République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Probabilités**

Par :

Dehane khaoula

Titre :

Application de la Théorie du Contrôle Stochastique Optimale aux Problèmes de Portefeuille

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**KHALFALLAH NABIL**	UMKB	Président
Dr.	**YEKHLEF SAMIA**	UMKB	Encadreur
Dr.	**BOUCHERARA SALIHA**	UMKB	Examinatrice

18 Juin 2023

Dédicace

Je dédie ce humble travail

À ma mère **Fatima**♡ et mon père **Mohamed**♡, merci pour vos encouragements.

À ma précieuse seule soeur **Rima**♡.

À més fréres : **Abd Elssalam**♡, **Abd Elbasset**♡, **Zouhair**♡, **Haithem**♡,

À ma trés cher : **Widad**♡, **Ouahiba**♡, **Radhia**♡, **Manel**♡, **Wiame**♡,
Houda♡, **Soundes**♡, **Hanane**♡, **Khaoula**♡, **Ohani**♡,

À mes enseignants,

À tous mes amis,

À ma famille,

À tous ceux que m'ont encouragé à poursuivre mes études.

♡**Dehane Khaoula**♡

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant "**Allah**" le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour terminer ce modeste travail.

Je remercie mon encadreur de mémoire **Dr : Yekhlef Samia** pour son suivi pour ses directives, ses lectures, et ses critiques constructives.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du jury qui vont certainement enrichir cette recherche et la rendre plus performante.

Je remercie également tous mes enseignants durant toutes mes années d'études.

Je remercie également tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je n'oublie pas de remercier toute ma famille et tous mes amis pour leur support.

♡**Dehane khaoula**♡

Table des matières

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Rappel sur le calcul stochastique **4**

1.1 Calcul stochastique 4

1.1.1 Processus stochastiques 4

1.2 Mouvement Brownien 6

1.2.1 Martingales 7

1.3 Intégrale stochastique d'Itô 8

1.4 Equations différentielles stochastiques 11

2 Contrôle stochastique optimal **14**

2.1 Formulation générale 14

2.1.1 Contrôle de processus de diffusion 14

2.1.2 Problème à horizon fini 15

2.2 Principe de la programmation dynamique 17

2.2.1 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman 21

2.2.2 Théorème de vérification 24

3 Problème d'optimisation de portefeuille **29**

3.1 Problème de portefeuille 29

3.1.1 Optimisation d'un problème de portefeuille 31

Bibliographie **37**

Annexe B : Abréviations et Notations **38**

Introduction

L'incertitude est inhérente à la plupart des systèmes du monde réel. Elle place de nombreux désavantages (et parfois, étonnamment, des avantages) sur les efforts de l'humanité, qui sont généralement associés à la quête de résultats optimaux. Les systèmes principalement étudiés dans ce mémoire sont dynamiques, c'est-à-dire qu'ils évoluent dans le temps. De plus, ils sont décrits par les équations différentielles stochastiques d'Itô et sont parfois appelés modèles de diffusion. La source fondamentale d'incertitude dans les modèles de diffusion est le bruit blanc, qui représente les effets conjoints d'un grand nombre de forces aléatoires indépendantes agissant sur les systèmes. Étant donné que les systèmes sont dynamiques, les décisions pertinentes (contrôles), qui sont prises sur la base des informations les plus récentes dont disposent les décideurs (contrôleurs), doivent également évoluer au fil du temps. Les décideurs doivent sélectionner une décision optimale parmi toutes les décisions possibles pour obtenir le meilleur résultat attendu par rapport à leurs objectifs. De tels problèmes d'optimisation sont appelés problèmes de contrôle optimal stochastique. La gamme des problèmes de contrôle optimal stochastique couvre une variété de systèmes physiques, biologiques, économiques et de gestion.

Dans ce mémoire on s'intéresse à la méthode de la programmation dynamique, l'idée basique de cette méthode est de considérer une famille de problèmes de contrôle à différents états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. Ce principe, appelé principe de la programmation dynamique et initié dans les année 50 par Bellman, est énoncé précisément dans la section 2.2. L'équation de la programmation dynamique (en 2.2.1) conduit à une équations aux dérivées partielles (EDP) nonlinéaire du second ordre, appelée Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution régulière, le théorème de vérification, démontré en subsection 2.2.2, valide l'optimalité de ce candidat solution de HJB, et permet aussi de caractériser un contrôle optimal. Cette approche classique de la programmation dynamique est appelée étape de vérification. Nous illustrons cette méthode en subsection 3.1.1 sur un exemple de modèle en finance. L'inconvénient majeur de cette approche est de supposer l'existence d'une solution régulière à l'EDP d'HJB. Pour plus de detailles sur la programmation dynamique voir [4], [5] et [6]

Les problèmes de contrôle optimal ont trouvé leur place dans les domaines d'applications des mathématiques à la recherche d'une régulation optimale d'un processus évolutif du système. En finance, le contrôle est généralement donné par une stratégie d'investissement [3]. Chaque investissement comporte des risques, mais dans l'espoir d'un meilleur rendement à l'avenir, les investisseurs prennent toujours la théorie du portefeuille qui est d'allouer de manière optimale les invvestissements entre différents actifs. La racine de la théorie moderne de l'optimisation de portefeuille est attribuée à Markowitz [2].

Ce mémoire se composé de trois chapitres :

▶ **Chapitre 1** : Dans le premier chapitre, on va faire un rappelle sur le calcul stochastique, et souligne sur des définitions qu'on utilise dans le chapitre suivant.

▶ **Chapitre 2** : Dans le deuxième chapitre, nous étudions la méthode de la programmation dynamique pour résoudre un problème de contrôle stochastique.

▶ **Chapitre 3** : Dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe de la programmation dynamique pour résoudre un problème d'optimisation de portefeuille optimal linéaire.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Ce chapitre a pour but de donner des définitions de base et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.

1.1 Calcul stochastique

1.1.1 Processus stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) *Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, pour tout $t \in T$, soit une variable aléatoire .*

Remarque 1.1.1 *Les fonctions $t \to X_t(\omega)$ sont appelées les trajectoires du processus stochastique (X_t).*

Définition 1.1.2 (Filtration) *On appelle filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$, une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$; $\forall s \leq t$.*

Remarque 1.1.2 *Un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *est satisfait les conditions habituelles si :*

(i) Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

(ii) La filtration est continue à droite *i.e.* $\mathcal{F}_t = \underset{s>t}{\cap} \mathcal{F}_s, \forall\ t.$

La famille croissante de sous tribus $\mathcal{G}_t = \sigma\left(X_s,\ s \leq t\right)$, s'appelle la filtration naturelle du processus stochastique X : Mais $\mathcal{G}_t$ ne contient pas nécessairement les ensemble négligeable $(\mathcal{N})$, c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t)$. Lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.

Définition 1.1.3 (Processus adapté) *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t \in T}$ *est dit adapté (par rapport à* $\mathcal{F}_t$*) si pour tout* $t \in T$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.1.4 (Processus mesurable) *Un processus* X *est mesurable si l'application* $(t, \omega) \mapsto X_t\left(\omega\right)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^+\right) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.1.5 (Temps d'arrêt) *Soit* τ *une variable aléatoire à valeurs dans* $\bar{\mathbb{R}}^+$. τ *est un* $\mathcal{F}-$*temps d'arrêt si, pour tout* $t \in T$:

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega : \tau\left(\omega\right) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Si τ *est un temps d'arrêt, la tribu* $\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F}_\infty,\ A \cap \{\tau \leq t\}, \forall\ t \in T\}$ *s'appelle tribu des évènements antérieurs à* τ.

Définition 1.1.6 (Processus càdlàg) *Un processus* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est dit càdlàg (continu à droite limité à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche pour presque tout* ω.

Définition 1.1.7 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit progressivement mesurable (ou progressif) si pour tout t l'application*

$$\left([0,t]\times\Omega, \mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}\right)\to\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$
$$(s,\omega)\mapsto X_s(\omega),$$

est mesurable.

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 *Un processus $W:\Omega\to[0,T]$ est un mouvement brownien (MB) standard, si*

1. $W_0 = 0$, $\mathbb{P}.p.s.$
2. $\forall s\leq t$, $W_{s,t} := W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.
3. *Pour tout* $0 = t_0 < t_1 ... < t_n \leq T$, *les variables* $W_{t_1}, W_{t_1,t_2}, ..., W_{t_{n-1},t_n}$ *sont indépendantes. De plus, on appelle* W *un* $\mathbb{F}-$*mouvement brownien si* $W\in L^0(F_t)$ *et pour tout* $0\leq s<t\leq T$, *la variable* $W_{s,t}$ *est indépendante de la tribu du passé avant* s, *soit* $\sigma(W_u, u\leq s)$.

(i) La définition reste vraie pour $T = [0,\infty[$.

(ii) On appelle $W = \left(W^1, ..., W^d\right)^T$ un mouvement brownien *d-dimensionnel* si $W^1, ..., W^d$ sont des mouvements browniens indépendants.

(iii) Nous rappelons aussi que l'augmentation habituelle de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ d'un mouvement brownien W est $\mathcal{F}_t^W = (\sigma(\mathcal{F}_t\cup\mathcal{N}))_{t\in T}$ De plus, W reste un mouvement brownien par rapport à sa filtration augmentée. Par abus de langage, l'augmentation de la filtration naturelle de W est encore appelée filtration naturelle de W ou filtration brownienne.

1.2.1 Martingales

Définition 1.2.2 (Martingale à temps continue) *Une famille de variables aléatoires* $(M_t)_{t\in T}$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *si :*

1. $\mathbb{E}\left[|M_t|\right] < +\infty, \forall\ t \in T$.
2. $\mathbb{E}\left(M_t \,|\mathcal{F}_s\right) = M_s$, pour tout $0 \leq s \leq t$.
3. $(M_t)_{t\in T}$ est $\mathcal{F}_t$-*adapté* ($i.e$ M_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable).

(i) M est une *sous-martingale* (resp *sur-martingale*) s'il vérifie (i) et si de plus $\forall$ $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}\left(M_t \,|\mathcal{F}_s\right) \geq M_s (\text{resp } \mathbb{E}\left(M_t \,|\mathcal{F}_s\right) \leq M_s).$$

(ii) M est une martingale s'il est à la fois une *sous-martingale* et *sur-martingale.*

(iii) Si M est une martingale, alors $\mathbb{E}\left[M_t\right] = \mathbb{E}\left[M_0\right]$ pour tout $t \in T$.

Proposition 1.2.1 *Si W est un mouvement brownien alors W, $(W_t^2 - t)_{t\in T}$ et $\left\{\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)\right\}_{t\in T}$ sont des martingales. Réciproquement, si X est un processus continu tel que X et $(X_t^2 - t)_{t\geq 0}$ sont des martingales, X est un mouvement Brownien.*

Définition 1.2.3 (Martingale locale)

Un processus M adapté càdlàg (continue à gauche limité à droite) est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}.p.s$ et $(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ est une martingale pour tout n.

Une martingale locale positive est une sur martingale. Une martingale locale uniformément intégrable $(u.i)$ est une martingale.

Définition 1.2.4 (Semi martingale) *Une semi martingale est un processus càdlàg adapté X admettant une décomposition de la forme :*

$$X = X_0 + M + A \tag{1.1}$$

Où M est une martingale locale càdlàg nulle en 0 et A est un processus adapté à variation finie et nul en 0. Une semi martingale continue est une semi martingale telle que dans la décomposition (1.1), M et A sont continus. Une telle décomposition où M et A sont continus, est unique.

1.3 Intégrale stochastique d'Itô

Définition 1.3.1 *Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité, et $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s, s \leq t\right)$ on définit l'intégrale stochastique par la forme suivante :*

$$\int_0^t \theta_s dW_s,$$

avec : θ_s un processus stochastique.

Il possède quelques propriétés, on note Λ l'ensemble des processus θ adapté càdlàg telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\theta_s\right|^2 ds\right] < \infty, \forall\ t,$$

1. *La linéarité : $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, et $\theta^1, \theta^2 \in \Lambda$,*

$$\int_0^t a\theta_s^1 + b\theta_s^2 dW_s = a\int_0^t \theta_s^1 dW_s + b\int_0^t \theta_s^2 dW_s,$$

2. *Le processus $M_t = \int_0^t \theta_s dW_s$ est une martingale si $\theta \in \Lambda$, et $\mathbb{E}\left[M_t\right] = 0$, on a aussi*

$$\mathbb{E}\left[M_t^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Définition 1.3.2 (Processus d'Itô) *Un processus $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs réelles est un processus d'Itô si $\mathbb{P}$.p.s*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,\ \forall\ 0 \leq t \leq T, \tag{1.2}$$

où X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable,* b *et* σ *sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions,* $\mathbb{P}$*.p.s*

$$\int_0^T |b_s|^2 \, ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |\sigma_s|^2 \, ds < \infty,$$

c'est-à-dire $b \in L^2_{loc}(\mathbb{F})$:

Le coefficient b *est le drift ou la dérive,* σ *est le coefficient de diffusion.*

Si X *et* Y *sont deux processus d'Itô,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_1(s) \, ds + \int_0^t \sigma_1(s) \, dW_s, \quad et \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t b_2(s) \, ds + \int_0^t \sigma_2(s) \, dW_s.$$

Proposition 1.3.1 (Intégration par parties) *Si* X *et* Y *sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t,$$

où

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_1(s) \sigma_2(s) \, ds \quad et \quad dX_t = b_t dt \; + \sigma_t dW_t.$$

Théorème 1.3.1 (Formule d'Itô) *Soient* $b \in L^1_{loc}(\mathbb{F})$, $\sigma \in L^2_{loc}(\mathbb{F})$ *et* X *un processus d'Itô définit comme dans* (1.2)*, on note* $\langle X \rangle_t := \int_0^t |\sigma_s|^2 \, ds$*. Soit* $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, *alors*

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \partial_t f(t, X_t) \, dt + \partial_x f(t, X_t) \, dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, X_t) \, d\langle X \rangle_t \\ &= \left[\partial_t f + \partial_x f b_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f \, |\sigma_t|^2 \right] (t, X_t) \, dt + \partial_x f(t, X_t) \, \sigma_t dW_t. \end{aligned}$$

Ou bien sous la forme intégrale

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left[\partial_s f + \partial_x f b_s + \frac{1}{2} \partial_{xx} f \, |\sigma_s|^2 \right] (s, X_s) \, ds + \int_0^t \partial_x f(s, X_s) \, \sigma_s dW_s.$$

Nous finissons ce paragraphe en étendant la formule précédente au cas d'un mouve-

ment brownien d-dimensionnel.

Théorème 1.3.2 *Soient* $W = \left(W^1, ..., W^d\right)^\intercal$ *un* MB *d-dimensionnel,*

$$b^i \in L^1_{loc}(\mathbb{F}), \sigma^{i,j} \in L^2_{loc}(\mathbb{F}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d.$$

On note $b = (b^1, ..., b^n)^\intercal$ *et* $\sigma := (\sigma^{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d}$ *qui prennent des valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^{n \times d}$ *respectivement. Soit* $X = (X^1, ..., X^n)$ *un processus d'Itô à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que*

$$dX^i_t := b^i_t dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{i,j}_t dW^j_t, i = 1, ..., n, \text{ ou équivalent, } dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t.$$

On note

$$\langle X \rangle_t := \int_0^t \sigma_s \sigma_s^\intercal ds, \text{ une matrice qui prend valeurs dans } \mathbb{R}^n.$$

Si $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *appartient à* $C^{1,2}$ *alors*

$$\begin{aligned} df\left(t, X_t\right) &= \partial_t f\left(t, X_t\right) dt + \partial_x f\left(t, X_t\right) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f\left(t, X_t\right) d\langle X \rangle_t \\ &= \left[\partial_t f + \partial_x f b_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f\left(\sigma_t \sigma_t^\intercal\right)\right] \left(t, X_t\right) dt + \partial_x f\left(t, X_t\right) \sigma_t dW_t. \\ &= \left[\partial_t f + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f b^i_t + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2} \partial_{x_i x_j} f \sigma^{i,k}_t \sigma^{j,k}_t\right] \left(t, X_t\right) dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_i} f\left(t, X_t\right) \sigma^{i,j}_t dW^j_t. \end{aligned}$$

On utilise les conventions : $\partial_x f = (\partial_{x_1} f, ..., \partial_{x_n} f)$ *est un vecteur ligne et* $\partial_{xx} f$ *est une matrice qui prend des valeur dans* $\mathbb{R}^n$.

1.4 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.4.1 *Une équation différentielle stochastique* (EDS) *est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, \tag{1.3}$$

ou sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Où X *est* n*-dimentionnel,* $x \in L^0(\mathcal{F}_0, \mathbb{R}^n)$, *et les fonctions*

$$b : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \sigma : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d},$$

sont $\mathbb{F}$*-mesurables par rapport à* (t, w, x).
Le coefficient b *s'appelle le drift et la matrice* $\sigma\sigma^T$ *s'appelle la matrice de diffusion. L'inconnu est le processus* X. *Le problème est comme une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.*

Définition 1.4.2 *On dit que* $X \in L^0(\mathbb{F}, \mathbb{R}^n)$ *est une solution de l'EDS* (1.3) *si :*

1. $\mathbb{P}.p.s, \int_0^t \left[|b(s, X_s)|^2 + |\sigma(s, X_s)|^2\right] ds,$
2. X vérifie (1.3) c'est-à-dire :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s,\ \forall 0 \le t \le T, \mathbb{P}.p.s.$$

On note

$$S^2(\mathbb{F}) := \left\{ X \in L^0(\mathbb{F}) : X \text{ est continue, } p.s \text{ et } \|X\|_{\infty,2}^2 := \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |X_t|^2\right] < \infty \right\},$$

Exemple 1.4.1 (Equation de Black et Scholes) *Soit l'EDS suivante :*

$$\begin{cases} dX_s = \mu X_s ds + \sigma X_s dB_s \\ X_t = x. \end{cases} \tag{1.4}$$

Sa solution est donnée par :

$$X_s = X_t \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) s + \sigma B_s\right). \tag{1.5}$$

Cette équation est appelée équation de Black et Scholes.

Si X_s est le prix d'une action à l'instant s, il est possible de modéliser son évolution en supposant que $\frac{dX_s}{X_s}$ la variation relative du prix, évolue selon l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dX_s}{X_s} = \mu ds + \sigma dB_s,$$

où μ et σ sont deux constantes appelées dérive et volatilité de l'action.

Alors

$$dX_s = \mu X_s ds + \sigma X_s dB_s.$$

On suppose que $X_s > 0$:

$$\frac{dX_s}{X_s} = \mu ds + \sigma dB_s.$$

On a

$$\int \frac{dX_s}{X_s} = \ln(X_s).$$

Posons

$$\begin{cases} Y_s = \ln(X_s), \\ U(x) = \ln(x). \end{cases}$$

On applique la formule d'Itô on obtient

$$dY_s = \frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial x} dX_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G_s^2 ds,$$

tq : $G_s = \sigma X_s$

$$\begin{aligned}
dY_s &= \frac{1}{X_s} dX_s - \frac{1}{2}\frac{1}{X_s^2} G^2 ds \\
&= \frac{1}{X_s}\left(\mu X_s ds + \sigma X_s dB_s\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{X_s^2}\sigma^2 X_s^2 ds \\
&= \mu ds + \sigma dB_s - \frac{1}{2}\sigma^2 ds \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \sigma dB_s.
\end{aligned}$$

Alors

$$d\ln(X_s) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \sigma dB_s.$$

En intégrant et en reprenant l'exponentielle, on obtient donc

$$X_s = X_t \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) s + \sigma B_s\right).$$

On obtient donc la solution (1.5)*.*

Théorème 1.4.1 (Existence et unicité) *Si* b *et* σ *sont des fonctions continues, telles qu'il existe* $L \succ 0$*, avec :*

1. $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y|$ *, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$*.*
2. $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq L(1+|x|)$ *.*
3. $\mathbb{E}\left(|x|^2\right) < +\infty$*.*

   Alors, pour tout $T \geq 0$*, l'équation* (1.3) *possède une unique solution dans l'intervalle* $[0,T]$ *. De plus cette solution* $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ *vérifie*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right) < +\infty.$$

Chapitre 2

Contrôle stochastique optimal

Dans ce chapitre, nous étudions la formulation générale du principe de programmation dynamique et son utilisation pour résoudre un problème de contrôle stochastique. Le cadre adopté dans la subsection 2.1.1 est celui des processus de diffusion contrôlés à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et le problème formulé est en horizon fini.

2.1 Formulation générale

2.1.1 Contrôle de processus de diffusion

On considère un modèle de contrôle où l'état du système est gouverné par l'équation différentielle stochastique (EDS) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t, \ \forall \ t \in [0, T], \tag{2.1}$$

où W est un mouvement brownien d-dimensionnel sur un espace de probabilité filtré $(\Omega \ , \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles. Plus généralement, on peut aussi considérer des coefficients $b(t, x, u)$ et $\sigma(t, x, u)$ dépendants du temps t.

Le contrôle $u = (u_t)$ est un processus progressif (par rapport à $\mathbb{F}$) et à valeurs dans

U, sous espace de $\mathbb{R}^m$.

Les fonctions mesurables $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times d}$ satisfont une condition de *Lipchitz* uniforme en U : $\exists\ K \geq 0$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ u \in U$,

$$|b(t,x,u) - b(t,y,u)| + |\sigma(t,x,u) - \sigma(t,y,u)| \leq K\ \ |x-y|\,. \tag{2.2}$$

2.1.2 Problème à horizon fini

On fixe un $horizon\ fini$ $0 < T < +\infty$. On note par U l'ensemble des processus de contrôle u tel que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |b(t,0,u_t)|^2 + |\sigma(t,0,u_t)|^2\,dt\right] < +\infty. \tag{2.3}$$

Le point $x = 0$ est une valeur arbitraire de la diffusion et si ce point n'est pas dans le support de la diffusion, on peut choisir n'importe quelle autre valeur dans ce support. Les conditions (2.2) et (2.3) assurent pour tout $u \in U$ et pour toute condition initiale $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, l'existence et l'unicité d'une solution forte de l'EDS (à coefficients aléatoires) (2.1) partant de x en $s = t$, On note alors par $\{X_s^{t,x},\ t \leq s \leq T\}$ cette solution qui est $p.s.$ à trajectoires continues. On rappelle aussi, que sous ces conditions sur b, σ et u, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq s\leq T} \left|X_s^{t,x}\right|^2\right] < +\infty. \tag{2.4}$$

$$\lim_{h\downarrow 0^+}\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[t,t+h]} \left|X_s^{t,x}\right|^2\right] = 0 \tag{2.5}$$

Critère de minimisation.

On définit la fonction de coût $J : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$,

$$J(t,x,u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + g(X_T^{t,x})\right], \tag{2.6}$$

où

$$\begin{cases} f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}, \\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{des fonctions mesurables.}$$

On suppose que

$$|f(t,x,u)| + |g(x)| \le C\left(1+|x|^2\right), \tag{2.7}$$

pour une constant C, la condition de croissance quadratique (2.7) implique que J est bien définie.

Le but de cette section est d'étudier la minimisation (ou bien maximiser) de la fonction de coût par rapport aux contrôle, on introduit la fonction de valeur $\upsilon(t,x)$ du problème (2.1) et (2.6) (calculer $\upsilon(t,x)$),

$$\upsilon(t,x) = \inf_{u \in U} J(t,x,u), \ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \tag{2.8}$$

avec

$$\upsilon(T,x) = g(x), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

où f, b, σ et g sont des fonctions uniformément continues. On dit que $\hat{u} \in U$ est un contrôle optimal si

$$\upsilon(t,x) = J(t,x,\hat{u}) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \hat{u}_s)ds + g(X_T^{t,x})\right].$$

Si le processus $\hat{u}$ peut s'exprimer comme fonction mesurable du temps et l'état du système, $\hat{u}_s = \hat{u}\left(s, X_s^{t,x}\right)$, $t \le s \le T$, on dit que $\hat{u}_s$ est un contrôle optimal feedback markovien pour (2.8).

Remarque 2.1.1 *Lorsque f est à croissance quadratique en x, i.e. il existe une constante positive C et une fonction positive $K : U \to \mathbb{R}_+$ telles que*

$$|f(t,x,\alpha)| \leq \; C(1+|x|^2) + K(\alpha), \; \forall \; (t,x,\alpha) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U,$$

alors l'estimation (2.4) montre que pour tout $(t,x) \in [0,T] \; \times \mathbb{R}^n$, pour tout contrôle constant $u = \alpha$ dans U :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|f(s, X_s^{t,x}, \alpha)\right| ds\right] < +\infty.$$

Ainsi, les contrôles constants dans U sont dans $U(t,x)$. De plus, si il existe une constante positive C telle que :

$$K\,(\alpha) \leq C\left(1 + |b(0,\alpha)|^2 + |\sigma(0,\alpha)|^2\right),$$

pour tout α dans U, alors les conditions (2.3) et (2.4) montrent que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,pour tout contrôle $u \in U$

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|f(s, X_s^{t,x}, u_s)\right| ds\right] < +\infty.$$

Autrement dit, dans ce cas, $U(t,x) = U$.

2.2 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique (PPD) est un principe fondamental pour la théorie du contrôle stochastique. Dans le contexte de contrôle de processus de diffusion décrit au paragraphe précédent, et même plus généralement pour des contrôles de processus de $Markov$, il s'énonce ainsi :

Théorème 2.2.1 (Principe de la programmation dynamique) *Soit* $((t,x) \in \ [0,T] \times \mathbb{R}^n)$. *Alors on a*

$$\upsilon(t,x) = \inf_{u \in U(t,x)} \inf_{\theta \in \Gamma_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right] \tag{2.9}$$

$$= \inf_{u \in U(t,x)} \sup_{\theta \in \Gamma_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right] \tag{2.10}$$

Remarque 2.2.1 *Le principe de la programmation dynamique énoncé ci-dessus peut se formuler de manière équivalente, dans le cas à horizon $fini$:*

(i) *Pour tout* $u \in U(t,x)$ *et* $\theta \in \Gamma_{t,T}$:

$$\upsilon(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{2.11}$$

(ii) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $u \in U(t,x)$ *tel que pour tout* $\theta \in \Gamma_{t,T}$:

$$\upsilon(t,x) + \varepsilon > \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{2.12}$$

C'est une version plus forte que la version traditionnelle du principe de la programmation dynamique, qui s'écrit en horizon $fini$:

$$\upsilon(t,x) = \inf_{u \in U(t,x)} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right], \tag{2.13}$$

pour tout temps d'arrêt $\theta \in \Gamma_{t,T}$. *On a une remarque analogue dans le cas à horizon $infini$.*

L'idée intuitive de ce principe est qu'un contrôle optimal $\hat{u}$ *sur* $[t,T]$ *peut être recollé en deux contrôles optimaux, l'un sur* $[t,\theta]$ *et l'autre sur* $[\theta,T]$, *et ceci quel que soit le temps d'arrêt* θ. *La preuve rigoureuse de ce résultat dans ce contexte stochastique est très technique. Nous donnons ici une preuve formelle de ce principe.*

Preuve. (formelle du PPD)

On considère le cas de problème à *horizon fini.*

1. Etant donné un contrôle $u \in U(t,x)$, on a par unicité du flot de l'EDS gouvernant X, la structure markovienne

$$\begin{aligned}
X_s^{t,x} &= x + \int_t^s b(r, X_r, u_r)dr + \int_t^s \sigma(r, X_r, u_r)dw_r \\
&= x + \int_t^\theta b(r, X_r, u_r)dr + \int_t^\theta \sigma(r, X_r, u_r)dw_r + \int_\theta^s b(r, X_r, u_r)dr + \int_\theta^s \sigma(r, X_r, u_r)dw_r \\
&= X_\theta^{t,x} + \int_\theta^s b(r, X_r, u_r)dr + \int_\theta^s \sigma(r, X_r, u_r)dw_r \\
&= X_s^{\theta, X_\theta^{t,x}},
\end{aligned}$$

alors

$$X_s^{t,x} = X_s^{\theta, X_\theta^{t,x}}, \ s \geq \theta,$$

où θ est un temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
J(t,x,u) &= \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + g(X_T^{t,x})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \int_\theta^T f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + g(X_T^{t,x})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \int_\theta^T f(s, X_s^{\theta, X_\theta^{t,x}}, u_s)ds + g(X_T^{\theta, X_\theta^{t,x}})\right]
\end{aligned}$$

alors

$$J(t,x,u) = \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + J(\theta, X_\theta^{t,x}, u)\right], \ \forall \ \theta \in \Gamma_{t,T}$$

donc

$$J(t,x,u) = \sup_{\theta \in \Gamma_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + J(\theta, X_\theta^{t,x}, u)\right],$$

d'où puisque $J(t,x,u) \geq \upsilon$ et comme θ est quelconque dans $\Gamma_{t,T}$

$$J(t,x,u) \geq \sup_{\theta \in \Gamma_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right]$$
$$\geq \inf_{u \in U(t,x)} \sup_{\theta \in \Gamma_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right].$$

En passant à l'infime sur u dans le terme de gauche, on obtient l'inégalité :

$$\upsilon(t,x) \geq \inf_{u \in U(t,x)} \sup_{\theta \in \Gamma_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{2.14}$$

2. On considére pour tout $\varepsilon > 0$ et $\theta \in \Gamma_{t,T}$, il existe un contrôle ε-optimal u^ε de $\upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})$ tel que

$$J(\theta, X_\theta^{t,x}, u^\varepsilon) \leq \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x}) + \varepsilon. \tag{2.15}$$

Etant donné $u \in U(t,x)$, on définit le processus

$$\hat{u}_s = \begin{cases} u_s, & s \in [t,\theta] \\ u_s^\varepsilon, & s \in [\theta, T] \end{cases}$$

Le point délicat est de vérifier que $\hat{u}$ est progressivement mesurable et alors bien dans $U(t,x)$. Dans ce cas, on a par (2.15)

$$\upsilon(t,x) \leq J(t,x,\hat{u}) = \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + J(\theta, X_\theta^{t,x}, u^\varepsilon)\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right] + \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $u \in U(t,x)$, $\theta \in \Gamma_{t,T}$ et $\varepsilon > 0$, on a l'inégalité

$$\upsilon(t,x) \leq \inf_{u \in U(t,x)} \inf_{\theta \in \Gamma_{t,T}} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, u_s)ds + \upsilon(\theta, X_\theta^{t,x})\right]. \tag{2.16}$$

En combinant les deux inégalités (2.14) et (2.16) , on obtient le résultat voulu.

■

2.2.1 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) est la version infinitésimale du principe de la programmation dynamique : elle décrit le comportement local de la fonction valeur $v(t,x)$ lorsqu'on fait tendre le temps d'arrêt θ dans (2.13) vers t.

Dans cette section, nous dérivons formellement l'équation d'HJB en supposant que la fonction valeur v est suffisamment régulière.

2.2.1.1 Dérivation formelle de l'equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Considérons le temps $\theta = t+h$ et un contrôle constant $u_s = \alpha$, avec α arbitraire dans U, dans la relation (2.11) de la programmation dynamique

$$v(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, \alpha)ds + v(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right]. \tag{2.17}$$

En supposant que v est suffisamment régulière, on a par la formule $d'It\hat{o}$ entre t et $t+h$

$$v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) = v(t,x) + \int_t^{t+h} (\frac{\partial v}{\partial s} + \mathcal{L}^\alpha v)(s, X_s^{t,x})ds + \text{martingale (locale)}, \tag{2.18}$$

où $\mathcal{L}^\alpha$ est l'opérateur associé à la diffusion (2.1) pour le contrôle constant α et défini par

$$\mathcal{L}^\alpha v = b(t,x,\alpha).D_x v + \frac{1}{2} tr(\sigma(t,x,\alpha)\sigma^\intercal(t,x,\alpha) D_x^2 v).$$

En substituant dans (2.17) , on obtient alors

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} (\frac{\partial v}{\partial s} + \mathcal{L}^\alpha v)(s, X_s^{t,x})ds + f(s, X_s^{t,x}, \alpha)ds\right].$$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on a

$$0 \leq \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha} v(t,x) + f(t,x,\alpha).$$

Ceci étant valable pour tout $\alpha \in U$, on a l'inégalité

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{\alpha \in U}\left[-\mathcal{L}^{\alpha} v(t,x) - f(t,x,\alpha)\right] \leq 0. \tag{2.19}$$

D'autre part, supposons que u^* est un contrôle optimal. Alors dans (2.13) , on a

$$v(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^*, u_s^*)ds + v(t+h, X_{t+h}^*)\right],$$

où X^* est l'état du système solution de (2.1) partant de x en t avec le contrôle u^*. Par un argument similaire et avec des conditions de régularités sur v, on obtient d'après (2.18)

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{u_t^*} v(t,x) - f(t,x,u_t^*) = 0, \tag{2.20}$$

ce qui combiné avec (2.19) suggère que v doit satisfaire

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{\alpha \in U}\left[-\mathcal{L}^{\alpha} v(t,x) - f(t,x,\alpha)\right] = O, \ \forall \ (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n, \tag{2.21}$$

si le supremum ci-dessus en α est fini. Il ya un autre cas où le supremum est infini, ce qui peut intervenir lorsque l'espace des contrôles U est non borné. On récrit souvent cette équation aux dérivées partielles (EDP) sous la forme

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + H(t,x,u_t,D_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) = 0, \ \forall \ (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n, \tag{2.22}$$

où pour $(t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S_n$ (S_n est l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques)

$$H(t,x,u_t,p,M) = \sup_{u \in U} \left[-b(t,x,u_t).p - \frac{1}{2} tr(\sigma\sigma^{\intercal}(t,x,u_t)M) - f(t,x,u_t) \right].$$

Cette fonction H est appelée Hamiltonien du problème de contrôle considéré. Cette équation (2.22) est appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) . A cette équation aux dérivées partielles, il faut ajouter la condition terminale

$$v(T,x) = g(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.23}$$

qui résulte immédiatement de la définition (2.8) de la fonction valeur v.

(i) Lorsque l'ensemble des contrôles est réduit à un singleton $\{u_0\}$, c'est à dire qu'il n'y a pas de contrôle sur l'état du système, l'EDP d'HJB se réduit au problème d'EDP linéaire de *Cauchy* :

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \mathcal{L}^{u_0} v(t,x) = f(t,x,u_0), \ \forall \ (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n \\ v(T,x) = g(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.24}$$

(ii) L'argument d'optimalité de la programmation dynamique suggère que si l'on peut trouver un contrôle $u^*(t,x)$ tel que

$$\sup_{\alpha \in U} [-\mathcal{L}^{\alpha} v(t,x) - f(t,x,\alpha)] = -\mathcal{L}^{u^*(t,x)} v(t,x) - f(t,x,u^*(t,x)),$$

c'est à dire que

$$u^*(t,x) \in \arg\min_{\alpha \in U} [\mathcal{L}^{\alpha} v(t,x) + f(t,x,\alpha)] \, ,$$

alors on aura

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \mathcal{L}^{u^*(t,x)}\upsilon(t,x) - f(t,x,u^*(t,x)) = 0,$$

et donc

$$\upsilon(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X_s^*, u^*(s, X_s^*))ds + g(X_T^*)\right],$$

où X^* est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t^* = b(t, X_t^*, u^*(t, X_t^*)) + \sigma(t, X_t^*, u^*(t, X_t^*))dw_t, \\ X_t^* = x, \end{cases}$$

et u^*est un contrôle optimal *markovien*.

2.2.2 Théorème de vérification

L'étape cruciale dans l'approche classique de la programmation dynamique consiste à montrer, étant donnée une solution régulière de l'équation d'HJB, que ce candidat, sous des conditions suffisantes, coïncide avec la fonction valeur. Ce résultat est appelé théorème de vérification et permet aussi d'obtenir un contrôle optimal. Il repose essentiellement sur la formule d'Itô. Les énoncés peuvent varier d'un problème à l'autre au niveau des conditions suffisantes requises. Celles-ci doivent être adaptées au cadre des hypothèses du problème particulier considéré. Nous proposons ici une version assez générale compte tenu du contexte défini au paragraphe 2.1.1.

Théorème 2.2.2 (Horizon fini) *Soit* $w \in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n)\cap C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *à croissance quadratique, i.e.il existe une constante* C *telle que :*

$$|w(t,x)| \leq C(1+|x|^2),\ \forall\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

1. Supposons que

$$\begin{cases} -\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \sup\limits_{u \in U} [-\mathcal{L}^{u_t} w(t,x) - f(t,x,u_t)] \leq 0, \\ w(T,x) \leq g(x), \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.25}$$

   Alors $w \leq \upsilon$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.

2. De plus supposons que $w(T,.) = g(.)$, il existe $\hat{u}_t = \hat{u}(t,x)$ mesurable, pour tout $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$ telle que

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)+\sup_{u \in U}[-\mathcal{L}^{u_t} w(t,x) - f(t,x,u_t)] = -\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)-\mathcal{L}^{\hat{u}(t,x)} w(t,x)-f(t,x,\hat{u}(t,x)) = 0,$$

   L'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X_t, \hat{u}(t,x))dt + \sigma(t, X_t, \hat{u}(t,x))dW_t,$$

   admet une solution $\hat{X}_s^{t,x}$ pour chaque donnée initiale $X_t = x$ et le processus $\hat{u}_t = \hat{u}(t,x)$ est un processus de contrôle optimal $Markovien$ bien défini dans $\mathbb{R}^n$, alors on trouve que $w = \upsilon$.

Preuve.

1. Puisque $w \in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n)$, on a pour tous $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$, $u \in U(t,x)$, $s \in [t,T[$ et pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[t,+\infty[$,
   par la formule d'Itô

$$\begin{aligned} w(s \wedge \tau, X_{s\wedge\tau}^{t,x}) = w(t,x) + \int_t^{s\wedge\tau} \frac{\partial w}{\partial r}(r, X_r^{t,x}) + \mathcal{L}^{u_r} w(r, X_r^{t,x}) dr \\ + \int_t^{s\wedge\tau} D_x w(r, X_r^{t,x})^\intercal \sigma(r, X_r^{t,x}, u_r) dW_r. \end{aligned}$$

   On choisit $\tau = \tau_n = \inf\left\{s \geq t : \int_t^s \left|D_x w(r, X_r^{t,x})^\intercal \sigma(r, X_r^{t,x}, u_r)\right|^2 dr \geq n\right\}$ en notant que $\tau_n \nearrow +\infty$ quand n tend vers l'infini.

Le processus arrêté, $\left\{\int_t^{s\wedge\tau_n} D_x w(r, X_r^{t,x})^\intercal \sigma(r, X_r^{t,x}, u_r)dW_r,\ t \leq s \leq T\right\}$ est donc une martingale et on a en prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left[w(s, X_s^{t,x})\right] = w(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^s \frac{\partial w}{\partial r}(r, X_r^{t,x}) + \mathcal{L}^{u_r} w(r, X_r^{t,x})dr\right]. \tag{2.26}$$

$\int_t^s D_x w(r, X_r^{t,x})^\intercal \sigma(r, X_r^{t,x}, u_r)dW_r$ est une martingale donc

$$\mathbb{E}\left[\int_t^s D_x w(r, X_r^{t,x})^\intercal \sigma(r, X_r^{t,x}, u_r)dW_r\right] = 0,$$

et quand w satisfait (2.25) on a

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \mathcal{L}^{u_r} w(t,x) + f(t,x,u_t) \geq 0, \tag{2.27}$$

la fonction $w \in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n) \cap C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, pour tout $0 \leq t \leq r \leq s \leq T$, et on a par (2.26)-(2.27) , $\forall\ t \leq r \leq s$,

$$\mathbb{E}\left[w(s, X_s^{t,x})\right] - w(t,x) \geq -\mathbb{E}\left[\int_t^s f(r, X_r^{t,x}, u_r)dr\right],\ \forall\ u \in U(t,x).$$

nous prenons maintenant la limite comme $s \to T$, et quand $w\left(T, .\right) \leq g$ nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x})\right] \geq w(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^T f(r, X_r^{t,x}, u_r)dr\right],\ \forall\ u \in U(t,x),$$

$$w(t,x) \leq \mathbb{E}\left[\int_t^T f(r, X_r^{t,x}, u_r)dr + g(X_T^{t,x})\right],\ \forall\ (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n$$

donc on peut écrire

$$w(t,x) \leq \sup_{u\in U(t,x)} \mathbb{E}\left[\int_t^T f(r, X_r^{t,x}, u_r)dr + g(X_T^{t,x})\right],\ \forall\ (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^n,$$

donc

$$w(t,x) \leq v(t,x).$$

2. On a $\hat{X}_s^{t,x}$ est une solution de $l'EDS$

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \hat{u}\,(t,x))dt + \sigma\,(t, X_t, \hat{u}\,(t,x))\,dW_t, \\ X_t = x. \end{cases}$$

On applique la formule d'Itô sur la fonction $w(s, \hat{X}_s^{t,x})$ entre t et s, puis en prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left[w(s, \hat{X}_s^{t,x})\right] = w(t,x) + E\left[\int_t^s \frac{\partial w}{\partial r}(r, \hat{X}_r^{t,x}) + \mathcal{L}^{\hat{u}_r} w(r, \hat{X}_r^{t,x}) dr\right].$$

Où $\int_t^s D_x w(r, X_r^{t,x})^\intercal \sigma(r, X_r^{t,x}, u_r) dW_r$ est une martingale et par la définition de $\hat{u}$:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} - \mathcal{L}^{\hat{u}_t} w(t,x) - f(t,x,\hat{u}_t) = 0,$$

alors on trouve

$$\mathbb{E}\left[w(s, \hat{X}_s^{t,x})\right] - w(t,x) = -\mathbb{E}\left[\int_t^s f(r, \hat{X}_r^{t,x}, \hat{u}_r) dr\right].$$

Et on a

$$w(T,x) = g(x),$$

alors

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \mathbb{E}\left[\int_t^T f(r, \hat{X}_r^{t,x}, \hat{u}_r) dr + g(\hat{X}_T^{t,x})\right] \\ &= J(t,x,\hat{u}). \end{aligned}$$

Qui nous donne

$$w(t,x) \geq v(t,x),$$

en même temps que la condition terminale $w(T,x) = g(x)$. Donc on trouve que $w = v$, avec $\hat{u}_s$ un contrôle optimal Markovien $\hat{u}_s = \hat{u}\left(s, \hat{X}_s^{t,x}\right)$ avec l'état correspondant $\hat{X}$.

En sait que dans la vérification des conditions (2) dans le théorème **??**, il n'est pas toujours facile d'obtenir l'existence d'une solution pour l'EDS associée au candidat pour le contrôle optimal.

■

Remarque 2.2.2 *Dans le cas particulier où l'espace des contrôles U est réduit à un singleton $\{u_0\}$, ce théorème de vérification est une version du théorème de représentation de* **Feynman-Kac** *il stipule que si w est une fonction $C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}_n) \cap C^0([0,T[\times\mathbb{R}^n)$ à croissance quadratique solution du problème de Cauchy (2.24), alors w admet la représentation :*

$$w(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, u_0)ds + g(X_T^{t,x})\right].$$

Chapitre 3

Problème d'optimisation de portefeuille

3.1 Problème de portefeuille

Définition 3.1.1 *Un portefeuille est une gamme d'investissements financiers (actions, obligations, matières premières, liquidités, etc.) détenu par une personne ou une organisation. La valeur d'un portefeuille ϕ au temps t, en supposant que nous ayons un actif sans risque (obligation) S_t^0 avec un taux d'intérêt fixe sans risque r et un actif risqué (stock) S_t^1 est donné par*

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t^1,\ t \in [0, T]\,, \tag{3.1}$$

où $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ est un processus prévisible (ie : càdlàg, processus adapté donnant le nombre d'unités détenues à l'instant t). Ici, $V_t(\phi) = V^\phi(t)$ défini par l'équation (3.1) décrit le processus de richesse correspondant.

Le portefeuille (ϕ) est autofinancé si la somme de la fortune initiale V_0 le gain totale de l'actif sans risque et le gain totale risqué de l'action sont égales à la valeur de la *portefeuille [1]. En particulier, ϕ s'autofinance avec de la valeur :*

$$V_t(\phi) = V_0 + \int_0^t \phi_s^0 dS_s^0 + \int_0^t \phi_s^1 dS_s^1 \tag{3.2}$$

$$\Longleftrightarrow dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t^1 dS_t^1, \tag{3.3}$$

telle que V_0 est $\mathcal{F}_0$-mésurable.

Remarque 3.1.1 *Étant donné ϕ le nombre d'actions et chaque action vaut S_t, le gain totale sur $[0,T]$ être $\sum\limits_{i=0}^{n} \phi_i(S_{T_i+1} - S_{T_i}) = \int_0^T \phi_t dS_t$ [1]. Sans risque signifie simplement que l'investisseur reçoit le montant promis à l'échéance.*

Exemple 3.1.1 *Considérez un stock avec un prix $S_t^1 = W_t$, avec W_t comme le mouvement brownien habituel, Donné $S_t^0 = 1$, $\phi_t^0 = -t - W_t^2$, et $\phi_t^1 = 2W_t$ pour tous les t. La valeur du portefeuille est donnée par*

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t^1 \\ &= \left(-t - W_t^2\right).1 + 2W_t.W_t \\ &= W_t^2 - t. \end{aligned}$$

Ensuite, appliquon la formule d'Itô avec $f(t,x) = x^2 - t$, nous avons : $f_t = -1$, $f_x = 2x$ et $f_{xx} = 2$. Donc

$$\begin{aligned} dV_t(\phi) &= -1dt + 2W_t dW_t + \frac{1}{2}.2dt \\ &= 2W_t dW_t. \end{aligned}$$

Vérification de l'autofinancement

$$\begin{aligned}\phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t^1 dS_t^1 &= \left(-t - W_t^2\right).0 + 2W_t dW_t \\ &= 2W_t dW_t \\ &= dV_t(\phi),\end{aligned}$$

et par conséquent $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ *est un portefeuille autofinancé.*
Le portefeuille ϕ *est admissible s'il est autofinancé et la richesse correspondante* $V_t(\phi) = V^\phi(t)$ *est positif pour presque sûrement tous* t. *Il est utile d'exprimer un portefeuille (autofinancé) comme un problème de portefeuille dont nous avons discuté jusqu'à présent.*

3.1.1 Optimisation d'un problème de portefeuille

Supposons que nous considérions un marché financier avec deux possibilités d'investissement :

1. Un investissement sans risque (une obligation), avec un prix unitaire S_t^0 au temps $t \in [0, T]$ donné par :

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt,\ S_0^0 = 1.$$

2. Un investissement risqué (stock), avec un prix unitaire S_t^1 au temps t donné par

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 \left[\alpha_t dt + \beta_t dB_t\right], \\ S_0^1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Ici r_t est une fonction déterministe donnée, α_t et β_t sont des processus $\mathbb{F}$-prévisibles et $T > 0$ est un temps terminal.

Définisson $S_t = (S_t^0, S_t^1)$ et soit π_t (supposé autofinancé) pour désigner la fraction de la richesse actuelle à l'instant t, investi dans l'actif risqué. Ensuite, le reste $(1-\pi_t)$ est la fraction investie dans l'actif sans risque *i.e.*

$$(1-\pi_t) V_t = \phi_t^0 S_t^0 \Longleftrightarrow 1-\pi_t = \frac{\phi_t^0 S_t^0}{V_t}. \tag{3.4}$$

Et

$$\pi_t V_t = \phi_t^1 S_t^1 \Leftrightarrow \pi_t = \frac{\phi_t^1 S_t^1}{V_t}. \tag{3.5}$$

Le processus de richesse correspondant $V_t = V_t^{\pi}$ satisfait le EDS :

$$\begin{aligned}
dV_t &= \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t^1 dS_t^1 \\
&= \frac{(1-\pi_t) V_t}{S_t^0} dS_t^0 + \frac{\pi_t V_t}{S_t^1} dS_t^1 \\
&= \frac{(1-\pi_t) V_t}{S_t^0} \left[r_t S_t^0 dt \right] + \frac{\pi_t V_t}{S_t^1} \left[S_t^1 (\alpha_t dt + \beta_t dB_t) \right] \\
&= V_t \left[\{ (1-\pi_t) r_t + \pi_t \alpha_t \} dt + \pi_t \beta_t dB_t \right].
\end{aligned}$$

En particulier, pour $r_t = 0$, la richesse correspondante satisfait l'équation d'état

$$\begin{cases} dV_t = \pi_t V_t \left[\alpha_t dt + \beta_t dB_t \right], \\ V_0 = \upsilon \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.6}$$

Remarque 3.1.2 *Un marché boursier présente des fluctuations et les investisseurs sont confrontés à l'incertitude. Une question préoccupante est de savoir quand est le moment idéal pour investir (acheter ou vendre) et par conséquent les actions sont considérées comme un exemple parfait d'actif risqué.*

Exemple 3.1.2 *Nous considérons un marché avec deux titres, un actif sans risque* *représenté dans une banque [5]*

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt, \\ S_0^0 = 0, \end{cases}$$

où r *représente le taux d'intérêt et un stock risqué dont le processus de prix satisfait l'équation différentielle stochastique :*

$$dS_t^1 = bS_t^1 dt + \sigma S_t^1 dW_t,$$

les paramètres du marché b *et* σ *sont respectivement le taux rendement moyen et la volatilité, supposons que* $b > r > 0$, *et* $\sigma > 0$. *Le processus* W_t *est un mouvement brownien.*

Dans une banque de prix S^0, *avec taux d'intérêt* r, *L'investisseur fait face à la contrainte de portefeuille à tout moment* t, u_t *est appelé un portefeuille de l'investisseur à valeurs dans* U *l'ensemble de tout les processus progressivement mesurable.*

On considère la fortune totale $X_t = \eta_t^0 S_t^0 + \eta_t^1 S_t^1$, *avec* η_t^0 *et* η_t^1 *représentent les avoirs actuels dans la banque et on stock, l'équation de la richesse est donnée par :*

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{X_t u_t}{S_t^1} dS_t^1 + \frac{X_t (1 - u_t)}{S_t^0} dS_t^0 \\ &= X_t (u_t b + (1 - u_t) r) dt + X_t u_t \sigma dW_t. \end{aligned}$$

L'équation devient

$$\begin{cases} dX_t = X_t (r + u_t (b - r)) dt + X_t u_t \sigma dW_t, \\ X_t = x. \end{cases}$$

telle que $\mathbb{E}\left[\int_0^T |u_s|^2 ds\right] < +\infty$ *p.s, cette condition intégrabilité assure l'existence et l'unicité d'une solution à l'EDS.*

Le processus de richesse doit satisfaire :

$$X_s \geq 0, \ \mathbb{P}.p.s \ \forall \ t \leq s \leq T.$$

L'agent souhaite maximiser l'utilité attendue de la richesse terminale, la fonction de valeur du problème de maximisation de l'utilité est alors définie par :

$$\upsilon\left(t,x\right) = \sup_{u\in U}\mathbb{E}\left[g\left(X_T^{t,x}\right)|X_t = x\right], \ \forall \ \left(t,x\right) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+, \tag{3.7}$$

On va prendre

$$g(x) = x^p, \ x \geq 0, \ p < 1.$$

Dans ce cas l'équation d'HJB du problème (3.7) est

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + \inf_{u\in U}\left[-\mathcal{L}^{u_t}w\left(t,x\right)\right] = 0, \tag{3.8}$$

$$w\left(T,x\right) = g(x). \tag{3.9}$$

telle que

$$\mathcal{L}^{u_t}w\left(t,x\right) = x_t\left(u_t b + \left(1-u_t\right)r\right)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}x_t^2 u_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

En utilisant l'analyse stochastique et dans des conditions de régularité et de croissance quadratique sur la fonction de valeur, nous obtenons que υ résout l'équation d'HJB qui associée, pour $x \geq 0$ et $t \in [0,T]$,

$$\begin{cases} -w_t + \inf_{u\in U}\left[-\frac{1}{2}x_t^2\sigma^2 u_t^2 w_{xx} - x_t\left(b-r\right)u_t w_x\right] - r x_t w_x = 0 \\ w\left(T,x\right) = x^p, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}_+^*, \\ w\left(t,0\right) = 0, \ \ \forall \ t \in [0,T], \end{cases}$$

telle que : $w_t = \frac{\partial w}{\partial t}(t,x)$, $w_x = \frac{\partial w}{\partial x}(t,x)$ et $w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x)$.

On cherche une solution lisse pour (3.8) de la forme

$$w\,(t,x) = x^p f(t), \quad avec\ f\,(T) = 1,$$

où $f(t)$ est fonction positive.

En utilisant la forme ci-dessus dans (3.8) et après quelques opérations, on obtient que f satisfaire l'équation du premier ordre suivant

$$\begin{cases} -f'\,(t) + \lambda f(t) = 0, \\ f\,(T) = 1, \end{cases} \tag{3.10}$$

où

$$\lambda = \inf_{u \in U} \left[-u_t p\,(b-r) - pr + \frac{1}{2} u_t^2 p\,(1-p)\,\sigma^2 \right].$$

Par la résolution de l'équation de premier ordre (3.10) on obtient

$$f(t) = \exp\left(-\lambda\,(T-t)\right).$$

Donc la solution de l'équation (3.8) est donné par

$$w\,(t,x) = x^p \exp\left(-\lambda\,(T-t)\right). \tag{3.11}$$

C'est la solution classique et d'aprés le théorème de vérification qui prouve que la fonction valeur υ du problème de maximisation (3.8) est la fonction (3.11).

On résoud $\inf\limits_{u \in U} \left[-\mathcal{L}^{u_t} w\,(t,x)\right]$ comme un problème de minimisation dans $\hat{u}_t \in U$ noter par $\hat{u}\,(t,x)$,

$$\hat{u}\,(t,x) = -\frac{(b-r)\,w_x\,(t,x)}{x_t \sigma^2 w_{xx}\,(t,x)},$$

ou autrement

$$\hat{u}\,(t,x) = \frac{(b-r)}{\sigma^2\,(1-p)},$$

où nous avons utilisé (3.11) ensuite, nous rappelons les résultats de la vérification classique, qui donnent que la solution donnée dans (3.11) est en effet la fonction de valeur $\upsilon(t,x)$ et que de plus la stratégie :

$$\hat{u}(t,x) = \frac{(b-r)}{\sigma^2(1-p)},$$

avec

$$\lambda = -\frac{(b-r)^2}{2\sigma^2}\frac{p}{(1-p)} - rp,$$

est la stratégie d'investissement optimal, en d'autres termes

$$\upsilon(t,x) = \sup_{u\in U}\mathbb{E}\left[\hat{X}_T^p \middle| \hat{X}_t = x\right].$$

De plus, l'équation de la richesse associée au contrôle constant $\hat{u}$

$$dX_t = X_t(\hat{u}b + (1-\hat{u})r)\,dt + X_t\hat{u}\sigma dW_t,$$

où $\hat{X}_s$ résout l'EDS suivante

$$d\hat{X}_s = \left(r + \frac{(b-r)^2}{(1-p)\sigma^2}\right)\hat{X}_s ds + \frac{(b-r)}{\sigma(1-p)}\hat{X}_s dW_s,$$

la solution de l'équation de richesse d'état optimal, pour $X_t = x$ est

$$\hat{X}_s = x\exp\left[\left(r + \frac{(b-r)^2}{(1-p)\sigma^2} - \frac{(b-r)^2}{2(1-p)^2\sigma^2}\right)(s-t) + \frac{(b-r)}{\sigma(1-p)}W_{s-t}\right].$$

La fonction de valeur υ n'a souvent pas les propriétés de régularité nécessaire pour l'interpréter comme une solution à l'équation différentielle partielle de la programmation dynamique dans le sens classique.

Bibliographie

[1] Jahic Pettersson, A., Danielsson, K., & Rundgren, C. J. (2020). 'Traveling nutrients' : how students use metaphorical language to describe digestion and nutritional uptake. International Journal of Science Education, 42(8), 1281-1301.

[2] Markowitz, H. (1959). Portfolio selection, cowles foundation monograph No. 16. John Wiley, New York. S. Moss (1981). An Economic theory of Business Strategy, Halstead Press, New York. TH Naylor (1966). The theory of the firm : a comparison of marginal analysis and linear programming. Southern Economic Journal (January), 32, 263-74.

[3] MBITI, J. N. (2021). Deep learning for portfolio optimization.

[4] Peng, S. (1992). A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equation. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 38(2), 119-134.

[5] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[6] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquéesci-dessous :

$E(.)$	:	espérence mathématique.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	:	espace de probabilité filtré.
W_t	:	mouvement brownien.
EDS	:	equation différentielle stochastique.
EDP	:	equation différentielle partielle .
U	:	ensemble des processus de contrôle admissible.
u_t	:	contrôle admissible.
$\hat{u}_t$	:	contrôle optimale.
$J(t, x, u)$	:	la fonction de coût.
$\upsilon(t, x)$	:	la fonction de valeur.
HJB	:	l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman.
$\mathcal{L}^u$	:	l'opérateur linéaire de $2^{ème}$associés au processus contrôlés u.
$D_x \upsilon$	:	le gradiant de la fonction valeur par rapport à la variable x.
$D_x^2 \upsilon$	:	la hesienne de la fonction valeur par rapport à la variable x.
$\mathbb{P}$-$p.s$	:	presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
H	:	le hamiltonien du problème de contrôle.

$\Gamma_{t,T}$	:	l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[t, T]$.
$L^0(\mathbb{F})$	:	est l'ensemble des variable aléatoires $\mathbb{F}$-mesurable.

ملخص

نهتم في هذه المذكرة بدراسة مشكلة التحكم الأمثل للعشوائية والبحث عن حل لها من خلال استخدام مبدأ البرمجة الديناميكية فهو يعتبر مبدأ أساسي لنظرية التحكم العشوائية، حيث ندرس الصياغة العامة لهذا المبدأ وبشكل أكثر عمومية عملية ماركوف بإضافة الى معادلة هاملتون بلمان جاكوبي المرتبطة بهذا المبدأ. نقدم تطبيق لمبدأ البرمجة الديناميكية بهدف العثور على محفظة مثالية في السوق

الكلمات المفتاحية

هاملتون بلمان جاكوبي، البرمجة الديناميكية، ماركوف

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude du problème du contrôle stochastique optimal et à la recherche d'une solution à celui-ci par l'utilisation du principe de programmation dynamique, il est considéré comme un principe de base de la théorie du contrôle stochastique, où nous étudions la formulation générale de ce principe et plus généralement les contrôles du processus de Markov en plus à l'équation de Hamilton-Bellman-Jacobi associée à ce principe. Nous proposons une application pour les principes de programmation Dynamique dans le but de trouver le portefeuille parfait sur le marché.

Mots clés :

Hamilton-Bellman-Jacobi, programmation Dynamique, Markov.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of the problem of optimal stochastic control and in the search for a solution to it by using the dynamic programming principle, it is considered as a basic principle of the theory of stochastic control, where we study the general formulation of this principle and more generally the controls of the Markov process in addition to the Hamilton-Bellman-Jacobi equation associated with this principle. We propose an application for the principles of programming Dynamic with the aim of finding the perfect portfolio on the market.

Key words :

Hamilton-Bellman-Jacobi, programming Dynamic, Markov**.**