

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la

VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

REHAB Meriem

Titre :

La méthode de soustraction de singularité pour les  
équations de Fredholm

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BELLAGOUN Abd Elghani	UMKB	Président
Dr. KABOUL Hanane	UMKB	Encadreur
Dr. OUAAR Fatima	UMKB	Examinatrice

Juin 2023

## Dédicace

*Je dédie ce mémoire à :*

Ma mère MARAD Halima et mon père Lide sont le plus grand cadeau de ma vie, car ils m'ont offert de l'amour et du soutien tout au long de mon parcours et m'ont aidé à arriver là où je suis aujourd'hui. Chaque effort et sacrifice que j'ai fait pour réaliser mon rêve, c'est pour vous maman et papa, que dieu vous prolonge la vie et vous accorde le paradis.

Mes sœurs : Karima, Hanane, Hadjer et Manel et mon frère Youssef et sa femme Hadda, je suis reconnaissante de votre présence à mes côtés.

Ma sœur d'âme, mon amie SAIDI Hadjer et ma compagne de route SID MABROUK Hanine, je suis chanceuse de vous avoir car vous avez été un exemple d'amitié.

Mon défunt grand-père, REHAB Masoud.

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Allah pour la volonté, la force, la santé et la patience qu'il m'a donné an de réaliser ce travail. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au **Dr. " KABOUL HANANE "**, pour la qualité exceptionnelle de son encadrement, elle m'a en effet guidé pendant tout l'année.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury; **Dr. " BELLAGOUN ABD ELGHANI "** et **Dr. " OUAAR FATIMA "**, qui ont accepté d'évaluer et de juger mon travail.

Je remercie à tous les enseignants du département de Mathématiques, en particulier le doyen de la faculté **PR. " ATTAF ABDALLAH "**.

Je remercie à **Dr. " RAOUIA BENDAHMANE "**, Je n'oublierai jamais le soutien et les conseils que vous m'avez donnés.

Merci enfin à ma famille, notamment à mes parents dont l'affection et les encouragements m'ont rendue la vie vraiment plus agréable et tous mes amis chacun avec son nom.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des tables</b>	<b>v</b>
<b>1 Les type des équations intégrales</b>	<b>3</b>
1.1 Équations intégrales de Volterra . . . . .	3
1.1.1 Équation intégrale de Volterra du premier type . . . . .	3
1.1.2 Équations intégrales de Volterra de second type . . . . .	5
1.2 Équations intégrales d'Abel . . . . .	7
1.2.1 Équation intégrales d'Abel du premier type . . . . .	7
1.3 Équations intégrales de Fredholm . . . . .	8
1.3.1 Équations intégrales de Fredholm du premier type . . . . .	8
1.3.2 Équations intégrales de Fredholm du second type . . . . .	9
1.4 Équations intégrales singulières de Cauchy . . . . .	10
<b>2 Les opérateurs compact et alternative</b>	<b>12</b>
2.1 Opérateurs intégrales compactes . . . . .	12

2.1.1 Opérateurs intégrales compact sur $C(D)$	13
2.1.2 Propriétés des opérateurs compacts	15
2.1.3 Opérateurs intégrales sur $L^2(a, b)$	19
2.2 Le théorème d'alternative de Fredholm	20
<b>3 La méthode de soustraction de singularité</b>	<b>26</b>
3.1 Représentation de la méthode de soustraction de singularité	27
3.2 La formule de quadrature	29
3.3 Noyaux singuliers et approximations limitées	30
3.4 Théorie de l'approximation des opérateurs	33
3.5 Comparaisons des taux de convergence	35
3.6 Comparaisons avec d'autres méthodes d'approximation	38
3.7 Exemples numériques	38
<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

# Liste des tableaux

3.1 Résultats pour l'exemple 01	.....	39
3.2 Résultats pour l'exemple 02	.....	39

# Introduction

J. Fourier (1768-1830) a découvert les équations intégrales grâce à la formule de la transformation de Fourier. La formule d'inversion peut être interprétée comme fournissant l'opérateur inverse de l'opérateur d'intégrale de Fourier.

Les équations intégrales de Fredholm a été introduites par le mathématicien Suédois Ivar Fredholm en 1900 et les équations de Volterra a été introduites par le mathématicien Italien Vito Volterra en 1896.

Dans les années 1830, J. Liouville (1809-1882) a élargi la compréhension des équations intégrales en montrant qu'elles sont liées aux équations différentielles. V. Volterra (1860-1940) a ensuite établi la résolution des équations intégrales par les noyaux itérés et a étendu la théorie aux équations intégro-différentielles et aux équations intégrales singulières. Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre les équations intégrales de deuxième espèce.

Dans le cas général on ne sait pas résoudre explicitement l'équation et on s'intéresse donc à la résolution approchée (numériques) et la résolution analytique des équations intégrales de Fredholm comme la méthode de série solution, la méthode des approximations successives, la méthode de calcul direct et la méthode de soustraction de singularité. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir cette solution approchée. Avec le développement des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui plus simples.

La théorie des équations intégrales trouve des applications dans de nombreux do-

maines des mathématiques, la physique mathématique, la science de l'ingénierie, et permet de formuler de manière intégrale plusieurs problèmes en équations différentielles.

En raison de leur importance, les équations intégrales ont été largement étudiées et résolues numériquement dans la recherche en mathématiques appliquées.

Ce mémoire traite des équations intégrales, avec un intérêt particulier pour les équations intégrales de Fredholm du deuxième type. Le travail est divisé en trois chapitres. Le premier chapitre présente les différents types d'équations intégrales, ainsi que quelques exemples qu'on peut résoudre analytiquement. Dans le deuxième chapitre, nous abordons le concept d'opérateurs intégrales compactes et le théorème de Fredholm alternatif, qui garantit l'existence et l'unicité des solutions pour les équations à noyaux faiblement singulière. Enfin, le troisième chapitre explique la méthode de soustraction de singularité pour résoudre ces équations, en fournissant des exemples numériques qui confirme les résultats théoriques.



# Chapitre 1

## Les type des équations intégrales

Dans ce chapitre, on rappelle les définitions des équations intégrales de toutes sortes, où chaque type a une forme particulière, et chaque type se distingue des autres par les différentes limites du domaine de l'intégration, et donc les équations intégrales prennent une forme générale définie par :

$$y(t) = x(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} K(t, s)x(s)ds. \quad (1.1)$$

Où  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  sont les limites du domaine de l'intégration, et les fonctions  $K(t, s)$  et  $y(t)$  sont des fonctions données avec l'inconnu est  $x$  .

Les équations intégrales apparaissent dans de nombreux types. Les types dépendent principalement des limites de l'intégration et du noyau de l'équation. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux types suivants d'équations intégrales.

### 1.1 Équations intégrales de Volterra

#### 1.1.1 Équation intégrale de Volterra du premier type

L'équation intégrale générale non linéaire de Volterra du premier type est la forme :

$$y(t) = \int_a^t K(t, s, x(s)) ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (1.2)$$

Où  $a, b \in \mathbb{R}$ , les fonction  $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions données, et l'inconnu est  $x$ .

L'équation intégrale de Volterra linéaire générale du premier type est de la forme :

$$y(t) = \int_a^t K(t, s)x(s)ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (1.3)$$

Pour les équations de Volterra du premier type, l'équation linéaire est le cas le plus fréquemment étudié. La difficulté avec ce type des équations linéaires ou non linéaires est qu'elles sont inconditionnés dans une certaine mesure, ce qui rend leur solution numérique plus difficile. (En gros un problème mal conditionné est un problème dans lequel de petits changements dans les données  $y$  et le noyau  $K$  peuvent en trainer des changements beaucoup plus importants dans la solution  $x$ ).

Un exemple très simple mais important de (1.1.4) est

$$y(t) = \int_a^t x(s)ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (1.4)$$

Ceci équivaut à  $y(a) = 0$  et  $x(t) = y'(t)$ ,  $t \geq a$ . Ainsi la solution numérique de (1.4) est équivalente à la différenciation numérique de  $y(t)$ .

**Exemple 1.1.1** : *Montrent que  $x(t) = \exp(t)$  est une solution de l'équation intégrale de Volterra du premier type :*

$$y(t) = \int_0^t x(s)ds. \quad (1.5)$$

Où

$$\exp(t) - 1 = \int_0^t x(s)ds.$$

Remplacement de  $x(t) = \exp(t)$  dans (cd) de (1.5) :

$$\begin{aligned}
 cd &= \int_0^t \exp(s) ds \\
 &= (\exp(s)) \Big|_0^t \\
 &= \exp(t) - \exp(0) \\
 &= \exp(t) - 1 \\
 &= cg
 \end{aligned}$$

avec (cg) est le côté gauche de (1.5), donc  $x(t) = \exp(t)$  est une solution de l'équation intégrale de Volterra du premier type.

### 1.1.2 Équations intégrales de Volterra de second type

La forme générale étudiée est :

$$y(t) = x(t) + \int_a^t K(t, s, x(s)) ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (1.6)$$

Où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est le noyau de l'équation (1.6) et  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est le terme de source qui est une fonction donnée, et  $x$  est une fonction inconnue que l'on cherche. Il s'agit d'une équation intégrale non linéaire et c'est sous cette forme que l'équation est le plus souvent appliqué et résolu. De telles équations peuvent être considérées comme des généralisations de

$$x'(t) = f(t, u(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad x(a) = x_0. \quad (1.7)$$

Le problème de la valeur initiale pour les équations différentielles ordinaires.

Cette équation est équivalent à l'équation intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (1.8)$$

Où  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un noyau fixé par rapport à  $t$  et (1.8) un cas particulier de (1.6).

Il existe des méthodes numériques pour résoudre (1.6) et elles sont étroitement liées à la résolution du problème de la valeur initiale (1.7). Les équations intégrales de Volterra pour les fonctions  $x$  sont étudiées par une ou plusieurs variables.

**Exemple 1.1.2** : *Montrent que  $x(t) = 4t + \sin t$  est une solution de l'équation intégrale de Volterra du second type :*

$$y(t) = x(t) + \int_0^t x(s) ds. \quad (1.9)$$

Où :

$$4t + \sin t + 2t^2 - \cos t = x(t) + \int_0^t x(s) ds.$$

Remplacement de  $x(t) = 4t + \sin t$  dans le côté droit (cd) de (1.9) :

$$\begin{aligned} cd &= 4t + \sin t + \int_0^t 4s + \sin s ds \\ &= 4t + \sin t + \left( \frac{4}{2} s^2 - \cos s \right) \Big|_0^t \\ &= 4t + \sin t + 2t^2 - \cos t + 1 \\ &= cg \end{aligned}$$

où (cg) est le côté gauche de (1.9) donc  $x(t) = 4t + \sin t$  est une solution de l'équation intégrale de Volterra de second type.

## 1.2 Équations intégrales d'Abel

### 1.2.1 Équation intégrales d'Abel du premier type

Un cas important de (1.3) est l'équation intégrale d'Abel :

$$y(t) = \int_0^t \frac{H(t, s)x(s)}{(t^p - s^p)^\alpha} ds, \quad 0 < t \leq b. \quad (1.10)$$

Où  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  constant avec  $0 < \alpha < 1$ , et  $p > 0$ , et les cas particulièrement importants sont  $p = 1$  avec  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $p = 2$  avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

On suppose la fonction  $H : ]0, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est régulière. (C'est-à-dire plusieurs fois continument différentiable) et  $y(t) : ]0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée.

Ont été développés des méthodes numériques spéciales pour ces équations, comme elle se produisent dans une grande variété d'applications.

**Exemple 1.2.1** : Résolvez l'équation intégrale d'Abel suivante :

$$2\pi\sqrt{t} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} x(s) ds. \quad (1.11)$$

Application de la méthode de transformation de Laplace qui sera utilisée pour la détermination de la solution  $x(t)$ , pour une discussion sur la méthode de transformation de Laplace vois ([13]page 239).

Substitution de  $y(t) = 2\pi\sqrt{t}$  sur (1.11) donne :

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{2\pi\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}} ds \\ &= \frac{d}{dt} (\pi t) \\ &= \pi \end{aligned}$$

alors la solution de l'équation intégrale d'Abel (1.11) est  $x(t) = \pi$ .

## 1.3 Équations intégrales de Fredholm

### 1.3.1 Équations intégrales de Fredholm du premier type

Ce type d'équation a la forme suivante :

$$y(t) = \int_D K(t, s)x(s)ds, \quad t, s \in D. \quad (1.12)$$

Où  $D$  ensemble fixé, et le noyau  $K : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$  est supposé absolument intégrale, ou en bref, comme dans (1.14). La solution de ce type d'équation  $x$  est sensible aux petits changements dans la fonction de données  $y$ , c'est pourquoi ces équations sont souvent classées comme non entraînées. Ces problèmes doivent être subdivisées en deux catégories. Premièrement, si  $K(t, s)$  est une fonction régulière, alors la solution  $x(s)$  de (1.12) est extrêmement sensible aux petits changements de  $y(t)$ , et des méthodes spéciales de solution sont nécessaires. Deuxièmement, si  $K(t, s)$  est une fonction singulière, alors le mauvais conditionnement de (1.12) est tout à fait gérable, et en effet, une grand partie de la théorie pour de telles équations est tout à fait semblable à celle de l'équation du deuxième type (1.14) .

**Exemple 1.3.1** : *On va montrer que  $x(t) = \exp(t)$  est une solution de l'équation intégrale de Fredholm du premier type :*

$$\frac{\exp(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} = \int_0^1 \exp(t^2 s)x(s)ds \quad (1.13)$$

en utilisant  $x(s) = \exp(s)$  dans le côté droit de (1.13), on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(t^2 + 1)s ds &= \frac{\exp(t^2 + 1)s}{t^2 + 1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\exp(t^2 + 1)}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1} \\ &= \frac{\exp(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

alors  $x(t) = \exp(t)$  est une solution de l'équation intégrale de Fredholm du premier type.

### 1.3.2 Équations intégrales de Fredholm du second type

Ce type d'équation prend la forme suivante :

$$y(t) = \lambda x(t) - \int_D K(t, s)x(s)ds, \quad t, s \in D, \quad \lambda \neq 0. \quad (1.14)$$

Où  $D$  ensemble fermé borné dans  $\mathbb{R}^m$ , certains  $m \geq 1$  avec  $\lambda$  constant. La fonction noyau  $K : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$  est supposé absolument intégrable, et est supposé satisfaire d'autres propriétés qui sont suffisantes pour impliquer le théorème d'alternatif de Fredholm.

Pour  $y \neq 0$ , on a  $\lambda$  et  $y$  donné, et on cherche  $x$ , c'est le problème non homogène. Pour  $y = 0$ , équation (1.14) devienne un problème aux valeurs propres  $\lambda$  et la fonction propre  $x$ . L'objet principale des méthodes numériques présentées dans les chapitres suivants est la solution numérique de (1.14) avec  $y \neq 0$ .

**Exemple 1.3.2** : Montrent que  $x(t) = t$  est une solution de l'équation intégrale de Fredholm du second type :

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{3} \int_0^1 (t + s)x(s)ds. \quad (1.15)$$

Où

$$y(t) = \frac{5}{6}t - \frac{1}{9}.$$

Remplacement de  $x(t) = t$  dans (cd) de (1.15), on va trouver

$$\begin{aligned} cd &= t - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (t+s)sd s \\ &= t - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 ts + s^2 ds \\ &= t - \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2}ts^2 + \frac{1}{3}s^3 \right] \Big|_0^1 \\ &= t - \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2}t + \frac{1}{3} \right] \\ &= t - \frac{1}{6}t - \frac{1}{9} \\ &= \frac{5}{6}t - \frac{1}{9} \\ &= cg \end{aligned}$$

donc  $x(t) = t$  est une solution de l'équation intégrale de Fredholm du second type.

## 1.4 Équations intégrales singulières de Cauchy

La forme générale de cette équation est :

$$\psi(z) = a(z)\phi(z) + \frac{b(z)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\Gamma} K(z, \zeta)\phi(\zeta)d\zeta, \quad z \in \Gamma. \quad (1.16)$$

Soit  $\Gamma$  un contour ouvert ou fermé dans le plan complexe, les fonctions  $a$ ,  $b$ ,  $\psi$  et  $K$  sont des fonctions données à valeurs complexes, et  $\phi$  est la fonction inconnue .

La fonction  $K$  doit être absolument intégrable et en outre, il doit être tel que l'opérateur intégrale de Fredholm au sens du point (1.3) ci-dessus.



La première intégrale de (1.16) est interprétée comme une intégrale de valeurs principales de Cauchy :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.17)$$

Avec  $\Gamma_\epsilon = \{\zeta \in \Gamma \mid |\zeta - z| \geq \epsilon\}$ . Les équations intégrales singulières de Cauchy se produisent dans une variété de problèmes physiques, en particulier en relation avec la solution des équations aux dérivées partielles dans  $\mathbb{R}^2$ .

# Chapitre 2

## Les opérateurs compact et alternative

Ce chapitre s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions aux équations de Fredholm.

### 2.1 Opérateurs intégrales compactes

Dans cette section, on a étudié la solution numérique de l'intégration réelle des équations. En fait, il est nécessaire de comprendre le comportement de la plupart des méthodes numériques pour résoudre les équations intégrales de Fredholm, y compris répondre aux questions liées à la convergence et à la stabilité numérique et estimations d'erreurs asymptotiques.

Lorsque  $X$  est un espace vectoriel de dimension finie et  $A : X \rightarrow X$  est linéaire, l'équation  $Ax = y$  a une théorie de solvabilité bien développée. Pour étendre ces résultats aux espaces de dimension infinie, on a introduit le concept d'un opérateur compact  $\mathcal{K}$  et puis dans la section suivante on peut donner une théorie pour l'opérateur équation  $Ax = y$  dans les quelles  $A = I - \mathcal{K}$ .

**Définition 2.1.1** : Soit  $X, Y$  des espaces vectoriels normés, et soit  $\mathcal{K} : X \longrightarrow Y$  linéaire, alors  $\mathcal{K}$  est compact si l'ensemble  $\{\mathcal{K}x \mid \|x\| \leq 1\}$ ,  $x \in X$  a une fermeture compacte en  $Y$ .

Cela équivalent à dire que pour chaque suite bornée  $\{x_n\} \subset X$ , la suite  $\{\mathcal{K}x_n\}$  a une sous suite qui est convergente jusqu'à un certain point dans  $Y$ . Les opérateurs compacts sont aussi appelés opérateurs complètement continus.

**Remarque 2.1.1** : En présence de définition de l'opérateur compact, la définition précédente est utilisée le plus communément, où il n'est pas nécessaire qu'il s'agisse d'espaces  $X$  et  $Y$  complets, mais presque dans toutes les applications ils sont complets. Avec complétude, certaines preuves des propriétés des opérateurs compacts deviennent plus simples, de sorte que on suppose toujours que  $X$  et  $Y$  sont complets c'est-à-dire "espaces de Banach" lorsqu'il s'agit d'opérateurs.

### 2.1.1 Opérateurs intégrales compact sur $C(D)$

Soit  $D$  ensemble fermé borné dans  $\mathbb{R}^m$ , tel que  $m \geq 1$  et définit

$$\mathcal{K}x(t) = \int_D K(t, s)x(s)ds, s, t \in D. \quad (2.1)$$

Avec  $C(D)$  est l'espace des fonctions continue dans l'intervalle fermé et borné et  $x : D \longrightarrow \mathbb{R} \in C(D)$ .

En utilisant  $C(D)$  avec  $\|\cdot\|_\infty$ , on montre que  $\mathcal{K} : C(D) \longrightarrow C(D)$  est compact borné.

On suppose  $K : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}$  est intégrable au sens de Riemann par rapport à sa deuxième variable, pour tous les  $t \in D$ , et donc on suppose ce qui suit :

$M_1 : \lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ , avec

$$\omega(h) = \max_{t, \tau \in D} \max_{|t-\tau| \leq h} \int_D |K(t, s) - K(\tau, s)| ds. \quad (2.2)$$

$M_2$  :

$$\max_{t \in D} \int_D |K(t, s)| ds < \infty. \quad (2.3)$$

En utilisant  $M_1$ , si  $x$  est borné et intégrable alors  $\mathcal{K}x$  est continu, avec

$$|\mathcal{K}x(t) - \mathcal{K}x(\tau)| \leq \omega(|t - \tau|) \|x\|_\infty \quad (2.4)$$

En utilisant  $M_2$ , on a une borne de  $K$  avec

$$\|\mathcal{K}\| = \max_{t \in D} \int_D |K(t, s)| ds. \quad (2.5)$$

Pour discuter de la compacité de  $\mathcal{K}$ , on doit d'abord identifier les ensembles compacts dans  $C(D)$ . Pour ce faire, on va utiliser le théorème d'Arzela-Ascoli du calcul avancé. Il est dit qu'un sous-ensemble  $S \subset C(D)$  a une fermeture compacte si et seulement si :

- (1)  $S$  est un ensemble des fonctions uniformément bornées.
- (2)  $S$  est une famille équicontinu.

Considérons maintenant l'ensemble  $S = \{\mathcal{K}x \mid x \in C(D) \text{ et } \|x\|_\infty \leq 1\}$ , c'est uniformément borné, puisque  $\|\mathcal{K}x\|_\infty \leq \|\mathcal{K}\| \|x\|_\infty \leq \|\mathcal{K}\|$ . De plus  $S$  est équicontinu à partir de (2.4). Ainsi  $S$  a une fermeture compacte en  $C(D)$ , et  $\mathcal{K}$  est un opérateur compact sur  $C(D)$  à  $C(D)$ .

Quelles sont les fonctions du noyau  $K$  qui satisfont  $M_1$  et  $M_2$  ? Facilement, ces hypothèses sont satisfaites si  $K(t, s)$  est une fonction continue de  $(t, s) \in D$ . De plus soit  $D = [a, b]$  et considérons :

$$\mathcal{K}x(t) = \int_a^b \log |t - s| x(s) ds, \quad (2.6)$$

et

$$\mathcal{K}x(t) = \int_a^b \frac{1}{|s-t|^\beta} x(s) ds, \quad (2.7)$$

avec  $\beta < 1$ . On peut montrer que ces définitions de  $\mathcal{K}$  satisfont  $M_1$  et  $M_2$ .

Une autre façon de montrer que  $K(t, s)$  satisfait  $M_1$  et  $M_2$  est de réécrire  $K$  sous la forme :

$$K(t, s) = \sum_{i=0}^p H_i(t, s) L_i(t, s). \quad (2.8)$$

Pour certains  $p > 0$  avec chaque  $L_i : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$  continue pour  $a \leq t, s \leq b$  et chaque  $H_i : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant  $M_1$  et  $M_2$ .

Il appartient au lecteur de montrer que dans ce cas,  $K$  satisfait également  $M_1$  et  $M_2$ .

L'utilité de cette approche est qu'elle est parfois difficile de montrer directement que  $K$  satisfait  $M_1$  et  $M_2$ , alors que montrer (2.8) peut être plus facile.

**Exemple 2.1.1** : Soit  $[a, b] = [0, \pi]$  et  $K(t, s) = \log |\cos t - \cos s|$ , puis réécrire ceci comme

$$K(t, s) = \underbrace{|s-t|^{-\frac{1}{2}}}_{H(t,s)} \underbrace{|s-t|^{\frac{1}{2}} \log |\cos t - \cos s|}_{L(t,s)}. \quad (2.9)$$

Facilement,  $L$  est continue et d'après la discussion qui suit (2.7),  $H$  satisfait  $M_1$  et  $M_2$ . Ainsi  $K$  est le noyau d'un opérateur intégral compact sur  $C[0, \pi]$  à  $C[0, \pi]$ .

## 2.1.2 Propriétés des opérateurs compacts

Une autre façon d'obtenir des opérateurs compacts est d'examiner les limites de plus simple "opérateurs de dimension finie" dans  $L[X, Y]$  l'espace de Banach des opérateurs linéaire borné de  $X$  à  $Y$ . Cela donne une autre perspective sur les opérateurs compacts, qui conduit à une meilleure intuition en mettant l'accent sur leur relation avec opérateurs sur des espaces de dimension finie.

**Définition 2.1.2** : Soit  $X$  et  $Y$  des espaces vectoriels, l'opérateur linéaire

$\mathcal{K} : X \longrightarrow Y$  est un opérateur de rang fini si  $Rang(\mathcal{K})$  est de dimension finie.

**Lemme 2.1.1** : Soit  $X$  et  $Y$  des espaces linéaires normés et soit  $\mathcal{K} : X \longrightarrow Y$  un opérateur de rang fini borné, alors  $\mathcal{K}$  est un opérateur compact.

**Preuve.** : Voir([7]page 09). ■

**Exemple 2.1.2** : Soit  $X = Y = C[a, b]$  avec  $\|\cdot\|_\infty$ , considérons la fonction noyau

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \gamma_i(s), \quad (2.10)$$

avec chaque  $\beta_i(t)$  continu sur  $[a, b]$  et chaque  $\gamma_i(s)$  absolument intégrable sur  $[a, b]$ .

Alors l'opérateur intégral associé  $\mathcal{K}$  est un opérateur borné de rang fini sur  $C[a, b]$  à  $C[a, b]$  :

$$\mathcal{K}x(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t) \int_a^b \gamma_i(s) x(s) ds, x \in C[a, b]. \quad (2.11)$$

$$\|\mathcal{K}\| \leq \sum_{i=1}^n \|\beta_i\|_\infty \int_a^b |\gamma_i(s)| ds. \quad (2.12)$$

De (2.11)  $\mathcal{K}x \in C[a, b]$  et  $Rang(\mathcal{K}) \subset Span \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  un espace de dimensionnel finie. Les fonctions du noyau de la forme (2.10) sont appelées dégénérées.

**Lemme 2.1.2** : Soit  $\mathcal{K} \in L[X, Y]$  et  $\mathcal{L} \in L[Y, Z]$ , et soit  $\mathcal{K}$  ou  $\mathcal{L}$  (ou les deux) compact, alors  $\mathcal{L}\mathcal{K}$  est compact sur  $X$  à  $Z$ .

**Lemme 2.1.3** : Soit  $X$  et  $Y$  des espaces linéaires normés, avec  $Y$  complet. Soit  $\mathcal{K} \in L[X, Y]$ , soit  $\{\mathcal{K}_n\}$  une suite d'opérateurs compacts dans  $L[X, Y]$  et supposons  $\mathcal{K}_n \longrightarrow \mathcal{K}$  dans  $L[X, Y]$ , ie  $\|\mathcal{K}_n - \mathcal{K}\| \longrightarrow 0$ , alors  $\mathcal{K}$  est compact.

Ce lemme donne le cadre pour l'utilisation d'opérateurs de rang fini pour obtenir des opérateurs compacts similaires, mais plus généraux.

**Preuve.** : Soit  $\{x_n\}$  une suite dans  $X$  satisfaisant

$$\|x_n\| \leq 1, n \geq 1.$$

■

On doit montrer que  $\{\mathcal{K}x_n\}$  contient une sous suite convergente.

Puisque  $\mathcal{K}_1$  est compact, la suite  $\{\mathcal{K}_1x_n\}$  contient un sous suite convergent par  $\{\mathcal{K}_1x_n^{(1)} \mid n \geq 1\}$ , et soit sa limite être noté  $y_1 \in Y$ . pour  $k \geq 2$ , choisissez inductivement une sous suite  $\{x_n^{(k)} \mid n \geq 1\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$  tel que  $\{\mathcal{K}_kx_n^{(k)}\}$  converge vers un point  $y_k \in Y$ , ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}_kx_n^{(k)} = y_k \text{ et } \{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}, k \geq 1. \quad (2.13)$$

On a maintenant choisir une sous suite spéciale  $\{z_k\} \subset \{x_n\}$  pour laquelle  $\{\mathcal{K}z_k\}$  est convergent dans  $Y$ , soit  $z_1 = x_j^{(1)}$  pour tous  $n \geq j$ . Inductivement, pour  $k \geq 2$ , choisir  $z_k = x_j^{(k)}$  pour un certain  $j$ , tel que  $z_k$  soit plus avancé dans la suite  $\{x_n\}$  que  $z_{k-1}$  et tel que

$$\|\mathcal{K}_kx_n^{(k)} - y_k\| \leq \frac{1}{k}, n \geq j. \quad (2.14)$$

La suit  $\{\mathcal{K}z_k\}$  est une suite de Cauchy dans  $Y$ . Pour montrer cela, considérez

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}z_{k+p} - \mathcal{K}z_k\| &\leq \|\mathcal{K}z_{k+p} - \mathcal{K}_kz_{k+p}\| + \|\mathcal{K}_kz_{k+p} - \mathcal{K}_kz_k\| + \|\mathcal{K}_kz_k - \mathcal{K}z_k\| \\ &\leq 2\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_k\| + \|\mathcal{K}_kz_{k+p} - y_k\| + \|y_k - \mathcal{K}_kz_k\| \\ &\leq 2\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_k\| + \frac{2}{k}, p \geq 1 \end{aligned}$$

La dernière instruction utilise (2.13)(2.14) notant que  $z_{k+p} \in \{x_n^{(k)}\}$  pour tous  $p \geq 1$ . Utiliser l'hypothèse que  $\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_k\| \rightarrow 0$  pour conclure la preuve que  $\{\mathcal{K}z_k\}$  est une suite de Cauchy dans  $Y$ , puisque  $Y$  est complet,  $\{\mathcal{K}z_k\}$  est convergent dans  $Y$  et ceci

montre que  $\mathcal{K}$  est compact.

Pour presque tous les espaces de fonction  $X$  d'intérêt, les opérateurs compacts peuvent être caractérisés comme étant la limite d'une suite d'opérateurs bornés de rang fini, cela justifie une justification supplémentaire de la présentation du lemme (2.1.3).

**Exemple 2.1.3** : Soit  $D$  un ensemble fermé et borné dans  $\mathbb{R}^m$ , quelque soit  $m > 1$ . Par exemple  $D$  peut être une région avec un intérieur non vide, une surface régulière par morceaux ou un courbe régulière par morceaux, soit  $K(t, s)$  une fonction continue de  $t, s \in D$ , supposons alors qu'on peut définir une suite de fonctions continues dégénérées du noyau  $K_n(t, s)$  pour lequel

$$\max_{t \in D} \int_D |K(t, s) - K_n(t, s)| ds \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Alors pour les opérateurs intégrales associés, il s'ensuit facilement que  $\mathcal{K}_n \longrightarrow \mathcal{K}$ , et par lemme (2.1.3)  $\mathcal{K}$  est compact, le résultat (2.15) est vrai pour les fonction  $K(t, s)$  et on régulier aux problèmes la preuve de divers choix de  $D$ . Bien sûr, on sait déjà que  $\mathcal{K}$  compact dans ce cas, à partir de la discussion qui suit (2.7). Mais l'approche actuelle montre que la relation entre les opérateurs compacts et les opérateurs de dimension finie.

**Exemple 2.1.4** : Soit  $X = Y = C[a, b]$  avec  $\|\cdot\|_\infty$ , on a la fonction noyau :

$$K(t, s) = \frac{1}{(t - s)^\gamma}. \quad (2.16)$$

Pour certains  $0 < \gamma < 1$ . Définissez une suite de fonction continues du noyau pour l'approximer

$$K_n(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{|t-s|^\gamma}, & |t - s| \geq \frac{1}{n} \\ n^\gamma, & |t - s| \leq \frac{1}{n} \end{cases} \quad (2.17)$$



Pour les opérateurs intégrales associées

$$\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| = \frac{2\gamma}{1-\gamma} n^{\gamma-1}$$

qui converge vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ , par lemme (2.1.3),  $\mathcal{K}$  est un opérateur compact sur  $C[a, b]$ .

### 2.1.3 Opérateurs intégrales sur $L^2(a, b)$

Soit  $X = Y = L^2(a, b)$ , et soit  $\mathcal{K}$  l'opérateur intégral associé à  $K(t, s)$ . On a montrée d'abord que sous des hypothèses appropriées sur  $K$ ,  $\mathcal{K} : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ , soit

$$M = \left[ \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.18)$$

et supposons  $M < \infty$ . Pour  $x \in L^2(a, b)$ , utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}x\|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b K(t, s)x(s)ds \right|^2 dt \leq \int_a^b \left[ \int_a^b |K(t, s)|^2 ds \right] \left[ \int_a^b |x(s)|^2 ds \right] dt \\ &\leq M^2 \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Cela signifie que  $\mathcal{K}x \in L^2(a, b)$ , et montre

$$\|\mathcal{K}\| \leq M. \quad (2.19)$$

Pour examiner la compacité de  $\mathcal{K}$  pour des fonction de noyau plus générales, on suppose qu'il existe une suite des fonctions du noyau  $K_n(t, s)$  pour laquelle (i)  $\mathcal{K}_n : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$  est compact et

(ii)

$$M_n = \left[ \int_a^b \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, \text{ tq : } n \longrightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Par exemple, si  $K$  est continu alors cela découle de (2.15) l'opérateur  $\mathcal{K} - \mathcal{K}_n$  est un opérateur intégral et on va appliquée (2.18), (2.19) pour obtenir

$$\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n\| \leq M_n \longrightarrow 0, \text{ tq : } n \longrightarrow \infty.$$

De lemme (2.1.3), cela montre que  $\mathcal{K}$  est compact. Pour tout noyau Hilbert-Schmidt, (2.20) peut être montré comme valable pour un choix approprié de dégénéré fonctions du noyau  $K_n$ .

## 2.2 Le théorème d'alternative de Fredholm

Le théorème d'alternative de Fredholm une technique mathématique utilisée pour résoudre des problèmes de valeurs critiques en mathématiques, cette théorie est considérée comme l'une des théories de base en mathématiques et en arithmétique et a été grandement développée à la fin du Dix-neuvième siècle et au début du vingtième siècle.

Cette théorie comprend un ensemble de lois et de concepts mathématiques qui aident à résoudre des problèmes critiques de manière fluide, et le nom vient du mathématicien suédois Ivar Fredholm, qui a jeté les bases de cette théorie au 19ème siècle. Le théorème de alternative de Fredholm développe un ensemble de programmes informatiques spécialisés dans la résolution de problèmes de valeurs critiques en mathématiques, technologie, physique et informatique.

Au début des années 1900, Ivar Fredholm a donné les conditions nécessaires et suf-

fisantes pour la solvabilité d'une grande catégorie de Fredholm du second type.

Dans cette section on va indiquer et prouver le résultat le plus important de Fredholm.

**Théorème 2.2.1** (*Alternative de Fredholm*). *Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $\mathcal{K} : X \longrightarrow X$  être compact, alors l'équation  $(\lambda - \mathcal{K})x = y, \lambda \neq 0$  a un solution  $x \in X$  si et seulement si l'équation homogène  $(\lambda - \mathcal{K})z = 0$  n'a que la solution triviale  $z = 0$ . Dans tel cas, l'opérateur  $\lambda - \mathcal{K} : X \longrightarrow X$  possède un inverse borné  $(\lambda - \mathcal{K})^{-1}$ .*

**Preuve.** : *Le théorème est vrai pour tout opérateur compact  $\mathcal{K}$ , mais notre preuve en concerne que les opérateurs compacts qui sont la limite d'une suite de rangs finis bornés, on remarque que le théorème est un généralisation du résultat standard suivant pour les espaces vectoriels  $X$  de dimension finie : pour  $A$  une matrice d'ordre  $n$  avec  $X = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  (avec  $A$  ayant des entrées réelles dans le premier cas), le système linéaire  $Ax = y$  a une solution unique  $x \in X$  pour tout  $y \in X$  si et seulement si le système linéaire homogène  $Ax = 0$  n'a que la solution nulle  $z = 0$ . ■*

1). On commence par le cas où  $\mathcal{K}$  est de rang fini et borné. Soit  $\{u_1, \dots, u_n\}$  une base de  $\text{Range}(\mathcal{K})$ , réécrire l'équation  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$  comme suit

$$x = \frac{1}{\lambda} [y + \mathcal{K}x]. \quad (2.21)$$

Si cette équation a une solution unique  $x \in X$ , alors

$$x = \frac{1}{\lambda} [y + c_1 u_1 + \dots + c_n u_n]. \quad (2.22)$$

Pour un ensemble de constantes  $c_1, \dots, c_n$  déterminé de façon unique, en substituant à l'équation, on obtient

$$\lambda \left\{ \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n c_i u_i \right\} - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K} y - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{K} u_j = y.$$

Multiplier par  $\lambda$ , puis simplifier pour obtenir

$$\lambda \sum_{j=1}^n c_j u_j - \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{K}u_j = \mathcal{K}y. \quad (2.23)$$

En utilisant la base  $\{u_i\}$  pour  $Range(\mathcal{K})$  écrivez

$$\mathcal{K}y = \sum_{i=1}^n \gamma_i u_i, \quad \mathcal{K}u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Les coefficients  $\{\gamma_i\}$  et  $\{a_{ij}\}$  sont déterminés de manière unique, en substituant dans (2.23) et en réarrangeant

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \lambda c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \right\} u_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i u_i.$$

Par l'indépendance des éléments de base  $u_i$ , on obtient le système linéaire

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = \gamma_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.24)$$

Affirmation. Ce système linéaire et l'équation  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$  sont complètement équivalents dans leur résolubilité, avec (2.22) fournissant une correspondance biunivoque entre les solutions de ces deux systèmes.

On montre ci-dessus que si  $x$  est une solution de  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$ , alors  $(c_1, \dots, c_n)$  est une solution de (2.24). De plus, supposez que  $x_1$  et  $x_2$  sont des solutions distinctes de  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$ , alors

$$\mathcal{K}x_1 = \lambda x_1 - y \quad \text{et} \quad \mathcal{K}x_2 = \lambda x_2 - y, \quad \lambda \neq 0.$$

sont également des vecteurs distincts dans  $Range(\mathcal{K})$ , et donc les vecteurs de coor-

données associés  $(c_1^{(1)}, \dots, c_n^{(1)})$  et  $(c_1^{(2)}, \dots, c_n^{(2)})$

$$\mathcal{K}x_n = \sum_{i=1}^n c_k^{(i)} u_k, \quad i = 1, 2.$$

Doivent également être distincts.

Pour l'énoncé inverse, suppose que  $(c_1, \dots, c_n)$  est une solution de (2.24).

Définir un vecteur  $x \in X$  en utilisant (2.22), puis vérifier si ce  $x$  satisfait l'équation intégrale (2.21) :

$$\begin{aligned} (\lambda - \mathcal{K})x &= \lambda \left\{ \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n c_i u_i \right\} - \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}y - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{K}u_j \\ &= y + \frac{1}{\lambda} \left\{ \lambda \sum_{i=1}^n c_i u_i - \mathcal{K}y - \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{K}u_j \right\} \\ &= y + \frac{1}{\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda c_i u_i - \sum_{i=1}^n \gamma_i u_i - \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \right\} \\ &= y + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \left\{ \underbrace{\lambda c_i - \gamma_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j}_{=0, i=1, \dots, n} \right\} u_i \\ &= y \end{aligned}$$

De même, des vecteurs de coordonnées distincts  $(c_1, \dots, c_n)$  conduisent à des vecteurs solutions  $x$  dans (2.22), en raison de l'indépendance linéaire des vecteurs de base  $\{u_1, \dots, u_n\}$ , ceci complète la preuve de l'affirmation donnée ci-dessus.

Considérons maintenant le théorème d'alternatif de Fredholm pour  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$ , avec ceci de rang fini  $\mathcal{K}$ . Supposons que  $\lambda - \mathcal{K} : X \rightarrow X$ . Alors trivialement,  $\text{Null}(\lambda - \mathcal{K}) = \{0\}$ . Pour sur l'inverse, supposons que  $(\lambda - \mathcal{K})z = 0$ , n'a que la solution  $z = 0$ , et notons que on veut montrer que  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$  a une solution unique pour tout  $y \in X$ .

Considérons le système linéaire associé (2.24). On peut montrer qu'il a une solution unique pour tous les côtés droits  $(y_1, \dots, y_n)$  en montrant que le système linéaire homogène n'a que la solution zéro. Cette dernière démonstration se fait

l'équivalence du système linéaire homogène à l'équation homogène  $(\lambda - \mathcal{K})z = 0$ , ce qui implique  $z = 0$ . Mais puisque (2.24) a une solution unique, il doit en être de même pour  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$ , et elle est donnée par (2.22).

Nous devons également montrer que  $(A - K) - \lambda$  est borné. Ceci peut être fait directement par un examen plus approfondi des conséquences du fait que  $\mathcal{K}$  est un opérateur borné et de rang fini, mais il est plus simple de citer le Théorème des cartographies ouvertes (cf. Théorème A.2 dans l'annexe).

**2).** Supposons maintenant que , avec  $\mathcal{K}$  de rang fini et borné.

Réécrire  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$  comme suit

$$[(\lambda - (\mathcal{K} - \mathcal{K}_n))]x = y + \mathcal{K}_n x, \quad n \geq 1 \tag{2.25}$$

Choisir un indice  $m > 0$  pour lequel

$$\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_m\| < |\lambda| \tag{2.26}$$

et la fixer. Par le théorème des séries géométriques (cf. théorème A.1 en annexe),

$$Q_m \equiv [\lambda - (\mathcal{K} - \mathcal{K}_m)]^{-1}$$

existe et est bornée, avec

$$\|Q_m\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|\mathcal{K} - \mathcal{K}_m\|}$$

L'équation (2.25) peut maintenant être écrite sous la forme équivalente suivante

$$x - Q_m \mathcal{K}_m x = Q_m y \quad (2.27)$$

L'opérateur  $Q_m \mathcal{K}_m$  est borné et de rang fini. La limitation découle de celle de  $Q_m$  et  $\mathcal{K}_m$ , pour montrer qu'il est de rang fini, prenons  $Rang(\mathcal{K}) = Span \{u_1, \dots, u_n\}$ . Alors

$$Rang(Q_m \mathcal{K}_m) = Span \{Q_m u_1, \dots, Q_m u_n\}$$

d'un espace à dimension finie.

L'équation (2.27) est une équation à laquelle on peut appliquer la partie (a) de cette preuve.

Supposons que  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$  implique  $z = 0$ . Par l'équivalence ci-dessus, cela donne

$$(I - Q_m \mathcal{K}_m)z = 0 \implies z = 0.$$

Mais d'après la partie (a), cela signifie que  $(I - Q_m \mathcal{K}_m)x = \omega$  a une solution unique  $x$  pour tout  $\omega \in X$ , et en particulier, pour  $\omega = Q_m y$  comme dans (2.27). Par l'équivalence de (2.27) et  $(\lambda - \mathcal{K})x = y$ , on a que ce dernier est univoquement résoluble pour tout  $y \in X$ . Le caractère borné de  $(\lambda - \mathcal{K})^{-1}$  découle de la partie (a) et du caractère borné de  $Q_m$ , ou bien on peut citer le théorème des cartographies ouvertes, comme plus haut dans la partie (a).

# Chapitre 3

## La méthode de soustraction de singularité

La méthode de soustraction de singularité est une technique de résolution d'équations de Fredholm singulières de deuxièmes types. Elle repose sur l'idée que la singularité de l'équation peut être traitée séparément en la soustrayant de l'équation d'origine.

Une singularité est une situation où le noyau est mal défini ou devient infini en certains points de l'intervalle d'intégration, dans ce cas l'équation de Fredholm devient plus difficile à résoudre car elle peut produire des solutions non régulières ou divergentes.

Pour résoudre ce problème, on peut utiliser la méthode de la soustraction de singularité. Cette méthode consiste à soustraire un terme singulier du noyau pour obtenir un noyau régulier alors l'équation de Fredholm est plus facile à résoudre.



### 3.1 Représentation de la méthode de soustraction de singularité

On décrit la méthode de soustraction de singularité dans le contexte d'une équation intégrale de Fredholm sur  $C[0, 1]$

$$y(t) = x(t) - \int_0^1 K(t, s)x(s)ds, \quad (3.1)$$

où  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est singulier le long  $t = s$ , par exemple  $K(t, s)$  peut avoir un singulier facteur  $|t - s|^{-\frac{1}{2}}$  ou  $|t - s|$ . Par la suite, des hypothèses précises seront formulées sur  $K(t, s)$ . Il impliqueront que l'opérateur intégral dans  $C[0, 1]$  à  $C[0, 1]$  et est compact.

Réorganiser (3.1) dans le formulaire

$$y(t) = \left[1 - \int_0^1 K(t, s)ds\right] x(t) + \int_0^1 K(t, s) [x(t) - x(s)] ds. \quad (3.2)$$

La continuité  $x$  atténue l'effet de la singularité dans la dernière intégrale. Il devrait donc être plus facile à intégrer numériquement que l'intégrale en (3.1).

On utilise une procédure numérique sur (3.2) qui a été développée d'abord pour l'intégration numérique de fonctions faiblement singulières dans [3] puis appliquée à (3.1) dans [2].

C'est un schéma de double approximation consisté de singularité tronquée et intégration numérique. Tout d'abord,  $K(t, s)$  est approximé par des noyaux bornés  $K_n(t, s)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , qui coïncident avec  $K(t, s)$  en dehors de certains voisinages de  $t = s$ . Ensuite, une règle de quadrature appropriée est appliquée.

Avec cette procédure, (3.1) (3.2) sont approximés respectivement par :

$$y(t) = x_n(t) - \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) x_n(s_{nj}), \quad (3.3)$$

et

$$y(t) = \left[ 1 - \int_0^1 K(t, s) ds \right] \hat{x}_n(t) + \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) [\hat{x}_n(t) - \hat{x}_n(s_{nj})]. \quad (3.4)$$

Une formulation équivalent de (3.4)

$$y(t) = \left[ 1 + \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) - \int_0^1 K(t, s) ds \right] \hat{x}_n(t) - \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) \hat{x}_n(s_{nj}) \quad (3.5)$$

Les hypothèses impliquent que le coefficient de  $x_n(t)$  dans (3.5) converge uniformément vers l'unité comme  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent, l'équation pour  $\hat{x}_n$  peut être considérée comme une perturbation de l'équation pour  $x_n$  lorsque  $n$  est grand. Ce fait sera exploité afin d'étendre à  $x_n$  les résultats obtenus pour  $x_n$  dans [2].

Les équation pour  $x_n$  et  $\hat{x}_n$  se réduisent à  $n \times n$  systèmes linéaire pour  $x_n(s_{ni})$  et  $\hat{x}_n(s_{ni})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Si ces systèmes sont résolus, alors les solutions  $x_n$  et  $\hat{x}_n$  de (3.3) (3.5) sont donnée par

$$x_n(t) = y(t) + \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) x_n(s_{nj}), \quad (3.6)$$

et

$$\hat{x}_n(t) = \frac{y(t) + \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) \hat{x}_n(s_{nj})}{1 + \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) - \int_0^1 K(t, s) ds}, \quad (3.7)$$

ce dernier pour  $n$  suffisamment grand.

Pour pouvoir calculer les valeurs  $K_n(t, s_{nj})$  quand  $t$  est proche de  $s_{nj}$  on remplace  $K$  par  $K_n$ . La présence de  $K_n(t, s_{nj})$  au numérateur et au dénominateur de (3.7) a une

influence stabilisatrice qui n'existe pas dans (3.6) .

Des conditions seront données concernât la solvabilité unique des équations pour  $x$ ,  $\hat{x}_n$ , et qui impliquent une convergence uniforme  $x_n \rightarrow x$  et  $\hat{x}_n \rightarrow x$  plus des limites d'erreur.

En général, la convergence  $\hat{x}_n \rightarrow x$  est plus rapide que  $x_n \rightarrow x$ . Ceci sera démontré à la fois théoriquement et numériquement.

On a supposé implicitement que l'intégrale dans (3.4) peut être évaluée. Cependant, si cette intégrale est approchée par d'une formule de quadrature d'un ordre élevé par rapport à  $n$ , peut-être d'ordre  $2n$ , puis une partie de l'avantage de la technique de soustraction des singularités.

## 3.2 La formule de quadrature

Supposons que la règle de quadrature satisfait

$$\sum_{j=1}^n w_{nj}(x_{s_{nj}}) \rightarrow \int_0^1 x(s)ds, x \in C[0, 1], \quad (3.8)$$

avec

$$0 \leq s_{nj} \leq \dots \leq s_{nn} \leq 1, w_{nj} \geq 0. \quad (3.9)$$

La dernière condition est une commodité plutôt qu'une nécessité, supposons également que l'une ou l'autre des conditions

$$H_1 : \sum_{s_{nj} \in E} w_{nj} \leq \frac{c}{n}, \quad E = [a, b) \text{ et } (a, b], \quad b - a \leq \frac{1}{n},$$

$$H_2 : w_{nj}, w_{n,j-1} \leq c(x_{nj} - x_{n,j-1}), \quad j = 2, \dots, n,$$

avec une certaine constante  $c$ . Les règle de Romberg et les règles composée habituelles satisfont à la fois  $H_1$  et  $H_2$ . Les règles de Gauss et Fejer satisfont  $H_2$ .

### 3.3 Noyaux singuliers et approximations limitées

Tout d'abord, considérons un noyau  $K(t, s)$  avec un facteur singulier monotone et symétrique

$$K(t, s) = g(|t - s|)h(t, s), \quad (3.10)$$

$$h \in C([0, 1] \times [0, 1]), \quad (3.11)$$

$$g \in L^1(0, 1) \cap C(0, 1], \quad (3.12)$$

et

$$g \geq 0, g \text{ non croissant sur } (0, \delta] \quad (3.13)$$

pour un certain  $\delta \in (0, 1]$ . Les exemples incluent  $g(r) = r^{\alpha-1}$  avec  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $g(r) = \ln \frac{c}{r}$  avec  $c \geq 1$ .

Pour  $n = 1, 2, \dots$ , on introduise des approximation  $g_n$  pour  $g$  et les nombres  $\delta_n$  tels que cela

$$0 < \delta_n \leq \delta, \quad \delta_n \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

$$g_n \in C[0, 1], \quad g_n = g \text{ sur } [\delta_n, 1], \quad (3.15)$$

$$0 \leq g_n \leq g, \quad g \text{ non croissant sur } [0, \delta_n], \quad (3.16)$$

$$g_n(0) \geq g_m(0) \quad \text{pour } n \geq m, \quad (3.17)$$

et, selon que  $H_1$  ou  $H_2$  tient

$$H_1 : \frac{1}{n}g_n(0) \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

Lorsque  $g_n$  est constant ou linéaire ou est un polynôme compétent monotones sur  $[0, \delta_n]$ , (3.18) et (??) sont satisfaits si (voir [3])

$$H_1 : \delta_n \geq \rho/n, \quad (3.19)$$

$$H_2 : \delta_n \geq \rho \max w_{nj}, \quad (3.20)$$

pour certain  $\rho \geq 0$ . Dans tous les cas,  $\delta_n$  ne doit pas converger trop rapidement vers zéro.

Les approximations continues  $K_n$  pour le noyau  $K$  dans (3.10) sont définies par

$$K_n(t, s) = g_n(|t - s|)h(t, s). \quad (3.21)$$

Notons que  $K_n(t, s) = K(t, s)$  pour  $|t - s| \geq \delta_n$ .

Des noyaux plus généraux et des approximations de noyaux sont donnés ci-dessous.

Soit

$$K(t, s) = f(t - s)h(t, s), \quad (3.22)$$

$$f(r) \text{ continue pour } r \neq 0, \quad (3.23)$$

et

$$|f(r)| \leq g(|r|) \quad \text{pour } 0 \leq |r| \leq \delta, \quad (3.24)$$

où  $g$  et  $h$  satisfont aux points (3.11) et (3.13).

Approximatif  $f$  par  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , tel que

$$f_n \in C[-1, 1], \quad f_n(r) = f(r) \quad \text{pour } |r| \geq \delta_n, \quad (3.25)$$

et

$$|f_n(r)| \leq g_n(|r|) \quad \text{pour } 0 \leq |r| \leq \delta_n, \quad (3.26)$$

où  $g_n$  et  $\delta_n$  satisfaire (3.14) et (??) .

Les approximations continues  $K_n$  pour  $K$  dans (3.22) sont définies par

$$K_n(t, s) = f_n(t - s)h(t, s), \quad (3.27)$$

comme précédent,  $K_n(t, s) = K(t, s)$  pour  $|t - s| \geq \delta_n$ . Supposons désormais que  $K$  et  $K_n$  sont donnés par (3.22) et (3.27) ou par les cas particuliers (3.10) et (3.21).

Les approximations à noyau discontinu, par exemple avec

$$K_n(t, s) = 0 \quad |t - s| < \delta_n, \quad (3.28)$$

$$K_n(t, s) = K(t, s) \quad |t - s| \geq \delta_n,$$

pourrait être admis, il suffit de remplacer  $C[0, 1]$  par l'espace  $\mathbb{R}[0, 1]$  des fonctions intégrables de Riemann bornées dans l'analyse qui suit (voir [1], et [3]).

### 3.4 Théorie de l'approximation des opérateurs

Soit  $X = C[0, 1]$  avec  $\|x\| = \max |x(s)|$  et soit  $[X]$  l'espace des opérateurs linéaires bornés sur  $X$ . Les équations (3.1), (3.3) et (3.4) ont des formes d'opérateurs sur  $X$  :

$$(I - \mathcal{K})x = y, \quad (I - \mathcal{K}_n)x_n = y \quad \text{et} \quad (I - \hat{\mathcal{K}}_n)\hat{x}_n = y \quad (3.29)$$

Les opérateurs  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_n$  et  $\hat{\mathcal{K}}_n$  sont définis sur  $X$  par

$$\mathcal{K}x(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{K}_n x(t) = \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj})x(s_{nj}), \quad (3.31)$$

$$\hat{\mathcal{K}}_n x(t) = \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj})x(s_{nj}) [x(s_{nj}) - x(t)] + \int_0^1 K(t, s)x(s)ds \quad (3.32)$$

La théorie de l'approximation des opérateurs collectivement compacts présentée dans [1] était appliqué à  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}_n$  et aux opérateurs plus généraux dans [2]. Il a été établi que :

$$\mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} \text{ compact}, \quad \{\mathcal{K}_n\} \text{ collectivement compact.} \quad (3.33)$$

Ainsi,  $\mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}$  ponctuellement sur  $X$ , et les ensembles  $\{\mathcal{K}x : \|x\| \leq 1\}$  et  $\{\mathcal{K}_n x : \|x\| \leq 1, n \geq 1\}$  est relativement compact (borné et équicontinues). Depuis  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}_n$  sont compacts,  $(I - \mathcal{K})^{-1} \in [X]$  et  $(I - \mathcal{K}_n)^{-1} \in [X]$  chaque fois que les inverse existent .

Les conditions (3.33) impliquent :

$$\|(\mathcal{K}_n - \mathcal{K})\mathcal{K}\| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|(\mathcal{K}_n - \mathcal{K})\mathcal{K}_n\| \rightarrow 0. \quad (3.34)$$

Selon la théorie de [I], si  $(I - \mathcal{K}_n)^{-1}$  existe et  $\|(I - \mathcal{K}_n)^{-1}\| \|(\mathcal{K}_n - \mathcal{K})\mathcal{K}\| < 1$  pour un certain  $n$ , alors  $(I - \mathcal{K})^{-1}$  existe, si  $(I - \mathcal{K})^{-1}$  existe et  $n$  grand que  $\|(I - \mathcal{K})^{-1}\| \|(\mathcal{K}_n - \mathcal{K})\mathcal{K}_n\| < 1$ , alors il existe uniformément borné  $(I - \mathcal{K}_n)^{-1}$  et les solutions uniques de  $(I - \mathcal{K})x = y$  et  $(I - \mathcal{K}_n)x_n = y$  satisfaire

$$\|x_n - x\| \leq \|(I - \mathcal{K}_n)^{-1}\| \|\mathcal{K}_n x - \mathcal{K}x\| \rightarrow 0 \quad (3.35)$$

D'autres limites d'erreur sont données dans [II].

Considérons maintenant  $\mathcal{K}_n$ , de (3.30)-(3.32)

$$\hat{\mathcal{K}}_n = \mathcal{K}_n - (\mathcal{K}_n u - \mathcal{K}u)I, \quad u \in C[0, 1], u \equiv 1. \quad (3.36)$$

Ces opérateurs ne sont pas compacts sauf si  $\mathcal{K}_n u = \mathcal{K}u$ . Par (3.36) :

$$\|\hat{\mathcal{K}}_n - \mathcal{K}_n\| = \|\mathcal{K}_n u - \mathcal{K}u\| \rightarrow 0. \quad (3.37)$$

Il résulte de (3.33) et (3.37) que  $\hat{\mathcal{K}}_n \rightarrow \mathcal{K}_n$  et  $\{\hat{\mathcal{K}}_n\}$  sont asymptotiquement compacts, c'est-à-dire que pour tout suite bornée  $\{x_n\}$ ,  $\{\hat{\mathcal{K}}_n x_n\}$  a une sou-suite convergente.

Une étude de  $(I - \mathcal{K})x = y$  et  $(I - \hat{\mathcal{K}}_n)\hat{x}_n = y$  peut être basée sur ces propriétés.

Cependant, on suivre une autre voie qui donne plus de résultats.

Soit  $n$  si grand que  $\|\hat{\mathcal{K}}_n - \mathcal{K}_n\| < 1$ , alors

$$(I - \hat{\mathcal{K}}_n - \mathcal{K}_n)^{-1} \in [X],$$

et

$$I - \hat{\mathcal{K}}_n = \left[ I - \mathcal{K}_n(I - \hat{\mathcal{K}}_n - \mathcal{K}_n)^{-1} \right] (I - \hat{\mathcal{K}}_n - \mathcal{K}_n).$$

Puisque s'ensuit que  $(I - \hat{\mathcal{K}}_n)^{-1} \in [X]$  si ce dernier inverse existe. De  $\mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}$ ,



(3.34) et (3.37)

$$\hat{\mathcal{K}}_n \rightarrow \mathcal{K}, \quad \left\| (\hat{\mathcal{K}}_n - \mathcal{K})\mathcal{K} \right\| \rightarrow 0 \text{ et } \left\| (\hat{\mathcal{K}}_n - \mathcal{K})\hat{\mathcal{K}}_n \right\| \rightarrow 0. \quad (3.38)$$

Les conclusions pour  $\mathcal{K}_n$  et  $\mathcal{K}$  données ci-dessus s'étendent à  $\hat{\mathcal{K}}_n$  et  $\mathcal{K}$  au moyen de (3.38) et du théorème (1.10) de [1].

Si  $(I - \mathcal{K})^{-1}$  existe et que  $n$  est si grand que  $\|(I - \mathcal{K})^{-1}\| \left\| (\hat{\mathcal{K}}_n - \mathcal{K})\hat{\mathcal{K}}_n \right\| < 1$ , alors il existe uniformément borné  $(I - \hat{\mathcal{K}}_n)^{-1}$  et les solutions de  $(I - \mathcal{K})x = y$  et  $(I - \hat{\mathcal{K}}_n)\hat{x}_n = y$  satisfaire

$$\|\hat{x}_n - x\| \leq \left\| (I - \hat{\mathcal{K}}_n)^{-1} \right\| \left\| \hat{\mathcal{K}}_n x - \mathcal{K}x \right\| \rightarrow 0. \quad (3.39)$$

D'autres limites d'erreur sont disponibles à partir de [1].

Les résultats de convergence et les limites d'erreur pour les cas particuliers de  $\hat{x}_n$  ont été obtenus par une méthode différent, basée sur la théorie collectivement compact par [9].

### 3.5 Comparaisons des taux de convergence

Supposons que  $(I - \mathcal{K})^{-1}$  existe et que  $n$  est si grand que  $(I - \mathcal{K}_n)^{-1}$  et  $(I - \hat{\mathcal{K}}_n)^{-1}$  existent.

Fixons  $y \in X$ , soit  $x$ ,  $x_n$  et  $\hat{x}_n$  être les solutions uniques de  $(I - \mathcal{K})x = y$ ,  $(I - \mathcal{K}_n)x_n = y$  et  $(I - \hat{\mathcal{K}}_n)\hat{x}_n = y$ . en vue de (3.35) et (3.39), les taux de convergence de  $x_n \rightarrow x$  et  $\hat{x}_n \rightarrow x$  dépendent principalement des taux de convergence de  $\mathcal{K}_n x \rightarrow \mathcal{K}x$  et  $\hat{\mathcal{K}}_n x \rightarrow \mathcal{K}x$ , où  $x = (I - \mathcal{K})^{-1}y$ .

de (3.30) et (3.31)

$$\mathcal{K}_n x(t) - \mathcal{K}x(t) = \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) x(s_{nj}) - \int_0^1 K(t, s) x(s) ds. \quad (3.40)$$

Il s'agit d'une erreur d'intégration numérique pour  $K(s, t)x(s)$  en fonction de  $s$  pour chaque  $t$ . Puisque  $K$  est singulier, la convergence de  $\mathcal{K}_n x \rightarrow \mathcal{K}x$  et  $x_n \rightarrow x$  devrait être lent.

De (3.30) et (3.32),

$$\hat{\mathcal{K}}_n x(t) - \mathcal{K}x(t) = \sum_{j=1}^n w_{nj} K_n(t, s_{nj}) [x(s_{nj}) - x(t)] - \int_0^1 K(t, s) [x(s) - x(t)] \quad (3.41)$$

Il s'agit d'une erreur d'intégration numérique pour  $K(t, s)[x(s) - x(t)]$  en fonction de  $s$  pour chaque  $t$ . puisque la continuité de  $x$  devrait réduire l'effet de la singularité de  $K$ , la convergence de  $\hat{\mathcal{K}}_n x \rightarrow \mathcal{K}x$  et  $\hat{x}_n \rightarrow x$  devrait être plus rapide que  $\mathcal{K}_n x \rightarrow \mathcal{K}x$  et  $x_n \rightarrow x$ . Des énoncés plus précis dépendront de la nature de la singularité, de la douceur de  $K(t, s)$  pour  $t \neq s$ , et la douceur de la solution  $x$  de  $(I - \mathcal{K})x = y$ .

La caractère lisse des solutions d'équations intégrales faiblement singulières a été étudiée par un certain nombre d'autres.

Soit  $C_\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ , les classes de fonctions continues de Holder sur  $[0, 1]$

$$x \in C_\alpha \quad si |x(t) - x(s)| \leq A|t - s|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

et

$$x \in C_1 \quad si |x(t) - x(s)| \leq A|t - s| \ln \frac{B}{|t - s|},$$

avec des constantes  $A$  et  $B$  qui dépendent de  $x$ .

On définit certaines classes  $\mathcal{K}_\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ , des noyaux en (3.10)

$$K \in \mathcal{K}_\alpha \quad si K(t, s) = |t - s|^{\alpha-1} h(t, s), \quad 0 < \alpha < 1,$$

et

$$K \in \mathcal{K}_1 \quad \text{si } K(t, s) = \ln \frac{c}{|t-s|} h(t, s), \quad c \geq 1,$$

où  $h(t, s)$  satisfait (3.11) et la dérivée  $h_t \in C[0, 1]$  en fonction de  $t$  pour chaque  $s$ .

Soit  $x = (I - \mathcal{K})_y^{-1}$ . Ensuite, pour  $0 < \alpha \leq 1$ ,

$$K \in \mathcal{K}_\alpha, \quad y \in C_\alpha \implies x \in C_\alpha \tag{3.42}$$

et

$$K \in \mathcal{K}_\alpha, \quad y \in C_\alpha \cap C(0, 1) \implies x \in C_\alpha \cap C(0, 1) \tag{3.43}$$

pour des preuves et des résultats supplémentaires voir [8] et [12]. comme le suggère (3.43),  $x$  est typiquement moins smooth aux extrémités de  $[0, 1]$ . Une formule de quadrature avec les nœuds plus dense près de 0 et 1 pourrait aider à compenser ce manque de smoothness (voir [12] et [12]). Dans la situation de (3.43), l'intégrande (3.41) satisfait à

$$|K(t, s)[x(s) - x(t)]| \leq A|t-s|^{2\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3.44}$$

et

$$|K(t, s)[x(s) - x(t)]| \leq A|t-s| \ln \left( \frac{B}{|t-s|} \right)^2, \quad \alpha = 1, \tag{3.45}$$

avec quelque  $A$  et  $B$ , si  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$  alors  $K(t, s)[x(s) - x(t)]$  n'est pas singulière. Si  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  alors la singularité en (3.41) est plus faible que la singularité en (3.40). Par conséquent, comme nous l'avons déjà dit, la convergence de  $\hat{\mathcal{K}}_n x \rightarrow \mathcal{K}x$  et  $\hat{x}_n \rightarrow x$  devrait être plus rapide que  $\mathcal{K}_n x \rightarrow \mathcal{K}x$  et  $x_n \rightarrow x$ .

## 3.6 Comparaisons avec d'autres méthodes d'approximation

Avec  $K(t, s)$  donné par (3.22),  $(I - \mathcal{K})x = y$  la forme suivante

$$y(t) = x(t) - \int_0^1 f(t-s)h(t,s)x(s)ds, \quad (3.46)$$

dans la technique de factorisation des singularités d'Atkinson [5] et [6],  $(I - \mathcal{K})x = y$  est approximé par une équation  $(I - \mathcal{K}^n)x^n = y$  de la forme

$$y(t) = x^n(t) - \int_0^1 f(t,s)P_n[h(t,s)x(s)]ds, \quad (3.47)$$

où  $P_n \in [X]$  est une projection qui agit par rapport à  $s$ , par exemple une interpolation ou une approximation par spline. Supposons que  $\dim P_n X = n$  et  $P_n \rightarrow I$  alors  $\mathcal{K}^n$  et  $\mathcal{K}$  satisfont (3.33), de sorte que  $x^n \rightarrow x$  lorsque  $(I - \mathcal{K})^{-1}$  existe.

L'équation (3.47) se réduit à un problème de matrice  $n \times n$ . Les entrées sont intégrales qui peut être évalué explicitement si  $f, h$  et les fonctions dans  $P_n X$  sont suffisamment simples. Le facteur singulier est alors traité exactement, de sorte que  $x^n \rightarrow x$  devrait converger plus rapidement que  $x_n \rightarrow x$ . La comparaison de  $x^n \rightarrow x$  et  $\hat{x}_n \rightarrow x$  est loin d'être claire lorsqu'en les intégrales impliquant le facteur singulier  $f(t, s)$  doit être approximé, la dérivation de chaque  $x$  nécessite beaucoup plus de temps machine et la vitesse de convergence est réduite .

## 3.7 Exemples numériques

Ces résultats ont été ajustés à partir de [9].

**Exemple 3.7.1** :  $y(t) = x(t) + \int_0^1 \ln |t-s| x(s)ds, x(t) \equiv t$ .

Remplacer  $\ln|t - s|$  par  $\ln(1/n)$  pour  $|t - s| \leq 1/n$  et en utilisant la règle de Simpson, on peut définir les approximations  $x_n$  et  $\hat{x}_n$  pour  $x$  tels que décrits dans la section 1. Le premier tableau compare  $x_n$ ,  $\hat{x}_n$  et les approximations correspondantes de la factorisation de singularité  $x^n$  pour  $t = \frac{1}{2}$ , en utilisant les valeurs de  $x = \frac{1}{2}$ .

$n$	$x_n$	$\hat{x}_n$	$x^n$
9	1.24844	0.50356	0.50213
11	1.24886	0.50292	0.50112
15	1.24922	0.50106	0.49917
39	1.24953	0.49641	0.50031
65	1.24955	0.48155	0.50005

TAB. 3.1 – Résultats pour l'exemple 01

**Exemple 3.7.2** :  $y(t) = x(t) + \int_0^1 |t - s|^{-\frac{1}{2}} x(s) ds, x(t) \equiv t$ .

Définissons  $x_n$ ,  $\hat{x}_n$  et  $x^n$  de la même manière que ci-dessus. À  $t = \frac{1}{2}$ , où  $x = \frac{1}{2}$ , on a les calculs suivants.

$n$	$x_n$	$\hat{x}_n$	$x^n$
9	0.98471	0.52311	0.53112
11	0.94379	0.51132	0.51306
15	1.1247	0.49371	0.50972
39	1.1149	0.48116	0.50103
65	1.1236	0.49612	0.50033

TAB. 3.2 – Résultats pour l'exemple 02

Dans les deux cas, il n'y a pas l'air d'y avoir de convergence de  $x_n$ , bien que  $\hat{x}_n$  et  $x^n$  soient assez précis même pour les petites valeurs de  $n$ . Comme on pouvait s'y attendre,  $x^n$  semble plus précis que  $\hat{x}_n$ , car la simplicité des noyaux permet de traiter exactement les singularités lors du calcul de  $x^n$ .

# Bibliographie

- [1] Anselone, P. M., et Davis, J. (1971). Collectively compact operator approximation theory and applications to integral equations. Prentice Hall.
- [2] Anselone, P. M., et Krabs, W. (1979). Approximate solution of weakly singular integral equations. *The Journal of Integral Equations*, 61-75.
- [3] Anselone, P. M., et Opfer, G. (1979). Numerical integration of weakly singular functions. *Numerische Integration : Tagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vom 1. bis 7. Oktober 1978*, 11-43.
- [4] Anselone, P. M. (1981). Singularity subtraction in the numerical solution of integral equations. *The ANZIAM Journal*, 22(4), 408-418.
- [5] Atkinson, K. (1972). The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind with singular kernels. *Numerische Mathematik*, 19(3), 248-259.
- [6] Atkinson, K. E. (1976). A survey of numerical methods for the solution of Fredholm integral equations of the second kind (Vol. 12). Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [7] Atkinson, K. E. (1997). The numerical solution of integral equations of the second kind (Vol. 4). Cambridge university press.
- [8] Bechlars, J. (1978). Glattheit und numerische Berechnung der Lösung linearer Intergralgleichungen ; 2, Art mit schwachsingulären Kernen (No. HMI-B-283). Hahn-Meitner-Inst. Kernforsch.

- [9] Borer, D. (1977). Approximate solutions of Fredholm integral equations of the second kind with singular kernels. Thesis, Oregon state university, Corvallis.
- [10] Guesba, M. (2012). Sur quelques équations intégrales non linéaires (Doctoral dissertation, UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA).
- [11] Graham, I. G. (1982). Singularity expansions for the solutions of second kind Fredholm integral equations with weakly singular convolution kernels. The Journal of Integral Equations, 1-30.
- [12] Schneider, C. (1977). Beiträge zur numerischen Behandlung schwachsingulärer Fredholmscher Integralgleichungen zweiter Art (Doctoral dissertation, Johannes Gutenberg Universität in Mainz).
- [13] Wazwaz, A. M. (2011). Linear and nonlinear integral equations (Vol. 639, pp. 35-36). Berlin : Springer.

## Résumé

Dans ce travail, nous étudions la résolution des équations intégrales de Fredholm du second type à noyau faiblement singulière. Nous abordons d'abord les types d'équations intégrales, et la théorie des opérateurs compacts, puis l'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales de Fredholm. Enfin en présente une des nombreuses méthodes numériques qui est la méthode de soustraction de singularité avec quelques exemples numériques.

Mots clés : Les équations intégrales de Fredholm, opérateur compact, soustraction de singularité

## Abstract

In this work, we study the solution of Fredholm integral equations of the second type with weakly singular kernel. We first discuss the various types of integral equations, and the theory of compact operators, then the existence and uniqueness of solutions of Fredholm integral equations. Finally, we present one of the many numerical methods, the singularity subtraction method, with a few numerical examples.

Key words : Fredholm integral equations, compact operator, singularity subtraction

## ملخص

ففي هذا العمل ندرس حل المعادلات التكاملية لفريدهولم من النوع الثاني مع نواة غير مستمرة. نناقش أولاً الأنواع المختلفة من المعادلات التكاملية، ونقدم بعض خصائص المؤثر المتراس، ثم وجود و وحدانية حلول معادلات فريدهولم المتكاملة. أخيراً، نقدم إحدى الطرق العددية العديدة، طريقة طرح التفرد، مع بعض الأمثلة العددية

الكلمات الرئيسية: معادلات فريدهولم، المؤثر المتراس، طرح التفرد