du mouvement brownien, la suite (ΔW_j) est une suite de vecteur aléatoire indépendants et de même loi. Chacune des coordonnées de ΔW_j suit la loi normale $\mathcal{N}(0; \Delta t)$, de moyenne 0 et de variance Δt (d'écart-type $\sqrt{\Delta t}$).

Donc le schéma d'Euler-Maruyama devient :

$$X_{j+1} = X_j + b(X_j, t_j) \Delta t + \sigma(X_j, t_j) \sqrt{\Delta t} Z_j \quad (3.23)$$

où les Z sont des variables *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Ce schéma à un ordre fort de convergence égale à 0.5.

Exemple 3.3.1 *On applique le schéma d'Euler-Maruyama sur le mouvement brownien géométrique.*

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

où μ et σ sont des réels constantes, par identification avec l'équation (3.23)

$$b(X_j, t_j) = \mu S_t \quad \text{et} \quad \sigma(X_j, t_j) = \sigma S_t.$$

La solution analytique ou explicite de ce problème est :

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

car si on pose

$$y_t = \log(S_t) \quad \Leftrightarrow \quad S_t = \exp(y_t),$$

on prend $f(t, x) = \log(x)$ alors $f'_x(x) = \frac{1}{x}$, $f''_{xx}(x) = \frac{-1}{x^2}$, $f'_t(t) = 0$, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} df(t, x) &= f(0, x(0)) + \int_0^t f'_s(s, x) ds + \int_0^t f'_x(s, x) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, x) d\langle x, x \rangle \\ y_t &= y_0 + \int_0^t 0 ds + \int_0^t \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{S_s^2} d\langle S_s, S_s \rangle \\ \log(S_t) &= \log(S_0) + \int_0^t \left(\frac{1}{S_s} \mu S_s ds + \frac{1}{S_s} \sigma S_s dW_s \right) - \int_0^t \frac{1}{2S_s^2} \times \sigma^2 S_s^2 ds \\ \log(S_t) &= \log(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t. \end{aligned}$$

Si on prend $\mu = 1$, $\alpha = 1$, sur l'intervalle $[0; 1]$ avec $\Delta t = 1/n$, $n = 2^8$. Le logiciel Matlab donne le programme et la figure suivants :(voir, [\[4\]](#), page 73)

```

1  %Application du schéma d'Euler-maruyama sur le mouvement brownien
2  %géométrique
3  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Initialisation des paramètres%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4  rng('default')
5  mu=1;sigma=1;Szero=1;
6  T=1;n=2^8;dt=1/n;
7  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Simulation du mouvement brownien géométrique%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8  dW=sqrt(dt)*randn(1,n);%incrément du mouvement brownien
9  W=cumsum(dW);%discritisation du trajectoire du mouvement brownien
10 Strue=Szero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt:dt:T)+sigma*W);
11 plot(0:dt:T,[Szero,Strue],'m-'),hold on
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Simulation du schéma d'Euler-Maruyama%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 R=4;Dt=R*dt;L=n/R;
14 Sem=zeros(1,L);
15 Stemp=Szero;
16 for j=1:L
17     Winc=sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
18     Stemp=Stemp+Dt*mu*Stemp+sigma*Stemp*Winc;
19     Sem(j)=Stemp;
20 end
21 plot(0:Dt:T,[Szero,Sem],'r--'),hold off
22 legend('solution exacte','shéma dEuler','location','best')
23 xlabel('t','FontSize',12)
24 ylabel('s','FontSize',16,'HorizontalAlignment','right')
25 Erreue_EM=abs(Sem(end)-Strue(end));

```

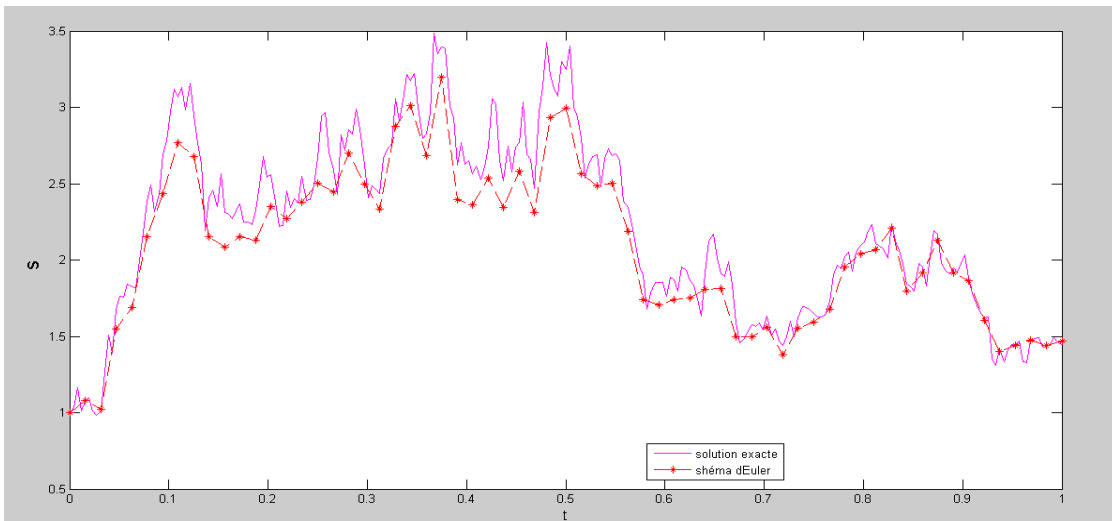


Fig 3.3 : Comparaison d'Euler-Maruyama et d'une trajectoire de l'EDS

3.3.2 Schéma de Milstein

Milstein à proposé une approximation du second ordre, utiliser à nouveau le calcul stochastique différentiel. Le schéma itératif est le suivant :

$$X_{j+1} = X_j + b(X_j, t_j) \Delta t + \sigma(X_j, t_j) (W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j}) + \frac{1}{2} \sigma(X_j, t_j) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(X_j, t_j) [(W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j})^2 - \Delta t],$$

où $i = \overline{1, N}$ $N \in \mathbb{N}^*$.

Cette approximation a un ordre fort de convergence égale à 1. Cette méthode améliore donc les instabilité numérique par rapport à la méthode d'Euler-Maruyama.

Exemple 3.3.2 *En utilisant l'exemple 3.3.1 précédent du mouvement brownien géométrique, pour montrer la meilleure convergence vers la solution explicite, le programme est le suivant : (voir, [4], page 75).*

```

1  %Application du schéma de Milstien sur le mouvement brownien
2  %géométrique
3  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%initialisation des paramètres%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4  clear all;
5  rng('default')
6  mu=1;sigma=1;Szero=1;
7  T=1;N=2^8;dt=1/N;
8  %simulation du mouvement brownien géométrique
9  dW=sqrt(dt)*randn(1,N);%incrémentation du mouvement brownien
10 W=cumsum(dW);%discrétisation du trajectoire du mouvement brownien
11 Strue=Szero*exp((mu-0.5*sigma^2)*(dt:dt:T)+sigma*W);
12 plot(0:dt:T,[Szero,Strue],'m'),hold on
13 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%le schéma de Milstien%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
14 R=4;Dt=R*dt;L=N/R;
15 Sem=zeros(1,L);
16 Sml=zeros(1,L);
17 Xtemp=Szero;
18 Stemp2=Szero;
19 for j=1:L
20     winc=sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
21     Stemp2=Stemp2+(Dt*mu*Stemp2)+(sigma*Stemp2*winc)+0.5
22     *sigma^2*Stemp2*(winc^2-Dt);
23     Sml=Stemp2;
24 end
25 plot(0:Dt:T,[Szero,Sml],'k--o')
26 legend('solution exacte','schéma de Milstien','location','Best')
27 xlabel('t','FontSize',12)
28 ylabel('s','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
29 Erreur_ML=abs(Sml(end)-Strue(end));

```

les trajectoires sont données dans la figure suivante :

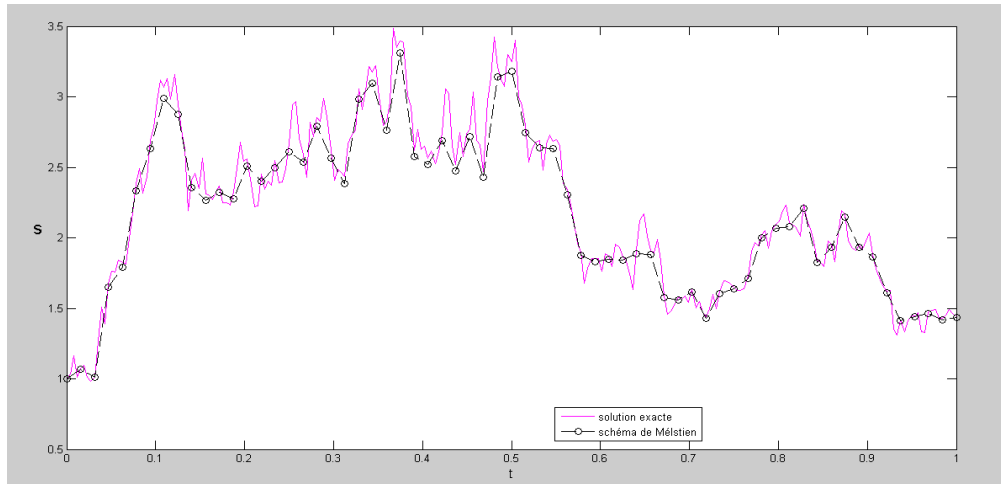


Fig 3.4 : Comparaison de l'approximation de Milstien et d'une trajectoire de l'EDS précédent

Conclusion

*D*ans ce modeste travail, nous construisons des intégrales stochastiques avec les concepts et propriétés nécessaires à la construction, ensuite nous savons que les équations différentielles stochastiques pour prouver l'existence et unicité de leurs solutions en utilisant Inégalité (Bienaymé-Tchebychev, lemme de Borel-Cantelli, Cauchy-Schwarz, Lemme de Gronwall).

Enfin j'ai choisi de décrire les méthodes numériques de résolution des EDS sont utilisées pour valider les modèles stochastiques proposés en comparant les résultats numériques avec des données expérimentales ou des résultats analytiques lorsque disponibles.

Bibliographie

- [1] BENJAMIN. J (juin 2006). *Discrétisation des équations différentielles stochastiques*. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [2] CHEIKH, B,N. (mars 2012). *Processus aléatoire et applications en finance*. Mémoire. Université du Québec à trois-rivières.
- [3] CHEKILLA, Y. (juin 2015). *Discrétisation des équations différentielles stochastiques*. Mémoire Master. Université de Biskra.
- [4] DAIBECHE, A & MEKLA, N. (juillé 2017). *Valorisation d'options Théorie-Simulation*. Mémoire Master, Université de Boumerdes.
- [5] LAMBERTON, D, & LAPEYRE, B. (2012). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. nouvelle édition. ellipses.
- [6] ZEGHDANE, R. (avril 2014). *Dynamique de structures soumises à des sollicitations aléatoires : analyse mathématique et résolution numérique des équations différentielles stochastiques*. Doctorat En Sciences. Université de Sétif.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des méthodes numériques utilisées pour résoudre des équations différentielles stochastiques, en rappelant d'abord des généralités sur le calcul stochastiques et des propriétés. Ensuite, nous avons abordé des exemples simples d'EDS et cité la preuve du résultat de l'existence et de l'unicité des solutions de ces EDS. Enfin, nous nous sommes intéressés aux méthodes numériques de résolution des EDS qui résultaient après discrétisation du temps pour obtenir une expression qui calcule des solutions approchées à chaque borne de sous-intervalle de temps, étayé par un exemple illustratif.

ملخص

في هذا العمل نهتم بدراسة الطرق العددية المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية العشوائية وذلك من خلال التذكير أولاً بمعلومات عامة عن حساب التفاضل والتكامل العشوائي وبعض خصائصهما ثم تطرقنا إلى أمثلة بسيطة للمعادلات التفاضلية العشوائية وأدرجنا اثبات نتيجة الوجود والوحدانية لحلول هذه المعادلات. وفي الأخير اهتمنا بالطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العشوائية التي نتجت بعد تجزئة مجال العمل إلى مجالات جزئية لكي نتحصل على عبارة تراجعية تحسب لنا حلول تقريبية عند كل حد من حدود هذه المجالات الجزئية ومدعمة بمثال توضيحي.

Abstract

In this work, we are interested in to the study of numerical methods used to solve stochastic differential equations, by first recalling generalities on stochastic calculus and properties. Next, we discussed simple SDE examples and cited the proof of the result of the existence and uniqueness of the solutions of these SDE. Finally, we were interested in numerical methods for solving the SDE that resulted after discretization of time to obtain an expression that calculates approximate solutions at each time sub-interval bound, supported by an illustrative example.