République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : Probabilités

Ouiame OURABI

Titre :

Problème de Skorokhod et EDS réfléchies en dimension une

Devant le Jury :

Mr.	Mansouri Badreddine	MCA	U. Biskra	Président
Mr.	Labed Boubakeur	MCA	U. Biskra	Rapporteur
Mme.	Labed Saloua	MCA	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 19/06/2023

Dédicace

♣

♣

♣ Je dédie ce travail à ♣

♣

♣ Ma mère et mon père ♣

♣

♣ Mes frères ♣

♣

♣ Mes famille ♣

♣

♣ Mes amis ♣

Table des matières

Remerciements

Avant tous, je remercie infiniment Dieu, le Tout-Puissant, de m'avoir donné la santé,

de survivre ,ainsi que l'audance de surmonter toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer ma gratitude au mon encadreur.

♠ Pr .Labed Boubakeur♠

pour sa supervision du travail,

et je le remercie pour sa présence et ses précieux conseils.

Mes remerciements vont également aux membres du jury

♠Mansori Badreddine & Labed Saloua ♠

pour leurs acceptation d'examiner ce travail.

Je remercie profondément

♠Ma famille♠

♠Mes amis♠

ainsi que les personnes qui m'ont soutenu

de près ou de loin

lors de la réalisation de ce mémoire.

♡Merci♡

Notations et symboles

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilité.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	Filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$	Espace de probabilité filtré.
EDS	Equation différentielle stochastique
tq	telle que
$v.a$	variable aléatoire
$(B_t)_{t\geq 0}$	Mouvement Brownien
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels
$B(\mathbb{R}^d)$	La tribu de Borel sur $\mathbb{R}^d$
$\mathbb{B}([0,t])$	boréliens de $[0,t]$.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
MB	Mouvement Brownien
$\mathbb{P}-p.s$	Presque sûrment pour lamesure deprobabilité $\mathbb{P}$.
$\mathbb{L}^2$	Espace des fonctions mesurables de carré intégrable
$\mathbb{E}[X]$	Espérence mathémathique ou moyenne de v.a. X
$\mathbb{C}^1$	Espace des fonctions continûment dérivables.
$\lvert\cdot\rvert$	norme dans $\mathbb{R}^d$
$\lVert\cdot\rVert$	norme

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter le problème de réflexion Skorokhod et les équations différentielles stochastiques réfléchies en dimension une.

Le problème de Skorokhod est un problème de théorie des probabilités qui implique la résolution d'une équation différentielle stochastique avec une condition limite réfléchissante. Le problème porte le nom d'Anatoliy Skorokhod, qui a publié pour la première fois la solution d'une équation différentielle stochastique pour un mouvement brownien réfléchi [7].

La version classique du problème stipule qu'étant donné un processus càdlàg $\{X(t), t \geq 0\}$ et une M-matrice R, les processus stochastiques $\{W(t), t \geq 0\}$ et $\{Z(t), t \geq 0\}$ sont censés résoudre le problème de Skorokhod si, pour toutes les valeurs positives de t,

- $W(t) = X(t) + RZ(t) \geq 0$

- $Z(0) = 0$ et $dZ(t) \geq 0$

La matrice R est souvent appelée matrice de réflexion, $W(t)$ le processus réfléchi et $Z(t)$ le processus régulateur.

Le problème de Skorokhod a été largement étudié dans le contexte des équations différentielles stochastiques avec des conditions aux limites réfléchissantes. Le problème fournit un moyen de prouver l'existence de solutions aux équations différentielles stochastiques avec des conditions aux limites réfléchissantes.

Dans l'ensemble, le problème de Skorokhod est un outil important de la théorie des probabilités et a des applications dans divers domaines, notamment la finance, la physique et l'ingénierie.

Les équations différentielles stochastiques réfléchies (EDS réfléchies) sont une classe d'équations différentielles stochastiques (EDS) qui intègrent des frontières réfléchissantes. Elles fournissent un cadre mathématique pour modéliser le comportement des processus stochastiques qui ne peuvent pas franchir certaines limites en raison de contraintes physiques ou pratiques. L'étude des EDS réfléchies a des applications dans divers domaines, notamment la finance, la physique et l'ingénierie.

Pour comprendre les équations différentielles stochastiques réfléchies, commençons par les bases des équations différentielles stochastiques. Une EDS est une équation différentielle qui comporte à la fois des composantes déterministes et aléatoires. Elle décrit l'évolution d'un processus stochastique dans le temps et est largement utilisée pour modéliser des systèmes soumis à des influences aléatoires.

Dans une EDS, la composante aléatoire est généralement représentée par un processus de Wiener (également connu sous le nom de mouvement brownien). Le processus de Wiener est un processus stochastique à temps continu doté de certaines propriétés statistiques, telles que des incréments indépendants et normalement distribués. Il sert de modèle mathématique pour les fluctuations aléatoires ou le bruit.

Lorsque nous introduisons des limites réfléchissantes dans le cadre des EDS, nous obtenons des équations différentielles stochastiques réfléchies. Ces équations imposent la condition que le processus stochastique reste à l'intérieur de certaines limites, en se réfléchissant chaque fois qu'il tente de les franchir.

Mathématiquement, une équation différentielle stochastique réfléchie peut s'écrire comme suit :

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t) + dR(t),$$

où $X(t)$ est le processus d'intérêt, $b(X(t))$ représente le terme de dérive déterministe, $\sigma(X(t))$ est le coefficient de diffusion, $W(t)$ est le processus de Wiener et $dR(t)$ est le terme de réflexion qui garantit que le processus reste à l'intérieur de la frontière.

Le terme de réflexion $dR(t)$ tient compte de la réflexion du processus sur la frontière. Il est généralement défini sur la base du comportement du processus lorsqu'il atteint la frontière. La forme précise du terme de réflexion dépend des conditions aux limites spécifiques et de la nature du processus modélisé.

L'étude des équations différentielles stochastiques réfléchies implique d'étudier les propriétés des solutions et de comprendre le comportement des processus réfléchis. Il s'agit notamment de comprendre l'existence et l'unicité des solutions, de caractériser la régularité des trajectoires et d'analyser le comportement à long terme du processus.

Les équations différentielles stochastiques réfléchies ont un large éventail d'applications. En finance, elles sont utilisées pour modéliser le comportement des prix des actifs ou d'autres quantités financières qui ont des limites naturelles. Par exemple, les prix de certains produits financiers dérivés ne peuvent pas devenir négatifs. Les EDS réfléchies sont également utilisés en physique pour modéliser les systèmes de particules qui sont contraints de se déplacer à l'intérieur de régions spécifiques.

Les techniques d'analyse et de résolution des équations différentielles stochastiques réfléchies s'appuient sur divers outils mathématiques, notamment le calcul stochastique, la théorie des mesures et les équations aux dérivées partielles. Différentes approches sont utilisées en fonction des caractéristiques spécifiques des EDS réfléchies et des propriétés souhaitées des solutions.

En résumé, les équations différentielles stochastiques réfléchies fournissent un cadre mathématique pour la modélisation de processus stochastiques soumis à des limites réfléchissantes. Elles intègrent la notion selon laquelle le processus ne peut pas franchir certaines limites et doit être réfléchi. L'étude des EDSR implique la compréhension des propriétés des solutions et l'analyse du comportement des processus réfléchis. Ces équations trouvent des applications en finance, en physique et en ingénierie, et leur analyse nécessite une combinaison de calcul stochastique, de théorie des mesures et d'équations aux dérivées partielles.

le mémoire est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle le notions de base de calcul stochastique, spécialement la formule de tanaka et la notion de temps local.

Dans le deuxième chapitre, on introduit le problème de réflexion de Skorokhoddans le cas déterministe et dans le cas non déterministe. puis on définit comme exemple le Mouvement Brownien réfléchi et son application au problème aux limites de Neumann.

Dans le troisième chapitre, on définit le s équations différentielles stochastiques réfléchies et on démontre l'existence et l'unicité des solutions pour ce type d'équations.

Chapitre 1

Equations différentielles stochastiques

1.1 Généralités sur le calcul stochastique

1.1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle mathématique qui permet de décrire le comportement, a tout moment aprés l'instant initial (par exemple $t_0 = 0$), d'une phénoméne aléatoire .

Nous précisons cette notion dans la définition suivante

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in I}$ est une famille de variables aléatoires,indexée par I et définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valeurs dans un espace mésurable (E, B), qu'on appelle espace d'états.*

1. Pour t fixé , $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
2. Pour ω fixé , $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.

-$T \subsetneqq \mathbb{N}$ le processus est à temps discret,

-$T = [0, a]$ tel que $a > 0$ le processus est à temps continu

1.1.2 Filtration

Définition 1.1.2 *Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$,- La filtration naturelle(ou canonique) de processus X_t est donner par*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), t \in T$$

c'est la plus petite $\sigma-$algèbre par rapport à X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé filtré.

1. Continue à droite si $\mathcal{F}_{t:^+} := \cap_{s \geq t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$.
2. Satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.3 *Un processus X est dit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si pour tout t, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable .*

Remarque 1.1.1 *Un processus X est évidement adapté par rapport à sa filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.*

Définition 1.1.4 *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si l'aplication*

$$([0, t] \times \Omega) \to \mathbb{R}^d,$$

$$(s, \omega) \to X_s(\omega),$$

est mesurable par rapport à $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $B(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (où à gauche), alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.5 *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit à variation bornée sur $[0,T]$*

$$\sup_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < K$$

Définition 1.1.6 *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit à variation finie sur $[0,T]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < \infty$$

Définition 1.1.7 *Les variables aléatoires $X_t - X_s$, $0 \leq s \leq t$ sont appelées les accroissements du processus stochastique X, on dit que :*

– *Processus à accroissement indépendants si*

$$(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s), \ \forall\ 0 \leq s \leq t.$$

– Processus à accroissement stationnaire

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \ \forall\ 0 \leq s \leq t.$$

1.1.3 Temps d'arrêt

On consid'ere $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ un espace probabilisé filtré dans les conditions habituelles.

Définition 1.1.8 *Un (F_t)-temps d'arrêt est une variable aléatoire $\tau \rightarrow [0,+\infty]$ (resp. dans $N \cup \{+\infty\}$ si $T = \mathbb{N}$) telle que $\forall\ t \in T$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

1.1.4 Martingales

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1.9 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et intégrable, on dit que X est*

1. Une martingale si

$$\forall\ 0 \leq s \leq t,\ E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$$

2. Une sur-martingale si

$$\forall\ 0 \leq s \leq t,\ E(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$$

3. Une sous-martingale si

$$\forall\ 0 \leq s \leq t,\ E(X_s/\mathcal{F}_s) \geq X_s$$

Exemple 1.1.1 *Soit $x \in \mathbb{R}^n, Y_i$ à valeures dans $\mathbb{R}^n$. On pose $X_0 = 0$ et*

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Ona :

$$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E(X_n + Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n + E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) + X_n + E(Y_{n+1})$$

Définition 1.1.10 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

(i) On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément intégrable si :*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t|\, dP = 0.$$

(ii) *Si* $p \geq 1$, on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans $\mathbb{L}_p$ si :

$$\sup_{t\geq 0} E[|X_t|] < \infty.$$

Proposition 1.1.2 *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique :*

– *S'il existe une v.a.r positive et intégrable* Z *telle que* $|X_t| \leq Z$, $\forall\ t \geq 0$, *Alors* $X = (X_t)_{t\geq 0}$

est uniformément intégrable.

– Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans $\mathbb{L}_p, (p > 1)$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

Théorème 1.1.1 ***(Inégalité maximale de Doob)*** *si* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *une martingale continue à droite , alors*

$$\forall p > 1, (E[\left|\sup_{0\leq s\leq t} X_s\right|^p])^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0\leq s\leq t} (E[|X_s|^p])^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.5 Martingale locale

Définition 1.1.11 *On dit qu'un processus càd-làg adapté* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une martingale locale s'il existe une suite* $T_n \uparrow \infty$ *de temps d'arrêt tels que pour* $X_t^{Tn} 1_{\{Tn>0\}}$ *soit une martingale uniformément intégrable pour tout* n. *On dit alors que les temps d'arrêt* T_n *localisent ou réduisent* X.

1.1.6 Processus de Markov

Définition 1.1.12 *Soit* $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un processus définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *à valeurs dans* (E, B)*et adapté à la filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}.(X(t))_{t\in\mathbb{R}+}$ *processus de Markov par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ *si la condition suivante est satisfaite*

$$\forall B \in B, \forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2, s < t : P(X(t) \in A \mid \mathcal{F}_s) = P(X(t) \in A \mid X(s)).$$

Où $\mathcal{F}_t$ est la filtration associée au processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Exemple 1.1.2 *Tout processus stochastique à valeurs réelles $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ et à accroissements indépendants est un processus de Markov.*

1.1.7 Mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.13 *Un processus $B : \Omega \to T = [0, T]$ est un mouvement Brownien (MB) standard si :*

(i) $B_0 = 0, P - p.s.$

(ii) $\forall s \leq t, B_{s,t} := B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

(iii) Pour tout $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq T$, les variables $B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots B_{t_{n-1}}; t_n$ *sont indépendantes.*

De plus, on appelle B un $\mathbb{F}$-mouvement brownien si $B \in \mathbb{L}^0(\mathbb{F})$ et pour tout $0 \leq s < t \leq T$ la variable $B_{s,t}$ est indépendante de la tribu du passé avant s,soit $\sigma(B_u, u \leq s)$.

Remarque 1.1.2

1. *La définition reste vraie pour T, $T =]0, \infty[$.*
2. *On appelle $B = (B^1, \cdots, B^d)$* un mouvement brownien d-dimentionnel si $B^1, \cdots, B^d$ sont des mouvements browniens independants.
3. Nous rappelons aussi que l'augmentation habituelle de la filtration naturelle $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ d'un mouvement brownien B est $\mathbb{F}_t^B = (\sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathbb{N}))$, $t \in T$. l'augmentation de la filtration naturelle de B est encore appelée filtration naturelle de B ou filtration brownienne.

1.1.8 Intégrale stochastique

On veut donner un sens à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \varphi_s dB_s$$

lorsque l'on intégre une fonction g par rapport à une fonction f dérivable , si g est régulière , on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \int_0^T g(s)f'(s)ds$$

Définition 1.1.14 *Un processus $\varphi(t)_{0\leq t\leq T}$ est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ et un processus discret $(\varphi_i)_{0\leq i\leq n-1}$ tel que tout i est $\mathcal{F}_{t_i}$-adapté et dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ tq :*

$$\varphi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(\omega) 1\mathbf{I}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

on note ε l'ensemble des processus élémentaires qui est un espace de $\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0, T])$.

Définition 1.1.15 *L'intégrale stochastique entre 0 et $t \leq T$ d'un processus élémentaire $\varphi \in \varepsilon$ est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \varphi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \varphi_i(B_{t_{K+1}} - B_{t_k}) \quad sur]t_k - t_{k+1}[.$$

Soit

$$\int_0^t \varphi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i})$$

on associe donc à $\varphi \in \varepsilon$ le processus $(\int_0^t \varphi_s dB_s)_{0\leq t\leq T.}$

1.1.9 Formule d'Itô

Définition 1.1.16 ***(Processus d'Itô)*** *On appelle processus d'Itô, un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\forall 0 \leq t \leq T, X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dw_s \; P - p.s.$$

Où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, b et σ_s sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les

conditions

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty \text{ et } \int_0^t \|\sigma_s\|\, ds < \infty.$$

Le coefficient b est le drift ou la dérivée, σ est le coefficient de diffusion.

Théorème 1.1.2 ***(Première formule d'Itô)*** *Supposons f de class $\mathbb{C}^2$.Alors :*

$$f(X) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Théorème 1.1.3 ***(Deuxième formule d'Itô)*** *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de class $\mathbb{C}^1$par rapport à t , de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à x , à dérivées bornées, ona :*

$$f(t, X_t) = (0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 ds,$$

ce qui l'on note

$$df(t, X_t) = \left[f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2\right] + f'_x(t, X_t)dX_t = f'_t(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)dX_t.$$

1.2 Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes.

Pour prendre en compte des phénoménes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS).

Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$x(t) = b(t, x(t)) \tag{1.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée x et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (1.1). Avec $b(t, x) = a + cx$ indépendant de t et affine par rapport à x.Symboliquement, l'équation (1.1) se réécrit

$$dx(t) = b(t, x(t))dt. \tag{1.2}$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $(x(t))_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroît, á la date t, selon le taux $b(t, x(t))$. Par exemple, avec $b(t, x) = b(t)x$, l'équation $dx(t) = b(t)x(t)dt$ modélise le cours d'un actif financier $x(t)$ soumis au taux d'intérêt variable $b(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $b(t)$.

Il est bien connu que la solution est

$$x(t) = x_0 \exp(\int_0^t b(s)ds).$$

On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit. il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement brownien B et une intensité de bruit $\sigma(t,x)$:

$$dX(t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{1.3}$$

où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps $t(X_t)$ mais pourrait juste dépendre du temps (σ_t) ou de la valeur X_t en $t\sigma((X_t))$ ou encore être constante σ .

Définition 1.2.1 *En fait, l'écriture (1.3) est symbolique car dB_t n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable). Il faudrait écrire (1.3) sous la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{1.4}$$

Maintenant, nous énonçons le théorème fondamentale d'existence et d'unicité de la solutions d'une EDS.

1.2.1 Théorème d'existence et d'unicité

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t), t > 0$. Satisfait les conditions habituelles, soient :

$$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

m : une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable et indépendante de $\mathcal{F}_\infty = \sigma(B_s, s \geq 0)$ et $(B_s, t \geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien, c'est à dire adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t), t \geq 0$.

Soit L'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + (t, X_t)dBt \\ X(0) = m \end{cases} \tag{1.5}$$

une solution de l'équation (1.5) est un processus stochastique $(X_t), t \geq 0$ continu,$\mathcal{F}_t-$adapté qui vérifie :

– Pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ sont bien définies :

$$\int_0^t |b(s, X_s)| \, ds < \infty, \; P - p.s.$$
$$\int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 \, dB_s < \infty, \; P - p.s.$$

$(X_t), t \geq 0$, vérifie (1.5) :

$$X_t = m + \int_0^t b(s, Xs)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s P - p.s.$$

Supposons la condition suivante :

(A) Les fonctions b et σ sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et lipschitziennes en m, i.e.il existe une constante $K \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \geq 0$ et $m, y \in \mathbb{R}^d$ on a

$$|b(t, m) - b(t, y)| \leq K \, |m - y| \, ,$$

$$|\sigma(t, m) - \sigma(t, y)| \leq K \, |m - y| \, ,$$

et $\int_0^T |b(t, 0)| + \sigma(t, 0)^2 dt \leq +\infty$ *pour tout* T *où* $|b|$ et $|\sigma|$ *représentent la norme du vecteur* b *et de la matrice* σ *.*

Pour étudier l'unicité de la solution, on a besoin du Lemme suivant :

Lemme 1.2.1 ***(Gronwall)*** *Soient $T > 0$ et g une fonction positive mesurable bornée sur $[0, t]$. On suppose qu'il existe des constantes $b \geq 0$, $a \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$, on a*

$$g(t) \leq b + a \int_0^t g(s) ds. \tag{1.6}$$

Alors on a $g(t) \leq b \exp(at)$.

Preuve. En itérant la condition (1.6) sur g, on a pour tout $n \geq 1$,

$g(t) \leq b + b(at) + b\frac{(at)^2}{2} + \cdots + b\frac{(at)^n}{n!} + a^{n+1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_n} g(s_{n+1}) d_{s_{n+1}}$.Si g est m*ajorée par A, le dernier terme se majore par $A(at)^{n+1}/(n+1)!$ et il tend vers* 0 *quand $n \to +\infty$, ce qui prouve le lemme car le développement à droite tend vers* $b \exp(at)$. ∎

– **Existence forte :** *On procéde comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose*

$$\begin{aligned}
X_t^0 &= m \qquad (1.7)\\
X_t^1 &= m + \int_0^t \sigma(s, m) dB_s + \int_0^t b(s, m) ds\\
X_t^2 &= m + \int_0^t \sigma(s, X_s^1) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^1) ds\\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

$$X_t^n = m + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds$$

(A) *Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n, X_t^n est continu et adapté donc localement borné si bien que le processus $\sigma(t, X_t^n)$ est vérifie **(A)** et l'intégrale correspondante bien définie.*

On fixe maintenant $T > 0$ et on raisonne sur $[0, T]$. On prouve par récurrence qu'il existe C_n tq pour tout $t \in [0, T]$,

$$E[(X_t^n)^2] \leq C_n. \tag{1.8}$$

En effet, (1.8) est immédiate si $n = 0$ avec $C_0 = m$. *Puis , on suppose que (1.8) est vraie au rang $n-1$ avec*

$$|\sigma(s, y)| \leq K' + K\,|y|\,, s \in [0, T]$$

$$|b(s, y)| \leq K' + K\,|y|\,, y \in \mathbb{R}$$

Noter que par la croissance sous-linéaire de σ et l'hypothése de récurrence (1.8), ona

$$E\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds\right] < +\infty$$

ona donc

$$E\left[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 dB_s\right] = E\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds\right]$$

Comme $(m+y+z)^2 \leq 3(m^2+y^2+z^2)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie L^2, et (1.8) on majore comme suit

$$E\left[(X_t^n)^2\right] \le 3\left(|m|^2 + E\left[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s)^2\right] + E\left[(\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds)^2\right]\right)$$

$$(\textbf{convexité})$$

$$\le 3\left(|m|^2 + E\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds\right] + tE\left[\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds\right]\right)$$

$$(\textbf{isométrie } \mathbf{L}^2, \textbf{ Cauchy} - \textbf{Schwarz})$$

$$\le 3|m|^2 + 2(1+T)E\left[\int_0^t ((K')^2 + K^2(X_s^{n-1}))ds\right]$$

$$(\textbf{hypothéses lipschitziennes})$$

$$\le 3\left(|m|^2 + 2T(1+T)((K')^2 + K^2 C_{n-1})\right) =: C_n$$

ce qui établit (1.8) par récurrence.

La borne (1.8) et la croissance sous-linéaire σ de assurent alors que, pour chaque n, la martingale locale $\int_0^t \sigma(s, X_s^n)dB_s$ est une vraie martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ sur l'intervalle $[0, T]$. *Cela va permettre de majorer par récurrence*

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right]$$

on a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dB_s + \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}))ds.$$

En utilisant l'inégalité de Doob et l'inégalité de Cauchy-Schwarz *ainsi que l'hypothése **(A)**, on déduit*

$$E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] 2E\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s\left(\sigma(v,X_v^n)-\sigma(v,X_v^{n-1})\right)dB_v\right|^2+\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s\left(b(v,X_v^n)-b(v,\right.\right.$$

(**convexité**)

$$\le 2\left(4E\left[\left(\int_0^t(\sigma(v,X_v^n)-\sigma(v,X_v^{n-1}))dB_v\right)^2\right]+E\left[\int_0^t(b(v,X_v^n)-b(v,X_v^{n-1}))dv)^2\right]\right)$$

(**inégalité de Doob**)

$$\le\left(4E\left[\int_0^t(\sigma(v,X_v^n)-\sigma(v,X_v^{n-1}))^2dv\right]+TE\left[\int_0^t(b(v,X_v^n)-b(v,X_v^{n-1}))^2dv\right]\right)$$

(**inégalité Cauchy – schwarz**)

$$\le 2(4+T)K^2E\left[\int_0^t\left|X_v^n-X_v^{n-1}\right|^2dv\right] \tag{1.9}$$

(**hypothèses lipschitziennes**)

$$\le C_TE\left[\int_0^t\sup_{0\le r\le v}\left|X_r^{n+1}-X_r^n\right|^2dv\right] \tag{1.10}$$

avec $C_T=2(4+T)K^2$. Si *on note* $g_n(v)=E\left[\sup_{0\le r\le v}\left|X_r^{n+1}-X_r^n\right|^2\right]$ *et* $g_n(v)=E\left[\sup_{0\le r\le v}\left|X_r^0\right|^2\right]=m^2$

alors on a établi

$$g_{n+1}(t)\le C_T\int_0^t g_n(v)dv \tag{1.11}$$

Par ailleurs, par (1.8) et les inégalités précédentes, on voit que les fonctions g_n sont bornées sur $[0,T]$.En effet, $g_0=m^2$ *pour* $t\in[0,T]$ *et par une récurrence utilisant (1.11) , on établit que pour tout* $n\ge1$ et $t\in[0,T]$, *on a*

$$g_n(t) \leq m^2 C_T^n \frac{t^n}{n!}.$$

On déduit alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{1/2} < +\infty$, *comme*

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} \left| X_s^{n+1} - X_s^n \right| \right\|_2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \sup_{0 \leq s \leq T} \left| X_s^{n+1} - X_s^n \right| \right\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(T)^{1/2} < +\infty,$$

cela entraîne que P.s

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} \left| X_s^{n+1} - X_s^n \right| < +\infty,$$

et donc P.s, la suite (X_t^n) , $t \in [0, T]$ *converge uniformément sur* $[0, T]$ *vers un processus limite* (X_t) , $t \in [0, T]$ *qui est continu. Comme par récurrence, chaque processus* X^n *est adapté par rapport à la filtration canonique de* B, X *est aussi à la limite .*

Les estimations (1.10) *établissent aussi que*

$$E \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^n - X_s|^2 \right] \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(T)^{1/2} \right)^2 \to 0, n \to +\infty.$$

On déduit alors, de l'isométrie dans $\mathbb{L}^2$, *et l'hypothése* ***(A)*** *:*

$$\mathbb{L}^2 - \lim_{n \to +\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s = \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$
$$\mathbb{L}^2 - \lim_{n \to +\infty} \int_0^t b(s, X_s^n) ds = \int_0^t b(s, X_s) ds.$$

Finalement, en passant à la limite dans l'équation de récurrence (1.7) *on obtient que* X *est solution forte de* $E_x(b, \sigma)$ sur $[0, T]$.

Remarque 1.2.1 *On peut affaiblir l'hypothése de continuité en t, celle-ci n'intervient essentiellement que pour majorer* $\sup_{0\le t\le T}|\sigma(t,m)|$ *et* $\sup_{0\le t\le T}|b(t,m)|$ *pour m fixé : on peut «localiser» l'hypothése lipschitzienne **(A)** sur b et σ se contenter d'une constante K qui dépend du compact sur lequel t et m sont considérés. Il faut alors conserver une condition de croissance sous-linéaire :*

$$|\sigma(t,m)| \le K(1+|m|),\ \ |b(t,m)| \le k(1+|m|).$$

Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la croissance sous-linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS.

- **Unicité trajectorielle :** *On considére deux solutions X* et $X\prime$ de $E(b,\sigma)$ avec $X_0 = X_0'$, *définies sur sur le même espace et avec le même mouvement brownien B. pour $M>0$ fixé ,on considére le temps d'arrêt*

$$\tau = \inf(t\ge 0 : |X_t| \ge M, |X_t'| \ge M).$$

D'aprés $E(b,\sigma)$, on a alors pour tout $t\ge 0$:

$$\begin{aligned}
X_{t\wedge\tau} &= X_0 + \int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X_s)dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s,X_s)ds\\
X'_{t\wedge\tau} &= X_0 + \int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X'_s)dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s,X'_s)ds.
\end{aligned}$$

On considére $t\in[0,T]$. Par différence, comme $X_0 = X_0'$ et comme X ; X_0 sont bornées par M sur $]0,\tau]$, *l'expression de la variance d'une intégrale stochastique $\mathbb{L}^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les hypothéses lipschitziennes et la majoration $(m,y)^2 \le 2(m^2+y^2)$ donnent*

$$
\begin{aligned}
&E[(X_{t\wedge\tau} - X'_{t\wedge\tau})] \\
&\leq 2\left(E\left[(\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X'_s))dB_s)^2\right] + E\left[(\int_0^{t\wedge\tau}(b(s,X_s) - b(s,X'_s))ds)^2\right]\right) \\
&\leq 2\left(E\left[\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X'_s))^2 ds\right] + TE\left[\int_0^{t\wedge\tau}(b(s,X_s) - b(s,X'_s))^2 ds\right]\right) \\
&\leq 2K^2(1+T)E\left[\int_0^{t\wedge\tau}(X_s - X'_s)^2\right] ds \\
&\leq 2K^2(1+T)E\left[\int_0^{t\wedge\tau}(X_{s\wedge\tau} - X'_{s\wedge\tau})^2\right] ds
\end{aligned}
$$

Si on pose $h(t) = E(X_{t\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau})^2$*et* $C = 2K^2(1+T)$*, alors on a établi que* h *vérifie pour* $t \in [0,T]$:

$$h(t) \leq C \int_0^t h(s)ds.$$

De plus, par définition de τ *, la fonction* h *est bornée par* $4M^2$*, l'inégalité de* Gronwall***1.2.1****s'appliquе avec* $b = 0$ *et* $a = C$*. On obtient* $h = 0$*, c'est à dire* $X_{t\wedge\tau} = X'_{t\wedge\tau}$*ps.*

Finalement, en faisant $M \to +\infty$*, on a* $\tau \to +\infty$ *et donc* $X_0 = X'_0$ *ps. Les processus* X et $X\prime$ *sont des modifications à trajectoires continues, ils sont donc indistinguables, ce qui prouve l'unicité trajectorielle.*

1.3 Formule de Tanaka et temps local

1.3.1 Formule de Tanaka

Supposons qu'on veut appliquer la formule d'Itô à $g(Bs) = |B_s|$.

La difficulté c'est que $x \to |x|$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. En revanche c'est une fonction convexe, donc Lipchitzienne et sa dérivée à gauche existe et est une fonction càg-làd

. On pose donc

$$g_k(x) = -x\mathbf{1}_{]-\infty,-1/k]}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + kx^2\right)\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(x) + x\mathbf{1}_{]1/k,+\infty[}(x)$$

Clairement g_k est de classe $\boldsymbol{C}^1$

$$g_k'(x) = -\mathbf{1}_{]-\infty,-1/k]}(x) + kx\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(x) + \mathbf{1}_{]1/k,+\infty[}(x)$$

et en dehors des points $-1/k$ et $1/k$ la dérivée seconde

$$g_k''(x) = k\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(x)$$

est bien continue et bornée (par k). Par le résultat précédent on a donc

$$g_k(B_t) = g_k(B_0) + \int_0^t g_k'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_k''(B_s)\,ds \tag{1.12}$$

Observer que $\|g_k(x) - |x|\|_\infty \leq \frac{1}{2k} \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Par ailleurs par l'Isométrie d'Itô on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t kB_s\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(B_s)\,dB_s\right)^2\right] &= \int_0^t k^2\mathbb{E}\left(B_s^2\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(B_s)\right)ds \\
&= k^2\int_0^t\int_{-1/k}^{1/k}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right)dxds \\
&\leq \frac{2}{k}\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{2\pi s}} = \frac{2\sqrt{t}}{k\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) \leq \frac{1}{k^2}$ pour tout $x \in [-1/k, 1/k]$. On en déduit que

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t kB_s\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(B_s)\,dB_s\right)^2\right] = 0$$

d'où

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t g_k'(B_s)\,dB_s = \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)\,dB_s \quad \text{dans } L^2$$

et

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_0^t g_{k_\ell}'(B_s)\,dB_s = \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)\,dB_s \quad \text{p.s.}$$

Par (1.12) on a

$$\frac{1}{2}\int_0^t g_k''(B_s)\,ds = g_k(B_t) - g_k(B_0) - \int_0^t g_k'(B_s)\,dB_s$$

La limite en k existe dans L^2 on pose

$$L_t := \lim_{k\to\infty}\int_0^t \frac{k}{2}\mathbf{1}_{]-1/k,1/k]}(B_s)\,ds = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2}\lambda\left(s\in[0,t] : B_s \in \left]-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right]\right)$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donc quitte à prendre une sous suite de n_ℓ, disons $n_{\ell_j} \nearrow \infty$ on a presque sûrement

$$L_t = |B_t| - |B_0| - \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)\,dB_s$$

On vient de montrer le

Théorème 1.3.1 *(**Formule de Tanaka.**) Soit B_t un mouvement Brownien en dimension 1 alors presque sûrement on a*

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)\,dB_s + L_t$$

où $L_t := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\lambda\left(s\in[0,t] : B_s \in]-\varepsilon,\varepsilon[\right.$ et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1.3.2 Temps local

Nous allons généraliser le résultat précédent. On commence par montrer le

Théorème 1.3.2 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et X une semimartingale continue. Alors $f(X)$ est une semimartingale et*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + K_t$$

où $f\prime$est la dérivée à gauche de f, c'est-à-dire $f\prime(x) = lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ et $K_t = K_t(f, X)$ est un processus continu croissant adapté.

Remarque 1.3.1 *La formule est linéaire en f. En effet si f_1 et f_2 sont deux fonction convexe de processus croissants associés $K_t^1 = K_t(f_1, X)$ et $K_t^2 = K_t(f_2, X)$ alors*

$$K_t(f_1 + f_2, X) = K_t^1 + K_t^2$$

Preuve. Comme f est convexe f' la dérivée à gauche existe en tout point et pour tout $x \in K$ compact $f'(x) \leq c(K) = \max_{s\in K} f'(s)$. La stratégie s'inspire des preuves ci dessus. On sait que $X_t = M_t + A_t$ où M_t est une martingale locale et A_t un processus à variation finie tels que $A_0 = 0$. Au besoin en utilisant un temps d'arrêt (localisation) on peut sans perte de généralité supposer que $\max(|X_t|, |A_t|, \langle M\rangle_t) \leq C < \infty$. Soit ρ_n une suite régularisante, on pose $f_n(x) = f * \rho_n(x)$ comme précédemment f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (de plus elle est aussi convexe) donc par itô on a

$$f_n(X_t) - f_n(X_0) = \int_0^t f_n'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_s)\, d\langle X\rangle_s$$

De par les propriétés de régularisation et comme on suppose $|X_t| \leq C$ on a que

$$f_n(X_t) \to f(X_t) \text{ uniformément en } t$$

De plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = \lim_{h \searrow 0} \int_{-1/n}^{1/n} \frac{f(x-y) - f(x-h-y)}{h} \rho_n(y) dy$$

et par convergence dominée on en déduit

$$f_n'(x) = \int_{-1/n}^{1/n} f'(x-y)\rho_n(y)dy = f' * \rho_n(x)$$

et donc $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$. On pose $I_t^n = \int_0^t f_n'(X_s)\, dM_s$ et $I_t = \int_0^t f'(X_s)\, dM_s$. Par l'inégalité maximale de Doob dans L^2 et l'Isométrie d'Itô on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_t (I_t^n - I_t)^2\right) &\leq 4 \sup_t \mathbb{E}\left[(I_t^n - I_t)^2\right] \\ &= 4\mathbb{E}\left(\int_0^\infty (f_n'(X_s) - f'(X_s))^2\, d\langle M\rangle_s\right) \end{aligned}$$

Comme $|X_s| \leq C$ et $\langle M\rangle_s \leq C$ on en déduit que

$$\leq 4C \sup_{x\in[-C,C]} |f_n'(X_s) - f'(X_s)|^2 \to 0$$

quand $n \to \infty$. Donc il existe une sous suite n_k telle que $\sup_t (I_t^{n_k} - I_t)^2 \to 0$ presque sûrement quand $k \to \infty$. On pose $J_t^n = \int_0^t f_n'(X_s)\, dA_s$ et $J_t = \int_0^t f'(X_s)\, dA_s$. Par convergence dominée on a

$$\sup_t |J_t^n - J_t| \leq \int_0^\infty |f_n'(X_s) - f'(X_s)|\, dA_s \to 0$$

presque sûrement quand $n \to \infty$. Enfin on pose $K_t^n = \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_s)\, d\langle X\rangle_s$ alors par (1.13) on a

$$K_t^{n_k} = f_{n_k}(X_t) - f_{n_k}(X_0) - \int_0^t f_{n_k}'(X_s)\, dX_s$$

De part ce qui précède le membre de droite converge presque sûrement lorsque $k \to \infty$ vers une limite uniforme en t. Il en est donc de même pour le membre de gauche. Par ailleurs $K_t^{n_k}$ est continu, adapté et croissant donc sa limite uniforme K_t l'est aussi. ■

Définition 1.3.1 *Soient X une semimartingale et f une fonction convexe alors le processus $K_t = K_t(f, X)$ définit dans le théorème précédent est appelé processus croissant associé à f.*

Le processus croissant associé à la fonction $x \mapsto |x - a|$ est appelé temps local en a et est noté $L_t^a = L^a(X)_t$, quand $a = 0$ on écrit simplement L_t.

Grâce au Théorème précédent on abouti aisément à la généralisation suivante de la formule de Tanaka.

Corollaire 1.3.1 *(**Formule de Meyer-Tanaka**) Soit X une semimartingale continue. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$*

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sign}(X_s - a)\, dX_s + L_t^a$$

Le résultat qui suit donne une autre définition du temps local.

Lemme 1.3.1 *Le processus croissant associé à la fonction $x \mapsto (x - a)^+$ou $x \mapsto (x - a)^-$ est $(1/2)L_t^a$.*

Preuve. Les fonctions $x \mapsto (x-a)^+$et $x \mapsto (x-a)^-$sont convexes. Soient donc K_t^1 et K_t^2 leur processus croissants associés respectifs. On a $|x-a| = (x-a)^+ + (x-a)^-$donc $L_t^a = K_t^1 + K_t^2$ (Voir remarque).

Par ailleurs $g(x) := x - a = (x - a)^+ - (x - a)^-$est une fonction (convexe) de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc par Itô

$$g(X_t) - g(X_t) = X_t - X_0 = \int_0^t 1 dX_s$$

donc le processus croissant associé à g est 0 . D'où le résultat cherché . Le résultat qui suit précise le sens des vocables "temps local" pour L_t^a. ■

Théorème 1.3.3 *Soit X une semimartingale continue. Le processus $L_t^a = L^a(X)_t$ ne croît que lorsque $X_t = a$, plus précisément pour presque tout ω la mesure sur $\mathbb{R}^+, dL_t^a(\omega)$à pour support $\{s \geq 0 : X_s(\omega) = a\}$.*

Chapitre 2

Problème de Skorokhod

2.1 Problème de Skorokhod : Cas déterministe

Commençons par une description informelle du problème que nous allons étudier. Supposons qu'une particule est située sur une demi-droite positive et qu'il y a un mur solide au point zéro . La particule est pilotée selon la fonction f, mais elle a des "ratés" lorsqu'elle a l'intention de traverser le mur. On désigne par $g(t)$ la position de la particule à l'instant $t \geq 0$. Si $g(t) > 0$, $t \in [a; b]$ les incréments de g et de f doivent être identiques. Lorsque $g(t) = 0$ c-à-d lorsqu'une particule heurte le mur , toutes ses "intentions" d'aller vers la gauche doivent être compensées. Ces compensations doivent disparaître immédiatement lorsque $g(t) > 0$. Le problème est de trouver g pour une f donné.

Définition 2.1.1 *Soit $f \in C([0, T]), f(0) \geq 0$. Un couple de fonctions continues g et l est appelée une solution du problème de Skorokhod pour f .si f est une solution du problème de Skorokhod pour f appelée solution du problème de Skorokhod pour f si*

1. $g(t) \geq 0, T \in [0,T]$;

2. $g(t) = f(t) + l(t), t \in [0,T]$;

3. $l(0) = 0, l$ *est non décroissante ;*

4. $$\int_0^T 1_{g(s)>0} dl(s) = 0 \tag{2.1}$$

L'équation (2.1) signifie que l n'augmente pas lorsque $g(s) > 0$, c'est-à-dire que l ne peut augmenter qu'aux moments où $g(s) = 0$. Cette condition s'écrit parfois sous la forme é.quivalente suivante

$$\int_0^t 1_{g(s)=0} dl(s) = l(t), t \in [0,T]$$

Théorème 2.1.1 *Pour tout $f \in C([0,T])$, $f(0) \geq 0$, existe une solution unique au problème de Skorokhod En outre,*

$$l(t) = -\min(f(s) \wedge 0) = \max_{s\in[0,t]}(-f(s) \vee 0) \tag{2.2}$$

$$g(t) = f(t) + l(t) = f(t) - \min_{s\in[0,t]}(f(s) \wedge 0) \tag{2.3}$$

Preuve. Cette preuve a été proposée par Skorokhod Soit $(g_{1,}g_2)$ et $(g_{1,}g_2)$ des solutions du problème de. Supposons que l'ensemble $\{t \geq 0 : g_1(t) > g_2(t)\}$ n'est pas vide . Il existe alors un intervalle $[a,b]$ tel que $g_1(t) - g_2(t) > 0, t \in [a,b]$ et $g_1(a) = g_2(a)$. Observer que $g_1(t) > 0$, $t \in [a,b]$, donc $l_1(t)$, $t \in [a,b]$ est constant Par conséquent, $g_1(t) - g_2(t) = l_1(t) - l_2(t), t \in [a,b]$ est une fonction continue positive non croissante tq $g_1(a) - g_2(a) = 0$ Ceci est impossible. ■

Preuve. soit $(g_{1,}l_1)$ et $(g_{2,}l_2)$ des solutions du problème de Skorokhod. Puisque : $g_1(t) - g_2(t) = l_1(t) - l_2(t)$ est une fonction continue à variation bornée, on a $0 \leq (g_1(t) - g_2(t))^2 = 2\int_0^t (g_1(s) - g_2(s)) d(l_1(s) - l_2(s)) = 2\int_0^t 1I_{g_{1(s)=0}}(g_1(s) - g_2(s)) dl_1(s) -$

$2\int_0^t 1I_{g_2(s)=0}(g_1(s)-g_2(s))dl_2(s)$ **(B)**

Le membre de droite de **(B)** est égale à

$-2\int_0^t 1I_{g_1(s)=0}g_2(s)dl_1(s)-2\int_0^t 1I_{g_2(s)=0}g_1(s)dl_2(s)\leq 0$

car $g_1$et g_2 sont positives et $l_1$et l_2 sont croissantes. Donc $g_1(t)=g_2(t), t\in[0,T]$, et

$$l_1(t)=f(t)-g_1(t)=f(t)-g_2(t)=l_2(t)$$

Par Γ, nous désignons l'application

$$g(.)=\Gamma f(.):=f(.)-\min_{s\in[0,.]}(f(s)\wedge 0)$$

■

Remarque 2.1.1 *L'application Γ est appelée application de Skorokhod.*

Lemme 2.1.1 *L'application de Skorokhod Γ est une fonction continue de $C([0,T])$ $C5[0,T]),\ C([0,T])\quad f:=\max_{t\in[0,T]}|f(t)|$*

a. $\forall\ f_1 et\ f_2\in C([0,T])$:

$$\|g_{1-}g_2\|\leq 2\|f_1-f_2\|$$

$$\|l_1-l_2\|\leq\|f_1-f_2\|$$

où $g_i=\Gamma f_i l_i=f_i-g_i\ i=1,2.$

b. $\forall\ \delta>0:\omega_g(\delta)\leq\omega_f(\delta),\ \omega_l(\delta)\leq\omega_f(\delta),$

où $g=\Gamma f,\ l=f-g,\omega_f(\delta)=\sup_{|s-t|<\delta}|f(s)-f(t)|$ est le module de continuité de f.

c. $\forall\ f\in C([0,T])$:

$$\|\Gamma f\|\leq 2\|f\|,\ \ \|l\|\leq\|f\|.$$

2.2 Problème de Skorokhod : cas non déterministe

Soit D un domaine connexe de $\mathbb{R}^d$. on définit l'ensemble $\mathcal{N}_x$ des vecteurs normaux unitaires à $x \in \partial D$

$\mathcal{N}_x = \bigcup_{r>0} \mathcal{N}_{x,r}$

$\mathcal{N}_{x,r} = \{n \in \mathbb{R}^d : |n| = 1, B(x - rn, r) \cap D = \emptyset\}$

où $B(z; r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |z - y| < r, z \in \mathbb{R}^d, r > 0\}$

2.2.1 Existence et unicité des solutions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles.

Définition 2.2.1 *Soit Y un processus $(\mathcal{F}_t)$ adapté avec $Y_0 \in \bar{D}$.Nous disons qu'un couple (X, K) de processus adaptés $(\mathcal{F}_t)$ résout le problème de Skorokhod associé à Y, D si pour presque chaque $\omega \in \Omega$, $(X(\omega), K(\omega))$ est une solution du problème de Skorokhod associée à $Y(\omega)$.*

Hypothèses

A Il existe $r_0 \in (0, \infty]$ tel que $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0}$, $\forall x \in \partial D$.

B Il existe $\delta > 0$, $\beta \geq 1$ tel que $\forall x \in \partial D$, il existe un vecteur unitaire $\mathbf{1}_x$ avec la propriété

$$\langle \mathbf{1}_x, \mathbf{n} \rangle \geq \frac{1}{\beta}$$

$\forall \mathbf{n} \in \bigcup_{y \in B(x,\delta) \cap \partial D} \mathcal{N}_y$

Théorème 2.2.1 *Soit Y tel que $Y_0 \in \bar{D}$ et $|\Delta Y| < r_0$.*

1. Si D satisfes (A) alors le problème de Skorokhod associé à Y a au plus une solution.

2. De plus, si (A) et (B) sont satisfaits ou si D est un domaine convexe dans $\mathbb{R}^d$ alors le problème de Skorokhod associé à Y a une solution unique.

2.2.2 Estimations des solutions du problème de Skorokhod

Supposons que D soit un domaine convexe ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Soit Y la semimartingale admettant la décomposition

$$Y_t = Y_0 + M_t + V_t, t \in \mathbb{R}^+,$$

Où $Y_0 \in \bar{D}$, M est une martingale locale adaptée $(\mathcal{F}_t)$ et V est une martingale locale adaptée $(\mathcal{F}_t)$ avec une variation limitée telle que $M_0 = V_0 = 0$.

Théorème 2.2.2 (Lions - Sznitman) *On suppose que (X, K) est une solution au problème de Skorokhod associé à une semi-martingale Y. Pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $\mathbb{C}_P$ telle que pour tout $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt τ et tout vecteur $a \in \mathbb{R}^d$,*

$$E[\sup_{t<\tau} |X_t - a|^{2p}] \leq C_p \, |a - Y_0|^{2p} + E[[M]_\tau^p + |V|_\tau^{2p}]$$

De plus si $a \in D$, alors

$$E\,|K|_\tau^p \leq (dist(a, D))^{-p} C_p \left\{ |a - Y_0|^{2p} + E[[M]_\tau^p + |V|_\tau^{2p}] \right\}.$$

2.2.3 Mouvement Brownien réfléchi

Le mouvement brownien réféchi admet des limites et qu'il est réfléchi lorsqu'il dépasse les limites. .

Définition 2.2.2 ***(Mouvement Brownien réfléchi)*** *: soit $X = (X_t)$ un mouve-*

ment Brownien en une dimension et soit $X^{+}=\left(X_t^{+}\right)$ *un processus stochastique sur* $[0,\infty)$ *défini par*

$$X_t^{+}=\left|X_t\right|.$$

On peut donc facilement en déduire que l'événement $\left\{X_{t_2}^{+}=y \mid X_{t_1}=x\right\}$ *est l'union de* $\{X_{t_2}=y \mid X_{t_1}=x\}$ *et* $\{X_{t_2}=-y \mid X_{t_1}=x\}$*, i.e.*

$$\begin{aligned}\left\{X_{t_2}^{+}=y \mid X_{t_1}=x\right\} &= \{X_{t_2}=y \mid X_{t_1}=x\} \cup \{X_{t_2}=-y \mid X_{t_1}=x\} \\ &= \{X_{t_2-t_1}=y-x\} \cup \{X_{t_2-t_1}=-y-x\}\end{aligned}$$

De plus, étant donné que $X_{t-s}\sim N(0,t-s)$*, on a pour* $0<t_1<t_2<\ldots<t_n$*,* $A_t\in\mathcal{B}([0,\infty))$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left[X_{t_1}^{+}\in A_1, X_{t_2}^{+}\in A_2,\ldots,X_{t_n}^{+}\in A_n\right] \\ &= \int_{[0,\infty)}\mu(dx)\int_{A_1}p^{+}\left(t_1,x,x_1\right)dx_1\int_{A_2}p^{+}\left(t_2-t_1,x_1,x_2\right)dx_2 \\ &\qquad \cdots\int_{A_1}p^{+}\left(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n\right)dx_n\end{aligned}$$

où

$$p^{+}(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2t}\right]+\exp\left[-\frac{(x+y)^2}{2t}\right]\right)$$

et μ^{+}*est la loi de probabilité de* $X_0^{+}=\left|X_0^{+}\right|$*. Le processus* X^{+} *est appelé le mouvement brownien réfléchi en dimension une. Il existe différentes façons de caractériser le mouvement Brownien réfléchi. Nous présenterons une caractérisation due à Skorokhod.*

Théorème 2.2.3 *Soit* $\{X(t),B(t),\phi(t)\}$ *un système de processus stochastiques continus réels définis sur un espace de probabilité tel que* $B(t)$ *est un mouvement brownien unidimensionnel avec* $B(0)=0$*,* $X(0)$ *et les processus* $B(t)$ *sont indépendants et, avec une probabilité égale à un, les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $X(t) \geq 0$ *pour tout* $t \geq 0$ *et* $\phi(t)$ *est croissant avec* $\phi(0) = 0$ *tel que*

$$\int_0^t I_0(X(s))d\phi(s) = \phi(t)$$

(ii)

$$X(t) = X(0) + B(t) + \phi(t) \tag{2.4}$$

Alors $X = X(t)$ *est un mouvement Brownien réfléchi sur* $[0, \infty)$.

Equation (2.4) est appelée l'équation de Skorokhod.

Preuve. Par les paragraphes précédentes, $X = X(t)$ et $\phi = \phi(t)$ sont déterminées de manière unique par $X(0)$ et $B = B(t)$: $X = X(0) + B(t) - \min_{0\leq s\leq t}\{(X(0) + B(s)) \wedge 0\}$ et $\phi = -\min_{0\leq s\leq t}\{(X(0) + B(s)) \wedge 0\}$. Pour prouver ce théorème, il suffit de montrer que si x_t est un mouvement brownien unidimensionnel, alors $X(t) = |x_t|$ satisfait, avec certains processus $B(t)$ et $\phi(t)$, les propriétés susmentionnées. Soit $g_n(x)$ soit une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$ avec support dans $(0, 1/n)$, i.e. $\operatorname{supp}(g_n) = \{x \in [0, \infty) \mid g_n(t) \neq 0 = (0, 1/n)$, tel que $\int_0^\infty g_n(x)dx = 1$. Posons

$$u_n(x) = \int_0^{|x|} dy \int_0^y g_n(z)dz$$

Nous constatons alors que $u_n \in C^2(R), u_n'(x) = \frac{d|x|}{dx}\int_0^{|x|} g_n(z)dz$. Et alors $|u_n'| \leq \left|\frac{d|x|}{dx}\right| \left|\int_0^\infty g_n(z)dz\right| \leq 1$, $u_n(0) = 0$, $u_n(x) \uparrow |x|$. Alors car $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0$ et que la fonction g_n est positive et admet un support dans $(0, 1/n)$,

$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^{|x|} g_n(z)dz = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\int_0^{1/n} g_n(z)dz + \int_{1/n}^{|x|} g_n(z)dz\right) = 1 + 0 = 1$, $x \neq 0$ donc $u_n'(x) = \frac{d|x|}{dx}$, for $x \neq 0$. D'où,

$$u_n'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Par la formule d'Itô,

$$u_n(x_t) - u_n(x_0) = \int_0^t u_n'(x_s)\,dx_s + \frac{1}{2}\int_0^t u_n''(x_s)\,\mathrm{ds}$$
$$= \int_0^t u_n'(x_s)\,dx_s + \int_{-\infty}^0 g_n(-y)\phi(t,y)dy + \int_0^\infty g_n(y)\phi(t,y)dy$$

où $\phi(t,y)$ est le temps local de x_t. Faisant $n \longrightarrow \infty$, on a

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \mathrm{sgn}\,(x_s)\,dx_s + 2\phi(t,0)$$

Posons

$$B(t) = \int_0^t \mathrm{sgn}\,(x_s)\,dx_s \text{ et } \phi(t) = 2\phi(t,0).$$

Alors, puisque $< B >_t = t$, $B(t)$ est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien, où $(\mathcal{F}_t) = (\mathcal{F}_t^x)$ est la filtration naturelle engendrée par x_t. Puisque $X(0)$ et $\mathcal{F}_0$-mesurable, $X(0)$ et $\{B(t)\}$ sont indépendants. Puisque

$$\phi(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t I_{[0,\epsilon)}(X(s))ds$$

il est clair que

$$\int_0^t I_0(X(s))d\phi(s) = \phi(t)$$

Par conséquent $\{X(t), B(t), \phi(t)\}$ satisfait toutes les conditions du théorème. Ainsi $X = (X(t))$ et $\phi = (\phi(t))$ sont caractérisés comme $X = X(0) + B(t) - \min_{0\le s\le t}\{(X(0) + B(s)) \wedge 0\}$ et $\phi = -\min_{0\le s\le t}\{(X(0)+B(s)) \wedge 0\}$. ■

Théorème 2.2.4 *le temps local* $\{\phi(t,x)\}$ *de* X *existe*

Preuve. *Nous Démontrerons ce théorème en utilisant le calcul stochastique. Soit* $(\mathcal{F}_t) = \left(\mathcal{F}_t^X\right)$ *a filtration naturelle engendrée par* X*. Alors* X *est un* $(\mathcal{F}_t)$*-mouvement Brownien et* $X_t - X_0$ *appartient à l'espace* M*. Soit* $g_n(x)$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *tel que son support est continu dans* $(-1/n + a, 1/n + a)$*,* $g_n(x) \ge 0$*,* $g_n(a + x) =$

$g_n(a-x)$ *et* $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx = 1$

$u_n(x) = \int_{-\infty}^{x} dy \int_{-\infty}^{y} g_n(z)dz$

Par la formule d'Itô, ■

Preuve. $u_n(X_t) - u_n(X_0) = \int_0^t u_n'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t u_n''(X_s)\, ds$

et le temps local $\{\phi(t,x)\}$ existe, alors

$\frac{1}{2}\int_0^t u_n''(X_s)\, ds = \frac{1}{2}\int_0^t g_n(X_s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)\phi(t,y)dy \longrightarrow \phi(t,a)$ quand $n \longrightarrow \infty$

En outre, il est clair que

$$u_n(x) \longrightarrow (x-a)^+, u_n'(x) \longrightarrow \begin{cases} 1, & x > a \\ \frac{1}{2}, & x = a \\ 0, & x < a \end{cases} \cdot$$

D'où, $\phi(t,a)$ doit être exprimée comme suit

$$\phi(t,a) = (X_t - a) + -(X_0 - a)^+ - \int_0^t I_{(a,\infty)}(X_s)\, dX_s.$$

■

2.3 Application : Problème de Neumann

Considérons le problème aux limites de Neumann de l'équation aux dérivées partielles de type elliptique sur un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^d$.

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{2} + q(x)\right) u = 0, & x \in D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \phi_2(x), & x \in \partial D \end{cases} \tag{2.5}$$

Quand la partie inferieure du spectre de l'opérateur $\frac{\Delta}{2} + q$ est negative une solution probabiliste de (2.5) est donnée par

$$u(x) = \frac{1}{2} E^x \left[\int_0^\infty e_q(t) \phi_2(X_t) L(dt) \right]$$

où X_t est un mouvement Brownien réfléchi commençant à x, L_t est le temps local par rapport à X_t et $e_q(t)$ la fonctionnelle de Feynman-Kac

$$e_q(t) = \exp \left[\int_0^t q(X_s) ds \right].$$

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques réfléchies

Les équations différentielles stochastiques réfléchiés apparaissent naturellement dans des applications variées dû aux restrictions naturelles qu'on impose à la solution de l'équation différentielle stochastique.

Du point de vu des équations aux dérivées partielles ceci correspond à la solution du probléme aux limites de type Neumann pour des équtions aux dérivées partielles de type parabolique.

Soit $\{w(t), t \geq 0\}$ un processus de Wiener adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $a = a(t,x)$, $b = b(t,x) : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables, $\xi_0 \geq 0$ est $\mathcal{F}_0-$mesurable. Nous supposerons toujours que $\mathcal{F}_t$ est complétée par des événements de probabilité nulle et continue à droite. Le but de ce chapitre est de construire un processus $\xi(t)$ à valeurs dans $[0,\infty)$ qui a une différentielle stochastique de la forme

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + b(t,\xi(t))dw(t) \tag{3.1}$$

si $\xi(t) > 0$ et se reflète continuellement, dans un certain sens, dans la demi-droite positive lorsque ξ atteint 0. Tout comme le raisonnement du chapitre précédent, il est naturel de donner la définition suivante.

Définition 3.0.1 *Un couple de processus continus $\mathcal{F}_t-$ adaptés $(\xi(t), l(t))$,$t \geq 0$,est une solution de l'EDS*

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + b(t, \xi(t))dw(t) + dl(t), \;\; t \geq 0$$

avec réflexion avec condition initiale $\xi(0) = \xi_0$, si

1. $\xi(t) \geq 0, t \geq 0$;
2. l est croissant, $l(0) = 0$;
3. $\int_0^t 1I_{\xi(s)>0} dl(s) = 0, t \geq 0$;
4. $$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + \int_0^t b(s, \xi(s))dw(s) + l(t), t \geq 0; \tag{3.2}$$

   et toutes les intégrales sont bien définies.

Discutons d'une relation entre la solution de (3.1) et le problème de Skorokhod. Supposons que ω soit tel que (3.2) soit satisfaite.

$$Y(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + \int_0^T b(s, \xi(s))dw(s)$$

Alors toutes les conditions de la définition 3.0.1 pour $Y(t)$ coïncident avec les conditions de la définition 2.1.1 pour $f(t)$ .par le théorème2.1.1,

$$\xi(t) = (\Gamma Y)(t), \;\; t > 0 \tag{3.3}$$

et $Y(t)$ est une solution de l'équation d'Itô suivante

$$Y(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \Gamma Y(s))ds + \int_0^t b(s, \Gamma Y(s))dw(s) \tag{3.4}$$

Remarque 3.0.1 *Pour tout processus continu non-anticipatif $Y(t)$, $t \geq 0$,le processus $(\Gamma Y)(t)$ est également continu et non-anticipatif et est une solution de (3.4), alors*

$$\xi(t) = \Gamma Y(t), l(t) = \xi(t) - Y(t) \tag{3.5}$$

est une solution de (3.2).

En appliquant les résultats standards sur la solvabilité de l'équation d'Itô, nous obtenons le théorème suivant .

Théorème 3.0.1 *Soit ξ_0 une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_0-$mesurable. Supposons que fonctions mesurables $a = (t, x), b = (t, x)$ satisfont aux*

1. Condition de Lipschitz en x, uniformément dans le temps :

   $\exists L > 0,\ \forall t \geq 0,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : |a(t, x_1) - a(t, x_2)| + |b(t, x_1) - b(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$.

2. condition de croissance linéaire en x, uniformément dans le temps :

   $\exists\ C > 0,\ \exists\ \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+ : |a(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + |x|)$.

   Il existe alors une solution unique à l'EDS réfléchie (3.2).

   $\forall\ t > 0,\ \forall y_1, y_2 \in C([0, t])$:

   $|a(t, (\Gamma y_1)(t)) - a(t, (\Gamma y_2)(t))| + |b(t, (\Gamma y_1)(t)) - b(t, (\Gamma y_2)(t))|$

$$\leq |L(\Gamma y_1)(t) - (\Gamma y_2)(t)| \leq 2L \, \|y_1 - y_2\|_{[0,t]} ;$$

où $\|f\|_{[0,t]} = \sup_{s\in[0,t]} |f(t)|$;

$\forall\ t > 0$, $\forall y \in C([0,t])$:

$$|a(t,(\Gamma y)(t))| + |b(t,(\Gamma y)(t)| \leq C(1 + |\Gamma y(t)|) \leq 2C(1 + \|y\|_{[0,t]}).$$

Donnons également une autre façon de prouver l'unicité (par la preuve de Théorème **2.1.1**).qui sera utile dans le cas multidimensionnel. Soit (ξ_1, l_1) et (ξ_2, l_2) des solutions de (3.1). Alors par la formule d'Itô,

$(\xi_1(t)-\xi_2(t))^2 = \int_0^t (2(\xi_1(z) - \xi_2(z))[a(z,\xi_1(z)) - a(z,\xi_2(z))] + [b(z,\xi_1(z)) - b(z,\xi_2(z))]^2)\, dz-$
$2\int_0^t (\xi_1(z) - \xi_2(z))d(l_1(z) - l_2(z))$
$+2\int_0^t (\xi_1(z) - \xi_2(z))[b(z,\xi_1(z)) - b(z,\xi_2(z))]dw(z).$ (3.5)

De manière similaire à la preuve du **2.1.1**, nous avons

$\int_0^t (\xi_1(z) - \xi_2(z))d(l_1(z) - l_2(z)) \leq 0, t \geq 0.$

Il reste à prendre l'espérance en (3.5) et appliquer le lemme de Gronwall

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |\xi_1(t)| \wedge |\xi_2(t)| \geq n\}.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} E[\xi_1(t\wedge\tau_n) - \xi_2(t\wedge\tau_n)]^2 &\leq (2L + L^2)E\int_0^{t\wedge\tau_n} (\xi_1(z) - \xi_2(z))^2 dz \\ &\leq (2L + L^2)\int_0^t E[\xi_1(z\wedge\tau_n) - \xi_2(z\wedge\tau_n)]^2 dz. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall donne

$$\forall n \geq 0,\ \forall t > 0 : P(\xi_1(t\wedge\tau_n) = \xi_2(t\wedge\tau_n)) = 1.$$

Puisque les $\xi_i(t)$ sont continus en t, la dernière égalité implique que

$$P(\xi_1(t) = \xi_2(t),\ t \geq 0) = 1,$$

et donc pour $k = 1, 2$:

$$l_1(t) = \xi_k(t) - \xi_0 - \int_0^t a(s, \xi_k(s))ds - \int_0^t b(s, \xi_k(s))dw(s) = l_2(t), t \geq 0.$$

3.1 Applications

Voici quelques exemples d'application des équations différentielles stochastiques réfléchies :

1. Finance et évaluation des options : Les EDS réfléchiées sont utilisées en finance mathématique pour modéliser et analyser les produits financiers dérivés, tels que les options, avec des contraintes sur le prix de l'actif sous-jacent. Le mécanisme de réflexion garantit que le prix de l'actif reste dans une certaine fourchette. Cela est particulièrement utile dans le cas d'options à barrière, où le paiement de l'option dépend du fait que le prix de l'actif atteigne ou reste au-dessus ou en dessous de certains niveaux de barrière.

2. Systèmes de file d'attente : Les EDS réfléchiées sont utilisées dans l'étude des systèmes de file d'attente, qui impliquent l'arrivée et le service de clients dans une file d'attente. Le mécanisme de réflexion peut représenter diverses contraintes dans le système, telles que la capacité limitée de la file d'attente ou les seuils de longueur de la file d'attente. Il permet de saisir le comportement du système lorsqu'il atteint la limite ou la contrainte, ce qui affecte les taux d'arrivée ou de départ.

3. Problèmes de contrôle stochastique : Les EDS réfléchiées sont utilisés dans la théorie du contrôle stochastique pour traiter les problèmes de contrôle avec des contraintes. Par exemple, dans la sélection optimale de portefeuille, le mécanisme

de réflexion peut imposer des contraintes sur les poids du portefeuille pour s'assurer qu'ils restent dans une fourchette prédéterminée. Cela permet d'étudier et d'optimiser les stratégies de contrôle soumises à des contraintes réalistes.

4. Biologie mathématique : Les EDS réfléchiées trouvent des applications dans la modélisation de systèmes biologiques avec des contraintes ou des limites. Par exemple, dans la dynamique des populations, le mécanisme de réflexion peut représenter une capacité de charge ou une limite supérieure à la taille de la population. Cela permet de saisir les effets des ressources limitées ou des contraintes environnementales sur la croissance de la population.

5. Physique et systèmes de particules : Les EDS réfléchiées sont utilisées dans la modélisation de systèmes physiques impliquant des particules qui interagissent avec des frontières ou qui sont confinées. Le mécanisme de réflexion garantit que les particules restent dans une région spécifique ou obéissent à certaines conditions limites. Cela peut être utile dans des domaines tels que la physique statistique, où le comportement des particules dans des géométries confinées est intéressant.

Bibliographie

[1] Cavallazzi, Thomas. Processus stochastiques réfléchis, Master, Université de Rennes 1, 2020.

[2] El Karoui, N., and M. Chaleyat-Maurel. "Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$, cas continu." Société mathématique de France, Astérisque : 52-53, p. 117-144, 1978.

[3] Gikhman, Iosif Ilyich, et al. Stochastic differential equations. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[4] Ikeda, Nobuyuki, and Shinzo Watanabe. Stochastic differential equations and diffusion processes. Elsevier, 2014.

[5] Pilipenko, Andrey. An introduction to stochastic differential equations with reflection. Vol. 1. Universitätsverlag Potsdam, 2014.

[6] Prokhorov, Yu V., and A. N. Shiryaev. "Probability Theory III : Stochastic Calculus.". Vol. 45. Springer Science & Business Media, 1998.

[7] Skorokhod, Anatoliy V. "Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region." Theory of Probability & Its Applications 6.3 (1961) : 264-274.

[8] Skorokhod, Anatoliĭ Vladimirovich. Studies in the theory of random processes. Vol. 7021. Courier Dover Publications, 1982.

[9] Slominski, Leszek . The Skorokhod problem and SDEs with reflecting boundary. Nicolaus Copernicus University, Torûn, Poland, 2004.

[10] Tanaka, Hiroshi. "Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex region." Stochastic Processes : Selected Papers of Hiroshi Tanaka 9 (1979) : 157.

[11] Zambotti, Lorenzo. "Random obstacle problems." Lecture Notes in Mathematics 2181 (2017).

Abstract

The aim of this work is to present the Skorokhod reflection problem in the deterministic and nondeterministic cases and to study the existence and uniqueness of solutions for reflected stochastic differential equations in one dimension.

Keywords : Sorokhod problem, Stochastic differential equation, reflected Brownian motion, existence of a solution, uniqueness of a solution, reflected stochastic differential equation, local time.

Résumé

L'objectif de ce travail concerne est de présenter le problème de réflexion de Skorokhod dans le cas déterministe et le cas non déterministe et l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastiques réfléchies en une dimension.

Mots clés : Problème de Skorokhod, Equation différentielle stochastique, existence d'une solution, unicité d'une solution, equation différentielle stochastique réfléchie, temps local.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تقديم مشكلة سكوروخود في الحالات الحتمية و غير الحتمية و و دراسة وجود و وحدانية الحلول للمعادلات التفاضلية العشوائية المنعكسة في بعد واحد

الكلمات المفتاحية : مشكلة سكوروخود، معادلة تفاضلية عشوائية، حركة براونية منعكسة، وجود حل، وحدانية حل، معادلة تفاضلية عشوائية منعكسة، الوقت المحلي.