République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par :

Saadouni Nadjet

Titre :

Principe du maximum pour les EDSRs localement Lipschitziennes

Devant le Jury :

Mr.	Boulakhras Gherbal	Pr.	U. Biskra	Président
Mme.	Bougherara Saliha	Dr.	U. Biskra	Rapporteur
Mr.	Mezerdi Mohamed Amine	Dr.	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 18/06/2023.

Dédicace

Je dédie cet humble ouvrage

À mes trés chers parents ***Ahmad*** *et* ***Fatna*** *et ma grand mère Zahra et a mon cher frère, mon soutien et prunelle de mes yeux Muhammad*

Les êtres les chérs a mon coeur.

Et à ma soeur Zahra et Hanan

A la fille la plus chére de tante Hanan

Et mon cher ami Ahlam et Sadika

Remerciements

J'exprime d'abord mes profonds remerciements à mon "DIEU" qui m'a donné le courage et la volonté d'achènes ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **Dr. Bougherara Saliha,** pour ces conseils, sa grande disponibilité et sa générosité avec laquelle elle m'a fait partager ces travaux, ses idées et ses intuitions.

Je remercie également les membres du jury : **Pr. Boulakhras Gherbal** et **Dr. Mezerdi Mohamed Amine** pour a accepté d'évaluer et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.

A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Nadjet.

Table des matières

Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant les conditions habituelles, $T > 0$ un temps fini fixé et $W_t = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimensionnel. On considéré les équations différentielles stochastiques rétrogrades :

$$\begin{cases} -dy_t = f(t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \xi, \end{cases}$$

où :

- $y_T = \xi$: La condition terminale, $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable. Et $(y(.), z(.))$ la solution du équation différentielle stochastique rétrograde où $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$.
- f : Le générateur qui est une fonction progressivement mesurable donnée tel que f est localement Lipschitz par rapport aux variables d'état y et z.

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades, notées EDSRs, ont été introduites pour la première fois en 1973 par J. M. Bismut dans le cas linéaire. Le premier résultat dans le cas général a été publié en 1990 par S. Peng et E. Pardoux ([7]). En 1996, S. Hamadene ([3]) est étudié des EDSR dont le générateur est seulement localement Lipschitzien. L'objectif est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Ce problème du contrôle consiste à minimiser sur l'ensemble des contrôles admissibles, le coût suivant :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[h(y_0)\right],$$

où, h est de fonction donnée, $u : [0,T] \times \Omega \to U$ et u est un processus $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adapté, toute élément u de $\mathcal{U}$ est appelé contrôle admissible. Un contrôle admissible $\hat{u}(.) \in \mathcal{U}$ est dit contrôle optimal, s'il vérifie l'égalité suivante :

$$J(\hat{u}(.)) = \inf_{u(.)\in\mathcal{U}} J(u(.)).$$

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

◁ Dans le premier chapitre, on présente des généralités sur les processus stochastiques : processus à accroissements indépendants stationnaires (P.A.I.S), mouvement Brownien, martingale, formule d'Itô.

◁ Dans le deuxième chapitre, on va expliquer le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dont les coefficients sont globalement Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 avec le générateur f non linéaire et une donnée terminale de carré intégrable. En plus, le résultat l'existence et l'unicité de la solution pour l'EDSR telle que le générateur est localement Lipschitzien en (y,z) et la condition terminale est bornée. Ce résultat a été obtenu par S. Hamadene en 1996 tel que l'idée de la preuve du résultat principal est basé sur un argument d'approximation.

◁ Dans le dernière chapitre, on va étudier le problème du contrôle optimal par le principe du maximum stochastique pour les EDSRs localement Lipschitziennes (Voir [1]).

Chapitre 1

Calcul stochastique

Dans ce premier chapitre, on donne de définition de processus stochastique et leurs concepts comme : Martingale et Mouvement Brownien.

1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est une modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant le temps.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *: Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables X_t indexée par un ensemble T. En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$et on considère que le processus est indexé par le temps t. Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $T \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *: Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.*

Définition 1.1.2 *:*

1. *Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.*
2. *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.3 *: Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une filtration sur cet espace est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$, indexée par $[0, \infty]$, de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On a alors, pour tous $0 \leq s < t$,*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}.$$

On dira parfois que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré..

Définition 1.1.4 *:*

1. (Adapté) *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit adapté si pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
2. (Mesurable) *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit mesurable si l'application suivante est mesurable :*

$$X : \begin{cases} (\mathbb{R}_+ \times \Omega, B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, \omega) & \mapsto & X_t(\omega). \end{cases}$$

3. (Progressif) *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour tout $t \geq 0$ l'application suivante est mesurable :*

$$X : \begin{cases} ([0, t] \times \Omega, B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_t) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (s, \omega) & \mapsto & X_s(\omega). \end{cases}$$

Définition 1.1.5 *: On dit que le processus est à trajectoires continues si les applications $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.6 *: Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.*

Définition 1.1.7 *: A un processus stochastique X on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c'est à dire la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.*

Définition 1.1.8 *: On dit que deux processus X et Y sont égaux à une modification prés si $X_t = Y_t$ p.s.$\forall t$.*

Définition 1.1.9 *: Deux processus sont égaux en loi $X \overset{loi}{=} Y$ si pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n)$ et pour tout n, on a*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \overset{loi}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}).$$

Définition 1.1.10 *:*

1. *Un processus est dit (strict) stationnaire si pour tout $h \geq 0$, $(X_{t+h})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} (X_t)_{t\geq 0}$ ne dépend pas de $h > 0$, c'est à dire pour tout $h > 0$ et tout $t_1, ..., t_p \geq 0$, on a :*

$$(X_{t_1+h}, ..., X_{t_p+h}) \overset{\mathcal{L}\mapsto}{=} (X_{t_1}, ..., X_{t_p}).$$

2. *Un processus est dit à accroissements stationnaires si la loi des accroissements $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de $t > 0$, i.e. $X_{t+h} - X_t \overset{\mathcal{L}}{=} X_h$.*
3. *Un processus X est dit à accroissements indépendants si pour tout $p \geq 1$ et $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ sont indépendantes.*

Définition 1.1.11 *: Un processus $A = (A_t, t \geq 0)$ est processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \mapsto A_t$ est une fonction croissante, c'est-à-dira*

$$A_t(\omega) \leq A_s(\omega) \quad \forall t \leq s, p.s.$$

Définition 1.1.12 *:*

1. *Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation bornée sur $[0, t]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_i \left|V_{t_{i+1}} - V_{t_i}\right| \leq K,$$

le sup étant pris sup les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

2. *Un processus* $V = (V_t, t \geq 0)$ *est dit à variation fini sur* $[0, t]$ *si*

$$\sup_{t_i} \sum_i \left| V_{t_{i+1}} - V_{t_i} \right| \leq K,$$

le sup étant pris sur les subdivision $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

1.1.2 Martingales

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable.

Définition 1.1.13 : *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *adapté par rapport une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et tel que pour tout* $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ *est appelé :*

1. *Une martingale si pour* $s \leq t : \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$;
2. *Une sur-martingale si pour* $s \leq t : \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq X_s$;
3. *Une sous-martingale si pour* $s \leq t : \mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq X_s$.

Proposition 1.1.1 *: (Décomposition de Doob) Soit* $(X_t)_t$ *un processus aléatoire intégrable. Alors il existe une martingale* $(M_t)_t$ *et un processus* $\mathcal{F}$*-prévisible* $(V_t)_t$*, tels que :* $M_0 = V_0 = 0$*, et*

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

De plus, cette décomposition est unique.

Définition 1.1.14 *: Un processus* M *adapté, nul en* 0 *est une martingale locale s'il existe une suite croissante* (T_n) *de temps d'arrêts telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ *et que pour tout* n*, le processus arrêté* $M^{T_n} = (M_{T_n \wedge t})$ *est une martingale.*

Définition 1.1.15 *: Un processus adapté et continu* X *est une semi-martingale continue s'il existe une martingale locale* M *et un processus adapté* A*, continu, à variations finies et nul en* 0*, tels que* $X = X_0 + M + A$*. Une telle décomposition est unique.*

Remarque 1.1.2 *: L'unicité de la composition d'une semi-martingale résulte du fait que toute martingale locale, continue, à variation finie est constante. Si :*

$$X = X_0 + M^{(1)} + A^{(1)} = X_0 + M^{(2)} + A^{(2)},$$

on a : $M^{(1)} - M^{(2)} = A^{(1)} - A^{(2)}$ donc $M^{(1)} - M^{(2)}$ est une martingale locale, continue, à variation finie et nulle en 0 donc nulle.

Proposition 1.1.2 *: Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale (respectivement une sous-martingale) et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe (resp. Une fonction convexe croissante). Supposons aussi que $\mathbb{E}[f(X_t)] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors, $(f(X_t))_{t\geq 0}$ est une sous-martingale.*

Preuve. D'après l'inégalité de Jensen. On a pour $s < t$

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] \geq f(\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]) \geq f(X_s),$$

la dernière inégalité utilisant le caractère croissant de f lorsque (X_t) est une sous-martingale. ■

1.1.3 Mouvement Brownien (MB)

Le mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828. Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence à **Wiener** ou $(B_t, t \geq 0)$ en référence à **Brown**.

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.1.16 *: Rappelons qu'un processus $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ à temps continu, a valeur dans $\mathbb{R}$ est un mouvement Brownien de dimension 1 relatif à une filtration $(\mathcal{F}_t)$, si :*

1. *(B_t) est adapté à $(\mathcal{F}_t)$.*
2. *$\forall \omega$, l'application $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\forall t, h$, $B_{t+h} - B_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$;*
3. *$\forall t, h$, $B_{t+h} - B_t$ est de loi normale de moyenne nulle et de variance h : $\mathcal{N}(0, h)$.*

Définition 1.1.17 *: Si $B_0 = 0$, on dit que le mouvement Brownien standard.*

Proposition 1.1.3 *: Si $B = (B_t)$ est un MB alors B est un processus gaussien centré de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = s \wedge t$.*

Preuve. On montre par récurrence que $X_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{t_k}$ est de loi normale :

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=1,n-2} a_k B_{t_k} + (a_n + a_{n-1}) B_{t_{n-1}} + a_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \\ &= X_{n-1} + a_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}). \end{aligned}$$

Les variances X_{n-1} et $a_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ sont indépendants et de lois normales la variance X_n est donc de loi normale. Par ailleurs :

$$\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] = 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}\left[B_s^2\right] = s \quad \text{pour} \quad s < t.$$

■

Définition 1.1.18 *: Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :*

$$X_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-}p.s, \quad \mathbb{E}\left[X_t\right] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}\left[X_t^2\right] = t.$$

Dans ce cas la loi de X_t est une loi normale.

Proposition 1.1.4 *: Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors : le processus $\hat{B}$ défini par $\hat{B}_t = -B_t$ est un mouvement Brownien.*

Proposition 1.1.5 *: Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors :*

i) *Le processus $\tilde{B}$ défini par $\tilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement Brownien.*

ii) *Le processus $\bar{B}$ défini par $\bar{B}_t = t B_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0, \bar{B}_0 = 0$ est un mouvement Brownien.*

Proposition 1.1.6 *: Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard alors B_t est une martingale.*

Proposition 1.1.7 *: Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, alors : $B_t^2 - t$ est une martingale.*

Preuve.

a) *$B_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable car c'est une fonction continue de B_t qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

b) $E[\mid B_t^2 - t \mid] \leq E[\mid B_t^2 \mid] + t = t + t = 2t < \infty$.

c) $\forall s \in [0,t]$ *:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s + B_s)^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left((B_t - B_s)^2 + 2B_s\left(B_t - B_s\right) + B_s^2 - t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2B_s\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] + B_t^2 - t.\end{aligned}$$

On a :

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s,$$

$$et$$

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s\right] = 0.$$

On trouve : $\mathbb{E}\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$, *alors :* $\left\{B_t^2 - t : t \geq 0\right\}$ *est une martingale.*

■

Proposition 1.1.8 *: Soit B un mouvement Brownien alors presque sûrement on a :*

i) *$t \longmapsto B_t(\omega)$ n'est pas différentiable en aucun point t.*

ii) *$t \longmapsto B_t(\omega)$ n'est pas à variation finie en aucun point t.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $B : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $X : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô $\int_0^t \phi_s dB_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de $\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. L'objectif c'est définir l'intégrale

$$\int_0^t \phi_s dB_s,$$

pour des processus ϕ :

◂ Cas étagé

On dit qu'un processus ϕ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable de carré intégrable $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in \left]t_i, t_{i+1}\right]$. Soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

On a et :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 ds\right].$$

Alors :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right).$$

◂ **Cas général**

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ est $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite). Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés, telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2)\, ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une variable aléatoire $I_t(\phi) = \displaystyle\int_0^\infty \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dB_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (B_t) est un processus gaussien alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}\left[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{E}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big) = 0$ car $\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)$ sont à accroissement indépendantes.

Pour montrer que :

$$\mathbb{V}ar\left[I_t(\phi)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[I_t(\phi)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[I_t(\phi)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \phi_s dB_s\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(\phi_i)^2\,\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(\phi_i)^2\left(t_{i+1} - t_i\right) = \int_0^\infty \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

- Linéaire :

$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \phi_s^1 dB_s + b\int_0^t \phi_s^2 dB_s.$$

- Additivité : Pour $0 \leq s < u < t \leq T$

$$\int_s^t \phi_v dB_v = \int_s^u \phi_v dB_v + \int_u^t \phi_v dB_v.$$

- Propriétés de martingale : Pour tout processus ϕ les processus :

$$t \mapsto I_t(\phi) \quad \text{et} \quad t \mapsto I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t(\phi) - I_s(\phi)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^B\right].$$

- Si $(X_t)_{t\in[0,\mathbb{T}]}$ est un processus F_t-adapté et $\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid X_s \mid^2 ds\right] < +\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \mid X_s dB_s\right|^2\right] \le 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid X_s \mid^2 ds\right].$$

- Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 ds\right].$$

1.2.2 Processus d'Itô

Un processus d'Itô est un processus de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe $p.s$ pour tout t, et σ un processus .

On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion. L'écriture $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ est unique (sous réserve que les processus b et σ vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signifie que si

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = dX_t = \tilde{b}_t dt + \tilde{\sigma}_t dB_t,$$

alors $b = \tilde{b}$; $\sigma = \tilde{\sigma}$. En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement. On peut définir processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que :

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}.p.s.$$

Mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie. Si un processus A à variation finie est une martingale, il est constant. En effet, si $A_0 = 0 = 0$, $A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ et par suite $\mathbb{E}(A_t^2) = 0$.

1.2.3 Lemme d'Itô

Première forme : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées. Alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Fonction dépendant du temps : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^2 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à X, à dérivées, on a :

$$f(t,X) \;\; = f(0,X_0) + \int_0^t f_t'(s,X_s)ds + \int_0^t f_x'(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s,X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Ce que l'on note :

$$\begin{aligned} df(t,X) \quad &= \left[f_t'(t,X_t) + \frac{1}{2} f_{xx}''(t,X_t)\,\sigma_t^2 \right] dt + f_x'(t,X_t)dX_t \\ &= f_t'(t,X_t)\,dt + f_x'(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}''(t,X_t)\,d\langle X\rangle_t\,. \end{aligned}$$

Formule d'intégration par parties : Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s \quad \text{et} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t\,.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

Chapitre 2

Equation différentielle stochastique rétrograde (EDSR)

Dans ce chapitre, on explique un résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR telle que le générateur est localement Lipschitzien en (y, z) et la condition terminale est bornée.

2.1 Introduction

On se donne T un temps déterministe fini fixé (appelé aussi l'horizon). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $W = (W_t, t \leq T)$ un mouvement Brownien, où $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle de W.

On voudrait résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$\begin{cases} -dy_t = f(t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

ou sous forme intégrale :

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s)ds - \int_t^T z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

tel que :

- f est une fonction donnée :

$$f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d} \longrightarrow \mathbb{R},$$

où : f s'appelle le générateur de l'EDSR.

- ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}$ où ξ la condition terminale.

Equation différentielle stochastique rétrograde globalement Lipschitzienne

Introduites par Bismut en 1937 dans le cas linéaire et par Pardoux et Peng en 1990 dans le cas général, les équations différentielles stochastiques rétrogrades tel que la valeur terminale de la fonction inconnue est donnée.

Définition 2.1.1 *: Une solution de l'EDSR* (2.1) *est un couple de processus* $\{(y_t, z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *vérifiant :*

1. *y et z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n \times d}$;*
2. *$\mathbb{P}$-p.s.*$\{\int_t^T |f(s, y_s, z_r)| + \|z\|^2\} ds < \infty$;
3. *$\mathbb{P}$-p.s, on a :*

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s) - \int_t^T z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nous allons maintenant donner un résultat d'existence et d'unicité des solutions pour les EDSRs, mais avant de l'énoncer, on a besoin les hypothèses suivantes :

- **Condition de Lipschitz en** (y, z) : Il existe une constante K, telle pour tout t, y, $\bar{y}$, z et $\bar{z}$, $\mathbb{P}$-$p.s$

$$|f(t, y, z) - f(t, \bar{y}, \bar{z})| \leq K(|y - \bar{y}| + \|z - \bar{z}\|).$$

- **Condition d'intégrabilité** : $\mathrm{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 \, ds\right] < \infty.$

Le théorème suivant est de **Pardoux** et **Peng** (**1990**).

Théor■me 2.1.1 *: (**Existence et unicité de solution**) Sous les hypothèses précédentes, l'EDSR (2.1) possède une unique solution (y, z) telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|z_s^2\right\| ds\right] < \infty.$$

De plus le processus y est continu et vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |y_t|^2\right] < \infty.$$

Preuve. voir ([7]). ■

2.2 Equation différentielle stochastique rétrograde localement Lipschitzienne

On démontre l'existence et l'unicité de la solution pour l'EDSR unidimensionnelle telle que f est localement Lipschitzienne en (y, z) avec ξ la condition terminale est bornée, $\mathcal{F}_T$-progressivement mesurables sur $\Omega \times [0, T]$. Ce résultat a été obtenu par S. Hamadene en 1996.

Soit $\mathbf{A}$ la tribu des processus tel que f est $\mathbf{A} \otimes B(\mathbb{R}^{p+1})$-mesurable. Nous allons maintenant donner un résultat d'existence et d'unicité des solutions pour les EDSRs localement Lipschitziennes, mais avant de l'énoncer, on a besoin les hypothèses suivantes :

$(\mathbb{H}_1)$ **Condition de croissance raisonnable :** $\exists c > 0, \alpha \in]0, 2[$ et h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ finie sur les compacts tels que pour tout t, ω, y et z, on ait :

$$|f(t, \omega, y, z)| \leq c(1 + |y| + h(y)\,|z|^{\alpha}).$$

$(\mathbb{H}_2)$ **Condition de localement Lipschitz :** $\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0$ tel que : $\forall (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, (y,z)$ et $(\bar{y},\bar{z}) \in [-N,N]^{p+1}$, on a :

$$|f(t,\omega,y,z) - f(t,\omega,\bar{y},\bar{z})| \leq C_N(|y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|).$$

$(\mathbb{H}_3)$ La variable aléatoire ξ est un élément de l'espace de Wiener $\mathbb{D}^{1,2}$. De plus, il existe une constante M telle que $|D_t^i \xi| \leq M, \forall t \leq T,\ i = 1, p$. Où $(D_t^i \xi)_{t \leq T}$ est la dérivée de Wiener d'ordre i de ξ.

$(\mathbb{H}_4)$ f est une application définie sur $[0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ telle que :

a) $\forall t \in [0,T]\,,\ f(t, \centerdot, \centerdot) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)\,.$

b) $\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$,

$$|f(t,y,z)| \leq c(1 + |y| + |z|),$$

et

$$\left|f'_y(t,y,z)\right| \leq c(1 + \ln(1 + \ln(1 + |y| + |z|))).$$

où f'_y est la dérivée partielle de f par rapport à y et c une constante.

Remarque 2.2.1 *: La condition de croissance raisonnable plus faible que la croissance linéaire.*

2.2.1 Existence de la solution

Soit $\Psi : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$) $\mathbf{A} \otimes B(\mathbb{R}^{p+1})$-mesurable vérifiant la condition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists C_n > 0$ tel que : $\forall (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, (y,z)$ et $(\bar{y},\bar{z}) \in [-n,n]^{p+1}$, on a :

$$|\Psi(t,\omega,y,z) - \Psi(t,\omega,\bar{y},\bar{z})| \leq C_n(|y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|). \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *: Si Ψ vérifiant (2.2), alors, il existe une suite (Ψ_n) croissante (resp.$\mathbb{R}^-$, décroissante) $\mathbf{A} \otimes \Psi$-mesurable de limite Ψ vérifiant : $\forall n \geq 0, \exists \alpha_n > 0$ tel que $\forall t, \omega, y, \bar{y}, z$ et $\bar{z}$:*

$$|\Psi_n(t,\omega,y,z) - \Psi_n(t,\omega,\bar{y},\bar{z})| \leq \alpha_n(|y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|).$$

où $\Psi_n : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Preuve. On Suppose que Ψ est à valeur dans $\mathbb{R}^+$. Nous ferons la preuve pour $p = 1$ et si $p \geq 2$ le principe en est le même. Soit $n \geq 0$: Φ_n l'application Lipschitzienne réelle vérifiant :

$$\begin{cases} \Phi_n(y) = 1 & \text{si} \quad |y| \leq n; \\ \Phi_n(y) = 0 & \text{si} \quad |y| \geq n+1; \\ 0 \leq \Phi_n(y) \leq 1 & \text{si} \quad y \in [n, n+1] \cup [-n-1, -n], \end{cases} \qquad , y \in \mathbb{R}.$$

et

$$\begin{cases} \Phi_n(z) = 1 & \text{si} \quad |z| \leq n, \\ \Phi_n(z) = 0 & \text{si} \quad |z| \geq n+1, \\ 0 \leq \Phi_n(z) \leq 1 & \text{si} \quad z \in [n, n+1] \cup [-n-1, -n]. \end{cases} \qquad , z \in \mathbb{R}.$$

Soit Ψ_n, $n \geq 0$, l'application qui a $(t, \omega, y, z) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associe $\Psi(t, \omega, y, z)\, \Phi_n(y)\, \Phi_n(z)$. On a :

- La suite $(\Psi_n)_{n \geq 0}$ est croissante car $\Phi_n \leq \Phi_{n+1}$, $\forall n \geq 0$ et de limite Ψ.
- Par ailleurs Ψ_n, $n \geq 0$ est Lipschitzienne car elle est localement Lipschitzienne à support compact.

$\blacksquare$

Remarque 2.2.2 *:*

- *Si Ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}^-$ alors $-\Psi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de même manière précédente pour obtenir ce résultat.*
- *Pour tout $(t, \omega) \in [0,T] \times \Omega$ fixé, la convergence de la suite $(\Psi_n(t, \omega, \cdot, \cdot))_{k \geq 0}$ vers $\Psi(t, \omega, \cdot, \cdot)$ est uniforme sur les compacts de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.*

D'après le lemme précédent :

$i)$ il existe $(\varphi^n, n \geq 0)$ une suite croissante d'applications lipschitziennes de limite simple $f\mathbf{1}_{\{f \geq 0\}}$ où $f\mathbf{1}_{\{f \geq 0\}}$ satisfaite la condition de localement lipschitz vérifiée par f.

ii) il existe $(\psi^m, m \geq 0)$ une suite décroissante d'applications lipschitziennes de limite simple $f\mathbf{1}_{\{f<0\}}$ où $f\mathbf{1}_{\{f<0\}}$ satisfaite la condition de localement lipschitz vérifiée par f.

On considère alors pour $m \geq 0$ et $n \geq 0$, la suite d'applications $\varphi^{n,m}$ telle que $\varphi^{n,m} = \varphi^n + \psi^m$.

Pour tout m et n, $\varphi^{n,m}$ est Lipschitzienne. De plus :

$$|\varphi^{n,m}(t, \omega, y, z)| \leq c(1 + |y| + h(y)\,|z|^\alpha),$$

pour tout t, ω, y et z. Il s'ensuit que le couple $(\varphi^{n,m}, \xi)$ possède les propriétés de (f, ξ) du théorème ([7]). Par conséquent il existe un couple de processus $(y_\cdot^{n,m}, z_\cdot^{n,m})$ $\mathbf{A}$-mesurable tel que :

a) $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|y_s^{n,m}|^2 + |z_s^{n,m}|^2\right) ds\right] < \infty.$

b) $dy_t^{n,m} = -\varphi^{n,m}\left(t, y_t^{n,m}, z_t^{n,m}\right) dt + z_t^{n,m} dW_t$, $t \leq T$ et $y_T^{n,m} = \xi$.

Lemme 2.2.2 *: Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\|y_\cdot^{n,m}\| \leq C_Y \quad et \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s^{n,m}|^2\, ds\right] \leq C_Z,$$

où C_Y et C_Z sont deux constantes indépendantes de n et m, de plus,

$$\|Y_\cdot^{n,m}\|^* = \sup\left\{\left|Y_t^{n,m}(\omega)\right|, (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega\right\} < \infty.$$

L'idée étant d'approximer f par une suite double $(\varphi^{n,m}, n, m \geq 0)$ d'applications lipschitziennes et de montrer que la limite de la suite $(y_\cdot^{n,m}, z_\cdot^{n,m})$ de solutions associées à $(\varphi^{n,m}, \xi)$ est la solution de l'équation (2.1) associée à (f, ξ).

Théorème 2.2.1 *: Il existe un processus $(y_\cdot, z_\cdot)$ $\mathbf{A}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ tel que :*

(I) $E\left[\int_0^T \left(|y_s|^2 + |z_s|^2\right) ds\right] < \infty,$

(II) $\begin{cases} dy_t &= -f(t, y_t, z_t)dt + z_t dW_t, \ t \leq T, \\ y_T &= \xi. \end{cases}$

De plus, $\|y_.\|^* = \sup\{|y_t(\omega)|, (t,\omega) \in [0,T]\times\Omega\} < \infty$.

Preuve. voir ([3]). ∎

2.2.2 Unicité de la solution

On suppose que les conditions $(\mathbb{H}_3)$ et $(\mathbb{H}_4)$ ci-dessus sont satisfaites.

Proposition 2.2.1 *: Il existe une constante $\eta > 0$ et $y_.$, $z_.$ deux processus* $\mathbf{A}$*-mesurables, à valeurs respectives dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$ tel que :*

i) $\sup\{|y_t| + |z_t| : t \le T\} \le \eta$.

ii) $\begin{cases} dy_t &= -f(t,y_t,z_t)dt + z_t dW_t, \;\; t \le T, \\ y_T &= \xi. \end{cases}$

Théorème 2.2.2 *: Si le couple (f,ξ) vérifie les conditions $(\mathbb{H}_3)$ et $(\mathbb{H}_4)$ ci-dessus, alors la solution de l'équation rétrograde de générateur (f,ξ) (2.1) est unique.*

Preuve. Soit $(\bar{y},\bar{z})$ une autre solution de (2.1). Comme ξ est bornée et f est de croissance linéaire alors $\bar{y}$ est bornée. Par ailleurs pour tout $t\in[0,T]$, on a :

$$\begin{cases} y_t &= \xi + \int_t^T f(s,y_s,z_s)ds - \int_t^T z_s dW_s, \\ \bar{y}_t &= \xi + \int_t^T f(s,\bar{y}_s,\bar{z}_s)ds - \int_t^T \bar{z} dW_s. \end{cases}$$

On approxime f par une suite double $(\varphi^{n,m}, n,m \ge 0)$ d'applications Lipschitziennes telle que :

$$\varphi^{n,m} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{et} \quad |\varphi^{n,m}(t,\omega,y,z)| \le c(1+|y|+h(y)|z|^{\alpha}).$$

On a :

$$\begin{aligned} y_t^{n,m} - \bar{y}_t^{n,m} &= \int_t^T (\varphi^{n,m}(s,y_s^{n,m},z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s,\bar{y}_s^{n,m},\bar{z}_s^{n,m}))ds - \int_t^T \left(z_s^{n,m} - \bar{z}_s^{n,m}\right) dW_s \\ &= \int_t^T (\varphi^{n,m}(s,y_s^{n,m},z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s,\bar{y}_s^{n,m},z_s^{n,m}))ds \\ &+ \int_t^T \varphi^{n,m}(s,\bar{y}_s^{n,m},z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s,\bar{y}_s^{n,m},\bar{z}_s^{n,m})ds - \int_t^T \left(z_s^{n,m} - \bar{z}_s^{n,m}\right) dW_s. \end{aligned}$$

Aussi, appelons $\delta\varphi^{n,m} = ((\delta\varphi^{n,m})_t)_{t\leq T}$ le processus tel que pour tout $t \leq T$,

$$\delta\varphi^{n,m}(t, y_t^{n,m}, z_t^{n,m}) = \begin{cases} \dfrac{\varphi^{n,m}(t, \bar{y}_t^{n,m}, z_t^{n,m}) - \varphi^{n,m}(t, \bar{y}_t^{n,m}, \bar{z}_t^{n,m})}{z_t^{n,m} - \bar{z}_t^{n,m}}, & \text{si } z_t^{n,m} - \bar{z}_t^{n,m} \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La borgnitude de $\bar{y}_{\cdot}^{n,m}$ et $z_{\cdot}^{n,m}$ implique que $\delta\varphi^{n,m}$ est un processus uniformément borné. Il existe donc une probabilité $\mathbb{P}^{n,m}$ sur Ω équivalente à $\mathbb{P}$ telle que :

$$W_t^{n,m} = W_t - \int_0^t \delta\varphi^{n,m}(s, y_s^{n,m}, z_s^{n,m})ds$$

est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{n,m})$-mouvement Brownien. Par suite pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} y_t^{n,m} - \bar{y}_t^{n,m} &= \int_t^T (\varphi^{n,m}(s, y_s^{n,m}, z_s^{n,m}) - \varphi^{n,m}(s, \bar{y}_s^{n,m}, \bar{z}_s^{n,m}))ds \\ &\quad - \int_t^T (z_s^{n,m} - \bar{z}_s^{n,m})\, dW_s^{n,m}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi^{n,m}$ est Lipschitzienne, alors :

$$\mathbb{E}\left[|y_t^{n,m} - \bar{y}_t^{n,m}|\right] \leq c \int_t^T \mathbb{E}\left[|y_s^{n,m} - \bar{y}_s^{n,m}|\right] ds.$$

Tel que :

$$\mathbb{E}\int_0^t \left[(z_s^{n,m} - \bar{z}_s^{n,m})\, |_{\mathcal{F}_t}\right] dW_s^{n,m} = 0 \quad , z_{\cdot}^{n,m} \text{ et } \bar{z}_{\cdot}^{n,m} \in L^2([0,T] \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P}).$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient : $|y_t^{n,m} - \bar{y}_t^{n,m}| = 0, \forall t \leq T$, $\mathbb{P}$-$p.s.$ Et d'après le théorème **(2.2.1)**, on trouve que :

$$y_t^{n,m} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} y_t, \quad \text{et} \quad \bar{y}_t^{n,m} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} \bar{y}_t.$$

On déduire que $y_t = \bar{y}_t$, $\forall t \leq T$ et $z_t = \bar{z}_t$, $\forall t \leq T$. ∎

Chapitre 3

Principe du maximum pour les EDSRs localement Lipschitziennes

Dans ce chapitre, on étudie les conditions nécessaires d'optimalités pour les EDSRs localement Lipschitziennes. Voir l'article Hanine Azizi et Nabil Khelfallah [1].

3.1 Problème de contrôle

La théorie du contrôle a été initialement développée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthèse des systèmes de contrôle et de système dynamique (c'est à dire l'évolution du système au cours du temps).

Il existe essentiellement deux méthodes majeures pour des problèmes des contrôles stochastiques : La programmation dynamique et le principe du maximum stochastique

- La première méthode a elle été introduite par Bellman en **1953**.
- La deuxième méthode a elle été introduite par **Pontryagin** en **1956**. Par nature, le principe du maximum de Pontryagin est une condition nécessaire d'optimalité.

Un problème de contrôle se construit par les caractéristiques suivantes :

- **État du système :** Soit un système dynamique caractérisé par son état à tout instant, le temps peut-être continu ou bien discret. L'horizon (l'intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini. On notera X_t l'état du système à l'instant t.

- **Contrôle** : La dynamique X_t de l'état du système est agi par un contrôle que nous modélisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire que u_t est adapté par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.
- **Critère de coût** : Le but principal du contrôle optimal est de minimiser (ou de maximiser selon le cas un gain ou bien une perte) une fonctionnelle :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, x_t, u_t)dt + g(x_T)\right],$$

sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Classes des contrôles

- **Contrôle admissible :** On appelle un contrôle admissible tout processus $(u_t)_{t\in[0.T]}$ mesurable, intégrable et adapté à une valeur dans un borélien $A \subset \mathbb{R}$; notons par $\mathcal{U}$ l'ensemble tous les contrôles admissibles :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}[0,T] = \{u : [0,T]\times\Omega \to A \ : \ u \text{ mesurable, intégrable et } \mathcal{F}_t \text{ -adapté}\}.$$

- **Contrôle optimal :** Le problème du contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $J(u)$ sur un ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$. On dit que le contrôle $\hat{u}$ est optimal (ex. s'il atteint le minimum) si :

$$J(\hat{u}) \leq J(u) \quad ,\forall u \in \mathcal{U}.$$

- **Contrôle presque optimal :** Soit $\varepsilon > 0$, le contrôle u^ε est dit presque optimal ou bien ε-optimal si :

$$J(u^\varepsilon) \leq J(u) + \varepsilon \quad ,\forall u \in \mathcal{U}.$$

Remarque 3.1.1 *: Il existe de nombre autres classes.*

3.2 Principe du maximum stochastique

Notre objectif dans cette section est d'étudier des conditions nécessaires d'optimalité pour un problème de contrôle stochastique.

3.2.1 Formulation du problème et les hypothèses

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant les conditions habituelles, $T > 0$ un temps fini fixé et $W_t = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimensionnel. On définit un ensemble des contrôles admissibles, comme suit :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}[0,T] = \{u : [0,T] \times \Omega \to U \ : \ u \text{ est un processus } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} \text{ -adapté}\},$$

tout élément u de $\mathcal{U}$ est appelé contrôle admissible qui prend des valeurs dans un sous-ensemble non vide donné U de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble de tout contrôle admissibles.

On considéré l'équation différentielle stochastique rétrograde contrôlée, suivant :

$$\begin{cases} dy_t = -f(t, y_t, z_t, u_t)dt + z_t dW_t, \\ y_T = \xi, \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

- $(y(.), z(.))$ la solution de l'EDSR contrôlé où $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$.
- f est une fonction donnée telle que :

$$f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times U \to \mathbb{R}^n,$$

tel que f est une fonction progressivement mesurable, localement Lipschitz par rapport aux variables d'états y, z et ξ est une variable aléatoire bornée et $\mathcal{F}_T$-adaptée.

On définit le critère à optimiser, la fonction de coût par :

$$J(\upsilon) = \mathbb{E}\left[h\left(y_0\right)\right], \tag{3.2}$$

où h est donnée et $h : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Hypothèses 01

- $(\mathbf{H}_1)$: f et h sont continument dérivables par rapport à (y, z), et les dérivées f_y, f_z et h_y sont continues en y et z.
- $(\mathbf{H}_2)$: Il existe une constante, $M > 0$ telle que pour tout y et z :

$$(y.f(t, \omega, y, z, \upsilon)) \leq M(1 + |y|^2 + |y|\,|z|); \quad \mathbb{P}\text{-}p.s., \quad p.p.t \in [0, T].$$

- $(\mathbf{H}_3)$: Il existe deux constantes, $M > 0$, un $\alpha \in (0, 1)$ et une fonction positive $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$|f(t, \omega, y, z, \upsilon)| \;\; \leq \;\; M(1 + \varphi(|y| + |z|^{\alpha}); \;\; \mathbb{P}\text{-}p.s., p.p.t \in [0, T].$$

- $(\mathbf{H}_4)$: Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $L_N > 0$, telle que :

$$|f(t, \omega, y, z, \upsilon) - f(t, \omega, \acute{y}, z, \upsilon)| \;\; \leq \;\; L_N\,|y - \acute{y}|\,; \;\; \mathbb{P}\text{-}p.s., p.p.t \in [0, T].$$

  et $\forall y, \acute{y}$, tels que $|y| \leq N$, $|\acute{y}| \leq N$.
- $(\mathbf{H}5)$: Il existe une constante $L \geq 0$, telle que :

$$|f(t, \omega, y, z, \upsilon) - f(t, \omega, y, \acute{z}, \upsilon)| \;\; \leq \;\; L\,|z - \acute{z}|\,; \;\; \mathbb{P}\text{-}p.s., p.p.t \in [0, T].$$

- $(\mathbf{H}6)$: Il existe une constante $M > 0$ et une fonction positive : $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$|f_y(t, \omega, y, z, \upsilon)| \;\; \leq \;\; M(1 + \varphi\,|y|); \;\; \mathbb{P}\text{-}p.s., p.p.t \in [0, T].$$

Hypothèses 02

- ($\mathbf{H}7$) : On suppose que ($\mathbf{H1}$) est satisfait. De plus, on suppose que E soit un élément de $\mathbb{D}^{1.2}$ et il existe une constante M telle que :

$$|D_t^i\xi| \leq M, \quad \forall t \leq T; \quad i = 1, p,$$

où $\mathbb{D}^{1,2}$ espace aléatoires qui sont dérivables de Malliavin ; où $(D_t\xi)_{0\leq t\leq T}$ la dérivée de Malliavin par rapport à W au temps t d'une variable aléatoire donnée $\zeta \in \mathbb{D}^{1,2}$.

- ($\mathbf{H}8$) : Il existe une constante $M > 0$, telle que :

$$|f(t, \omega, y, z, \upsilon)| \quad \leq \quad M(1 + |y| + |z|); \quad \mathbb{P}\text{-}p.s., p.p.\ t \in [0, T].$$

- ($\mathbf{H}9$) : f_z satisfait ($\mathbf{H}8$) et il existe une constante $M > 0$ tel que

$$|f_y(t, \omega, y, z, \upsilon)| \quad \leq \quad M(1 + \ln(1 + (|y| + |z|))); \quad \mathbb{P}\text{-}p.s., p.p.\ t \in [0, T].$$

- ($\mathbf{H}10$) : Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $L_N > 0$ telle que :

$$|f(t, w, y, z, \upsilon) - f(t, w, \acute{y}, \acute{z}, \upsilon)| \quad \leq \quad L_N(|y - \acute{y}| + |z - \acute{z}|); \quad \mathbb{P}\text{-}p.s., p.p.\ t \in [0, T],$$

et $\forall y$, $\acute{y}$, z, $\acute{z}$ telle que $|y| \leq N$, $|\acute{y}| \leq N$, $|z| \leq N$, $|\acute{z}| \leq N$.

Lemme 3.2.1 *: Soit $(y(.), z(.))$ une solution unique d'équation (3.1), alors, il existe une constante positive C, telle que :*

1) *Sous les hypothèses 01, on a : $\mathbb{P}$-p.s*

$$\sup_{0\leq t\leq T} |y_t|^2 \leq C \quad et \quad \mathbb{E}\int_0^T |z_s|^2\, ds \leq C.$$

2) *Sous les hypothèses 02, on a :*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left(|y_t|+|z_t|\right)\leq C;\quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Ce principe consiste d'introduire l'équation adjointe est une équation différentielle stochastique (EDS) linéaire donné sous la forme :

$$\begin{cases} -dq_t & = f_y\left(t,y_t,z_t,u_t\right)q_t dt + f_z\left(t,y_t,z_t,u_t\right)q_t dW_t, \\ \\ q_0 & = h_y\left(y_0\right). \end{cases} \tag{3.3}$$

Proposition 3.2.1 *: Sous les hypothèses 01 ou les Hypothèses 02. Pour tout $\upsilon(.)\in\mathcal{U}_{ad}$, on a l'équation (3.3) admet une seule solution $q(.)\in S^2\left([0.T],\mathbb{R}^n\right)$. De plus, il existe une constante positive C telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|q_t|^4\right]\leq C. \tag{3.4}$$

3.2.2 Condition nécessaire d'optimalité

Pour chaque entier n, on considéré l'EDSR contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dy_t^n = -f^n(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n)dt + z_t^n dW_t, \\ \\ y_T^n = \xi, \end{cases} \tag{3.5}$$

tell que $(y^n,z^n)\in S\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)\times M\left([0,T],\mathbb{R}^{n\times d}\right)$ unique solution. Et on définit le coût, comme suit :

$$J^n\left(\upsilon\right)=\mathbb{E}\left[h\left(y_0^n\right)\right]. \tag{3.6}$$

On donne l'équation adjointe et la fonction de Hamiltonian pour notre problème.

- L'équation adjointe est définie par :

$$\begin{cases} -dq_t^n & = f_y^n \left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) q_t^n dt + f_z^n \left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) q_t^n dW_t, \\ q_0^n & = h_y \left(y_0^n\right), \end{cases} \tag{3.7}$$

où pour chaque n, l'équation (3.7) admet une solution unique car les coefficients f_y^n et f_z^n sont globalement Lipschitz et de croissance linéaire.

Remarque 3.2.1 *: Puisque f^n est globalement lipschizienne, leurs f_y^n et f_z^n sont bornées.*

- On définit la fonction du Hamiltonian, comme suit :

$$H^n(t, y^n, z^n, q^n, u^n) = q^n f(t, y^n, z^n, u^n) \quad \text{pour chaque} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

où : $H^n : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$. On utilise la définition du Hamiltonian. On obtient l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} -dq_t^n = H_y^n(t, y_t^n, z_t^n, q_t^n, u_t^n) q_t^n dt + H_z^n(t, y_t^n, z_t^n, q_t^n, u_t^n) q_t^n dW_t, \\ q_0^n = h_y \left(y_0^n\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Quelques résultats utiles

Pour obtenir les conditions nécessaires on a besoin de lemmes suivants :

Lemme 3.2.2 *: Sous les hypothèses 01 ou les hypothèses 02. Il existe une suite de fonction f^n telle que :*

1) *Pour chaque n, f^n est globalement Lipschitz en (y, z), $\mathbb{P}$-p.s., p.p.$t \in [0, T]$;*

2) *Si f satisfaite $(\mathbf{H}3)$, alors : $\sup_n |f^n(t, \omega, y, z, v)| \leq M(1 + \varphi(|y|) + |z|^\alpha)$, $\mathbb{P}$-p.s, p.p. $t \in [0, T]$.*

3) *Si f satisfaite $(\mathbf{H}8)$, alors : $\sup_n |f^n(t, \omega, y, z, v)| \leq M(1 + |y| + |z|)$, P-a.s, p.p. $t \in [0, T]$.*

4) *Pour tout n, $\rho_{n.p}(f^n - f) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

5) *pour tout n, $\left|f_y^n\right| \leq |f_y| + \beta \left|f\right| \eta_n$ et $\left|f_z^n\right| \leq |f_z| + \beta \left|f\right| \eta_n$, ou η_n converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Remarque 3.2.2 *: Pour tout $p \geq 1$, on définit d'abord une famille de semi-normes $(\rho_{n.p}(f))_{n\in N}$ par :*

$$\rho_{n.p}(f) = \left(\mathbb{E}\int \sup |f(s,y,z)|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lemme 3.2.3 *: Sous hypothèses 01. Soit (f_n) une suite de fonctions associées à f, d'après le lemme **(3.2.2)** et $(y^n(.), z^n(.))$ une solution de l'équation (3.5). Alors, il existe une constante C, tel que :*

$$\sup_n \left(\sup_{0\leq t\leq T} |y_t^n|^2\right) \leq C \quad et \quad \sup_n \mathbb{E}\int_0^T |z_t^n|^2 \leq C. \tag{3.10}$$

Lemme 3.2.4 *: Sous hypothèses 02. Soit (f_n) une suite de fonctions associées à f, d'après le lemme **(3.2.2)** et $(y^n(.), z^n(.))$ une solution de l'équation (3.5). Alors, il existe une constante C, tel que :*

$$\sup_n \left(\sup_{0\leq t\leq T} (|y_t^n| + |z_t^n|)\right) \leq C; \quad \mathbb{P}\text{-}p.s. \tag{3.11}$$

Lemme 3.2.5 *: Sous les hypothèses 01 ou les hypothèses 02, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |y_t^n - y_t|^2\right] = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T |z_t^n - z_t|^2 \, dt = 0. \tag{3.12}$$

Lemme 3.2.6 *: Sous les hypothèses 01 ou les hypothèses 02, on a : les estimations suiventes :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^t |f^n(s, y_s^n, z_s^n, u_s) - f(s, y_s, z_s, u_s)|^2 \, ds = 0. \tag{3.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^t \left|f_y^n(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n) - f_y(s, y_s, z_s, u_s)\right|^4 ds = 0. \tag{3.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^t |f_z^n(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n) - f_z(s, y_s, z_s, u_s)|^4 \, ds = 0. \tag{3.15}$$

Lemme 3.2.7 *: Sous les hypothèses 01 ou les hypothèses 02. Soit q une solution d'équation (3.3) et q^n une solution d'equation (3.9), on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|q_t^n - q_t|^2\right] = 0.$$

Preuve. On utilise la forme de deux équations :

$$dq_t = -f_y\left(t, y_t, z_t, u_t\right) q_t dt - f_z\left(t, y_t, z_t, u_t\right) q_t dW_t, \;\; q_0 = h_y\left(y_0\right)$$

et

$$dq_t^n = -f_y^n\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) q_t^n dt - f_z^n\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) q_t^n dW_t, \;\; q_0^n = h_y\left(y_0^n\right),$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|q_t^n - q_t\right|^2 &= |h_y(y_0^n) - h_y(y_0) \\
&+ \int_0^t \left(f_y^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right) q_s^n - f_y\left(s, y_s, z_s, u_s\right) q_s\right) ds \\
&+ \int_0^t \left(f_z^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right) q_s^n - f_z\left(s, y_s, z_s, u_s\right) q_s\right) dW_s \\
&+ \int_0^t \left(f_y^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right) q_s - f_y^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right) q_s\right) ds \\
&+ \int_0^t \left(f_z^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right) q_s - f_z^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right) q_s\right) dW_s|^2,
\end{aligned}$$

on introduit l'espérance, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|q_t^n - q_t\right|^2 &\leq C\mathbb{E}\left|h_y(y_0^n)) - h_y(y_0)\right|^2 \\
&+ C\mathbb{E}\int_0^t \left|f_y^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right)\left(q_s^n - q_s\right)\right|^2 ds \\
&+ C\mathbb{E}\int_0^t \left|f_z^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right)\left(q_s^n - q_s\right)\right|^2 ds \\
&+ C\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_y^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right) - f_y\left(s, y_s, z_s, u_s\right)\right) q_s\right|^2 ds \\
&+ C\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_z^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right) - f_z^n\left(s, y_s, z_s, u_s\right)\right) q_s\right|^2 ds,
\end{aligned}$$

où :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t f_z^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right)\left(q_s^n - q_s\right) dW_s\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^t \left(f_z^n\left(s, y_s^n, z_s^n, u_s^n\right)\left(q_s^n - q_s\right)\right)^2 ds, \;\; \text{(l'isométrie)}$$

et

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(f_z^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_z^n\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)q_s dW_s\right)^2 = \qquad \text{(l'isométrie)}$$
$$\mathbb{E}\int_0^t \left(\left(f_z^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_z^n\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)q_s\right)^2 ds.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_y^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_y\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)q_s\right|^2 ds\\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}\int_0^t |q_s|^4 ds}\sqrt{\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_y^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_y\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)\right|^4 ds}\end{aligned}$$

D'après la condition (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_y^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_y\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)q_s\right|^2 ds\\ &\leq C\left(\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_y^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_y\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)\right|^4 ds\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

par la relation (3.14), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} E\int_0^t \left|\left(f_y^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_y\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)q_s\right|^2 ds = 0. \tag{3.16}$$

On utilise la même les techniques (l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la condition (3.4) et la relation (3.15), on montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_z^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_z^n\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)q_s\right|^2 ds = 0. \tag{3.17}$$

Puisque h_y est bornée et continue, alors par le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$0 \leq \mathbb{E}\left|h_y(y_0^n)-h_y(y_0)\right|^2 \;\; \leq C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|y^n(t)-y(t)\right|^2\right],$$

on passe à la limite avec la condition (3.12), on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left|h_y(y_0^n)-h_y(y_0)\right|^2=0. \tag{3.18}$$

D'autre part, comme : $\left|f_y^n\right| \leq |f_y| + \beta\,|f|\,\eta_n$ et $|f_z^n| \leq |f_z| + \beta\,|f|\,\eta_n$, où η_n converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ avec f_y, f_z et f sont bornées, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^t \left|f_y^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)\left(q_s^n-q_s\right)\right|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^t \left|f_z^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)\left(q_s^n-q_s\right)\right|^2 ds \\
&\leq \left(C+C\eta_n\right)\mathbb{E}\int_0^t \left|q_s^n-q_s\right|^2 ds + \left(C+C\eta_n\right)\mathbb{E}\int_0^t \left|q_s^n-q_s\right|^2 ds \\
&\leq 2C\left(1+\eta_n\right)\mathbb{E}\int_0^t \left|q_s^n-q_s\right|^2 ds,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|q_t^n-q_t\right|^2 \quad &\leq 2C\left(1+\eta_n\right)\mathbb{E}\int_0^t \left|q_s^n-q_s\right|^2 ds \\
&+C\mathbb{E}\left|h_y(y_0^n)-h_y(y_0)\right|^2 \\
&+C\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_y^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_y\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)q_s\right|^2 ds \\
&+C\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f_z^n\left(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n\right)-f_z^n\left(s,y_s,z_s,u_s\right)\right)q_s\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

D'après (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) et on utilise le lemme de Gronwall, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|q_t^n-q_t\right|^2\right]=0.$$

■

Lemme 3.2.8 *: Sous les hypothèses 01 ou les hypothèses 02, on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^t &|H^n(s,y_s^n,z_s^n,q_s^n,u_s^n)-H^n(s,y_s^n,z_s^n,q_s^n,\upsilon_s)\\ &-(H(s,y_s,z_s,q_s,u_s)-H(s,y_s,z_s,q_s,\upsilon_s)|)ds=0\end{aligned}\tag{3.20}$$

Preuve. On utilise la définition du Hamiltonian, on trouve :

$$\mathbb{E}\int_0^t|H^n(s,y_s^n,z_s^n,q_s^n,u_s^n)-H^n(s,y_s^n,z_s^n,q_s^n,\upsilon_s)-(H(s,y_s,z_s,q_s,u_s)-H(s,y_s,z_s,q_s,\upsilon_s))|\,ds$$

$$=\mathbb{E}\int_0^t|q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,\upsilon_s)-(q_sf(s,y_s,z_s,u_s)-q_sf(s,y_s,z_s,\upsilon_s)|\,ds$$

$$=\mathbb{E}\int_0^t|q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-q_sf(s,y_s,z_s,u_s)-(q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,\upsilon_s)-q_sf(s,y_s,z_s,\upsilon_s)|\,ds$$

$$\leq\mathbb{E}\int_0^t|q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-q_sf(s,y_s,z_s,u_s)|\,ds+\mathbb{E}\int_0^t|q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,\upsilon_s)-q_sf(s,y_s,z_s,\upsilon_s)|\,ds.$$

On montre que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\int_0^t|q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-q_sf(s,y_s,z_s,u_s)|\,ds=0.$$

Pour montrer l'égalité précédente, on ajoutant et retranchant $q_sf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)$ et $q_sf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s)$, on trouve :

$$\mathbb{E}\int_0^t|q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-q_sf(s,y_s,z_s,u_s)|\,ds$$

$$=\mathbb{E}\int_0^t|q_s^nf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-q_sf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)+q_sf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)$$

$$-q_sf(s,y_s,z_s,u_s)+q_sf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s)-q_sf^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s)|\,ds$$

$$\leq\mathbb{E}\int_0^t|f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)|\,|q_s^n-q_s|\,ds$$

$$+\mathbb{E}\int_0^t|q_s|\,|f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s)|\,ds$$

$$+\mathbb{E}\int_0^t|q_s|\,|f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s)-f(s,y_s,z_s,u_s)|\,ds.$$

Comme $\mathbb{E}\displaystyle\int_0^t |q_s|^2\,ds \leq C$ et par l'inégalité de Schwartz, alors on obtient :

$$\mathbb{E}\int_0^t |q_s^n f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n) - q_s f(s,y_s,z_s,u_s)|\,ds$$

$$\leq \left(\mathbb{E}\int_0^t |f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\int_0^t |q_s^n - q_s|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C\left(\mathbb{E}\int_0^t \left|(f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n) - f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s))\,\mathbf{1}_{\{u^n\neq u\}}\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C\left(\mathbb{E}\int_0^t |f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s) - f(s,y_s,z_s,u_s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le lemme (**3.2.6**), on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\int_0^t |f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s) - f(s,y_s,z_s,u_s)|^2\,ds = 0.$$

Et on a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\mathbb{E}\int_0^t |f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\int_0^t |q_s^n - q_s|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

car :

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\int_0^t |q_s^n - q_s|^2\,ds = 0$; (le lemme (**3.2.7**)).

(2) $\mathbb{E}\displaystyle\int_0^t |f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)|^2\,ds$ est bornée (f^n satisfaite $(\mathbf{H}_3)$ et on utilise le lemme (**3.2.3**) et le lemme (**3.2.2**) (condition (**2**)).

D'autre part, on applique l'inégalité de Hölder :

$$\left(\mathbb{E}\int_0^t \left|\left(f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s)\right)\mathbf{1}_{\{u^n\neq u\}}\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2C\left(\mathbb{E}\int_0^t |z_s^n|^{2\alpha}\ \mathbf{1}_{\{u^n\neq u\}}ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2C\left(\mathbb{E}\int_0^t |z_s^n|^2 ds\right)^{\alpha}\left(\mathbb{E}\int_0^t \mathbf{1}_{\{u^n\neq u\}}ds\right)^{1-\alpha} \leq 2C\left(d\left(u^n,u\right)\right)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\int_0^t |q_s^n f^n(s,y_s^n,z_s^n,u_s^n)-q_s f(s,y_s,z_s,u_s)|\,ds=0.$$

On utilise les mêmes techniques pour montrer :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\int_0^t |q_s^n f^n(s,y_s^n,z_s^n,\upsilon_s)-q_s f(s,y_s,z_s,\upsilon_s)|\,ds=0,$$

ceci complète la preuve (3.20). ∎

Soient υ est un élément arbitraire de $\mathcal{U}_{ad}$ et pour tout n, u^n est un contrôle optimal, en suite pour suffisamment petit $\varepsilon>0$ et pour chaque $t\in[0,T]$, on définit un contrôle perturbé, comme suivant :

$$u_t^{n,\varepsilon}=\begin{cases}\upsilon & \text{si} \quad t\in[t_0,t_0+\varepsilon],\\ u^n & \text{sinon.}\end{cases}$$

Où $u_t^{n,\varepsilon}$ un contrôle admissible et (y^n,z^n) est une solution de l'EDSR (3.5) correspondant à u^n. Soit y_t^1 est une solution d'équation linéaire suivante (appelé d'équation variationnelle) :

$$\begin{cases} dy_t^{1,n} & =\left[f_y^n\left(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n\right)y_t^{1,n}+f_z^n\left(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n\right)z_t^{1,n}\right.\\ & \left.+f^n(t,y_t^n,z_t^n,u_t^{n,\varepsilon})-f^n(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n)\right]dt+z_t^1 dW_t,\\ y_T^{1,n} & =0.\end{cases}$$

Si u^n est un contrôle optimal, alors :

$$\left[J\left(u_t^{n,\varepsilon}\right)-J\left(u_t^n\right)\right]+\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(u^{n,\varepsilon}\left(.\right)-u^n\left(.\right)\right)\geq 0 \quad \text{et} \quad d\left(u^{n,\varepsilon}\left(.\right)-u^n\left(.\right)\right)\leq \varepsilon,$$

ainsi, on trouve l'inégalité variationnelle :

$$\left[J\left(u_t^{n,\varepsilon}\right)-J\left(u_t^n\right)\right]\geq -\varepsilon\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.21}$$

où $\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}}=2C.$

D'après inégalité ci-dessus, nous pouvons affirmer le lemme suivant :

Lemme 3.2.9 *: Sous des hypothèses* (01)-(02)*, nous avons :*

$$\mathbb{E}\left[h_y\left(y_0^n\right)y_0^{1,n}\right]\geq -\varepsilon\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. D'après inégalité variationnelle (3.21), on trouve :

$$-\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}}\leq \varepsilon^{-1}\left[J\left(u_t^{n,\varepsilon}\right)-J\left(u_t^n\right)\right]=\varepsilon^{-1}\mathbb{E}\left[h\left(y_0^{n,\varepsilon}\right)-h\left(y_0^n\right)\right].$$

On utilise un développement d'ordre 1, on obtient :

$$-\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon\leq \left[J\left(u_t^{n,\varepsilon}\right)-J\left(u_t^n\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^1 h_y\left(y_0^{n,\varepsilon}+\varepsilon y_0^{1,\varepsilon}\right)d\lambda y_0^{1,\varepsilon}\right].$$

Et comme $\varepsilon\to 0$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[h_y\left(y_0^n\right)y_0^{1,n}\right]\geq -\varepsilon\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Théor■me 3.2.1 *: Soit u un contrôle optimal en minimisant la fonction J sur $\mathcal{U}$, (y_t, z_t) une trajectoire optimale correspondante. Alors existe une unique solution q d'EDS (3.3) tel que :*

$$H\left(t, y_t, z_t, q_t, u_t\right) = \max_{\upsilon \in \mathcal{U}_{ad}} H\left(t, y_t, z_t, q_t, \upsilon_t\right), \ \mathbb{P}.p.s.$$

Preuve. D'après inégalité variationnelle, on trouve :

$$o\left(\varepsilon\right) \leq \varepsilon^{-1}\left[J\left(u_t^{n,\varepsilon}\right) - J\left(u_t^{n}\right)\right] = \varepsilon^{-1}\left[\mathbb{E}\left[h(y_0^{n,\varepsilon})\right] - \mathbb{E}\left[h(y_0^{n})\right]\right].$$

On applique la formule d'Itô à $\left(q_t^n . y_t^{1,n}\right)$ avec $q_0^n = h_y(y_0^n)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[q_0^n . y_0^{1,n}\right] - \mathbb{E}\left[q_T^n . y_T^{1,n}\right] &= \mathbb{E}\int_0^T q_t^n f_y^n\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) y_t^{1,n} dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T q_t^n f_z^n\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) z_t^{1,n} + \mathbb{E}\int_0^T q_t^n\left(f^n(t, y_t^n, z_t^n, u_t^{n,\varepsilon}) - f^n(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) dt \\
&- \mathbb{E}\int_0^T y_t^{1,n} f_y^n\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) q_t^n dt - \mathbb{E}\int_0^T f_z^n\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) q_t^n z_t^{1,n} dt.
\end{aligned}$$

Comme $y_T^{1,n} = 0$, on trouve :

$$\mathbb{E}\int_0^T q_t^n\left(f^n(t, y_t^n, z_t^n, u_t^{n,\varepsilon}) - f^n(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n)\right) dt = \mathbb{E}\left(h_y(y_0^n) . y_0^{1,n}\right).$$

D'après le lemme (3.2.9), on trouve :

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(q_t^n f^n(t, y_t^n, z_t^n, u_t^{n,\varepsilon}) - f^n(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) q_t^n\right) dt \geq -\varepsilon\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ainsi :

$$\mathbb{E}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\left[H^n(t, y_t^n, z_t^n, q_t^n, u_t^n) - H^n(t, y_t^n, z_t^n, q_t^n, \upsilon_t\right] dt + o\left(\varepsilon\right) \geq -\varepsilon\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}},$$

alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\left[H^n(t,y_t^n,z_t^n,q_t^n,u_t^n)-H^n(t,y_t^n,z_t^n,q_t^n,\upsilon_t\right]dt+\frac{o\left(\varepsilon\right)}{\varepsilon}\geq-\left(\delta_{n,N}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après l'inégalité (3.20) et $\varepsilon\to 0$ (aussi n, $N\to 0$), on trouve :

$$\mathbb{E}\left[H(t,y_t,z_t,q_t,u_t)-H(t,y_t,z_t,q_t,\upsilon_t)\right]\geq 0.$$

On a : $\upsilon_t=a.\mathbf{1}_B+u.\mathbf{1}_{\Omega\backslash B}$ tel que $a\in\mathcal{U}$ et B un élément arbitraire de σ-algèbre. On substitue υ_t par sa forme, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[1_B(H(t,y_t,z_t,q_t,u_t)-H(t,y_t,z_t,q_t,a)\right]\geq 0,\quad\forall B\in\mathcal{F}_t$$

alors on trouve :

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left[(H(t,y_t,z_t,q_t,u_t)-H(t,y_t,z_t,q_t,a)\right]\geq 0.$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on établis des conditions nécessaires d'optimalité pour les EDSRs localement Lipschitziennes. D'abord, on explique un résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR telle que le générateur est localement Lipschitzien en (y, z) et la condition terminale est bornée. Et puis, on étudie le problème du contrôle optimal par le principe du maximum stochastique pour les EDSRs localement Lipschitziennes.

Bibliographie

[1] Azizi, H., & Khelfallah, N. (2022). The Maximum Principle for Optimal Control of BSDEs with Locally Lipschitz Coefficients. Journal of Dynamical and Control Systems, 28(3), 565-584.

[2] Breton, J. C. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.

[3] Hamadene, S. (1996). Equations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitzien. In Annales de l'IHP Probabilités et statistiques (Vol. 32, No. 5, pp. 645-659).

[4] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[5] Laleuf, J. C. (2014). Processus et intégrales stochastiques : cours et exercices corrigés. Ellipses.

[6] Le Gall, J. F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Heidelberg, Germany : Springer.

[7] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & control letters, 14(1), 55-61.

[8] Roger, P. (2004). Probabilités, statistique et processus stochastiques : synthèse de cours & exercices corrigés. Pearson education.

Annexe A : Rappel

Inégalité de Cauchy-Schwartz intégrable. En se placent sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) muni de produit scalaire $(f,g) \to \langle f \backslash g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$. On obtient :

$$\forall f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \quad \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \ .$$

Inégalité de Hölder. Soient p et q deux nombres conjugués $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ avec p, $q \in]1,\infty[$, $X \in \mathcal{L}^p$ et $Y \in \mathcal{L}^q$.

Alors $XY \in \mathcal{L}^1$ et $\| XY \| \leq \| X \|_p \| Y \|_q$, pour $p = q = 2$, on obtient l'inégalité ce Cauchy-Schwartz :

$$\mathbb{E}\left[| XY |\right] \leq \mathbb{E}\left[| X |^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[| Y |^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme de Gronwall. Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une application borélienne bornée tell que pour a, $b \geq 0$:

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds, \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$g(t) \leq a \exp(bt), \quad \forall t \in [0,T].$$

Inégalité de Young. Soient $n \geq 2$, et $x_1, ..., x_n$ des réels positifs. Soient également $p_1, ..., p_n$ des réels strictement positifs tels que : $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n} = 1$. On a alors :

$$x_1....x_n \leq \frac{x_1^{p_1}}{p_1} + ... + \frac{x_n^{p_n}}{p_n}.$$

Convergence dominée. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs réelles ou complexes, qui converge simplement *p.p.* (pour μ) vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction intégrable positive $g : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$, dite dominante, tel que : $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$, *p.p.* Alors :

- f et f_n sont intégrables.
- $\lim_n \int |f_n - f| \, d\mu = 0$.
- $\lim_n \int f_n d\mu = \lim \int f d\mu$.

Temps d'arrêt. Un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire τ a valeur dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ telle que :

$$\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0.$$

Inégalité de Jensen. Soient g une fonction continue de $[0,1]$ dans $]a,b[$ (avec $-\infty \leq a \leq b < +\infty$) et φ une fonction convexe de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\varphi\left(\int_0^1 g(x)dx\right) \leq \int_0^1 \varphi\left(g(x)\right) dx.$$

Annexe B : Abréviations et Notations

$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$	:	Espérance conditionnelle de variable aléatoire X par rapport à $\mathcal{F}_t$.
$\mathbb{P}$-$p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$\mathbb{C}^2$	:	Ensemble des fonctions deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continue.
$\mathbb{C}^1$	:	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continue.
$EDSR$	:	Equation différentielle stochastique rétograde.
$\mathcal{N}(0,t)$	:	Loi normale centre de varianece t.
$S^2([0,T],\mathbb{R}^n)$	:	Désigne l'ensemble des processus stochastiques continus et $\mathbb{F}$-adaptés$\{y(t); t \in [0,T]\}$, tels que$\mathbb{E}(sup_{0\leq t\leq T} \left\|y(t)\right\|^2)\infty$
$M^2([0,T],\mathbb{R}^n)$	:	Désigne l'ensemble des processus $\mathbb{F}$-prédictibles et $\mathbb{R}^n$-valués $\{z(t); t \in [0,T])$, tels que $\mathbb{E}\int_0^T \left\|z(r)\right\|^2 dr < \infty$.

Résumé :

Dans ce travail, nous étudions un problème de contrôle optimal stochastique pour des systèmes gouvernés par une équation différentielle stochastique rétrograde localement Lipchitziennes. On établit des conditions nécessaires d'optimalité tel que le domaine de contrôle n'est pas nécessairement convexe..

Mots clés : équation différentielle stochastique rétrograde localement Lipchitziennes, contrôle optimal, le principe du maximum.

Abstract :

In this work, we study an optimal stochastic control problem for systems governed by a locally Lipchitz backward stochastic differential equation. We get a maximum principle with the control domain is not necessarily convex.

Keywords : Locally Lipchitz backward stochastic differential equation, optimal control, the maximum principle.

الملخص:

في هذا العمل ، ندرس مشكلة التحكم الأمثل العشوائية للأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية لبشيتز محلي. نقوم بدراسة الشروط اللازمة حيث يكون مجال ليس بضرورة محدبً.

الكلمات المفتاحية. المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية لبشيتز محلي, التحكم الأمثل, المبدأ الأقصى.