

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohamed Khider, Biskra  
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “Mathématiques Appliquées”

Option : Analyse

Par

CHERGUI Selma

Titre :

La méthode de quadrature pour les équations  
intégrales

Devant le Jury :

Pr.	BERBICHE Mohamed	Prof.	U.Biskra	Président
Dr.	DAKHIA Ghania	M.C.B	U.Biskra	Rapporteuse
Dr.	KACI Fatima	M.C.B	U.Biskra	Examinatrice

Juin 2023

## Dédicace

Je souhaite dédier ce travail à mon père bien-aimé, "CHERGUI Abd El Madjid ", qui a été mon premier enseignant qui a su m'initier à la vie, et a été mon pilier et ma source d'encouragement depuis mon enfance. Je lui dédie toutes mes réussites, car il le mérite grandement. J'espère que Dieu me donnera la force de toujours le rendre fier de moi.

....

*Je suis également reconnaissante envers ma chère mère qui m'a inondé d'amour et qui a consacré sa vie à mon bien-être. Elle a toujours été présente pour me soutenir sans relâche. Tu es comme une étoile qui illumine mes sombres nuits, et je te suis infiniment reconnaissant pour ta tendresse et tes bénédictions..*

.....

À mes frères et sœurs qui ont toujours été présents pour moi, me soutenant à chaque étape de ma vie. Vous êtes ma famille, ma force et ma source d'inspiration.

.....

Je suis également reconnaissante envers mes fidèles amies "Chahinez, Chahrazed, Bouthaina, Selma, chaïma, Ouafa, Loubna Kara et Loubna Saadaoui " qui ont partagées toutes mes joies et mes peines en offrant leur soutien et leur amitié sincère. Vous êtes de véritables trésors dans ma vie.

....

Enfin, je dédie ce travail à tous ceux qui m'ont encouragé et inspiré tout au long de mon parcours académique. Vos conseils, vos encouragements et vos exemples de réussite m'ont aidé à avancer vers mes ambitions..

.....

## Remerciements

*Tout d'abord, je souhaite exprimer ma gratitude envers Dieu, qui m'a donné la force et la motivation nécessaires pour rédiger ce modeste travail.*

*Je tiens également à remercier chaleureusement "Dr Dakhia Ghania", la directrice de mon mémoire, pour sa grande disponibilité et ses précieux conseils durant tout le processus de rédaction.*

*Je suis extrêmement reconnaissante envers les membres du jury " Pr. BERBICHE Mohamed " et " Dr.KACI Fatima " qui ont pris le temps d'évaluer mon travail et de m'offrir leur expertise.*

*Enfin, un grand merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Equations intégrales</b>	<b>3</b>
1.1 Classificatin des équations intégrales	4
1.2 Relation entre les EDO et les EI	6
1.2.1 Equations de Volterra et problèmes avec conditions initiales	7
1.2.2 Equations de Fredholm et problèmes aux limites	9
<b>2 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire</b>	<b>12</b>
2.1 Notions sur les opérateurs	12
2.1.1 Opérateur linéaire borné	12
2.1.2 Opérateur inverse	14
2.1.3 Opérateur compact	14
2.1.4 Opérateurs intégraux	15
2.2 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire de seconde espèce	18
2.2.1 Théorème de la série de Neumann	19
2.2.2 Théorie de Riez -Fredholm et l'alternative de Fredholm	19
2.3 Etude d'existence et d'unicité de la solution d'une équation de première espèce	20
<b>3 Méthode de quadrature : Calcul approché des intégrales</b>	<b>22</b>
3.1 Généralités	23

<b>3.2 Interpolation polynômiale et formule de Newton-Côtes</b> . . . . .	24
<b>3.2.1 Interpolation polynômiale de Lagrange</b> . . . . .	24
<b>3.2.2 Quadrature de Newton-Côtes</b> . . . . .	26
<b>3.3 Méthodes composites</b> . . . . .	27
<b>3.3.1 Méthode des rectangles</b> . . . . .	28
<b>3.3.2 Méthode des trapèzes</b> . . . . .	29
<b>3.3.3 Méthode de Simpson</b> . . . . .	31
<b>3.4 Quadrature de Gauss</b> . . . . .	32
<b>3.4.1 Polynômes de Legendre</b> . . . . .	34
<b>4 Résolution des équations intégrales linéaires par la méthode de quadrature</b>	<b>36</b>
<b>4.1 Méthode de quadrature pour les équations de Fredholm de seconde espèce</b> . . . . .	36
<b>4.2 Méthode de quadrature pour les équations de Volterra de seconde espèce</b> . . . . .	38
<b>4.3 Méthodes de trapèze et de Simpson composées</b> . . . . .	39
<b>4.3.1 Equations de Fredholm</b> . . . . .	39
<b>4.3.2 Equations de Volterra</b> . . . . .	40
<b>4.4 Application numérique :</b> . . . . .	42
<b>4.4.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm</b> . . . . .	42
<b>4.4.2 Equations intégrales linéaires de Volterra</b> . . . . .	48
<b>Conclusion</b>	<b>50</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>51</b>
<b>Annexe A : Les codes MATLAB</b>	<b>53</b>
<b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>	<b>56</b>

# Table des figures

4.1	Solution numérique de l'équation (Eq.F01) en utilisant la méthode de Simpson pour $n = 10, n = 20, n = 100$	44
4.2	Solution numérique de l'équation (Eq.F02) en utilisant la méthode de Simpson pour $n = 10, n = 20, n = 100$	44
4.3	Comparaison entre les solutions approchées de l'équation (Eq.F01) par les méthodes de trapèze et de Simpson pour $n = 100$	45
4.4	Solution numérique en utilisant la méthode de trapèze pour $n = 10, n = 20, n = 100$ (Eq.F02)	46
4.5	Solution numérique en utilisant la méthode de Simpson pour $n = 10, n = 20, n = 100$ (Eq.F02)	47
4.6	comparaison entre la solution approchée de trapèze et la solution approchée par Simpson pour $n = 100$ (Eq.F02)	47

# Liste des tableaux

4.1	les résultats de l'approximation par la méthode de Trapèze. Eq.F01	43
4.2	les résultats de l'approximation par la méthode de Simpson. Eq.F01	43
4.3	les résultats de l'approximation par la méthode de trapèze .Eq.F02	45
4.4	Les résultats de l'approximation par la méthode de Simpson. Eq.F02	46
4.5	Les résultats de la solution numérique ( Eq.V01 ) par la méthode de trapèze	48
4.6	Les résultats de la solution numérique de l'équation ( Eq.V01 ) par la méthode de	
	Simpson	48
4.7	Les résultats de la solution numérique de ( Eq.V02 ) par la méthode de trapèze	49
4.8	Les résultats de ( Eq.V02 ) par la méthode de Simpson	49

# Introduction

Les équations intégrales représentent une branche très importante et largement utilisée dans divers domaines de mathématiques appliquées, de physique et de sciences de l'ingénieur. L'équation intégrale provient de problèmes scientifiques directement ou elle résulte d'une équation différentielle ordinaire. Ainsi, un problème aux limites pour une EDP peut être transformé à une équation intégrale via la méthode des équations intégrales. Cette transformation permet de simplifier considérablement la résolution, par exemple : un problème à deux variables se réduit à la résolution d'une équation intégrale à une seule fonction inconnue dépendant d'une seule variable. C'est l'idée qui était le point de départ des travaux de mathématiciens : J. Liouville (1809-1882), V. Volterra (1860-1940), et I. Fredholm (1866-1927). Ils ont conduit au développement de la théorie des équations intégrales, avec une focalisation sur la résolution des problèmes aux limites de Dirichlet et de Neumann liés à l'équation de Laplace.

Il est entendu qu'une équation intégrale est une équation fonctionnelle dont la fonction inconnue apparaît sous le signe intégral. Cette définition générale envisage beaucoup de formes spécifiques, ce qui rend les méthodes de la résolution analytique également diverses. Cependant, obtenir une solution analytique pour une équation intégrale n'est pas toujours possible, donc la recherche de méthodes numériques pour résoudre ces problèmes est très nécessaire.

Les équations intégrales sont souvent bien conditionnées pour la résolution numérique. Ce qui en fait des outils essentiels pour l'investigation de divers problèmes scientifiques fondamentaux qui étaient avant considérés difficiles, voir impossible à résoudre. Et grâce au développement des machines de computation numérique, notamment les ordinateurs, les méthodes d'approximation sont devenues aujourd'hui plus simples à réaliser. Comme les équations intégrales impliquent des termes intégraux, il est logique d'utiliser les méthodes d'intégration numérique, également connues sous le nom de

« méthodes de quadrature ». Elles permettent d'approximer les intégrales en utilisant une somme pondérée des valeurs de la fonction. Elles se distinguent par la précision et la simplicité, ce qui les rendent populaires dans plusieurs domaines scientifiques.

Dans ce travail, on s'intéresse à la résolution numérique des équations intégrales linéaires de seconde espèce de Fredholm (qui ont été introduites par le mathématicien suédois Ivar Fredholm en 1900) et de Volterra (qui ont été introduites par le mathématicien italien Vito Volterra en 1896) en utilisant une approche basée sur les formules de quadrature. Cette méthode est connue aussi par la méthode de Nyström. Dans cette étude, on traite le sujet sous deux angles complémentaires. D'abord de manière théorique, on donne les concepts fondamentaux nécessaires à la résolution, ainsi que la méthode numérique utilisée. Ensuite, on passe au côté pratique. On examine des exemples illustratifs qui nous permettent d'évaluer la qualité de l'approximation obtenue. Suivant ces axes normaux, notre travail est structuré en quatre chapitres fondamentaux :

Le premier chapitre est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, dans le but d'initier le lecteur au concept de ces équations. On aborde également quelques exemples afin de mieux comprendre leur origine et leur relation avec les équations différentielles.

Dans le deuxième chapitre, on donne le cadre fonctionnel d'une équation intégrale linéaire et on répond à la question d'existence et d'unicité de la solution.

Le troisième chapitre représente la méthode de quadrature dans son contexte original qui consiste à une approximation d'une intégrale en déterminant les formules les plus couramment utilisées offertes par cette méthode, ainsi que l'étude de l'erreur.

Dans le dernier chapitre, on utilise la méthode de quadrature pour résoudre numériquement les équations linéaires de Fredholm et de Volterra de seconde espèce. Tout d'abord, on explique cette approche en détaillant les schémas qui découlent de cette approximation. Ensuite, on propose les méthodes de trapèze et de Simpson comme exemples de cette approximation. Enfin, pour illustrer l'efficacité de ces approches, on présente des exemples d'applications.

# Chapitre 1

## Equations intégrales

Une équation intégrale est une équation fonctionnelle dont la fonction inconnue figure sous le signe intégrale. C'est en générale l'équation par rapport l'inconnue  $u$  sous la forme :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)F(u(t))dt \quad (1.1)$$

où

- $\phi, k,$  et  $f$  sont des fonctions données ,  $F$  une fonction de variable  $u$ .
- $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sont les bornes d'intégration, elles peuvent être à la fois : variables, constantes ou mixtes.
- $k$  : une fonction de deux variables  $x$  et  $t$  appelée **le noyau de l'équation**.
- $\lambda$  un paramètre réel ou complexe différent de zéro (il est habituellement composée des quantités physiques).

On s'intéresse dans ce travail au cas où  $F$  est une fonction linéaire. Par conséquent, l'équation est dite linéaire et donnée par la forme ordinaire :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)u(t)dt \quad (1.2)$$

Si la fonction  $F$  est non linéaire ( $F(x) = x^2, F(x) = \cos(x), \dots etc$ ) on dit que l'équation est non linéaire.

## 1.1 Classificatin des équations intégrales

On a déjà indiqué que les équations intégrales sont classées selon le concept de linéarité (en équations linéaires et non linéaires). La classification des équations intégrales est basée aussi sur les caractéristiques de base de leurs structure globale :

1. selon les bornes d'intégration  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$ , on peut distinguer deux familles célèbres :

lorsque les bornes sont fixées, on dit que l'équation est de **Fredholm**

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(u(t))dt \quad a < b < \infty.$$

Cependant, si au moins un des bornes est variable l'équation est dite de **Volterra**, la forme la plus utilisée est la suivante :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)F(u(t))dt$$

remarquons ici que l'équation de Volterra est une cas particulier de celle de Fredholm en prenant  $k(x, t) = 0$  pour  $t > x$ .

2. **le type (espèce)** dépend de la localisation de la fonction inconnue dans l'équation(ou bien selon les valeurs de la fonction  $\phi$  dans [1.1](#) et [1.2](#)) :

– si la fonction inconnue apparaît à l'intérieure du signe intégrale uniquement( $\phi(x) = 0$ ), on dit que l'équation est de première espèce. C'est de la forme :

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)F(u(t))dt$$

– si l'équation inconnue figure à l'intérieure et à l'extérieure du signe intégrale( $\phi(x) \neq 0$ ), on dit que l'équation est de deuxième espèce. elle est de la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)F(u(t))dt$$

– si la fonction  $\phi$  s'annule en quelques points du domaine de définition mais pas en tout le domaine on dit qu'elle est de troisième espèce.

3. l'adjectif **singulière** est utilisée quand l'intégration est impropre c'est à dire : si au moins un des bornes est infinie ou bien si le noyau soit non borné dans un ou plusieurs points de l'intervalle. Prenons par exemple l'équation de Fredholm linéaire  $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$  ( $a < b < \infty$ ) : si le noyau est de la forme  $k(x, t) = h(x, t) |x - t|^{-m}$ ,  $(x, t) \in [a, b] \times [a, b]$  avec  $h$  est borné et  $h(x, t) \neq 0$ ,  $m$  une constante telle que  $0 < m < 1$ , on dit que l'équation est faiblement singulière. Si  $m = 1$ , l'équation est dite fortement singulière.

#### 4. l'homogénéité :

l'EI est dite homogène si  $f \equiv 0$ , et non homogène sinon.

**Remarque 1.1.1** *On peut aussi caractériser les équations intégrales selon des types particuliers des noyaux :*

1. si le noyau s'écrit de la forme :

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(x) \beta_i(t)$$

avec les  $\alpha_i$  sont linéairement indépendantes, alors il est appelé noyau séparable ou dégénéré et on dit que l'équation est à noyau séparable.

2. si le noyau est une fonction à valeurs complexes telle que :  $k(x, t) = \overline{k(t, x)}$  alors il est dit hermitien. Et on dit que l'équation intégrale est symétrique.

3. si le noyau est de la forme  $k(x, t) = k(x - t)$ , alors l'équation est dite équation intégrale à noyau de convolution.

4. Si le noyau défini sur le carré  $\{(x, t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$  est de carré sommable, on dit que l'équation est à noyau régulier.

**Exemple 1.1.1** *considérons les équations intégrales suivantes :*

1.

$$u(x) = x^2 + 2 \int_0^1 (x - t)^2 u(t) dt$$

*C'est une équation linéaire de Fredholm de deuxième espèce non homogène.*

2.

$$x^2 \cos(x) = \int_0^x xt \ln(u(t)) dt$$

*C'est une équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce non homogène*

## 1.2 Relation entre les EDO et les EI

Plusieurs problèmes scientifiques dans la théorie des équations différentielles peuvent être traités de manière plus suffisante si on les réduit aux équations intégrales au lieu de les résoudre directement, et réciproquement on peut résoudre les EI à l'aide des EDO équivalentes. De plus, divers problèmes des sciences appliquées conduisent directement aux équations intégrales. Ce qui montre leurs importances dans la modélisation des phénomènes scientifiques. Pour illustrer cette relation, on va examiner quelques exemples, mais d'abord on va donner quelques formules utiles.

### Réduction des intégrales multiples à des intégrales simples

**Théorème 1.2.1** *Pour toute fonction  $u(x)$  :*

$$\int_a^x \int_a^s u(t) dt ds = \int_a^x (x-t)u(t) dt \quad (1.3)$$

**Preuve.** soit :  $I = \int_a^x \int_a^s u(t) dt ds$

posons :  $g(s) = \int_a^s u(t) dt$  , alors :  $I = \int_a^x g(s) ds$

*En appliquant une intégration par partie :*

$$\begin{aligned} I &= [sg(s)]_a^x - \int_a^x sg'(s) ds = xg(x) - \int_a^x su(s) ds \\ &= x \int_a^x u(t) dt - \int_a^x tu(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t)u(t) dt \end{aligned}$$

■

La formule générale qui sert à convertir les intégrales multiples aux intégrales simples est donnée par :

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} u(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x_1)^{n-1} u(x) dx_1$$

**Formule de Leibnitz :**

Soit  $f(x, t)$  continue et  $\frac{\partial f}{\partial t}$  continue sur un domaine du plan  $(x, t)$  qui comprend le rectangle  $a \leq x \leq b, t_1 \leq t \leq t_2$  et soit :

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt$$

La fonction dérivée de  $F$  existe et donnée par :

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x, \beta(x)) \frac{d\beta(x)}{dx} - f(x, \alpha(x)) \frac{d\alpha(x)}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

Si  $\alpha(x) = a$  et  $\beta(x) = b$  avec  $a$  et  $b$  sont des constantes, la formule devient :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

**1.2.1 Equations de Volterra et problèmes avec conditions initiales**

Dans ce paragraphe, on va étudier les techniques utilisées pour convertir les problèmes de Cauchy aux équations intégrales de type Volterra et l'opération inverse.

**Convertir un PVI à l'équation de Volterra**

On considère l'équation ordinaire de second ordre :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \tag{1.4}$$

associée aux conditions initiales suivantes :

$$y(0) = \alpha \quad y'(0) = \beta$$

Avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constants, et les fonctions  $p$  et  $q$  sont des fonctions analytiques et  $g(x)$  est continue sur l'intervalle de discussion.

On prend d'abord :

$$y''(x) = u(x) \tag{1.5}$$

On intègre les deux cotés de (1.5) de 0 à  $x$ , on obtient :

$$y'(x) = \beta + \int_0^x u(t)dt \tag{1.6}$$

En intégrant une deuxième fois :

$$y(x) - y(0) = \beta x + \int_0^x \int_0^s u(t)dt ds$$

On obtient enfin en utilisant la formule de réduction des intégrales doubles :

$$y(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{1.7}$$

En substituant (1.5), (1.6) et (1.7) dans (1.4), on obtient une équation de Volterra de deuxième espèce :

$$u(x) = f(x) - \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

avec :  $f(x) = g(x) - [p(x)\beta + q(x)\alpha + q(x)\beta x]$  et  $k(x,t) = p(x) + q(x)(x-t)$ .

### Convertir une équation intégrale de type Volterra à un PVI équivalent

Parmi les méthodes très connues pour la résolution des EI est celle qui consiste de les réduire aux EDO. C'est de faire une dérivation de l'équation par rapport à  $x$  et de répéter la dérivation plusieurs fois de sorte d'éliminer le signe intégrale. Donc on va utiliser la règle de Leibnitz pour la dérivation de l'intégrale. Puis on va obtenir la condition initiale en substituant la valeur initiale dans  $u(x)$  et ses dérivées. L'équation différentielle qui résulte peut être résolue en utilisant les méthodes usuelles. L'opération sera illustrée par l'exemple suivant :

**Exemple 1.2.1** On considère l'équation de Volterra :

$$u(x) = \sin x + \int_0^x u(t)dt \quad (1.8)$$

En dérivant les deux cotés de l'équation par rapport à  $x$  et à l'aide de formule de Leibnitz, on obtient :

$$u'(x) = \cos x + u(x)$$

On n'a pas besoin ici de dériver une deuxième fois car le signe intégrale ne figure pas.

Maintenant, on va déterminer la condition initiale, en substituant  $x = 0$  dans l'équation de Volterra, on trouve :  $u(0) = 0$ .

Donc il résulte un problème avec condition initiale de second ordre non homogène équivalent à l'EI

**1.8** :

$$\begin{cases} u'(x) - u(x) = \cos x \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

## 1.2.2 Equations de Fredholm et problèmes aux limites

On va présenter maintenant la méthode qui sert à convertir un problème avec conditions aux limites à une équation intégrale de Fredholm équivalente. Elle est similaire à celle utilisée dans la section précédente sauf que les conditions seront aux limites. Elle demande plus de travail, donc elle est rarement utilisée.

On considère l'EDO de deuxième ordre suivante :

$$y''(x) + p(x)y(x) = h(x) \quad x \in ]0, 1[ \quad (1.9)$$

associée aux conditions au limites dites conditions de Dirichlet :

$$x = 0 : y(0) = \alpha$$

$$x = 1 : y(1) = \beta$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constants,  $h$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ .

1. On prend :  $y''(x) = u(x)$

2. On intègre de 0 à  $x$  :

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt$$

$y'(0)$  n'est pas donné dans le problème, on la déterminera après en utilisant la condition au bord  $x = 1$ .

3. On intègre une deuxième fois :

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \int_0^x \int_0^s u(t)dt ds$$

En utilisant la condition  $y(0) = \alpha$  et la formule de réduction des intégrales doubles, on obtient :

$$y(x) = \alpha + y'(0)x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{1.10}$$

Pour déterminer  $y'(0)$ , on prend  $x = 1$ , on a alors :

$$y(1) = \alpha + y'(0) + \int_0^1 (1-t)u(t)dt$$

donc :

$$y'(0) = \beta - \alpha - \int_0^1 (1-t)u(t)dt$$

alors :

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha + x \left[ \beta - \alpha - \int_0^1 (1-t)u(t)dt \right] + \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ &= \alpha + \beta x - \alpha x - \int_0^1 x(1-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ &= (1-x)\alpha + \beta x - \left[ \int_0^x x(1-t)u(t)dt + \int_x^1 x(1-t)u(t)dt \right] + \int_0^x (x-t)u(t)dt \end{aligned}$$

donc

$$y(x) = (1-x)\alpha + \beta x + \int_0^x t(1-x)u(t)dt - \int_x^1 x(1-t)u(t)dt \tag{1.11}$$

4. En substituant (1.11) dans (1.9), on obtient l'équation suivante :

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 k(x, t)u(t)dt$$

avec

$$f(x) = h(x) - \alpha p(x) + (\alpha - \beta)xp(x)$$
$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x)p(x) & \text{si } 0 \leq t \leq x \\ x(1-t)p(x) & \text{si } x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

C'est une équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce.

Pour plus des exemples et détails vous pouvez consulter ([17] pages 42 à 62 et [11]).

L'importance de cette technique de passage des équations différentielles aux équations intégrales (et vice versa) réside dans le fait que certaines équations différentielles ne peuvent être résolues de manière explicite. Dans ce cas, on peut essayer de trouver une solution approchée en utilisant les équations intégrales. Cette technique est souvent utilisée dans nombreux domaines de la physique, de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Un exemple concret est la résolution de l'équation de Laplace pour trouver le potentiel électrique dans une région donnée de l'espace. Cette équation est une équation différentielle partielle qui ne peut pas être résolue de manière explicite que dans des cas très simples. En utilisant la technique des équations intégrales, on peut néanmoins déduire une expression pour le potentiel électrique en fonction des conditions à limites donnés.

# Chapitre 2

## Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire

Avant toute démarche d'une résolution analytique ou numérique d'une équation intégrale ou n'importe quelle équation, deux questions très intéressantes seront posées : est ce que cette équation admet une solution ? est elle unique ?

On présente d'abord quelques notions sur les opérateurs qui seront essentielles pour répondre à ces questions.

### 2.1 Notions sur les opérateurs

#### 2.1.1 Opérateur linéaire borné

**Définition 2.1.1** (*opérateur linéaire*)

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$  est une application  $A$  de  $E$ , à valeurs dans  $F$  vérifiant :

$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} :$

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \text{ et } A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

Généralement on utilise la notation  $Ax$  au lieu de  $A(x)$ .

**Définition 2.1.2** (*Opérateur linéaire borné*) :

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels normés, de normes  $\|\cdot\|_E$ ,  $\|\cdot\|_F$  respectivement. Un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$  est dit borné s'il existe une constante  $M \geq 0$  telle que :

$$\|Ax\|_F \leq M\|x\|_E \quad \text{pour toute } x \in E$$

– On désigne par  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs linéaire bornés de  $E$  dans  $F$ .

– Si  $E = F$  on écrit  $\mathcal{L}(E)$ .

– On vérifie que :

1.  $(A, B) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \lambda \in \mathbb{k} : A + \lambda B \in \mathcal{L}(E, F)$  ( $\mathcal{L}(E, F)$  est aussi un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel).
2.  $A \in \mathcal{L}(E, F), B \in \mathcal{L}(F, G) \Rightarrow B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$ .

**Définition 2.1.3** (*Norme d'un opérateur borné*)

Soit  $A : E \rightarrow F$  un opérateur linéaire borné. On appelle norme de  $A$  le nombre  $\|A\|$  défini par :

$$\|A\| = \inf\{M > 0 : \|Ax\|_F \leq M \|x\|_E\}$$

**Proposition 2.1.1** Si  $A : E \rightarrow F$  un opérateur linéaire borné alors,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

**Proposition 2.1.2** On a les propriétés suivantes :

1.  $\forall A \in \mathcal{L}(E, F) : \|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E$ .

$$2. \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(E, F) : \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ (l'opérateur nul)} \\ \forall A \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda \in \mathbb{k} : \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \\ \forall A \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } B \in \mathcal{L}(E, F) : \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{array} \right.$$

On déduit de ce points en particulier que  $\mathcal{L}(E, F)$  est normé.

**Théorème 2.1.1** Si  $F$  est de Banach, alors l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  muni de la norme d'opérateur est aussi de Banach.

### 2.1.2 Opérateur inverse

**Définition 2.1.4** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On dit que  $A$  est inversible s'il existe un opérateur  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que :

$$\begin{cases} A.B = Id_E \\ B.A = Id_F \end{cases}$$

Un tel opérateur est unique, on l'appelle l'inverse de  $A$  et on le note  $B = A^{-1}$ .

**Théorème 2.1.2** (Inverse de Banach) :

Si  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , ( $F$  un espace de Banach), est bijectif. Alors son inverse  $A^{-1}$  est continu (borné).

Ce théorème est très utile dans l'application des méthodes numériques pour résoudre les problèmes de la forme  $Ax = b$  ou  $A$  est un opérateur linéaire borné entre deux espaces de Banach, où on a besoin de connaître certaines propriétés sur l'opérateur  $A$  afin de garantir l'existence et la bornitude de son inverse. Le théorème de l'inverse de Banach indique que si la solution du problème existe et est unique, cette solution sera stable c'est à dire que les petites variations sur les données  $b$  entraînent de petites variations sur la solution  $x$ . En effet, si  $A\tilde{x} = \tilde{b}$  on a alors  $x - \tilde{x} = A^{-1}(f - \tilde{f})$ , ainsi

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|f - \tilde{f}\|$$

c'est à dire si  $f - \tilde{f}$  est petit,  $x - \tilde{x}$  le sera.

### 2.1.3 Opérateur compact

**Définition 2.1.5** Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est compact, s'il transforme tout sous-ensemble borné de  $E$  en un ensemble relativement compact.

$$A : E \rightarrow F$$

$$B(\text{borné}) \rightarrow A(B) \text{ relativement compact}$$

–  $A$  est compact  $\Leftrightarrow B(0, 1) \subset E \Rightarrow \overline{A(B(0, 1))}$  compact

– On désigne l'ensemble des opérateurs compacts par  $\mathcal{K}(E)$ .

**Propriétés 2.1.1** 1. Un opérateur compact est borné. En effet :

Si  $A \in \mathcal{K}(E)$ , alors par définition :  $\overline{A(B(0,1))}$  est compact donc  $\overline{A(B(0,1))}$  est borné, alors :

$$\exists M > 0 : \|Ay\| \leq M, \forall y \in B(0,1)$$

soit  $x \in E : \frac{x}{\|x\|} \in B(0,1)$  donc  $\left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq M, \forall x \in E$  alors  $\|Ax\| \leq M \|x\|$  d'où le résultat.

la réciproque est fautive, prenons par exemple  $Id_E$  l'opérateur identité de  $E$ , on a  $Id_E(B(0,1)) = B(0,1)$  n'est pas un ensemble relativement compact sauf si  $E$  est de dimension fini (d'après le théorème de Riez).

2. Une combinaison linéaire des opérateurs compacts est compacte.

3. Si  $A$  et  $B$  deux opérateurs bornés alors  $A.B$  est compact si l'un des opérateurs est compact.

4. un opérateur  $A$  borné de rang fini (c'est à dire son image  $A(E)$  est de dimension fini) est compact.

5. Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(E)$  est compact si et seulement si pour toute suite bornée  $(x_n)$  de  $E$  on peut extraire de la suite  $(Ax_n)$  une sous suite convergente.

## 2.1.4 Opérateurs intégraux

On va définir une classe importante d'opérateurs linéaires définis à l'aide d'une intégrale dits opérateurs intégraux dont le domaine d'intégration est un domaine mesurable dans  $\mathbb{R}^d$  :

**Définition 2.1.6** Soit  $k$  une fonction mesurable sur  $\Omega \times \Omega$ . Alors la forme générale d'un opérateur intégral,  $A$  dit aussi opérateur à noyau est formellement donnée par l'expression

$$Au(x) = \int_{\Omega} k(x,t)u(t)dt$$

$Au$  est définie dès que cette intégrale existe (généralement au sens de Lebesgue).

Prenons un exemple d'un opérateur intégral : soit  $E = C(I)$ ,  $I = [a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ .

On considère l'opérateur linéaire de  $E$  dans lui même par :

$$Au(x) = \int_I k(x, t)u(t)dt$$

$k$  une fonction continue définie sur  $I \times I$  à valeurs réelles. Pour déterminer  $\|A\|$ , on a :

$$|Au(x)| \leq \|u\|_\infty \int_I |k(x, t)| dt$$

Ainsi

$$\|Au\|_\infty \leq \left( \max_{x \in I} \int_I |k(x, t)| dt \right) \|u\|_\infty = M \|u\|_\infty$$

donc, l'opérateur  $A$  est borné. De plus, on a d'une part :

$$\|A\| \leq \max_{x \in I} \int_I |k(x, t)| dt. \tag{2.1}$$

D'autre part : comme  $h(x) = \int_I |k(x, t)| dt$  est continue sur  $I$ , elle est borné et atteint son maximum en certain point  $x_0 \in I$ . On définit :

$$w(t) = \begin{cases} \frac{k(x_0, t)}{|k(x_0, t)|} & \text{si } k(x_0, t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est claire que  $w$  est une fonction intégrable sur  $I$  car elle est bornée et mesurable, alors il existe une suite  $(w_n) \subset C(I)$  telle que  $\|w_n\| \leq 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w\| = 0$  (d'après la densité de  $C(I)$  dans  $L^1(I)$ ).

Donc :

$$\|A\| \geq \|Aw_n\| \geq Aw_n(x_0) \rightarrow \int_I k(x_0, t)w(t)dt$$

d'où

$$\|A\| \geq \int_I |k(x_0, t)| dt = \max_{x \in I} \int_I |k(x, t)| dt \tag{2.2}$$

ainsi d'après (2.1) et (2.2) :

$$\|A\| = \max_{x \in I} \int_I |k(x, t)| dt$$

donc cet opérateur appartient à  $\mathcal{L}(E)$ .

De plus il est compact. Pour démontrer sa compacité, on a besoin du théorème suivant.

**Théorème 2.1.3** (*Arzela-Ascoli*)

Une condition nécessaire et suffisante de la compacité d'une famille des fonctions continues sur  $[a, b]$  est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.

Comme  $k$  est continue sur le carré  $I \times I$ , elle est uniformément continue (d'après le théorème de Heine), donc :

$$|k(x_1, t) - k(x_2, t)| < \varepsilon \quad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta$$

d'où

$$\begin{aligned} |Au(x_1) - Au(x_2)| &\leq \int_a^b |k(x_1, t) - k(x_2, t)| |u(t)| dt \\ &< \varepsilon(b - a) \|u\|_\infty \end{aligned}$$

donc si  $u \in B_E(0, 1)$  alors  $A(B_E)$  est un ensemble équicontinu. D'autre part,

$$\|Au\|_\infty = \sup_{x \in I} \left| \int_a^b k(x, t)u(t) dt \right| \leq M(b - a) \|u\|_\infty$$

ce qui implique que  $A(B_E)$  est uniformément bornée. Donc d'après le théorème d'Ascoli cet opérateur est compact.

## 2.2 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire de seconde espèce

Considérons les équations de seconde espèce :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_G k(x, t)u(t)dt$$

où  $G$  est un intervalle fermé borné ( $G = [a, b]$  dans le cas d'équation de Fredholm, et  $G = [a, x]$  dans le cas de Volterra). On remarque que les équations de Volterra sont des cas particuliers de celles de Fredholm si on prend  $k(x, t) = 0$  pour  $t > x$ .

On pose que  $f$  est continue sur  $G$ , et  $k$  soit défini sur le carré  $\Pi = \{(x, t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$  à valeurs réelles, continu et borné et  $M = \max_{(x,t) \in \Pi} |k(x, t)|$ . On peut disposer toute hypothèse de continuité et supposer que  $k$  est carré sommable ( $\int_G \int_G |k(x, t)|^2 dx dt < \infty$ ) : c'est le caractère d'une équation à noyau régulier.

Ce problème peut être traité en utilisant la théorie des opérateurs :

On pose  $E = C(G)$  l'espace des fonctions continues sur  $G$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  (c'est un espace de Banach) sur lequel on définit l'opérateur intégral  $T$  par :

$$Tu(x) = \int_G k(x, t)u(t)dt$$

C'est un opérateur borné, compact, et de norme :  $\|T\| = \max_{x \in G} \int_G |k(x, t)| dt$

il s'agit donc de problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in E : \\ u - \lambda Tu = f \end{cases} \quad (\text{PI})$$

Si l'opérateur  $(Id_E - \lambda T)$  est inversible ( $Id_E$  désigne l'opérateur identique de  $E$ ) et son inverse est continu, alors notre problème sera résolu, et on va assurer l'existence et l'unicité de la solution donnée par :

$$u = (Id_E - \lambda T)^{-1}f$$

l'existence et l'unicité de la solution peut être établi par les théorèmes suivants :

### 2.2.1 Théorème de la série de Neumann

**Théorème 2.2.1** Soit  $E$  un espace de Banach,  $A \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\|A\| < 1$ . Soit  $Id_E$  l'opérateur identité de  $E$ .

Alors  $(Id_E - A)$  admet un opérateur inverse donné par la série de Neumann :

$$(Id_E - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n.$$

De plus :

$$\|(Id_E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

**Preuve.** Voir [10]. ■

**Corollaire 2.2.1** D'après ce théorème il suffit que  $\|T\| = \max \int_G |k(x, t)| dt < \frac{1}{|\lambda|}$  pour que  $\boxed{PI}$  admette une solution unique.

Par contre, si cette condition n'est pas vérifiée une solution continue peut exister pour l'équation intégrale, prenons par exemple l'équation de Fredholm :

$$u(x) = -2 - 3x + \int_0^1 (3x + t)u(t)dt$$

cette équation admet une solution exacte donnée par  $u(x) = 6x$  malgré on a

$$\max_{x \in [0,1]} \int_0^1 (3x + t)dt = \max_{x \in [0,1]} (3x + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2} > 1.$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence et l'unicité de la solution.

### 2.2.2 Théorie de Riez -Fredholm et l'alternative de Fredholm :

**Théorème 2.2.2** Soit  $E$  un espace Banach,  $A \in \mathcal{K}(E)$  alors :

1.  $\ker(Id_E - A)$  est de dimension fini.

2.  $\text{Im}(Id_E - A)$  est fermé.
3.  $\text{Im}(Id_E - A) = \ker(Id_E - A^*)^\perp$ .
4.  $\ker(Id_E - A) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(Id_E - A) = E$ .

On s'intéresse beaucoup plus au dernier énoncé, elle exprime que si  $A$  un opérateur compact sur un Banach alors, l'opérateur  $(Id_E - A)$  est surjectif si et seulement si il est injectif. En outre si l'opérateur est injectif alors il est bijectif (inversible) et de plus son inverse  $(Id_E - A)^{-1}$  est continu ( d'après le théorème "inverse de Banach").

**Corollaire 2.2.2** *L'équation intégrale  $u - \lambda Tu = f$  admet une solution unique si et seulement si l'équation homogène  $u - \lambda Tu = 0$  admet que la solution triviale  $u = 0$ .*

Ce résultat est connu par le nom "Alternative de Fredholm"

## 2.3 Etude d'existence et d'unicité de la solution d'une équation de première espèce

Contrairement aux équations de seconde espèce, dans les équations de première espèce la fonction inconnue apparaît à l'intérieure de signe intégrale seulement, cette petite différence structurelle change totalement les résultats et les concepts théoriques et numériques de la résolution, il s'agit de l'équation :

$$Tu = f$$

Ces équations sont classés généralement comme des problèmes mal-posés car la solution est sensible à les petites variations de la fonction source  $f$ , c'est à dire des petites perturbations sur les données entraine des grandes variations incontrôlables sur la solution  $u$ . la compacité de l'opérateur intégrale  $T$  est la source de difficulté : si  $T^{-1}$  existe il est généralement non borné ainsi on ne peut pas avoir la forme d'estimation  $\|u\| \leq C \|f\|$ , alors la solution du problème ci dessus est de nature instable. Généralement, on utilise des régularisations pour obtenir une équation de deuxième espèce laquelle

on peut la résoudre. Prenons par exemple l'équation de Volterra de seconde espèce :

$$\int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad x \in [a, b] \quad (2.3)$$

Ce problème mal posé sur certaines conditions, on peut le réduire en équation de seconde espèce :

Supposant que  $k'_x = \frac{\partial k}{\partial x}$  et  $f'$  existent et continues, et que  $k(x, x) \neq 0$ . En dérivent les deux termes de l'équation (2.3) et en utilisant la formule de Leibnitz on obtient :

$$u(x) + \int_a^x \frac{k'_x(x, t)}{k(x, x)} u(t)dt = \frac{f'(x)}{k(x, x)} \quad (2.4)$$

Les équations (2.3) et (2.4) sont équivalentes si  $f(a) = 0$ , et c'est parmi les méthodes très connues pour la régularisation des équations de Volterra de première espèce.

Revenons maintenant notre objectif principal, on cherche à déterminer l'inconnue  $u$ , il existe nombreux méthode analytiques pour résoudre une équation intégrales. Mais dans la plupart des cas, il devient très difficile à résoudre les équations intégrales à cause de la complexité de l'opérateur intégral ce qui montre la nécessité de chercher des méthodes numériques pour faire ça. Il est convient de noter que la résolution (analytique) est très facile lorsque le noyau de l'opérateur est de type "séparable ou dégénéré" c'est à dire de la forme  $k(x, t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(x)\beta_i(t)$ , cette forme rend l'image de l'opérateur  $T$  de rang fini et il s'agit dans ce cas d'une résolution d'un système linéaire (pour un exposé complet voir [13] ). Cette idée inspire une approche numérique consistant à approcher l'opérateur intégrale  $T$  par un opérateur  $T_n$  de rang fini. On propose dans ce travail une méthode naturelle pour cette approximation dite la méthode de quadrature.

# Chapitre 3

## Méthode de quadrature : Calcul approché des intégrales

Le calcul des intégrales est nécessaire dans nombreux champs d'application de divers domaines scientifiques (physique, chimie, biologie...).

Il est facile de calculer l'intégrale d'une fonction continue  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  de manière analytique lorsqu'on connaît sa primitive, mais c'est pas toujours le cas. Dans la plupart des cas la fonction qu'on souhaite à intégrer n'a pas de primitive évidente (généralement à cause de la complexité de son expression analytique), ou bien elle soit représentée sous forme d'un tableau (c'est à dire évaluée en certains points de l'intervalle). Par conséquent, la réalisation de l'intégration par les méthodes analytiques usuelles sera impossible, donc on va chercher des méthodes numériques qui servent à obtenir une valeur approchée d'une expression intégrale notée :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \quad (3.1)$$

que l'on suppose convergente. Avant d'entrer aux détails, il est nécessaire de citer quelques notions de base qui seront utiles pour bien comprendre la méthode.

### 3.1 Généralités

1. On appelle **formule de quadrature** la formule de type :

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad (3.2)$$

une combinaison linéaire des valeurs discrètes de la fonction  $f$  qui sert à approcher l'intégrale [3.1](#) où les  $x_i, i = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  sont les points d'intégration, et les  $\alpha_i$  sont les poids.

2. La formule de quadrature est dite fermée si  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ , et ouverte sinon.
3. **L'erreur** : On appelle erreur de la méthode l'écart entre la valeur approchée donnée par la formule de quadrature et la valeur exacte de l'intégrale :

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f).$$

4. La formule de quadrature est dite exacte sur l'ensemble  $F$  si :  $E_n(f) = 0, \forall f \in F$ .
5. Le degré (la précision) de la formule est  $q$  si celle-ci est exacte sur  $\mathbb{R}_q[x]$  et non exacte sur  $\mathbb{R}_m[x], \forall m > q$ .
6. La formule est dite convergente pour la fonction  $f$  si  $E_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Elle est d'ordre  $p$  si  $E_n(f) = O(h^p)$  avec  $h = \underset{i \in \{0,1,\dots,n\}}{\text{Max}} |x_{i+1} - x_i|$ . (Ces définitions sont extraites de [\[9\]](#))

On propose trois approches différentes pour obtenir la formule de quadrature :

1. Prendre des nœuds d'intégration  $(x_i)_{i=\overline{0,n}}$  arbitrairement fixées et remplacer la fonction  $f$  par sa polynôme d'interpolation (on va choisir le polynôme de Lagrange), c'est la quadrature de Newton-Côtes.
2. Pour éviter les cas de non convergence dans la première méthode (lorsque  $n$  augmente), on va présenter les méthodes composées basées sur l'interpolation par morceaux de la fonction par plusieurs façons possibles. Ici on s'intéresse à la méthode des rectangles, de Trapèze et de Simpson.
3. Enfin, dans le but d'élever la précision, on va chercher à déterminer au même temps les  $(x_i)$  et les  $(\alpha_i)$  de façon à obtenir des degrés d'exactitude les plus grands possibles par conséquent l'erreur sera minimisé, c'est la quadrature de Gauss.

## 3.2 Interpolation polynômiale et formule de Newton-Côtes

### 3.2.1 Interpolation polynômiale de Lagrange

Le problème de l'interpolation figure dans divers situations :

1. lorsqu'on cherche une formule analytique d'une fonction qui passe exactement par un ensemble discret de valeurs données.
2. lorsqu'on veut remplacer une fonction dont l'expression analytique soit compliquée par une fonction qui a une expression analytique plus simple pour simplifier les opérations exercées sur cette fonction ( dans notre cas l'intégration).

On utilise les polynômes dans l'approximation car ils sont les plus faciles dans les calculs.

Le problème de l'interpolation polynômiale est le suivant

Soit la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Etant donnés  $(n + 1)$  points distincts arbitraires  $\{x_i, i = \overline{0, n}\} \subset [a, b]$ , et  $f(x_i)$  pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  sont connues aussi. Est ce qu'il existe un polynôme  $P_n$  de degrés à déterminer, qui passe par les points de coordonnées  $(x_i, f(x_i))$  et sera le plus proche à  $f$ ? et s'il existe est-il unique?

C'est à dire

$$f(x_i) = P_n(x_i) \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

La réponse de ce problème est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1** [15] Soient,  $x_0, x_1, \dots, x_n : (n+1)$  points distincts, et  $f$  une fonction dont les valeurs en ces points sont :  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ , alors :

il existe un polynôme  $P_n$  unique de degré au plus  $n$  tel que :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\} : P_n(x_i) = f(x_i)$$

**Preuve.** voir [5] ■

Il s'agit donc de calculer les coefficients dans la base de  $\mathcal{P}_n$ . Il existe plusieurs techniques pour déterminer le polynôme interpolateur différent selon la base utilisée. La formule de base la plus

connue est celle de Lagrange définie par :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n$$

avec : 
$$l_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la formule de polynôme de Lagrange est donc :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$$

### Estimation d'erreur de la formule de Lagrange

L'erreur de l'interpolation est l'écart entre la fonction de l'interpolation et la fonction de référence que l'on souhaite à approcher. Donc, l'erreur a un sens si une telle fonction est prédéfinie (c'est à dire quand on a l'expression analytique de  $f$  qui soit généralement compliquée).

Soit donc : la fonction  $f$  qu'on souhaite à approcher avec  $y_i = f(x_i), \forall i = \overline{0, n}$ , et  $x_i \in [a, b]; \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$  on suppose que  $f$  est de classe  $C^{n+1}([a, b])$ . L'erreur est donné par la formule :  $e(x) = P_n(x) - f(x)$ .

**Théorème 3.2.2** [4] Si  $f \in C^{n+1}([a, b])$  alors pour toute  $x \in [a, b]$  il existe un point  $\xi_x$  telle que

$$e(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi_x) \quad \text{avec } \xi_x \in \left] \min_{i=0, n} x_i, \max_{i=0, n} x_i \right[ \quad (3.3)$$

**Preuve.** voir ([4] page 24 ou [6] page 6) ■

Cette formule ne permet pas de donner une valeur exacte de l'erreur car on a montré l'existence de  $\xi_x$  mais on ne peut pas le déterminer, on peut l'utiliser pour donner une majoration pour estimer l'erreur

**Corollaire 3.2.1** soit  $M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$  alors, on considère la majoration de l'erreur d'interpolation :

$\forall x \in [a, b]$  :

$$|e(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|. \quad (3.4)$$

Il est connu dans les problèmes d'approximation numérique en générale que plus on augmente le nombre de points d'approximation plus que le résultat obtenu sera le meilleur et la convergence de l'erreur sera plus rapide, mais est ce que ça est toujours vrai ? Qu'est ce qu'il se passe si on fait une interpolation polynômiale avec un nombre des nœuds très élevé ?

### Non convergence de l'interpolation polynômiale

Concernons la majoration de l'erreur obtenue (3.4) : cette formule permet d'estimer l'erreur pour un nombre donné des points mais ne permet pas d'étudier son comportement lorsque  $n$  augmente, en effet : nous pourrions penser que cette erreur tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini car  $|e(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , mais malheureusement cette affirmation n'est pas toujours vrai car  $M_{n+1} = \sup |f^{(n+1)}(x)|$  peut croit rapidement avec  $n$  (ce phénomène est connu par "phénomène de Runge") : prenons par exemple :  $f(t) = \frac{1}{(1+25x^2)}$  sur  $[-1, 1]$ ,  $f$  est infiniment dérivable sur l'intervalle et  $|f^{(n+1)}(1)|$  devient très rapidement grande lorsque  $n$  tend vers l'infini  $f^{(10)}(1) = 4.825 \times 10^5$  et  $f^{(100)}(1) = 2.28 \times 10^{156}$  cela provoque une grande perturbation dans les résultats. De plus, dans certains cas, les points d'interpolations peuvent être très proches l'un de l'autre ce qui entraine une grand oscillation dans le polynôme. (Pour une étude complète avec des exemples vous pouvez consulter [9] et [4])

### 3.2.2 Quadrature de Newton-Côtes

On considère l'expression intégrale suivante :

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Soient les nœuds d'intégration  $\{x_i, i = 0, 1, \dots, n\} \subset [a, b]$  tels que :  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  et  $P_n$  le polynôme de Lagrange qui interpole les  $(n+1)$  points des cordonnées  $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n$ .

Le principe est d'approcher l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  par l'intégrale de son polynôme d'interpolation

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b P_n(x) dx$$

Alors :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b l_k(x) dx$$

On pose :  $w_k = \int_a^b l_k(x) dx$  , alors, on obtient la formule de quadrature suivante :

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

qui approche l'expression intégrale  $I(f)$ .

Maintenant, on va étudier l'erreur de cette formule :

$$\begin{aligned} E_n(f) &= I(f) - I_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P_n(x) dx \\ &= \int_a^b [f(x) - P_n(x)] dx = \int_a^b e(x) dx \end{aligned}$$

On peut donc déterminer la majoration de l'erreur de la quadrature à l'aide de la majoration de l'erreur d'interpolation :

$$|E_n(f)| = \left| \int_a^b e(x) dx \right| \leq \int_a^b |e(x)| dx$$

Si  $f \in C^{n+1}([a, b])$  :

$$|E_n(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx$$

Comme l'erreur de quadrature dépend de l'erreur d'interpolation, un problème se pose lorsque l'on utilise un grand nombre de points. En effet, nous avons constaté que plus le degré du polynôme augmente vers l'infini plus le risque devient important et le comportement de l'erreur peut devenir insuffisant pour cela il est pratique de fait appelle à les méthodes composées.

### 3.3 Méthodes composites

On considère la fonction  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ , notre but est toujours d'intégrer numériquement cette fonction au moyen des formules de quadrature. Une manière classique et très pratique pour obtenir ces formules est la suivante :

on divise  $[a, b]$  en  $(n + 1)$  points  $x_i$  distincts tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$h = \frac{b - a}{n} \text{ et } x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

c'est à dire, on a décomposé l'intervalle en  $n$  sous intervalles :  $[a, x_1], [a, x_2], \dots, [x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, b]$

d'après la relation de Chasles on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

Dans la suite, on va approcher les intégrales  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ , pour  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  en appliquant la quadrature de Newton-Côtes sur chaque sous intervalle .

### 3.3.1 Méthode des rectangles

On suppose que  $f$  est constante sur chaque sous intervalle :  $f(x) \simeq f(x_i), \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$  (ou bien on a remplacé la fonction  $f$  par le polynôme de Lagrange de degré 0 qui interpole la fonction en  $x_i$ ).

Dans ce cas, l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  devient la somme d'aires des rectangles de longueur  $f(x_i)$  et largeur  $h$ , et on écrit :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq hf(x_i)$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

**L'erreur :**

On commence d'abord par l'erreur de l'approximation des intégrales sur les mailles (on le note  $E_i(f)$ ) :

$$E_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - hf(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] dx$$

donc on peut considérer la majoration :

$$|E_i(f)| = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] dx \right| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)| dx$$

Si  $f \in C^1([a, b])$ ,  $\exists \lambda_x \in ]x_i, x[ : f(x) - f(x_i) = (x - x_i)f'(\lambda_x)$  (L'accroissement finie)

Donc, pour  $f \in C^1([a, b])$  on a :

$$\begin{aligned} |E_i(f)| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) |f'(\lambda_x)| dx \\ &\leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(\lambda_x)| dx \\ &\leq h^2 M_1 \end{aligned}$$

avec :  $M_1 = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ .

alors, on peut majorer l'erreur de la méthode car :

$$E(f) = \int_a^b f(x) dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) dx - hf(x_i)] dx \right] = \sum_{i=0}^{n-1} E_i(f)$$

par conséquent :

$$|E(f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |E_i(f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} h^2 M = nh^2 M_1$$

comme  $n = \frac{(b-a)}{h}$  on obtient a la fin :

$$|E(f)| \leq (b - a)hM_1 \quad \text{pour } f \in C^1([a, b])$$

on dit que  $E(f) = O(h)$  (c'est à dire :  $E(f) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ ), c'est une vitesse assez lente de convergence. Pour cette raison, on va proposer une autre méthode pour augmenter la vitesse de convergence :

### 3.3.2 Méthode des trapèzes

Dans la méthode précédente, on a approché la fonction  $f$  par une fonction constante par morceau, maintenant on va essayer de faire une approximation de cette fonction par une fonction affine par

morceau, autrement dit par le polynôme de Lagrange de degré 1 qui passe par les points  $(x_i, f(x_i))$  et  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  donné par :

$$P_i(x) = f(x_i)l_i(x) + f(x_{i+1})l_{i+1}(x) \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

avec

$$l_i(x) = \frac{-(x - x_{i+1})}{h} \quad , \quad l_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)}{h}$$

donc

$$P_i(x) = f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{h} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

– On intègre sur  $[x_i, x_{i+1}]$  :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx &\simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(x)dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \right) (x - x_i) + f(x_i) \right] dx \\ &= \left( \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \right) \left[ \frac{(x - x_i)^2}{2} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + hf(x_i) \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_{i+1}) + f(x_i)] \quad (\text{Aire du trapèze})$$

– d'où :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

finalement, la formule du trapèze composée est donnée par :

$$I_{tr}(f) = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

**L'erreur :**

Si  $f \in C^2([a, b])$  alors on a :

$$e_i(x) = f(x) - P_i(x) = \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})f''(\xi_i), \quad \xi_i \in ]x_i, x_{i+1}[$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 E_i(f) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} e_i(x) dx = \frac{f''(\xi_i)}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx \\
 &= \frac{f''(\xi_i)}{2} \int_0^h t(t-h) dt = \frac{-h^3}{12} f''(\xi_i)
 \end{aligned}$$

On peut donc déterminer la majoration d'erreur pour  $f$  est deux fois continument dérivable, et

$$M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)| :$$

$$|E_{tr}(f)| \leq \frac{nh^3}{12} M_2 = (b-a) \frac{M_2 h^2}{12}$$

Ce qui implique que  $E_{tr}(f) = O(h^2)$  ou bien  $E_{tr}(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Donc la formule de trapèze converge bien vers  $\int_a^b f(x) dx$ .

### 3.3.3 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à appliquer une quadrature de Newton-Côtes avec trois points sur chaque sous intervalle, dont la troisième point utilisé est le milieu de chaque intervalle. Il est pratique de numéroter de deux en deux les frontières de ces intervalles et de garder un indice impaire aux milieux, autrement dit on prend :

$x_i = a + ih$  pour  $i = 0, 1, \dots, n = 2r$  ( $r$  un entier positif) avec le pas fixé  $h = (b-a)/n$ . donc on va faire un interpolation à trois point sur les sous intervalle  $\{[x_{2i}, x_{2i+2}], i = 0, 1, 2, \dots, r = n/2\}$  On a :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{r-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} Q_i(x) dx$$

avec  $Q_i$  est le polynôme de Lagrange qui interpole  $f$  en  $x_{2i}, x_{2i+1}$  et  $x_{2i+2}$  :

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} Q_i(x) dx \simeq f(x_{2i}) \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} l_{2i}(x) dx + f(x_{2i+1}) \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} l_{2i+1}(x) dx + f(x_{2i+2}) \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} l_{2i+2}(x) dx.$$

tel que :

$$\begin{aligned}
 l_{2i}(x) &= \frac{(x - x_{2i+1})(x - x_{2i+2})}{2h^2} \\
 l_{2i+1}(x) &= \frac{-(x - x_{2i})(x - x_{2i+2})}{2h^2} \\
 l_{2i+2}(x) &= \frac{(x - x_{2i+1})(x - x_{2i})}{2h^2}
 \end{aligned}$$

Par des calculs simples on obtient à la fin la formule de Simpson

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)dx &\simeq \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{r-1} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) + E_S(f) \\
 &= \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{r-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^r f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right] + E_S(f)
 \end{aligned}$$

**l'erreur :**

Supposant que  $f \in C^4([a, b])$  :

$$\begin{aligned}
 E_i(f) &= \frac{h^5}{4!} f^{(4)}(\xi_i) \int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt \quad \xi_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}] \\
 &= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i)
 \end{aligned}$$

donc

$$|E_S(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$$

donc  $E_S(f) = O(h^4)$  donc la formule de Simpson converge bien vers la valeurs exacte de  $\int_a^b f(x)dx$  elle a une convergence en  $O(h^4)$  elle converge plus vite que la méthode de trapèze (cette comparaison est valable si  $f$  est au moins de classe  $C^4$ ).

### 3.4 Quadrature de Gauss

La méthode de Gauss est pour but d'augmenter la précision de la quadrature, en effet les formules de Newton sont exactes pour les polynômes de degré inférieur où égal à  $n$ . On veut chercher les nœuds  $(x_i)$  et les poids  $(\alpha_i)$  de sorte que la formule de quadrature est de degré le plus grand possible et par

conséquent l'erreur sera minimiser.

On a  $(2n + 2)$  paramètres à ajuster  $((x_i, \alpha_i), i = 0, 1, \dots, n)$  par ces points on peut bien déterminer un polynôme de degré inférieur ou égal à  $(2n + 1)$  dans ce cas la formule sera exacte et on écrit :

$$E(f) = 0 \quad \text{si } f \in \mathcal{P}_{2n+1}$$

autrement dit

$$\forall l = 0, 1, \dots, 2n + 1 : \int_a^b x^l dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (x_i)^l$$

Il s'agit donc de résoudre le système de  $(2n + 2)$  équations et  $(2n + 2)$  inconnue :

$$\frac{b^{l+1} - a^{l+1}}{l + 1} = \sum_{i=0}^n \alpha_i (x_i)^l \quad \text{pour } l = 0, 1, \dots, 2n + 1 \quad (*)$$

qui admet une solution unique.

**Exemple 3.4.1** (*Formule de point milieu*)

On cherche  $(x_0, \alpha_0)$  tel que :  $\int_a^b f(x)dx = \alpha_0 f(x_0)$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degrés inférieur ou égale à 1 :

pour  $f(x) = 1$  on a :

$$\int_a^b dx = \alpha_0 f(x_0) \implies b - a = \alpha_0$$

pour  $f(x) = x$  :

$$\int_a^b x dx = \alpha_0 x_0 \implies x_0 = \frac{b + a}{2}$$

Donc la formule de Gauss pour  $n = 0$  :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

Chaque fois on ajoute les points le système non linéaire obtenu sera difficile à résoudre par les méthodes usuelles, pour cela on utilise ce qu'on appelle les polynômes orthogonaux, on prend ici les polynômes de Legendre :

### 3.4.1 Polynômes de Legendre

**Définition 3.4.1** [5] Les polynôme de Legendre sont définies par :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

On a si  $x \in \mathbb{R} : L_0(x) = 1, L_1(x) = x, L_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}, \dots$

**Proposition 3.4.1** [5] Les polynômes de Legendre vérifient les propriétés suivantes :

1.  $L_{n,m} = \int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases}$
2.  $\int_{-1}^1 L_n(x)Q_k(x)dx = 0$  pour  $k < n$  quelconque.
3.  $L_n$  admet  $n$  racines réelles distinctes toutes comprises dans  $] -1, 1[$ . Ces racines appelées les points de Gauss.
4.  $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$  est une base de  $\mathcal{P}_n$ .

#### Choix des $\alpha_i$ et $x_i$

On considère la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + R(f) \tag{3.5}$$

Cette formule est exacte ( $R(f) = 0$ ) pour toute les polynômes  $Q$  de degrés inférieur ou égale  $2n + 1$ .

Comme  $\deg(L_{n+1}) = n + 1$ , il existe  $P$  et  $R$  dans  $\mathcal{P}_n$  tel que :  $Q = PL_{n+1} + R$  avec  $\deg R \leq n$  et  $\deg Q \leq n$ .

$$\text{3.5 est exact sur } \mathcal{P}_{2n+1} \Leftrightarrow \begin{cases} i) \forall P \in \mathcal{P}_n : \text{3.5 est exacte pour } PL_{n+1} \\ ii) \text{3.5 est exacte sur } \mathcal{P}_n \end{cases}$$

**Choix des  $x_i$**   $P \in \mathcal{P}_n$ , la formule est exacte pour  $PL_{n+1}$  par conséquent :

$$\int_{-1}^1 P(x)L_{n+1}(x)dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(x_i)L_{n+1}(x_i) = 0$$

Il suffit alors que  $L_{n+1}(x_i) = 0$ .

Donc les  $(x_i)_{i=0,1,\dots,n}$  sont les racines de  $L_{n+1}$ .

**Choix des  $\alpha_i$**  Après la détermination des points d'intégration, il reste à résoudre le système de  $(n + 1)$  équations et  $(n + 1)$  inconnues (qui sont les poids  $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n$ )

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i^k \quad k = 0, 1, \dots, 2n + 1$$

Dans la pratique, ce n'est pas la peine de calculer les nœuds et les poids car des tableaux donnant ces valeurs ont été déjà construites. [15].

Le reste de la méthode de Gauss est donné par : [15]

$$R(f) = \frac{(b - a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n+1)}(\xi)}{((2n)!)^3 (2n + 2)}$$

En résumé, la quadrature numérique propose plusieurs méthodes pour approcher une intégrale, dont les plus connues ont été présentées (Il existe d'autres approches, comme la méthode de Monte-Carlo, Simpson 3/8...). Ces méthodes sont précises, efficaces et simples à utiliser, et sont largement employées dans divers domaines scientifiques et mathématiques. Le chapitre suivant abordera notamment l'application de ces méthodes à la résolution numérique d'équations intégrales.

# Chapitre 4

## Résolution des équations intégrales linéaires par la méthode de quadrature

Suivant la complexité de terme intégral, l'équation intégrale devient impossible à résoudre par les méthodes analytiques. Pour cela on propose la méthode de quadrature pour donner une solution approchée à ces équations. En remplaçant le terme intégral par une somme finie à l'aide de certaines formules de quadrature convergentes, le problème devient un problème de résolution d'un système algébrique. La solution est obtenue sur les nœuds d'intégration, puis est prolongée sur tout l'intervalle à l'aide d'une formule d'interpolation. Dans le cas d'une équation linéaire, on peut déterminer évidemment la solution comme une solution d'un système linéaire. Par contre, dans le cas non linéaire nous avons besoin de méthodes itératives. Cette méthode de résolution est également appelée **la méthode de Nyström** dans la littérature.

### 4.1 Méthode de quadrature pour les équations de Fredholm de seconde espèce

On considère l'équation de Fredholm linéaire de deuxième espèce :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad x \in [a, b]$$

où  $f \in C([a, b])$  une fonction donnée,  $\lambda$  un paramètre réel ou complexe non nul, et le noyau  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continu et borné. Cette équation est régulière car son noyau est régulier.

On l'écrit sous forme opérationnelle :

$$(Id - \lambda T)u = f \quad (4.1)$$

où  $T$  est l'opérateur intégral défini de  $C([a, b])$  dans lui même :

$$\forall u \in C([a, b]), \forall x \in [a, b] : Tu(x) = \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

Comme on a vu dans le chapitre 2,  $T$  est un opérateur linéaire compact de norme :

$$\|T\| = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |k(x, t)| dt$$

où on peut utiliser les théorèmes d'existence et d'unicité, .

En passant à l'approximation numérique, on propose la subdivision de  $[a, b] : x_0 < x_1 < \dots < x_n$  sur laquelle on approche  $T$  par l'opérateur  $T_n$  donné par :

$$(T_n u)(x) = \sum_{j=0}^n w_j k(x, t_j) u(t_j)$$

à l'aide d'une formule de quadrature avec  $\{t_j\}_{j=0, \dots, n}$  sont les points (nœuds) d'intégration et  $\{w_j\}_{j=0, \dots, n}$  sont les poids.

Alors la solution de l'équation (4.1) sera approchée par la solution de :

$$u = f + \lambda T_n u \quad (4.2)$$

qui sera réécrite sous la forme :

$$u(x) - \lambda \sum_{j=0}^n w_j k(x, t_j) u(t_j) = f(x) \quad (4.3)$$

L'évaluation de  $u_n$  solution de (4.3) sur les points  $\{x_i, i = 0, 1, \dots, n\}$  donne le système algébrique

linéaire :

$$u_n(x_i) - \lambda \sum_{j=0}^n w_j k(x_i, t_j) u_n(t_j) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n \quad (4.4)$$

On note :  $k(x_i, t_j) = k_{ij}$ ,  $u_n(x_i) = u_i$ ,  $f(x_i) = f_i$  pour  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

On peut écrire (4.4) sous la forme matricielle :

$$(I - A)U = F \quad (4.5)$$

telle que :  $I$  est la matrice identique,

$$A = \lambda \begin{pmatrix} w_0 k_{00} & w_1 k_{01} & \dots & w_n k_{0n} \\ w_0 k_{10} & w_1 k_{11} & \dots & w_n k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ w_0 k_{n0} & w_1 k_{n1} & \dots & w_n k_{nn} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Après la résolution de ce système, on trouve la valeur de  $u_n$  la solution approchée de  $u$  sur les nœuds choisis. On peut utiliser (4.3) pour déterminer la valeur approchée de  $u$  sur tout les points l'intervalle  $[a, b]$ .

## 4.2 Méthode de quadrature pour les équations de Volterra de seconde espèce

Pour les équations de Volterra de seconde espèce :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad x \in [a, b] \quad (4.6)$$

On divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n + 1$  points  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n \leq b$ .

l'évaluation de  $u$  dans les points choisis nous donne : pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$u(x_i) = f(x_i) + \lambda \int_a^{x_i} k(x_i, t) u(t) dt \quad (4.7)$$

(il est claire que  $u(x_0) = f(x_0)$  ).

l'approximation de terme intégral sur l'ensemble des nœuds ( $x_i = t_i$  pour  $i, j = \overline{0, n}$ ) donne le système algébrique triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{cases} u_0 = f(x_0) \\ u_i = f_i + \lambda \sum_{j=0}^i w_j k_{ij} u_j \quad i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Le théorème suivant assure que la solution approchée  $u_n$  converge vers la solution exacte quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Théorème 4.2.1** *On a l'estimation d'erreur*

$$\|u(x) - u_n(x)\| \leq M \sup_{x \in G} \left| \int_G k(x, t) u(t) dt - \sum_{j=0}^n w_j k(x, t_j) u(t_j) \right|$$

avec :  $M = \sup_{n \geq n_1} \|(I - \lambda T_n)^{-1}\|$ . (Vous pouvez consulter [8] pour voir la preuve et l'étude détaillée, aussi [14] donne une étude bien expliquée de l'erreur).

## 4.3 Méthodes de trapèze et de Simpson composées

Parmi les méthodes de quadrature les plus couramment utilisées sont celles de trapèze et de Simpson qui sont les deux méthodes qu'on va les utiliser dans notre application numérique. Il convient de mentionner qu'elles ne sont pas les seules méthodes et il existe d'autres méthodes utilisées par exemple : la méthode de Monte-Carlo et la méthode de Gauss. On représente ici les schémas qui découlent de l'application de la méthode de trapèze et de Simpson pour les équations linéaires de Fredholm et Volterra de seconde espèce.

### 4.3.1 Equations de Fredholm

#### Méthode de Trapèze

On propose la subdivision uniforme de l'intervalle  $[a, b]$  :  $\begin{cases} x_i = a + ih & i = 0, 1, \dots, n \\ h = (b - a)/n \end{cases}$

En approchant le terme intégral à l'aide de la méthode de trapèze ( $x_i = t_i$ ) :

$$\int_a^b k(x, t)u(t)dt = h \left[ \frac{k(x, t_0)u(t_0) + k(x, t_n)u(t_n)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} k(x, t_j)u(t_j) \right]$$

d'où

$$u(x_i) - \lambda h \left[ \frac{k(x_i, t_0)u(t_0)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} k(x_i, t_j)u(t_j) + \frac{k(x_i, t_n)u(t_n)}{2} \right] = f(x_i) \quad \text{pour } i = \overline{0, n}$$

qui sera réduit à la forme :  $(I - \lambda A_{tr})U = F$

$$\text{avec } U = (u_0, u_1, \dots, u_n)^T, F = (f_0, f_1, \dots, f_n)^T \quad A_{tr} = h \begin{pmatrix} 1/2k_{00} & k_{01} & \dots & k_{0(n-1)} & 1/2k_{0n} \\ 1/2k_{10} & k_{11} & \dots & k_{1(n-1)} & 1/2k_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1/2k_{n0} & k_{n1} & \dots & k_{n(n-1)} & 1/2k_{nn} \end{pmatrix}.$$

### Méthode de Simpson

On propose la subdivision de  $[a, b]$  :  $\begin{cases} x_i = a + ih & i = 0, 1, \dots, n \\ h = (b - a)/n \end{cases}$  avec  $n = 2r$ .

En appliquant la méthode de Simpson on obtient :

$$u(x_i) = f(x_i) + \lambda \frac{h}{3} \left[ k(x_i, t_0)u(t_0) + 4 \sum_{j=1}^r k(x_i, t_{2j-1})u(t_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{r-1} k(x_i, t_{2j})u(t_{2j}) + k(x_i, t_n)u(t_n) \right]$$

Donc il s'agit du système  $(I - \lambda A_S)U = F$

$$\text{avec } A_S = \frac{h}{3} \begin{pmatrix} k_{00} & 4k_{01} & 2k_{02} & \dots & 2k_{0(n-2)} & 4k_{0(n-1)} & k_{0n} \\ k_{10} & 4k_{11} & 2k_{12} & \dots & 2k_{1(n-2)} & 4k_{1(n-1)} & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n0} & 4k_{n1} & 2k_{n2} & \dots & 2k_{n(n-2)} & 4k_{n(n-1)} & k_{nn} \end{pmatrix}.$$

## 4.3.2 Equations de Volterra

### Méthode de trapèze

On divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n + 1$  point équidistants :  $\begin{cases} x_i = a + ih & i = 0, 1, \dots, n \\ h = (b - a)/n \end{cases}$

On a :

$$u(x_i) = f(x_i) + \lambda \int_a^{x_i} k(x_i, t)u(t)dt,$$

puis on applique la formule de trapèze pour approcher l'intégrale sur l'intervalle  $[a, x_i]$  en utilisant les nœuds  $t_j = x_j$  pour  $j = 0, 1, \dots, n$ . On a donc :

$$\int_a^{x_i} k(x_i, t)dt \simeq h \left[ \frac{k(x_i, a)u(a) + k(x_i, x_i)u(x_i)}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} k(x_i, x_j)u(x_j) \right].$$

Donc pour  $i = 1, \dots, n$  ( $u(x_0) = f(x_0)$ )

$$u(x_i) - \lambda h \left[ \frac{k(x_i, x_0)u(x_0)}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} k(x_i, x_j)u(x_j) + \frac{k(x_i, x_i)u(x_i)}{2} \right] = f(x_i)$$

C'est à dire, pour  $i = 0 : u(x_0) = f(x_0)$ ,

pour  $i = 1 :$

$$-h\lambda \frac{k_{10}}{2}u_0 + (1 - \lambda h \frac{k_{11}}{2})u_1 = f_1,$$

pour  $i = 2 :$

$$-\lambda h \frac{k_{20}}{2}u_0 - \lambda h k_{21}u_1 + (1 - \lambda h \frac{k_{22}}{2})u_2 = f_2, \dots$$

donc il s'agit de résoudre le système :  $(I - \lambda A_v)U = F$  avec

$$A_v = h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2k_{10} & 1/2k_{11} & 0 & & 0 \\ 1/2k_{20} & k_{21} & 1/2k_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1/2k_{n0} & k_{n1} & \dots & k_{n(n-1)} & 1/2k_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour avoir les étapes utilisés pour l'approche par la méthode de Simpson vous pouvez consulter [1] et [12].

## 4.4 Application numérique :

On présente dans cette section des exemples sur les équations linéaires de Fredholm et de Volterra qui ont des solutions exactes, et on cherche à déterminer les solutions approchées en utilisant les méthodes de trapèze et de Simpson composées. Pour tester l'efficacité de chaque méthode, on va augmenter le nombre de points et calculer l'erreur résultant. Notre dernière étape est de comparer entre ces deux méthodes.

### 4.4.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm

On considère l'équation de Fredholm :

$$u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^t u(t) dt \quad x \in [0, 1] \quad (\text{Eq.F01})$$

les fonctions  $f(x) = \frac{1}{2}x$  et  $k(x, t) = x e^t$  sont continues, de plus

$$\max_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |k(x, t)| dt = \max_{x \in [0, 1]} \int_0^1 x e^t dt = e - 1 < \frac{1}{|\lambda|} = 2$$

donc (Eq.F01) admet une solution unique. La solution est calculée analytiquement et donnée par  $u(x) = \frac{1}{3}x$ .

Tout d'abord, on procède à une comparaison entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation pour divers valeurs de  $n$  (10, 20, 100) afin d'illustrer l'influence de la longueur de pas sur la qualité de l'approximation. On présente les erreurs absolues de la méthode de trapèze dans le tableau (4.4.1) et de la méthode de Simpson dans (4.4.1). Dans les deux tableaux, on remarque que l'erreur absolue pour  $n = 100$  est inférieure à l'erreur pour  $n = 20$  qui est inférieure à celle pour  $n = 10$ . Cela signifie que plus la longueur de pas est petite, plus l'approximation de la solution soit meilleure et l'erreur décroît vers zéro. Ce qui montre aussi que les deux méthodes sont convergentes et nous donnent deux approches assez suffisantes à la solution exacte.

On a également utilisé des approches graphiques pour confirmer ces résultats (voir la figure (4.1) pour la méthode de trapèze et (4.2) pour la méthode de Simpson) : On remarque que le graphe de la solution approchée pour  $n = 100$  est le plus proche de la courbe de la solution exacte.

$x$	<i>solution exacte</i>	<i>l'erreur</i> ( $n = 10$ )	<i>l'erreur</i> ( $n = 20$ )	<i>l'erreur</i> ( $n = 100$ )
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.0667	$8.2033 \times 10^{-5}$	$2.0532 \times 10^{-5}$	$8.6265 \times 10^{-7}$
0.4	0.1333	$1.6407 \times 10^{-4}$	$4.1064 \times 10^{-5}$	$1.7664 \times 10^{-6}$
0.6	0.2000	$2.4610 \times 10^{-4}$	$6.1595 \times 10^{-5}$	$2.6701 \times 10^{-6}$
0.8	0.2667	$3.2813 \times 10^{-4}$	$8.3127 \times 10^{-5}$	$3.5738 \times 10^{-6}$
1	0.3333	$4.1017 \times 10^{-4}$	$1.0266 \times 10^{-4}$	$4.1079 \times 10^{-6}$

TAB. 4.1 – les résultats de l'approximation par la méthode de Trapèze. Eq.F01

$x$	<i>solution exacte</i>	<i>l'erreur</i> ( $n = 10$ )	<i>l'erreur</i> ( $n = 20$ )	<i>l'erreur</i> ( $n = 100$ )
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.0667	$9.7033 \times 10^{-8}$	$6.0723 \times 10^{-9}$	$9.7197 \times 10^{-12}$
0.4	0.1333	$1.9407 \times 10^{-7}$	$1.2145 \times 10^{-8}$	$1.944 \times 10^{-11}$
0.6	0.2000	$2.911 \times 10^{-7}$	$1.8217 \times 10^{-8}$	$2.9159 \times 10^{-11}$
0.8	0.2667	$3.8813 \times 10^{-7}$	$2.4289 \times 10^{-8}$	$3.8879 \times 10^{-11}$
1	0.3333	$4.8516 \times 10^{-7}$	$3.0362 \times 10^{-8}$	$4.8599 \times 10^{-11}$

TAB. 4.2 – les résultats de l'approximation par la méthode de Simpson. Eq.F01

Ici une question importante se pose : Qu'elle est la meilleure méthode entre les deux ? pour répondre à cette question, on va comparer les résultats donnés par les tableaux ci dessus et observer le graphe (4.3) qui représente les deux courbes de la solution approchée par les deux méthodes pour  $n$  fixé (on choisit  $n = 100$ ) ainsi que la solution exacte. D'après les tableaux l'erreur absolue de la méthode de Trapèze est toujours supérieure à celle de Simpson et la présentation graphique confirme ça : la courbe de la solution approchée par Simpson est plus proche de la courbe de la solution exacte. La méthode de Simpson est plus précise que Trapèze.

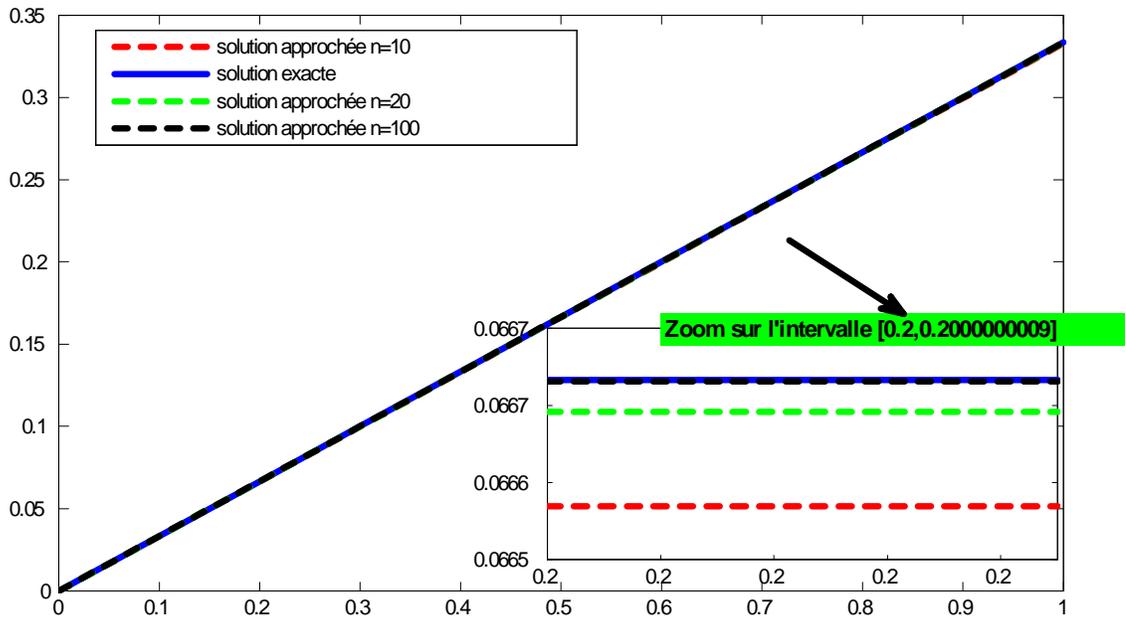


FIG. 4.1 – Solution numérique de l'équation (Eq.F01) en utilisant la méthode de Simpson pour  $n = 10, n = 20, n = 100$

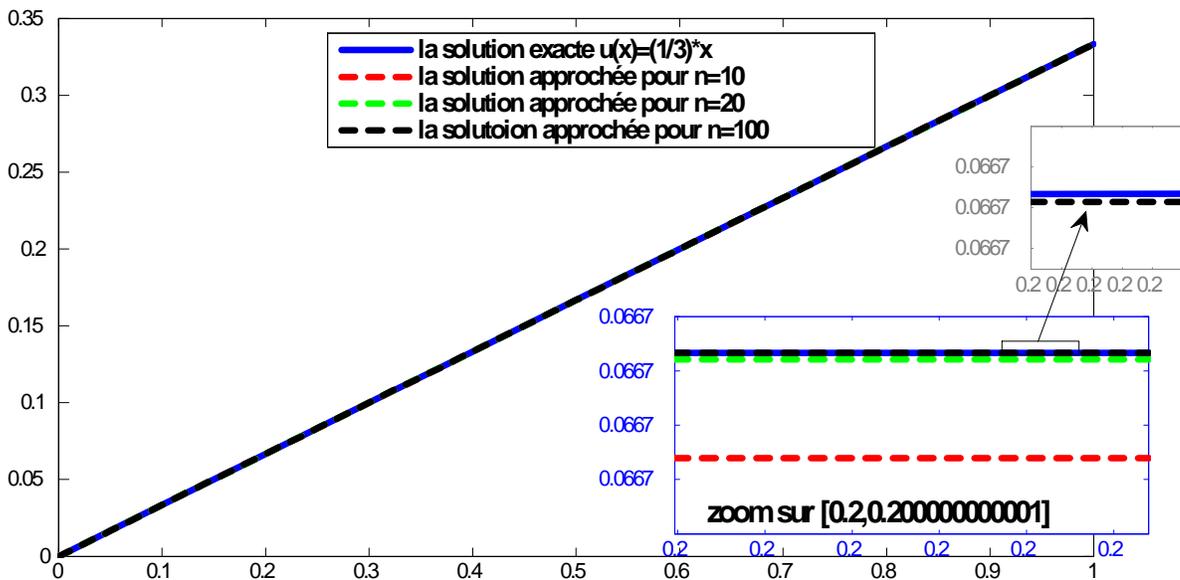


FIG. 4.2 – Solution numérique de l'équation (Eq.F02) en utilisant la méthode de Simpson pour  $n = 10, n = 20, n = 100$

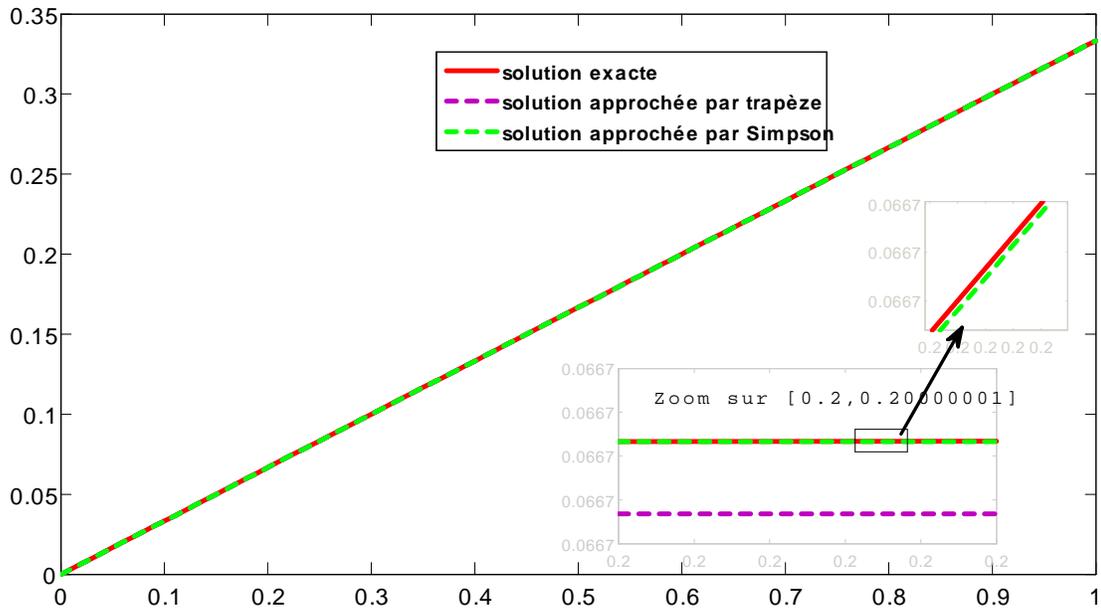


FIG. 4.3 – Comparaison entre les solutions approchées de l'équation (Eq.F01) par les méthodes de trapèze et de Simpson pour  $n = 100$ .

**Exemple 4.4.1** *Considérons l'équation linéaire de Fredholm de seconde espèce :*

$$u(x) = \exp\left(2x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \int_0^1 \exp\left(2x - \frac{5}{3}t\right) u(t) dt \quad (\text{Eq.F02})$$

qui a la solution exacte  $u(x) = \exp(2x)$ . Les résultats obtenus sont représentés dans les tableaux suivants, avec des illustrations graphiques :

$x$	<i>solution exacte</i>	$n = 10$	$n = 20$	$n = 100$
0	1.0000	$2.6246 \times 10^{-5}$	$6.5617 \times 10^{-6}$	$2.6247 \times 10^{-7}$
0.2	1.4918	$3.9154 \times 10^{-5}$	$9.7889 \times 10^{-6}$	$3.9156 \times 10^{-7}$
0.4	2.2255	$5.8411 \times 10^{-5}$	$1.4603 \times 10^{-5}$	$5.8414 \times 10^{-7}$
0.6	3.3201	$8.7140 \times 10^{-5}$	$2.1786 \times 10^{-5}$	$8.7143 \times 10^{-7}$
0.8	4.9530	$1.3000 \times 10^{-4}$	$3.2500 \times 10^{-5}$	$1.3000 \times 10^{-6}$
1	7.3891	$1.9393 \times 10^{-4}$	$4.8485 \times 10^{-5}$	$1.9394 \times 10^{-6}$

TAB. 4.3 – les résultats de l'approximation par la méthode de trapèze .Eq.F02

$x$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 100$
0	$1.9440 \times 10^{-9}$	$1.2151 \times 10^{-10}$	$1.9496 \times 10^{-13}$
0.2	$2.9001 \times 10^{-9}$	$1.8127 \times 10^{-10}$	$2.9043 \times 10^{-13}$
0.4	$4.3264 \times 10^{-9}$	$2.7043 \times 10^{-10}$	$4.3299 \times 10^{-13}$
0.6	$6.4542 \times 10^{-9}$	$4.0343 \times 10^{-10}$	$6.4615 \times 10^{-13}$
0.8	$9.6286 \times 10^{-9}$	$6.0184 \times 10^{-10}$	$9.6190 \times 10^{-13}$
1	$1.4364 \times 10^{-8}$	$8.9785 \times 10^{-10}$	$1.4353 \times 10^{-12}$

TAB. 4.4 – Les résultats de l’approximation par la méthode de Simpson. Eq.F02

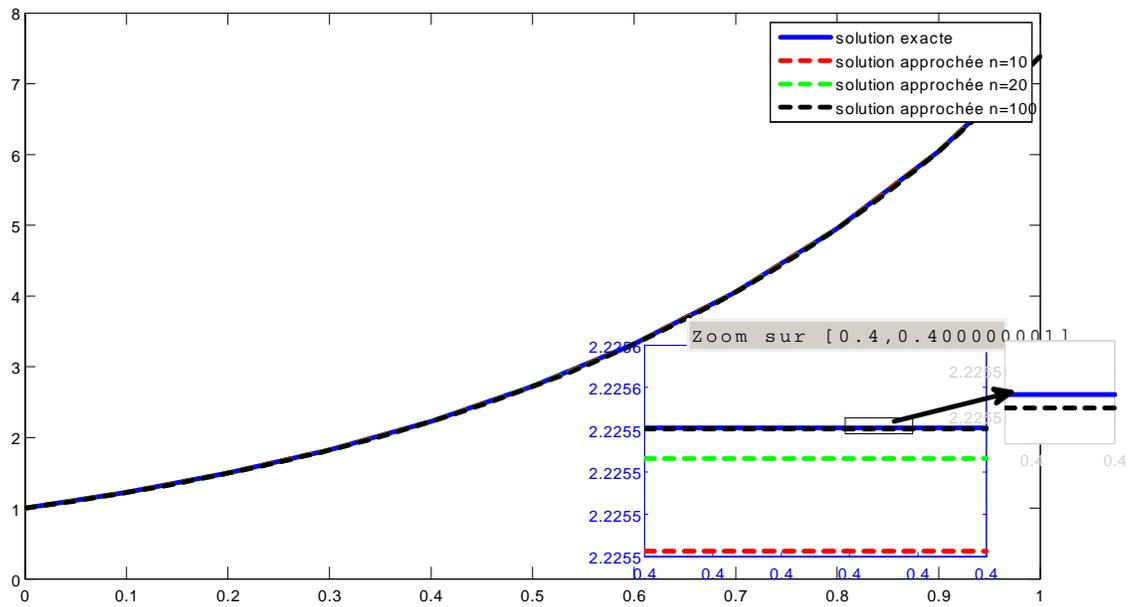


FIG. 4.4 – Solution numérique en utilisant la méthode de trapèze pour  $n = 10, n = 20, n = 100$  (Eq.F02)

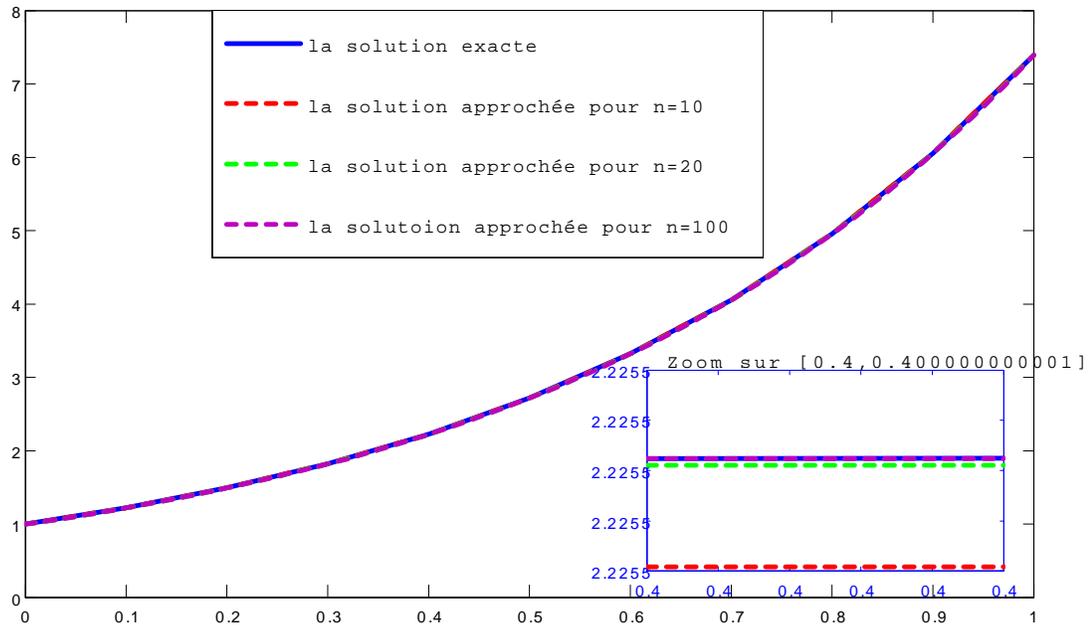


FIG. 4.5 – Solution numérique en utilisant la méthode de Simpson pour  $n = 10, n = 20, n = 100$  (Eq.F02)

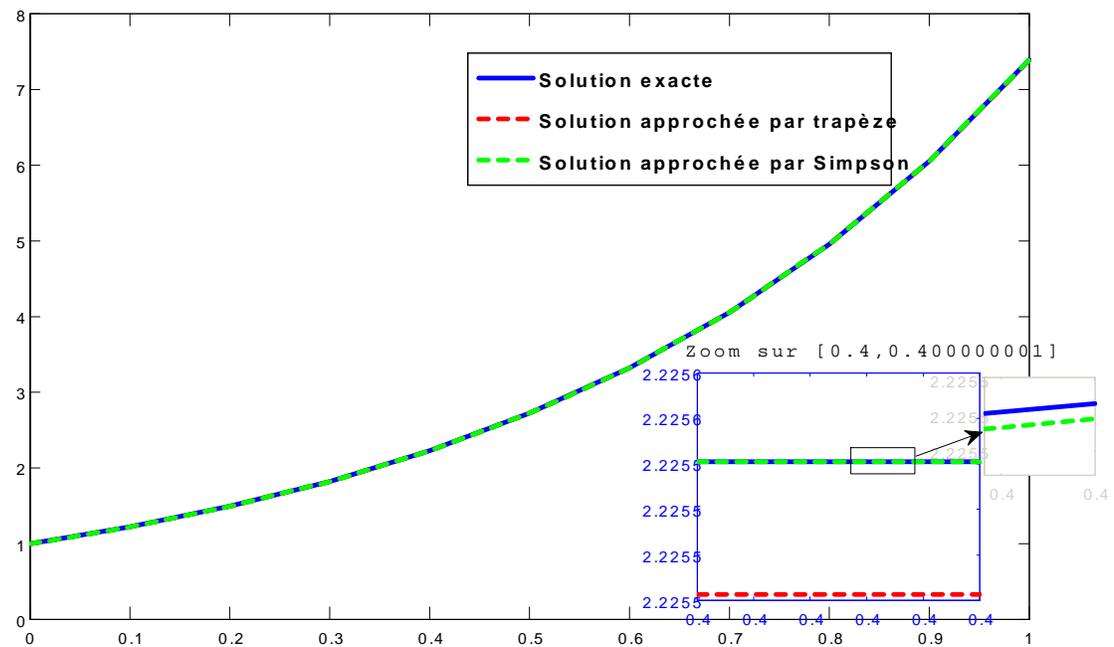


FIG. 4.6 – comparaison entre la solution approchée de trapèze et la solution approchée par Simpson pour  $n = 100$  (Eq.F02)

### 4.4.2 Equations intégrales linéaires de Volterra

**Exemple 4.4.2** On considère l'équation

$$u(x) = 1 + \int_0^x e^{-(x-t)} u(t) dt \quad x \in [0, 1] \quad (\text{Eq.V01})$$

telle que la solution exacte est  $u(x) = 1 + x$ .

Les résultats de l'approximation sont représentés dans les tableaux ci dessous ( les résultats de la deuxième tableau sont extraites de [12] ) :

$x$	$sol.exacte$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 100$
0	1	0	0	0	0
0.2	1.2000	$5.1757 \times 10^{-4}$	$1.2922 \times 10^{-4}$	$3.2295 \times 10^{-5}$	$5.1668 \times 10^{-6}$
0.4	1.4000	0.0011	$2.6679 \times 10^{-4}$	$6.2263 \times 10^{-5}$	$1.0667 \times 10^{-5}$
0.6	1.6000	0.0017	$4.1270 \times 10^{-4}$	$1.0314 \times 10^{-4}$	$1.6500 \times 10^{-5}$
0.8	1.8000	0.0023	$5.6695 \times 10^{-4}$	$1.4668 \times 10^{-4}$	$2.2667 \times 10^{-5}$
1	2	0.0029	$7.2954 \times 10^{-4}$	$1.8231 \times 10^{-4}$	$2.9167 \times 10^{-5}$

TAB. 4.5 – Les résultats de la solution numérique ( Eq.V01 ) par la méthode de trapèze

$x$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
0	0	0	0
0.2	$5.6609 \times 10^{-7}$	$3.4541 \times 10^{-8}$	$2.2125 \times 10^{-9}$
0.4	$1.1549 \times 10^{-6}$	$7.2207 \times 10^{-8}$	$4.5124 \times 10^{-9}$
0.6	$1.7648 \times 10^{-6}$	$1.1038 \times 10^{-7}$	$6.9012 \times 10^{-9}$
0.8	$2.3975 \times 10^{-6}$	$1.4996 \times 10^{-7}$	$9.3741 \times 10^{-9}$
1	$3.0524 \times 10^{-6}$	$1.9092 \times 10^{-7}$	$1.1936 \times 10^{-8}$

TAB. 4.6 – Les résultats de la solution numérique de l'équation ( Eq.V01 ) par la méthode de Simpson

**Exemple 4.4.3** *Considérons l'équation*

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad x \in [a, b] \quad (\text{Eq.V02})$$

telle que la solution exacte est  $u(x) = \cos(x)$ , les résultats numérique de l'approximation sont affichés dans les tableaux suivants (les résultats de tableau 4.8 sont extraites de [12]) :

$x$	$sol.exacte$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
0	1	0	0	0
0.2	0.9801	$1.6578 \times 10^{-5}$	$4.1403 \times 10^{-6}$	$1.0348 \times 10^{-6}$
0.4	0.9211	$0.4989 \times 10^{-5}$	$1.6231 \times 10^{-5}$	$4.0568 \times 10^{-6}$
0.6	0.8211	$1.4135 \times 10^{-4}$	$3.5302 \times 10^{-5}$	$8.8233 \times 10^{-6}$
0.8	0.6967	$2.3934 \times 10^{-4}$	$5.9799 \times 10^{-5}$	$1.4946 \times 10^{-6}$
1	0.5483	$3.5105 \times 10^{-4}$	$8.7681 \times 10^{-5}$	$2.1915 \times 10^{-6}$

TAB. 4.7 – Les résultats de la solution numérique de ( Eq.V02 ) par la méthode de trapèze

$x$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
0	0	0	0
0.2	$5.6609 \times 10^{-7}$	$3.5410 \times 10^{-8}$	$2.2125 \times 10^{-9}$
0.4	$1.1549 \times 10^{-6}$	$7.2207 \times 10^{-8}$	$4.5124 \times 10^{-9}$
0.6	$1.7648 \times 10^{-6}$	$1.1038 \times 10^{-7}$	$6.9012 \times 10^{-9}$
0.8	$2.3975 \times 10^{-6}$	$1.4996 \times 10^{-7}$	$9.3741 \times 10^{-9}$
1	$3.0524 \times 10^{-6}$	$1.9092 \times 10^{-7}$	$1.1936 \times 10^{-8}$

TAB. 4.8 – Les résultats de ( Eq.V02 ) par la méthode de Simpson

L'observation des tableaux précédente nous donnent les mêmes résultats obtenues pour les équations de Fredholm, en effet : L'erreur décroît à chaque fois le pas de discrétisation sera petit, donc il est préférable de répéter ces algorithmes avec un nombres de pas le plus petit possible pour améliorer la qualité de l'approximation, en outre, la comparaison à travers l'erreur absolue montre que la méthode de Simpson offre des résultats plus précis que la méthode de Trapèze.

# Conclusion

Ce mémoire aborde le sujet de la résolution numérique des équations intégrales par la méthode de quadrature. On a concentré notre étude sur les équations linéaires. On a étudié l'existence et l'unicité de la solution de ces équations. Ainsi on a présenté la méthode de quadrature pour le calcul numérique d'une intégrale. Ensuite, on a proposé les méthodes de trapèze et de Simpson composées pour résoudre les équations linéaires de Fredholm et de Volterra de seconde espèce à noyaux réguliers. Pour illustrer l'efficacité de chaque méthode, on a proposé quelques exemples numériques. Les résultats obtenus de ces exemples illustratifs nous permettent de conclure que ces méthodes sont efficaces et convergentes lorsque la taille de pas est suffisamment petite. Cependant, la méthode de Simpson est plus précise, ce qui en fait un choix préférable dans la pratique. Mais il convient de noter que la convergence de la méthode de quadrature -comme on a vu- exige une certaine régularité sur la fonction intégrante (au moins de classe  $C^1$  pour qu'on peut appliquer la méthode des rectangles par exemple). Donc, la convergence de la solution approchée dépend de l'ordre de la méthode choisie d'une part, et d'autre part de la régularité de noyau et celle de la solution à déterminer ce qui est n'est pas toujours facile à vérifier dans la pratique.

Les mêmes approches peuvent être utiliser pour résoudre autres problèmes comme : les équations non linéaires de Fredholm et de Volterra ( voir [14]), les équations de Fredholm linéaires à noyau de Cauchy, l'équation d'Abel et les équations de Fredholm-Volterra.

En conclusion, l'intégration numérique offre des approches efficaces pour la résolution des divers types d'équations intégrales ce qui le mètre un bon choix pour résoudre beaucoup de problèmes scientifiques.

# Bibliographie

- [1] Aigo, M. U. S. A. (2013). On the numerical approximation of Volterra integral equations of the second kind using quadrature rules. *International Journal of Advanced Scientific and Technical Research*, 1(3), 558-564.
- [2] CHEBBAH, H. (2019). Sur les méthodes de Nyström et applications aux équations intégrales et intégro-différentielles (thèse de doctorat, Université de Batna 2).
- [3] Delves, L. M., & Mohamed, J. L. (1988). *Computational methods for integral equations*. CUP Archive.
- [4] DEMAILLY, J.P.,(2006), *Analyse numérique et équations différentielles (pp.237-243)*, 3<sup>ème</sup> édition, Les Ulis : EDP SCIENCES.
- [5] EL HAMI, A.H.,RADI,B.,(2010),*Mathématiques numériques pour les ingénieurs, Ellipses Édition Marketing, France*.
- [6] EL JAI, A.(2003),*Éléments d'analyse numérique*, presse universitaire de perpignan ed.Collection Etudes.
- [7] LAKEHALI, B. (2016). Sur les équations intégrales singulières (Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider-Biskra).
- [8] LEMITA, S. (2018), Traitement numérique des équations intégrales de Fredholm : Généralisation des méthodes itératives, thèse de doctorat, Université 8 Mai 1945 Guelma.
- [9] Marie-Hélène Meurisse, Méthodes Numériques, Algorithmes Numériques, Fondements théoriques et Analyse pratique. Cours, exercices et applications avec Matlab.
- [10] Menacer, T.,(2020),*Théorie des opérateurs*, polycopie, Université Mohammed Khider Biskra.
- [11] Rahman, M. (2007). *Integral equations and their applications*. WIT press.

- [12] Rahmoune, A., (2011). Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales (Thèse de doctorat, Boumerdès, Université M'hamed Bougara. Faculté des Sciences).
- [13] Rahmoune, A. (2018). Equations intégrales linéaires et non linéaires. Analyse et techniques de résolution, 44-46.
- [14] Seghiri, I., (2021), Quelques méthodes numériques pour résoudre des équations intégrales non linéaires de Volterra et de Fredholm, Mémoire de Master, Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi.
- [15] SOUDANI,A.,(2015),Calcul numérique.Cours d'analyse numérique. OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES.
- [16] TITRAOUI, Z., (2019), Opérateur Intégral de Fredholm (Thèse de doctorat, UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF-M'SILA-FACULTE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE).
- [17] Wazwaz, A. M., (2011), Linear and nonlinear integral equations (Vol. 639, pp. 35-36), Berlin : Springer.

# Annexe A : Les codes MATLAB

1) La résolution de l'équation de Fredholm par la méthode de trapèze :

```
%%Paramètres :
a=0;b=1;n=10;h=(b-a)/n;
xn=a :h :b;
f=@(x) (1/2).*x;
k=@(x,t) x.*exp(t);
solexact=@(x)(1/3).*x;
lamda=-1/2;
%%système
%La matrice :
A=zeros(n+1);
for i=1 :n+1
A(i,1)=(1/2)*k(xn(i),xn(1));
A(i,n+1)=(1/2)*k(xn(i),xn(n+1));
end
for j=2 :n
for i=1 :n+1
A(i,j)=k(xn(i),xn(j));
endend
Ah=eye(n+1)-lamda*h*A;
%%%Le vecteur :
```

```
F=f(xn);  
  
%La solution :  
u=inv(Ah)*F'  
  
%l'erreur  
uexact=solexact(xn);  
err=u-uexact' %l'erreur  
  
%%%Les graphes :  
plot(xn,uexact,'r-')  
  
hold on  
plot(xn,u,'k-') %La courbe de la solution approché
```

2) Pour la méthode de Simpson, on répète les mêmes étapes sauf la matrice qui change :

```
As=zeros(n+1);  
  
for i=1 :n+1  
  
As(i,1)=k(xn(i),xn(1));  
As(i,n+1)=k(xn(i),xn(n+1));  
  
for j=2 :2 :n  
  
As(i,j)=4*k(xn(i),xn(j));  
  
end  
  
for j=3 :2 :n-1  
  
As(i,j)=2*k(xn(i),xn(j));  
  
end  
  
end  
  
Ash=eye(n+1)-lamda*(h/3)*As;
```

3) La résolution de l'équation de Volterra par la méthode de trapèze :

```
%%%%%%%%Paramètres  
a=0; b= 1; n= 10; h=(b-a)/n; xn=a :h :b;  
  
soll=@(x) 1+x;
```

```
k=@(x,t) exp(-(x-t)); lamda=1;

%Le système et la solution
K=zeros(n+1,1); K(1,1)=1;
for i=2 :n+1
K(i)=(1/2).*k(xn(i),xn(i));
end
A1=diag(K);
for i=2 :n+1
A1(i,1)=(1/2)*k(xn(i),xn(1));
end
for i=2 :n+1
for j=2 :n
if j<i
A1(i,j)=k(xn(i),xn(j));end
end
end
Ah=eye(n+1)-lamda*h*A1; Ah(1,1)=1;
F=ones(n+1,1);
uv=inv(Ah)*F
%L'erreur
solex=soll(xn); errv=solex'-uv
% Les graphes
plot(xn,solex,'b-')
hold on
plot(xn,uv,'r-')
```

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$EDO$	: équation différentielle ordinaire
$EI$	: équation intégrale
$\mathcal{P}_n$	: l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à $n$ .
$C([a, b])$	: l'espace des fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ .
$\mathbb{R}$	: l'ensemble des nombres réels
$f(x)$	: une fonction de variable $x$ .
$I$	: la matrice identité.
$Id_E$	: l'opérateur identité.
$k(x, t)$	: le noyau d'une équation intégrale.
$A^*$	: l'opérateur adjoint de $A$ .
$\ \cdot\ $	: norme.

## Résumé

---

On s'intéresse à la résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm et de Volterra de seconde espèce à noyau régulier en utilisant la méthode de quadrature (intégration numérique). On étudie l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie des opérateurs. Puis on applique la méthode de quadrature pour résoudre ces équations. On propose en particulier les méthodes de "Simpson" et de "trapèze" en donnant à la fin une étude comparative à travers des exemples numériques.

**Mots clés** : équation intégrale de Fredholm, équation intégrale de Volterra, méthode de quadrature, méthode des trapèzes, méthode de Simpson.

## Abstract

---

We focus on the numerical solution of the second kind linear Fredholm and Volterra integral equations with regular kernel using the quadrature method (numerical integration). We study the existence and uniqueness of the solution using operators theory. Then, we apply the quadrature method to solve these equations. In particular, we propose the Simpson and trapezoidal methods, and provide a comparative study with numerical examples.

**Keywords**: Fredholm integral equation, Volterra integral equation, quadrature method, trapezoidal method, Simpson's method.

## ملخص

---

نهتم في هذه الدراسة بإيجاد الحل التقريبي لمعادلات فريدهولم و فولتيرا التكاملية من النوع الثاني بنواة منتظمة باستخدام طريقة التربيع (التكامل العددي). درسنا وجود و وحدانية الحل باستخدام نظرية المؤثرات. ثم طبقنا طريقة التكامل العددي لحل هذه المعادلات. و على وجه الخصوص اقترحنا طريقة "سيمبسون" و شبه المنحرف " و قدمنا في النهاية دراسة مقارنة من خلال أمثلة عددية

**الكلمات الدالة**: معادلة فريدهولم التكاملية ، معادلة فولتيرا التكاملية ، طريقة التربيع ، طريقة شبه المنحرف ، طريقة سمبسون.