

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Statistique

Par

SID MABROUK Hanine

Titre :

Sur la famille de la copule Farlie-Gumbel-Morgenstern

Membres du Comité d'Examen :

Dr. BENAMEUR Sana	UMKB	Président
Dr. ABDELLI Jihane	UMKB	Encadreur
Dr. BENELMIR Imen	UMKB	Examinatrice

Juin 2023

Dédicace

Je dédie ce travail

À celle qui m'a donné la vie, l'amour et le courage à toi ma
chère mère "**ATTAF Henda**", je te dédie mon amour,
ma joie et tout mon respect.

À mon cher père "**Moussa**" pour ses sacrifices de toutes
les manières et moyens pour mes études.

À mes sœurs **Hamida, Hibat Elrahmane, et Amira.**

À mon amie **REHAB Maryam.**

À toute ma famille.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier "**ALLAH**" le tout puissant pour toute la volonté et le courage qu'il m'a donné pour l'achèvement de ce travail. La réalisation de cette thèse a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à **Dr. ABEDELLI Jihane**.

Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je remercie le **Pr. BRAHIMI Brahim** pour ses conseils et pour toute l'aide qu'il m'a apporté.

Je voudrais remercier le **Pr. NECIR Abdelhakim**, le **Pr. BENATIA Fatah** et le **Pr. YAHYA Djabrane**

pour les aider et répondre patiemment et gentiment à mes nombreuses questions.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury : **Dr. BENAMEUR Sana** et **Dr. BENELMIR Imen**,

qui ont bien daigné siéger la soutenance de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à mon cher oncle

Pr. ATTAF Abde Allah et à son épouse **Pr. SAIDI Hanane** pour tout le soutien, les conseils et l'assistance qu'il m'a apportés.

Enfin, je remercie sincèrement ma mère et mon père de m'avoir bien élevé, et je leur dis que sans vous, sans toi, je n'aurais pas atteint ce niveau, ainsi qu'à mes sœurs et à toute ma famille. Merci.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	iv
Liste des tables	v
1 Théorie des Copules	3
1.1 Définitions et propriétés de base	3
1.2 Théorème de Sklar	4
1.3 Bornes de Fréchet -Hoeffding	5
1.4 Copule et variable aléatoire	6
1.5 Copule de survie	7
1.6 Familles de copules	8
1.6.1 Copules elliptiques	8
1.6.2 Copules Archimédiennes	10
1.6.3 Copule de valeur extrême	14
1.7 Copules à propriétés spécifiées	15
1.7.1 Copules harmoniques	16

1.7.2	Copules homogènes	16
1.7.3	Copules concaves et convexes	16
1.8	Mesure d'association	17
1.8.1	Notion de la concordance	17
1.8.2	Coefficient de corrélation linéaire	18
1.8.3	Tau de Kendall	18
1.8.4	Rho de Spearman	18
1.8.5	Relation entre le tau de Kendall et le rho de Spearman	19
2	Famille Farlie-Gumbel-Morgenstern	20
2.1	Copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern	22
2.1.1	Modèle de copule FGM à un paramètre	22
2.1.2	Modèle de copule FGM à deux paramètres (α_1, α_2)	23
2.1.3	Modèle de copule FGM à trois paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$	24
2.1.4	Modèle de copule FGM générale $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$	24
2.1.5	Propriétés de la copule FGM	25
2.2	Famille FGM généralisée (GFGM)	28
2.2.1	Propriétés de la famille GFGM	29
2.3	Extensions de la copule FGM	29
2.4	Nouvelle extension de la copule FGM	31
2.5	Copule FGM dans le cas d -dimensionnelles	32
3	Application sur des données réelles	34
3.1	Estimation de paramètre de la copule FGM à un paramètre	35
3.2	Estimation des paramètre de la copule FGM à deux paramètres	37

Conclusion	39
Bibliographie	39
Annexe A : Abréviations et Notations	44

Table des figures

1.1	Densité d'une copule produit	7
1.2	Densité d'une copule Gaussian bivariée avec $\rho = 0.7$	9
1.3	Densité d'une copule de Student bivariée avec $\rho = 0.5$ et $v = 4$	10
1.4	Densité d'une copule de Frank bivariée avec $\theta = 7$	12
1.5	Densité d'une copule de Clayton bivariée avec $\theta = 7$	12
1.6	Densité d'une copule de Gumbel bivariée avec $\theta = 2$	13
1.7	Densité de la copule de AMH bivariée avec $\theta = 0.2$	14
3.1	Nuages de points de 1000 observations tirées des rendements de quatre indices boursiers européens.	35
3.2	Histogramme de 1000 observations tirées des rendements de quatre indices boursiers européens.	38

Liste des tableaux

1.1	Tau de kendall et rho de sperman de quelque copules	19
3.1	Le tau de Kendall entre les quatre rendements des indices boursiers Européens .	35
3.2	Estimation de paramètre de la copule FGM à un paramètre à l'aide de tau de Kendall	36
3.3	Le rho de Spearman entre les quatre rendements des indices boursiers Européens	36
3.4	Estimation de paramètre de la copule FGM à un paramètre à l'aide de rho de Spearman	36
3.5	L'ajustement du maximum de vraisemblance d'une distribution stable à quatre paramètres à quatre indices boursiers européens renvoie des données.	38

Introduction

La provenance du terme "copule" remonte au latin "copulae", qui signifie le lien ou la connexion entre les parties. En 1959, [Sklar(1959)] a proposé le concept de copule pour résoudre un problème de probabilité énoncé par Fréchet. Les copules étaient rarement employées en statistiques pendant de nombreuses années. Dans les années 70, avec l'évolution de la théorie des processus empiriques, d'autres auteurs ont réintroduit le concept des fonctions copules sous différentes appellations, en mettant en évidence de nouvelles propriétés. Par exemple, [Kimeldorf et Sampson(1975)] ont proposé le terme "représentation uniforme", tandis que [Galambos(1978)] et [Deheuvels(1979)] ont utilisé le terme "fonction de dépendance".

En utilisant la théorie des copules, il est possible de créer des modèles paramétriques pour la loi jointe de d variables réelles dépendantes (X_1, \dots, X_d) . [Fisher(1997)] a constaté que cette méthode est de plus en plus couramment utilisée en assurance, finance, environnement, fiabilité, biologie... , pour permettre une modélisation plus réaliste de la loi jointe de divers "risques". Dans le cadre de cette étude, nous allons nous concentrer sur le cas bivarié ($d = 2$), bien que ces méthodes puissent facilement être étendues à des dimensions supérieures (du moins théoriquement).

Ce travail est composée de trois chapitres organisés comme suit :

Chapitre 1. Théorie des Copules : Dans ce chapitre, nous abordons les fondamentaux des concepts de copules en présentant quelques notions de base. Ainsi que les principales théorèmes liés à cette théorie, en particulier le théorème de Sklar. Les copules sont disponibles en une

grande variété de familles qui peuvent conduire à des structures de dépendance. Nous présentons dans ce chapitre les familles les plus importantes de copules paramétriques, notamment la copule elliptique, la copule Archimédienne et la copule des valeurs extrêmes. Nous présentons également quelques mesures d'association en forme de copule telle que le rho de Spearman et le tau de Kendall.

Chapitre 2. Famille de Farlie-Gumbel-Morgenstern : La copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) est une fonction mathématique utilisée pour modéliser les dépendances entre des variables aléatoires continues. Elle est également connue sous le nom de copule de Frank de deuxième espèce. La copule FGM a la propriété de pouvoir modéliser à la fois des dépendances positives et négatives entre les variables. Elle est souvent utilisée dans les domaines de la finance, de l'économie, de la météorologie et de la climatologie pour modéliser les risques de pertes extrêmes.

Dans ce chapitre, nous aborderons les concepts de base de cette famille et certaines de ses propriétés.

Chapitre 3. Application sur des données réelles : Dans ce chapitre on va estimer les paramètres de la copule FGM en utilisant les mesures de concordance (tau de Kendall et rho de Spearman), à l'aide du logiciel R.

Chapitre 1

Théorie des Copules

La notion de copule a été introduit par [Sklar(1959)]. Ce chapitre consiste à présenter le concept théorique des copules suivi par des exemples de quelque type des copules. Le sujet de la mesure d'association également été abordé dans la fin de ce chapitre.

1.1 Définitions et propriétés de base

Les copules sont construites en utilisant les propriétés des fonctions de répartition bivariées, qui présentent diverses caractéristiques importantes. Ci-dessous, quelques propriétés importantes des fds bivariées sont rappelées. Soit X et Y deux variables aléatoires, la loi du couple est caractérisée par la fds bivariée H définie par :

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),$$

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} H(x, y) = 1.$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow -\infty} H(x, y) = 0.$
3. H est continue.

Définition 1.1.1 (Copule) : On dite qu'une copule bivariées (2-dimensionnelle) notée C , toute

fonction définie sur $[0, 1]^2$ à valeurs dans $[0, 1]$ possède les propriétés suivantes :

1. $C(u, 0) = C(0, v) = 0 \forall u, v \in [0, 1]$.
2. $C(u, 1) = u$ et $C(1, v) = v \forall u, v \in [0, 1]$.
3. C est 2-croissante, i.e pour tout u_1, v_1, u_2, v_2 dans $[0, 1]$ telque $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$ on a :

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Remarque 1.1.1 En générale C est une distribution uniforme multidimensionnelle.

Proposition 1.1.1 (Dérivées partielles) : Soit C une copule, $\forall u, v \in [0, 1]$:

1-Les dérivées partielles de C existe p.s et vérifient :

$$0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \leq 1.$$

2-Les fonctions : $u \longrightarrow \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ et $u \longrightarrow \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$ sont bien définie et non décroissante p.p sur son domaine.

1.2 Théorème de Sklar

La copule est un outil statistique présenté par [Sklar(1959)]. Le théorème de sklar est la base de la théorie des copules et c'est le fondement de la plupart. Le théorème de Sklar peut être utilisé pour construire des fonctions copules à partir des distributions bidimensionnelles.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Sklar) Pour toute fonction de répartition bidimensionnelle H avec des fonctions de répartition marginales F et G , il existe une 2-copule C telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), \tag{1.1}$$

de plus C est unique si les fonctions F et G sont continue. Dans le cas inverse, si C est une 2-copules et F et G sont des fonctions de répartition, alors H définie par l'équation (1.1) est une fonction de répartition bidimensionnelle des marginales F et G .

Corollaire 1.2.1 Soit F et G sont les marges de la fonction de répartition jointe H avec F^{-1} et G^{-1} ses inverses généralisé respectivement, la copule associée à H est définie comme suite :

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)), \quad u, v \in I^2,$$

où $I = [0, 1]$, avec les inverse généralisée de marginales est :

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \quad t \in [0, 1].$$

Définition 1.2.1 (Densité d'une copule) : La densité de la copule C notée c est définie comme suite :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = \frac{h(F^{-1}(u), G^{-1}(v))}{f(F^{-1}(u))g(G^{-1}(v))},$$

où h , f , et g sont les densité de H , F , et G respectivement, où $c : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$.

1.3 Bornes de Fréchet -Hoeffding

Deux copules usuels très populaire car elle jouent un rôle important dans l'étude de dépendance, elle sont les suivantes :

-Copule min : Elle est donnée par :

$$M(u, v) = \min(u, v), \quad \forall u, v \in I. \tag{1.2}$$

-Copule max : Elle est donnée par :

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0), \quad \forall u, v \in I. \quad (1.3)$$

Théorème 1.3.1 *Soit X et Y deux variables aléatoires de fonction de distribution jointe H de marges F et G . Tout copule C associée à H est vérifiée l'inégalité :*

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v), \quad \forall u \in [0, 1].$$

Les fonctions M et W définie par les équations (1.2) et (1.3) respectivement appeler la borne supérieur et la borne inférieur de Fréchet.

1.4 Copule et variable aléatoire

Soit X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartitions continues F et G respectivement, et de fonction de distribution joint H . La copule associée aux variables aléatoires X et Y est unique et notée C_{XY} .

Définition 1.4.1 (Copule d'indépendance) : *La copule d'indépendance appeler aussi copule produit, est une fonction noté Π définie sur $[0, 1]^2$ à valeurs dans $[0, 1]$ par :*

$$\Pi(u, v) = uv.$$

Théorème 1.4.1 (Théorème d'invariance) : *Soit X et Y deux variables aléatoires continue. Si α et β sont des fonctions strictement croissantes, alors :*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}.$$

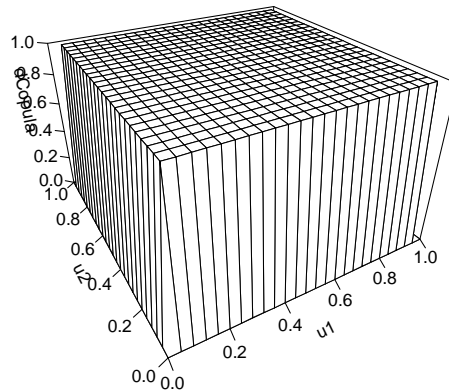


FIG. 1.1 – Densité d’une copule produit

Théorème 1.4.2 *Les variables aléatoires X et Y sont indépendante ssi :*

$$C_{XY} = \Pi.$$

1.5 Copule de survie

En statistiques de survie, les temps de survie sont référence à la durée jusqu’à un événement d’intérêt, comme la durée de vie d’un produit, le temps jusqu’à une maladie ou le temps avant une défaillance. Les copules de survie sont utilisées lorsque l’on s’intéresse à modéliser la corrélation entre ces temps de survie.

Soit la fonction de distribution jointe H de couple aléatoire (X, Y) . La fonction de survie \bar{H} est définie par :

$$\bar{H}(x, y) = P(X > x, Y > y).$$

Définition 1.5.1 Soit C une copule. La fonction $\hat{C} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$$

est appelé la copule de survie associée à la copule C , et on a :

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)).$$

On remarque que la copule \hat{C} est reliée la fonction de survie jointe \bar{H} aux ses fonctions de survie marginales de la même manière que, la copule C relie la distribution jointe H à ses marges.

Définition 1.5.2 Soit \bar{C} la fonction de survie jointe de deux variable aléatoire uniforme, dans lequel la copule C est la distribution jointe. La relation entre \hat{C} et \bar{C} est donner par :

$$\begin{aligned} \bar{C}(u, v) &= P(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u, v) \\ &= \hat{C}(1 - u, 1 - v). \end{aligned}$$

1.6 Familles de copules

Les familles de copules sont des ensembles de copules qui partagent certaines propriétés ou structures. Elles sont utilisées en statistiques pour modéliser différentes formes de dépendance entre variables aléatoires.

1.6.1 Copules elliptiques

Les copules elliptiques sont basées sur des distributions elliptiques multivariées. Elles sont souvent utilisées pour modéliser des dépendances symétriques et peuvent prendre en compte des queues lourdes ou légères. Elles jouent un rôle important dans les applications financières. On considère ici les deux exemples les plus connus ; la copule Gaussienne et la copule de Student.

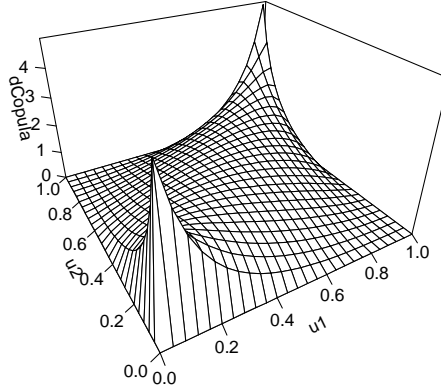


FIG. 1.2 – Densité d’une copule Gaussian bivariée avec $\rho = 0.7$.

a-Copule normale : La copule Gaussienne (normale) est donnée par :

$$C_\rho(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy,$$

ou Φ^{-1} est la fonction quantile standard de la loi normale $N(0, 1)$.

Remarque 1.6.1 Les cas limites sont : $C_{-1}(u, v) = W(u, v)$, $C_0(u, v) = \Pi(u, v)$, et $C_1(u, v) = M(u, v)$.

-la figure(1.2) représente la densité d’une copule Gaussian bivariée avec $\rho = 0.7$.

b-Copule de Student : La copule de Student est définie comme suite :

$$C_{\rho,v}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(v)} \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\left(\frac{v}{2}+1\right)} dx dy,$$

telle que ρ est la matrice de corrélation avec $diag\rho = 1$, T_v^{-1} est la fonction inverse de la distribution standard de Studente et v est le degrés de liberté, $v > 0$.

-La figure (1.3) représente la densité d’une copule de Student bivariée avec $\rho = 0.5$ et $v = 4$.

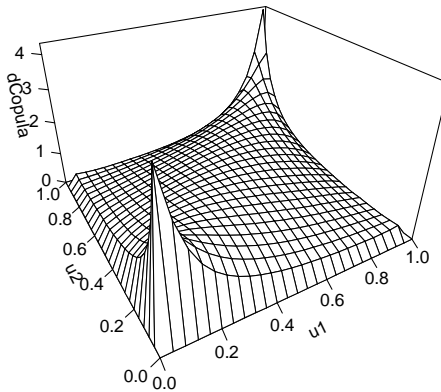


FIG. 1.3 – Densité d’une copule de Student bvariée avec $\rho = 0.5$ et $v = 4$.

1.6.2 Copules Archimédiennes

Les copules archimédiennes sont basées sur des fonctions archimédiennes, telles que la copule de Fréchet, la copule de Clayton et la copule de Gumbel. Elles sont souvent utilisées pour modéliser des dépendances positives et négatives asymétriques.

La notion de copule archimédienne est introduite par [Genest et Mackay(1986)]. Cette classe des copules a un large éventail d’application pour plusieurs raison : la facilité de construction, elle contient beaucoup de propriétés intéressantes et la grand variétés dans les familles de copule dans cette classe.

Tout d’abord, nous introduisons quelques notations.

Définition 1.6.1 *On dit que pseudo-inverse de φ , la fonction $\varphi^{[-1]} : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ donnée par :*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

où φ est une fonction continue strictement décroissante telle que $\varphi(1) = 0$. $\varphi^{[-1]}$ est continue,

non croissante sur $[0, \infty]$ et strictement décroissante sur $[0, \varphi(0)]$, de plus on a :

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

Définition 1.6.2 On appelle copule Archimédienne de générateur φ , toute copule vérifie :

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Proposition 1.6.1 On dit que C est une copule Archimédienne si et seulement si la pseudo-inverse de $\varphi^{[-1]}$ de φ est une fonction convexe.

Preuve. Pour la preuve voir [Nelsen(2006), page 111]. ■

Exemple 1.6.1 Soit le générateur $\varphi_\theta(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$, la copule de Franck est donnée par :

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right\}, \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

de plus on a les cas limites suivante : $C_{-\infty} = W$, $C_0 = \Pi$, et $C_\infty = M$.

-La figure (1.4) représente la densité d'une copule de Frank bivariée avec $\theta = 7$.

Exemple 1.6.2 La copule de Clayton(1978) dite aussi copule de [Cook et Johnson(1981)], premièrement étudié par [Kimeldorf et Sampson(1975)], soit le générateur $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, elle est donnée sous la forme suivante :

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \theta \in [-1, +\infty[\setminus \{0\},$$

de densité

$$c(u, v) = (1 + \theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{2\theta-1}{\theta}},$$

et dans les cas limites on a : $C_{-1} = W$, $C_0 = \Pi$, et $C_\infty = M$.

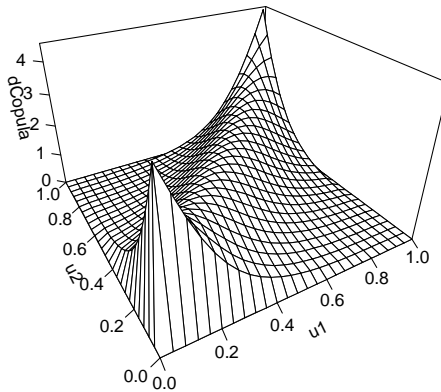


FIG. 1.4 – Densité d’une copule de Frank bivariée avec $\theta = 7$.

-La figure (1.5) représente la densité d’une copule de Clayton bivariée avec $\theta = 7$.

Exemple 1.6.3 Soit le générateur $\varphi_\theta = (-\ln t)^\theta$, la copule de Gumbel est définie par :

$$C(u, v) = \exp \left\{ - \left[\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right) \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \theta \in [1, \infty]$$

et dans les cas limites on a : $C_1 = \Pi$, et $C_\infty = M$.

-La figure (1.6) représente la densité d’une copule de Gumbel bivariée avec $\theta = 2$.

Exemple 1.6.4 La copule de Ali-Mikhail-Haq (AMH) peut être utilisée pour modéliser une faible corrélation positive ou négative entre des variables aléatoires. Soit le générateur $\varphi_\theta = \ln \frac{1-\theta(1-t)}{t}$, la copule (AMH) est définie par :

$$C(u, v) = \frac{uv}{(1 - \theta(1-u)(1-v))}, \theta \in [-1, 1],$$

de densité

$$c(u, v) = \frac{1 - \theta + 2\theta \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}}{[1 - \theta(1-u)(1-v)]^2},$$

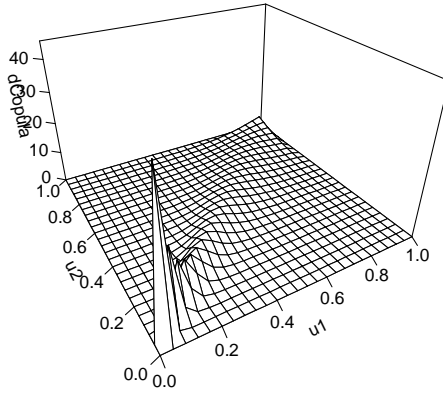


FIG. 1.5 – Densité d’une copule de Clayton bivariée avec $\theta = 7$.

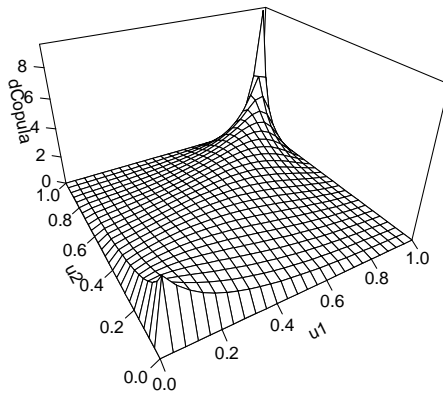


FIG. 1.6 – Densité d’une copule de Gumbel bivariée avec $\theta = 2$.

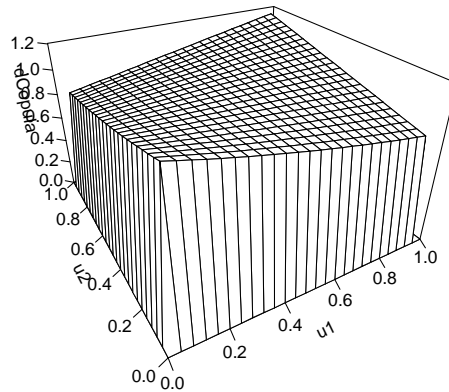


FIG. 1.7 – Densité de la copule de AMH bivariée avec $\theta = 0.2$.

et dans les cas limites on a : $C_{-1} = \Pi/2 - (u + v) + \Pi$, $C_0 = \Pi$, et $C_1 = \Pi/(u + v) - \Pi$.

-La figure (1.7) représente la densité de la copule de AMH bivariée avec $\theta = 0.2$.

Pour d'autres exemples de copules archimédiennes voire le tableau de [Nelsen(2006)] page 116.

1.6.3 Copule de valeur extrême

Les copules de valeur extrême, comme la copule de Gumbel ou la copule de Hüsler-Reiss, sont utilisées pour modéliser la dépendance entre des événements rares ou extrêmes, la forme générale des copules de valeurs extrêmes dans le cas bidimensionnel introduite par [Geofroy(1958)], [Tiago de Olivera(1958)] et [Sibuya(1960)] et elle s'expriment par suite :

$$C^*(u, v) = \exp \left\{ (\log u + \log v) A \left(\frac{\log u}{\log u + \log v} \right) \right\}, \quad 0 \leq u, v \leq 1,$$

où A est une fonction convexe définie sur $[0, 1]$, vérifie : $\max(v, 1 - v) \leq A(v) \leq 1$ appeler la fonction de dépendance Archimax.

Théorème 1.6.1 Une copule est max-stable ssi elle est une copule de valeur extrême.

Preuve. Voir [Nelsen(2006), page 97]. ■

Théorème 1.6.2 Soit C la copule commune entre les couples (iid) de variables aléatoires $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$, et $C_{(n)}$ la copule associée à $X_n = \max(x_i)$ et $Y_n = \max(y_i)$, $i = 1, \dots, n$, alors :

$$C_{(n)}(u, v) = C^n(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}), \quad u, v \in I.$$

Définition 1.6.3 On dit que C^* est une copule de valeurs extrêmes s'il existe une copule C telle que :

$$C^*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}).$$

Exemple 1.6.5 La copule de Marshall et Olkin est donnée par :

$$C(u, v) = u^{1-\theta_1} v^{1-\theta_2} \min(u^{\theta_1}, v^{\theta_2}); \quad \theta \in [0, 1]^2,$$

où $A = \max(1 - \theta_1 t, \theta_2(1 - t))$.

Exemple 1.6.6 La copule de Galambos est définie comme suite :

$$uv \exp\left[\left\{(-\log u)^{-\theta} + (-\log v)^{-\theta}\right\}^{-\frac{1}{\theta}}\right], \quad \theta \geq 0,$$

où $A = 1 - \{t^{-\theta} + (1 - t)^{-\theta}\}^{-\frac{1}{\theta}}$.

Pour d'autres exemples de copules de valeurs extrêmes voir [Benelmir(2018), page 23].

1.7 Copules à propriétés spécifiées

Dans cette partie, nous étudions quelques propriétés analytiques et fonctionnelles connues de copule.

1.7.1 Copules harmoniques

Définition 1.7.1 On dit de la copule C aux second dérivées partielles continues sur $[0, 1]^2$ qu'elle est harmonique dans I^2 , si elle satisfait l'équation de Laplace dans $[0, 1]^2$:

$$\nabla^2 C(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} C(u, v) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} C(u, v) = 0.$$

Proposition 1.7.1 C est sous-harmonique si $\nabla^2 C(u, v) \geq 0$ et sur-harmonique si $\nabla^2 C(u, v) \leq 0$.

Exemple 1.7.1 Il est clair que la copule Π est une copule harmonique.

1.7.2 Copules homogènes

Définition 1.7.2 Une copule C est homogène de degré k , si elle vérifiée :

$$C(\lambda u, \lambda v) = \lambda^k C(u, v) \quad u, v \in I \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

1. La copule produite Π est homogène de degré $k = 2$ car :

$$\Pi(\lambda u, \lambda v) = (\lambda u)(\lambda v) = \lambda^2 uv.$$

2. La copule min est homogène de degré $k = 1$ car :

$$M(\lambda u, \lambda v) = \min(\lambda u, \lambda v) = \lambda \min(u, v).$$

1.7.3 Copules concaves et convexes

Définition 1.7.3 Soit C une copule, pour toute (a, b) et $(c, d) \in I^2$ et $\forall \lambda \in I$:

1. C est concave si :

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \geq \lambda C(a, b) + (1 - \lambda)C(c, d).$$

2. C est convexe si :

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \leq \lambda C(a, b) + (1 - \lambda)C(c, d).$$

-La copule min est concave.

-La copule max est convexe.

1.8 Mesure d'association

Lorsque deux vas X et Y ne sont pas indépendantes, on s'intéresse alors à la liaison (dépendance ou corrélation) entre elle.

1.8.1 Notion de la concordance

Soit $(X_i, Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ un échantillon d'un couple (X, Y) , il ya C_n^2 pairs de distribution des couples $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$ qui sont soit concordance au discordance selon :

1. **Concordance :**

$$(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0 \implies (X_i > X_j) \text{ et } (Y_i > Y_j) \text{ ou } (X_i < X_j) \text{ et } (Y_i < Y_j).$$

2. **Discordance :**

$$(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0 \implies (X_i > X_j) \text{ et } (Y_i < Y_j) \text{ ou } (X_i < X_j) \text{ et } (Y_i > Y_j).$$

1.8.2 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 1.8.1 Si X et Y sont deux variables aléatoires ayant des variances finies, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y peut être exprimé comme suit :

$$\varrho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}.$$

1.8.3 Tau de Kendall

Définition 1.8.2 Soit la copule C associée aux vecteur aléatoires continue (X, Y) . Alors le tau de Kendall τ est donnée en termes de copule C par suite :

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1, \quad \tau \in [-1, 1].$$

Remarque 1.8.1 Si C est archimédienne de générateur φ , alors la formule de tau de Kendall est démontré par [Genest et Mackay(1986)] comme suite :

$$\tau = 4E(C(U, V)) - 1 = 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

1.8.4 Rho de Sperman

Définition 1.8.3 Soit la copule C associée aux vecteur aléatoires continue (X, Y) . Alors le rho de Sperman ρ est donnée en termes de copule C par :

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3, \quad \rho \in [-1, 1].$$

Le tableau (1.1) représente le tau de Kendall est le rho de sperman de quelque copules :

Copule	Tau de kendal	Rho de sperman
Normale	$2\pi^{-1} \arcsin(\theta)$	$6\pi^{-1} \arcsin(\frac{\theta}{2})$
Gumbel	$\frac{\theta-1}{\theta}$	/
Frank	$1 - \frac{4(1-D_1(\theta))}{\theta}$	$t - \frac{1-e^{-\theta}}{\theta} \log(\frac{1-e^{-\theta}}{1-e^{-\theta t}})$
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	/

TAB. 1.1 – Tau de kendall et rho de sperman de quelque copules

1.8.5 Relation entre le tau de Kendall et le rho de Spearman

Théorème 1.8.1 *Soit X et Y deux variables aléatoires continuent alors le τ de Kendall et le ρ de Spearman sont satisfais :*

1.

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1.$$

2.

$$\frac{1 + \rho}{2} \geq \left(\frac{1 + \tau}{2}\right)^2,$$

et

$$\frac{1 - \rho}{2} \geq \left(\frac{1 - \tau}{2}\right)^2.$$

3.

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}, \tau \geq 0,$$

et

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 3\tau}{2}, \tau \leq 0.$$

Preuve. Voir [Nelsen(2006), pages 175, 176]. ■

Chapitre 2

Famille Farlie-Gumbel-Morgenstern

La famille de copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern a été d'abord étudiée par [Morgenstern(1956)] pour les marginales de Cauchy puis par [Gumbel(1960)] pour les marginales exponentielle et généralisé par [Farlie(1960)]. La famille FGM a été appliquées dans de nombreux domaines, comme la finance [Mai et Scherer(2014)], l'actuariat [Barges et al(2011)], la bio-informatique [Kim et al(2008)] et l'hydrologie [Genest et Favre(2007)].

Soit F et G deux fonctions de distribution univariée, la distribution jointe de la famille FGM à un paramètre est définie par :

$$H_\alpha(x, y) = F(x)G(y)[1 + \alpha(1 - F(x))(1 - G(y))] , \alpha \in [-1, 1] , \quad (2.1)$$

où F et G sont les fonctions marginales de H_α pour toute α admissible. Il est impossible de dire que H_α est une distribution bivariée uniquement par ses distributions marginales car il existe de nombreux α valides.

Définition 2.0.4 *L'ensemble de nombres valides α notée Λ est dite l'espace des paramètres naturel de H_α .*

Proposition 2.0.1 *-Si F et G sont dégénérée alors $\Lambda = (-\infty, +\infty)$.*

-Si F et G sont non dégénérée alors H_α est une distribution bivariée ssi $\Lambda = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ où

$$\alpha_{\min} = \min \left\{ (M_F M_G)^{-1}, ((1 - m_F)(1 - m_G))^{-1} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\alpha_{\max} = \min \left\{ (M_F(1 - m_G))^{-1}, ((1 - m_F)M_G)^{-1} \right\}, \quad (2.3)$$

avec m_F et M_F sont inf et sup de l'ensemble $\{F(x) : -\infty \leq x \leq \infty\} - \{0, 1\}$ respectivement, la même pour m_G et M_G .

-Si F et G sont absolument continue alors $\alpha_{\min} = -1$ et $\alpha_{\max} = 1$ et $\Lambda = [-1, 1]$ (résultat de [Johnson et Kotz(1975)]).

Définition 2.0.5 H_α est absolument continue si les fonction de densité f et g correspondant à les fonction F et G sont existe, et sa densité est donnée par :

$$h_\alpha(x, y) = f(x)g(y)[1 + \alpha(1 - 2F(x))(1 - 2G(y))], \quad \alpha \in [-1, 1].$$

Proposition 2.0.2 Le paramètre α est un paramètre d'association.

Exemple 2.0.1 Dans le cas où les marges sont uniformes ($F(x) = x$ et $G(y) = y$), la mesure de dépendance Gamma shweizer-wolf :

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 |H_\alpha(x, y) - xy| dx dy \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 |xy(1 - \alpha(1 - x)(1 - y)) - xy| dx dy \\ &= \frac{1}{3} |\alpha|. \end{aligned}$$

Proposition 2.0.3 Soit X et Y deux va de distribution FGM des fonction marginales continues. [Schucany et al(1978)] ont prouvé que le coefficient de corrélation de Pearson ρ de X et Y vérifiée :

$$|\rho| \leq \frac{1}{3}.$$

Théorème 2.0.2 *Soit H_α la distribution FGM où F et G ses marges. Si F et G sont des distributions de variance finie non nulle, alors le coefficient de corrélations ρ est satisfait :*

$$\frac{1}{3}\alpha_{\min} \leq \rho \leq \frac{1}{3}\alpha_{\max}$$

où α_{\min} et α_{\max} sont définie dans les équations (2.2) et (2.3) respectivement.

Preuve. pour la preuve voir [Lin(1987)]. ■

2.1 Copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern

La copule FGM (Farlie-Gumbel-Morgenstern) est une fonction mathématique utilisée en théorie des probabilités et en statistique pour décrire la dépendance entre les variables aléatoires. La copule FGM est souvent utilisée pour modéliser des variables aléatoires dépendantes dans divers domaines tels que la finance, l'assurance, la météorologie, la géologie, etc. Elle a été largement discutée dans le littérature en raison des propriétés mathématiquement intéressante. La copule FGM est intéressante en raison de leur forme simple qui autorise un calcul exact.

2.1.1 Modèle de copule FGM à un paramètre

La copule FGM à un paramètre est donnée par :

$$C_\alpha(u, v) = uv[1 + \alpha(1 - u)(1 - v)], \quad \alpha \in [-1, 1] \quad (2.4)$$

où u et v sont les valeurs cumulées des variables aléatoires, et α est un paramètre appelé l'indice de dépendance.

Sa densité est définie par :

$$c_\alpha(u, v) = 1 + \alpha(1 - 2u)(1 - 2v),$$

et sa copule de survie :

$$\hat{C}_\alpha(u, v) = u + v - 1 + \bar{u}\bar{v}(1 + \alpha uv),$$

où $\bar{u}\bar{v} = (1 - u)(1 - v)$.

2.1.2 Modèle de copule FGM à deux paramètres (α_1, α_2)

Dans ce modèle, la fonction de copule est définie comme suit :

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}(u, v) = uv[1 + \alpha_1 \bar{u}\bar{v} + \alpha_2 uv \bar{u}\bar{v}], \quad (2.5)$$

où α_1 et α_2 sont deux paramètres d'indice de dépendance, et on a :

$$\Lambda = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2), |\alpha_1| \leq 1 \text{ et } -\alpha_1 - 1 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2}[3 - \alpha_1 + (9 - 6\alpha_1 - 3\alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}.$$

Sa densité est donnée par :

$$c_{\alpha_1, \alpha_2}(u, v) = 1 + \alpha_1(1 - 2u)(1 - 2v) + \alpha_2 uv(2 - 3u)(2 - 3v),$$

et sa copule de survie :

$$\hat{C}_{\alpha_1, \alpha_2}(u, v) = u + v - 1 + \bar{u}\bar{v}(1 + \alpha_1 uv + \alpha_2 \bar{u}\bar{v}uv).$$

-Ce modèle permet de modéliser des niveaux de dépendance asymétrique entre les variables aléatoires.

Remarque 2.1.1 -Le coefficient de corrélations maximale de ce modèle est :

$$\rho_{FGM}^{\max} = 0,42721 \text{ pour } (\alpha_1, \alpha_2) = (-1 + 7/\sqrt{13}, 2 - 2/\sqrt{13}).$$

-Le coefficient de corrélations minimale de cette famille est :

$$\varrho_{FGM}^{\min} = \frac{-1}{3} \text{ pour } (\alpha_1, \alpha_2) = (-1, 0).$$

2.1.3 Modèle de copule FGM à trois paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Dans ce modèle, la fonction de copule est définie comme suit :

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(u, v) = uv \{1 + \alpha_1 \bar{u}\bar{v} + \alpha_2 uv\bar{u}\bar{v} + \alpha_3 uv\bar{u}^2\bar{v}^2\}$$

où α_1, α_2 et α_3 sont des paramètres d'indice de dépendance.

Sa densité est donnée par :

$$c_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(u, v) = 1 + \alpha_1(1-2u)(1-2v) + \alpha_2 uv(2-3u)(2-3v) + 2\alpha_3 uv(2u^2-3u+1)(2v^2-3v+1),$$

et sa copule de survie :

$$\hat{C}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(u, v) = u + v - 1 + \bar{u}\bar{v}(1 + \alpha_1 uv + \alpha_2 \bar{u}\bar{v}uv + \alpha_3 \bar{u}\bar{v}u^2v^2).$$

-Ce modèle permet de modéliser des dépendances plus complexes entre les variables aléatoires.

2.1.4 Modèle de copule FGM générale $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$

Pour α de dimension r i.e. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, [Johnson et Kotz(1977)] ont proposé le $(r-1)^{ieme}$ itération de cette famille par la formule suivante :

$$C_{\alpha}(u, v) = uv + \sum_{j=1}^r \alpha_j (uv)^{[j/2]+1} \bar{u}\bar{v}^{[j/2+1/2]},$$

où $[z]$ est le plus grand nombre entier inférieur au égale à z .

-Ce modèle permet d'utiliser un nombre quelconque de paramètres pour modéliser la dépendance entre les variables aléatoires.

2.1.5 Propriétés de la copule FGM

Symétrie : Il est clair que la copule FGM est symétrique, alors :

$$C_{\alpha}^{FGM}(u, v) = C_{\alpha}^{FGM}(v, u), \forall (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Mesure de dépendance : Les Mesure de dépendance sont les suivantes :

-Tau de Kendall : Le τ de Kendall de la copule FGM pour :

1. Le modèle à un paramètre est :

$$\tau_{C_{\alpha}} = \frac{2}{9}\alpha. \quad (2.6)$$

2. Le modèle à deux paramètres est :

$$\tau_{C_{\alpha_1, \alpha_2}} = \frac{2\alpha_1}{9} + \frac{\alpha_2}{18} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{450}. \quad (2.7)$$

Pour toute $\alpha \in [-1, 1]$ le τ de Kendall vérifie :

$$|\tau_{C_{\alpha}^{FGM}}| \leq \frac{2}{9}.$$

-Rho de Spearman : Le ρ de Spearman de la copule FGM pour :

1. Le modèle à un paramètre est :

$$\rho_{C_{\alpha}} = \frac{1}{3}\alpha. \quad (2.8)$$

2. Le modèle à deux paramètres est :

$$\rho_{C_{\alpha_1, \alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{12}. \quad (2.9)$$

Pour toute $\alpha \in [-1, 1]$ le ρ de Sperman vérifie :

$$|\rho_{C_\alpha^{FGM}}| \leq \frac{1}{3}.$$

-Beta de Blomqviste :A été proposé en 1950, notée β , elle est donnée par la formule suivante :

$$\beta = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1.$$

Le β de Blomqviste de la copule FGM pour :

1. Le modèle à un paramètre est :

$$\beta_{C_\alpha} = \frac{1}{4}\alpha.$$

2. Le modèle à deux paramètre est :

$$\beta_{C_{\alpha_1, \alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{16}.$$

-Gamma de Gini :A été proposé par (Corrado Gini notée) γ , elle est donnée par la formule suivante :

$$\gamma = 4\left[\int_0^1 C(u, 1-u)du - (u - C(u, u))du\right].$$

Le γ de Gini de la copule FGM pour :

1. Le modèle à un paramètre :

$$\gamma_{C_\alpha} = \frac{4}{15}\alpha.$$

2. Le modèle à deux paramètre :

$$\gamma_{C_{\alpha_1, \alpha_2}} = \frac{4\alpha_1}{15} + \frac{\alpha_2}{15}.$$

Dépendance de queue : les coefficients de dépendance des queues inférieure λ_L et

supérieure λ_U sont égaux à 0, alors La copule FGM ne possède ni dépendance de queues inférieure ni supérieure.

Sous et sur harmonique : La copule FGM est sous-harmonique pour $\alpha \in [-1, 0]$ et sur-harmonique pour $\alpha \in [0, 1]$.

Preuve. D'après la définition de la copule sous-harmonique et la copule sur-harmonique dans la section (1,7) :

$$\begin{aligned}\nabla^2 C(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} C(u, v) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} C(u, v) \\ &= -2\alpha(2 + u + v), \quad \forall (u, v) \in [0, 1]^2,\end{aligned}$$

donc si $\alpha \in [-1, 0]$ alors $\nabla^2 C(u, v) \geq 0$ et si $\alpha \in [0, 1]$ alors $\nabla^2 C(u, v) \leq 0$. ■

L-moments bivariés (BLM) : Cette méthode est proposé par [Brahimi et al(2015)], et elle utiliser pour estimé les paramètre de la copule C .

Définition 2.1.1 *Le k^{ieme} BLM noté δ_k exprimée en terme de copule par la formule suivante :*

$$\delta_k = \int_{I^2} (C(u, v) - uv) dudP_k(v), \quad \forall k \geq 1,$$

ou bien

$$\delta_k = \int_{I^2} uP_k(v)dC(u, v),$$

où $P_k(v) = \sum_{l=0}^k p_{k,l}v^l$ est le polynôme de Legendre déplacé (PLD) telque $p_{k,l} = [(-1)^{k+l}(k+l)!]/[(l!)^2(k-l)!]$ et on a :

-La première BLM de C_α^{FGM} est :

$$\delta_1 = \frac{\alpha}{18}.$$

-Les deux première BLM de $C_{\alpha_1, \alpha_2}^{FGM}$ sont :

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{\alpha_1}{18} + \frac{\alpha_2}{72}, \\ \delta_2 &= \frac{\alpha_2}{120}.\end{aligned}$$

-Les trois première BLM de $C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^{FGM}$ sont :

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{\alpha_1}{18} + \frac{\alpha_2}{72} + \frac{\alpha_3}{450}, \\ \delta_2 &= \frac{\alpha_2}{120}, \\ \delta_3 &= \frac{-\alpha_3}{1050}.\end{aligned}$$

Pour plus de détail sur la représentation de BLM par la copule FGM et la méthode d'estimation de ses paramètres, voir [\[Brahimi et al\(2015\)\]](#).

2.2 Famille FGM généralisée (GFGM)

La formule la plus générale de la famille de Farlie-Gumbel-Morgenstern est la proposé par [\[Farlie\(1960\)\]](#) comme suite :

$$H_\alpha(x, y) = F(x)G(y) \{1 + \alpha A(F(x))B(G(y))\}, \quad (2.10)$$

où $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ sont des fonction différentielles en $[0, 1]$ où $\lim_{z \rightarrow 1} A(z) = 0$ et $\lim_{z \rightarrow 1} B(z) = 0$.

Sa densité est donné par :

$$h_\alpha(x, y) = \{1 + \alpha[B(G(y)) + G(y)B'(G(y))][A(F(x)) + F(x)A'(F(x))]\} f(x)g(y),$$

où $f(x)$ et $g(y)$ sont les densité de $F(x)$ et $G(y)$ respectivement, avec $A'(F(x)) = \frac{\partial A(F(x))}{\partial F(x)}$ et $B'(G(y)) = \frac{\partial B(G(y))}{\partial G(y)}$.

Remarque 2.2.1 *Il est évident que lorsque nous remplaçons $A(F(x))$ par $1 - F(x)$ et $B(G(y))$ par $1 - G(y)$ dans (2.10) en aboutit à la distribution FGM originale (2.1).*

La fonction copule associé à la famille GFGM est :

$$C_\alpha(u, v) = uv(1 + \alpha A(u)B(v)) \quad , \quad (u, v) \in [0, 1]^2 .$$

2.2.1 Propriétés de la famille GFGM

1. La densité de la copule GFGM est donnée par :

$$c_\alpha(u, v) = 1 + \alpha[B(v) + B'(v)v][A(u) + A'(u)u].$$

2. La copule conditionnelle de la famille GFGM est définie comme suite :

$$C_{V/U}(u, v) = v \{1 + \alpha B(v)[A(u) + A'(u)u]\} .$$

3. Le τ de Kendall associée à la copule GFGM est satisfaite :

$$\tau = 4\alpha \{D_1 D_2 + D_3 D_4\} ,$$

$$\text{où } D_1 = \int_0^1 \frac{\partial A(u)u}{\partial u} u du, \quad D_2 = \int_0^1 \frac{\partial v B(v)}{\partial v} v dv, \quad D_3 = \int_0^1 A(u)u du \text{ et } D_4 = \int_0^1 B(v)v du.$$

2.3 Extensions de la copule FGM

Pour améliorer le niveau de corrélation de la copule FGM, plusieurs extensions ont été présentées dans la littérature.

-[Huang et Kotz(1984)] ont été proposé l'extension ci-dessous :

$$C(u, v) = uv[1 + \alpha_1 \overline{uv} + \alpha_2 uv\overline{uv}],$$

où $-1 \leq \alpha_1 \leq 1$ et $\alpha_2 \leq \frac{3-\alpha_1+\sqrt{9-6\alpha_1-3\alpha_1^2}}{2}$.

-[Huang et kotz(1999)] ont été proposé les deux extensions ci-dessous :

1.

$$C(u, v) = uv[1 + \alpha_1(1 - u^{\alpha_2})(1 - v^{\alpha_2})],$$

où $\alpha_2 > 0$ et $-\min\left\{1, \frac{1}{\alpha_2}\right\} \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{\alpha_2}$, et ils ont trouvé que :

$$\rho \in [-0.333, 0.375],$$

2.

$$C(u, v) = uv[1 + \alpha_1 \bar{u}^{\alpha_2} \bar{v}^{\alpha_2}],$$

où $\alpha_2 > 1$ et $-1 \leq \alpha_1 \leq \left(\frac{\alpha_2+1}{\alpha_2-1}\right)^{\alpha_2-1}$, et ils ont trouvé que :

$$\rho \in [-0.333, 0.391].$$

-[Bairamov et Kotz(2002)] ont été proposé l'extension donnée par :

$$C(u, v) = uv[1 + \alpha_1(1 - u^{\alpha_2})^{\alpha_3}(1 - v^{\alpha_2})^{\alpha_3}],$$

où $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 \geq 1$, et $-\min\left\{1, \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2\alpha_3+1}{\alpha_2(\alpha_3-1)}\right)^{2\alpha_3-2}\right\} \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_2\alpha_3+1}{\alpha_2(\alpha_3-1)}\right)^{\alpha_3-1}$, et ils ont trouvé que :

$$\rho \in [-0.48, 0.502].$$

-[Bekrizadeh et al(2012)] ont été proposé une nouvelle classe de copules FGM généralisées symétriques donnée par la formule suivante :

$$C(u, v) = uv[1 + \alpha_1(1 - u^{\alpha_2})(1 - v^{\alpha_2})]^n,$$

où $\alpha_2 > 0$, $n \geq 0$, et $-\min\left\{1, \frac{1}{n\alpha_2}\right\} \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{n\alpha_2}$.

-[Bekrizadeh et al(2015)] ont été proposé une extension asymétrique de copules FGM définie par :

$$C(u, v) = uv[1 + \alpha A_1(u)A_2(v)]^n,$$

où $-1 \leq \alpha \leq 1$ et $n \in [0, \infty[$, et ils ont trouvé que :

$$\rho \in [-0.5, 0.43].$$

2.4 Nouvelle extension de la copule FGM

[Ebaid et al(2020)] ont été suggéré une nouvelle extension de la copule FGM définie par :

$$C(u, v) = uv[1 + \alpha_1(1 - u)(1 - v)(1 - \alpha_2u)(1 - \alpha_2v)], \quad (2.11)$$

où $0 \leq \alpha_2 \leq 1$ et $-1 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{1 - \alpha_2}$,

de densité donnée par :

$$c(u, v) = 1 + \alpha_1 \{u[\alpha_2(3u - 2) - 2] + 1\} \{v[\alpha_2(3v - 2) - 2] + 1\}.$$

Remarque 2.4.1 *Il est clair que si $\alpha_2 = 0$ dans l'équation (2.11) en aboutit à la copule FGM classique (2.4).*

-Le ρ de Sperman associée à cette extension est définie par :

$$\rho = \frac{\alpha_1(2 - \alpha_2)^2}{12}.$$

-Le τ de Kendall associée à cette extension est définie par :

$$\tau = \frac{\alpha_1(2 - \alpha_2)^2}{18}.$$

Remarque 2.4.2 Si $\alpha_1 = 0$ alors $\rho = \tau = 0$, X et Y sont indépendant.

Un inconvénient bien connu de la copule FGM est le faible niveau de dépendance qu'elle autorise entre les variables, mais le niveau de corrélation est fortement amélioré quand en utilisant cette nouvelle copule symétrique généralisée. [Ebaid et al(2020)] ont trouvée que $\rho \in [-0.333, 1]$ et $\tau \in [-0.222, 1]$, cela permet de modéliser des ensembles de données caractérisés par des structures de corrélation positive élevées et de construire les distributions bivariées correspondantes.

2.5 Copule FGM dans le cas d -dimensionnelles

Soit $d \geq 2$ La copule FGM peut être exprimée par la formule suivante :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = u_1 u_2 \dots u_d P(u_1, u_2, \dots, u_d),$$

où $P(u_1, u_2, \dots, u_d)$ désigne le polynôme :

$$P(u_1, u_2, \dots, u_d) = \left[1 + \sum_{k=2}^d \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq d} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_k} (1 - u_{j_1})(1 - u_{j_2}) \dots (1 - u_{j_k}) \right],$$

sa densité est :

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2, \dots, u_m) &= P(2u_1, 2u_2, \dots, 2u_m) \\ &= \left[1 + \sum_{k=2}^d \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq d} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_k} (1 - 2u_{j_1})(1 - 2u_{j_2}) \dots (1 - 2u_{j_k}) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, la densité conditionnelle de m variable donnée par :

$$c(u_m | u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) = \frac{P(2u_1, 2u_2, \dots, 2u_{m-1}, 2u_m)}{P(2u_1, 2u_2, \dots, 2u_{m-1}, 1)},$$

et la copule conditionnelle donnée par :

$$c(u_m | u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) = u_m \frac{P(2u_1, 2u_2, \dots, 2u_{m-1}, u_m)}{P(2u_1, 2u_2, \dots, 2u_{m-1}, 1)}$$

Pour le cas bivariée la copule FGM ont la formule (2.4) et pour le cas trivariée elle ont la formule suivante :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3) &= u_1 u_2 u_3 [1 + \alpha_{12}(1 - u_1)(1 - u_2) + \alpha_{13}(1 - u_1)(1 - u_3) \\ &\quad + \alpha_{23}(1 - u_2)(1 - u_3) + \alpha_{123}(1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)]. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Application sur des données réelles

Nous avons pu calculer la valeur de paramètre de la copule en prenant en compte la relation entre le paramètre de copule et les mesures de concordance (tau de Kendall et rho de Spearman) en supposant la copule FGM.

Nous avons examiné 1000 observations de quatre séries de rendements d'indices boursiers européens (voir figure 3.1) disponible dans "QRM et data sets" du logiciel R, il inclut les cours de clôture quotidiens des principaux indices boursiers européens : à savoir l'allemand DAX , le CAC français, FTSE britannique, et DowJones américain.

Les échantillons de données sont prélevés pendant les heures ouvrables, ce qui exclut les week-ends et les jours fériés.

-La figure (3.1) représente les nuages de points de 1000 observations tirées des rendements de quatre indices boursiers européens.

Nous calculerons le tau de Kendall et le rho de Spearman à l'aide du logiciel R, et estimerons ensuite les valeurs des paramètres de la copule FGM à un paramètre (2.4) utilisant les deux relations (2.6) et (2.8), puis à deux paramètre(2.5) utilisant les deux relations (2.7) et (2.9).

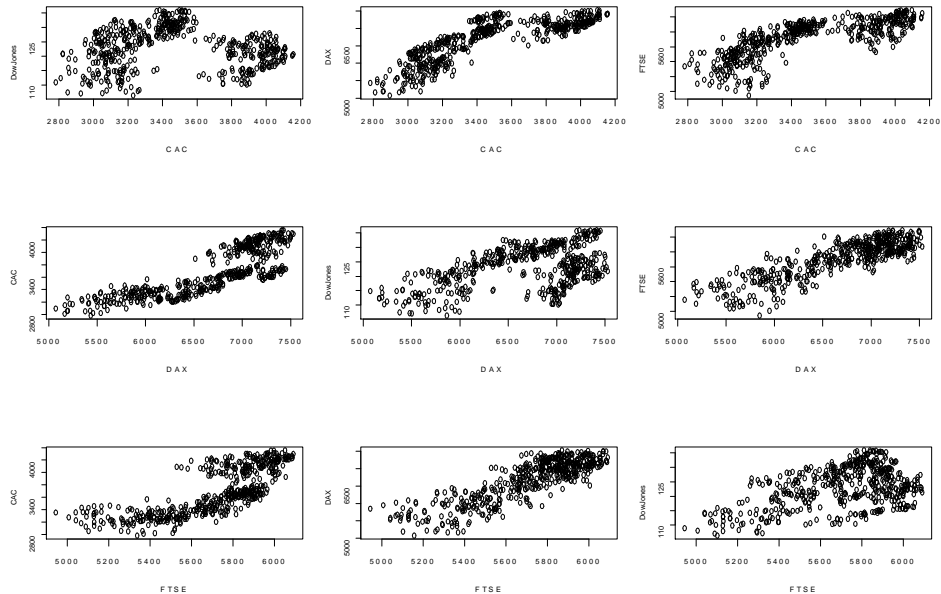


FIG. 3.1 – Nuages de points de 1000 observations tirées des rendements de quatre indices boursiers européens.

3.1 Estimation de paramètre de la copule FGM à un paramètre

1-À l'aide de tau de kendall :

-Le tableau (3.1) résume le tau de Kendall entre les quatre rendements de l'indice de marché :

Variables	CAC	FTSE	DAX	DowJones
CAC	1.0000	0.3554	0.4120	0.1106
FTSE	0.3554	1.0000	0.7325	0.6802
DAX	0.4120	0.7325	1.0000	0.6262
DowJones	0.1106	0.6802	0.6262	1.0000

TAB. 3.1 – Le tau de Kendall entre les quatre rendements des indices boursiers Européens

-On a obtenu le tableau (3.2) qui résume les estimation de paramètre de la copule FGM à un paramètre à l'aide du tau de Kendall :

2-À l'aide de rho de Spearman :

-Le tableau (3.3) résume le rho de Spearman entre les quatre rendements de l'indice de marché :

Variables	CAC	FTSE	DAX	DowJones
CAC	–	1.5993	1.854	0.4977
FTSE	1.5993	–	3.2965	3.0609
DAX	1.854	3.2965	–	2.8179
DowJones	0.4977	3.0609	2.8179	–

TAB. 3.2 – Estimation de paramètre de la copule FGM à un paramètre à l'aide de tau de Kendall

Variables	CAC	FTSE	DAX	DowJones
CAC	1.0000	0.4956	0.5530	0.1173
FTSE	0.4956	1.000	0.9113	0.8530
DAX	0.5530	0.9113	1.0000	0.8213
DowJones	0.1173	0.8530	0.8213	1.0000

TAB. 3.3 – Le rho de Spearman entre les quatre rendements des indices boursiers Européens

-On a obtenu le tableau (3.5) qui résume les estimations de paramètre de la copule FGM à un paramètre à l'aide du rho de Spearman :

Variables	CAC	FTSE	DAX	DowJones
CAC	–	1.4868	1.659	0.3519
FTSE	1.4868	–	2.7339	2.559
DAX	1.659	2.7339	–	2.4639
DowJones	0.3519	2.559	2.4639	–

TAB. 3.4 – Estimation de paramètre de la copule FGM à un paramètre à l'aide de rho de Spearman

Commentaire :

-La corrélation entre les paires : (FTSE,CAC), (DAX,CAC), (DAX,FTSE), et (DowJones, FTSE) est fort. Les estimateurs $\hat{\alpha} \notin [-1, 1]$ dans ces cas.

-La corrélation entre le paire : (CAC, DowJones) est faible. L'estimateurs $\hat{\alpha} \in [-1, 1]$ dans ce cas.

3.2 Estimation des paramètres de la copule FGM à deux paramètres

Pour estimer les valeurs des paramètres de la copule FGM à deux paramètres (α_1, α_2) , nous allons résoudre les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \tau = \frac{2\alpha_1}{9} + \frac{\alpha_2}{18} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{450} \\ \rho = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{12} \end{cases}$$

On a obtenu que les valeurs des estimateurs $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ sont dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

Commentaire :

-La copule FGM à deux paramètres ne conviennent pas à la modélisation de ces liaisons, nous devons donc chercher une autre copule.

-La figure (3.2) représente les histogramme de 1000 observations tirées des rendements de quatre indices boursiers européens.

Chaque distribution stable $S_\gamma(\sigma, \beta, \mu)$ possède un indice de stabilité γ qui peut être considéré comme le paramètre principal dans la prise de décisions d'investissement, ainsi qu'un paramètre d'asymétrie β dans l'intervalle $[-1, 1]$, un paramètre d'échelle σ et un paramètre de décalage μ . Dans les modèles utilisant des données financières, on suppose généralement que $\gamma \in [1, 2]$. En utilisant le package "fBasics" dans le logiciel R, basé sur les estimateurs du maximum de vraisemblance pour ajuster les paramètres d'une fonction de distribution des quatre rendements de l'indice de marché, les résultats sont résumés dans le tableau (3.5) :

Conclusion :

-La copule FGM non valable pour la modélisation de dépendance forte, elle est limitée à la

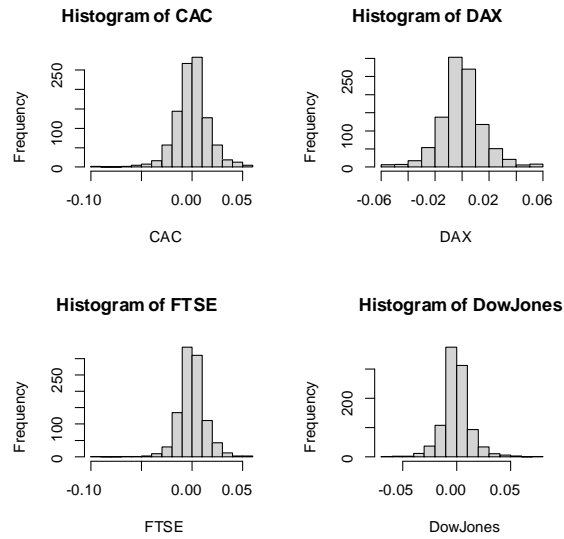


FIG. 3.2 – Histogramme de 1000 observations tirées des rendements de quatre indices boursiers européens.

	CAC	FTSE	DAX	DowJones
γ	1.6260	1.5040	1.4610	1.3220
β	0.1370	0.1870	0.0000	0.0410
σ	0.0091	0.0069	0.0080	0.0050
μ	-0.0002	-0.0006	-0.0007	-0.0006

TAB. 3.5 – L’ajustement du maximum de vraisemblance d’une distribution stable à quatre paramètres à quatre indices boursiers européens renvoie des données.

modélisation de dépendance très faible.

Conclusion

Ce mémoire donne une idée générale sur les copules. Dans la première partie on a étudié la notion de copule ainsi que les diverses propriétés qui lui sont liées, puis on a présenté quelques familles de copules paramétriques les plus utilisées à savoir : les copules elliptiques, les copules Archimédiennes, ...

Dans la deuxième partie, on a présenté en particulier la famille de la copule FGM et leurs propriétés fondamentales, puis on a donné des exemples de quelque extensions de cette copule. Finalement, on a terminé ce travail avec une application sur des données réelles.

Bibliographie

Bairamov, I., & Kotz, S. (2002). Dependence structure and symmetry of Huang-Kotz FGM distributions and their extensions. *Metrika*, 56, 55-72. (Cité à la page 30.)

Bekrizadeh, H., Parham, G. A., & Zadkarmi, M. R. (2012). The new generalization of Farlie-Gumbel-Morgenstern copulas. *Applied Mathematical Sciences*, 6(71), 3527-3533. (Cité à la page 30.)

Bekrizadeh, H., Parham, G. A., & Zadkarami, M. R. (2015). Pak. J. Statist. 2015 Vol. 31 (1), 95-106 AN ASYMMETRIC GENERALIZED FGM COPULA AND ITS PROPERTIES. *Pak. J. Statist*, 31(1), 95-106. (Cité à la page 31.)

Benelmir, I. (2018). Modélisation de la dépendance par les copules, Thèse de doctorat, Université de Biskra, Algérie. (Cité à la page 15.)

Bargès, M. Cossette, H. Loisel, S. and Marceau, E. (2011). On the moments of the aggregate discounted claims with dependence introduced by a FGM copula. *Astin Bulletin*, 41(1) :215–238. (Cité à la page 20.)

Brahimi et al. (2015). Copula representation of bivariate L-moments : a new estimation method for multiparameter two-dimensional copula models, *Statistics* 49 (3), 497-521. (Cité à la page 27 et 28.)

Brahim, B., Fatah, B., & Djabrane, Y. (2018). Copula conditional tail expectation for multivariate financial risks. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 24(1), 82-100. (Non cité.)

Cook, R, D. Johnson, M, E. (1981). A family of distributions for modeling non-elliptically symmetric multivariate data. *J. Roy. Statist. Soc, Ser. B* 43, 210–218. (Cité à la page 11.)

- Deheuvels, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test nonparamétrique d'indépendance. *Académie Royale de Belgique Bulletin de la Classe de Sciences*, 65 (5), 274–292. (Cité à la page 1.)
- Ebaid, R., Elbadawy, W., Ahmed, E., & Abdelghaly, A. (2022). A new extension of the FGM copula with an application in reliability. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 51(9), 2953-2961. (Cité à la page 31 et 32.)
- Farlie, D. J. G. (1960). The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. *Biometrika* 47, 307–323 (Cité à la page 20 et 28.)
- Fisher, N. I. (1997). Copulas. *Encyclopedia of Statistical Sciences* 1, 159-163. (Cité à la page 1.)
- Galambos, J. (1978). *The Asymptotic theory of extreme order statistics*. John Wiley and Sons, USA. (Cité à la page 1.)
- Genest, C. MacKay, J. (1986). The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician* 40, 280–285. (Cité à la page 10 et 18.)
- Genest, C. Favre, A.-C. (2007). Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4) :347–368. (Cité à la page 20.)
- Geofroy, J. (1958). Contributions à la théorie des valeurs extrêmes. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 7, 37–121. (Cité à la page 14.)
- Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of American Statistical Association* 55, 698–707. (Cité à la page 20.)
- Huang, J. S. & Kotz, S. (1984). Correlation structure in iterated Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. *Biometrika*, 71(3), 633-636. (Cité à la page 29.)
- Huang, J. S. Kotz, S. (1999). Modifications of Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions : A tough hill to climb. *Metrika* 49, 307–323. (Cité à la page 30.)

- Johnson, N. L., & Kott, S. (1975). On some generalized farlie-gumbel-morgenstern distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 4(5), 415-427. (Cité à la page 21.)
- Johnson, N. L. Kotz, S. (1977). On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions-II regression, correlation and further generalizations. *Comm Stat.* 6, 485-496. (Cité à la page 24.)
- Kim, J.-M. Jung, Y.-S. Sungur, E. A. Han, K.-H. Park, C. and Sohn, I. 2008. A copula method for modeling directional dependence of genes. *BMC bioinformatics*, 9(1) :1–12. (Cité à la page 20.)
- Kimeldorf, G. Sampson, A. (1975). One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals. *Comm. Statist.* 4, 293–301. (Cité à la page 1 et 11.)
- Lin, G. D. (1987). Relationships between two extensions of Farlie-Gumbel-Morgenstern distribution. *Ann. Inst. Statist. Math.* 39, 129-140. (Cité à la page 22.)
- Mai, J. and Scherer, M. (2014). *Financial Engineering with Copulas Explained*. Springer. (Cité à la page 20.)
- Morgenstern, D. (1956). Simple examples of two-dimensional distributions. *Statist. Math. Doc.* 8, 234–235. (Cité à la page 20.)
- Nelsen, R. B. 2006. *An Introduction to copula*. Springer Verlag, New York. (Cité à la page 11, 14, 15 et 19.)
- Schucany, W, Parr, W. C. and Boyer, J. E. (1978). Correlation structure in Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions, *BiometHka*, 65, 3, 650-653. (Cité à la page 21.)
- Sibuya, M. (1960). Bivariate extreme statistics. *Annals of the institute of statistical mathematics* 11, 195–210. (Cité à la page 14.)
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Univ. Paris.* 8, 229-231. (Cité à la page 1, 3 et 4.)
- Tiago de Olivera, J. 1958. Extremal distributions. *Rev. Fac. Ciencias. Univ. Lisboa*, A 8, 299–310.

(Cité à la page 14.)

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

<u>Symbole</u>	<u>Signification</u>
va	Variable aléatoire.
X, Y	Vas réelles.
fds	Fonction de distribution.
$P(A)$	Probabilité d'un évènement A.
$E[X]$	Espérance mathématique de la va X .
$V[X]$	Variance mathématique de la va X .
$Cov(X, Y)$	Covariance mathématique du couple (X, Y) .
F, G	fds des lois marginales.
\bar{F}, \bar{G}	fonctions de survie.
H	Distribution jointe.
f, g	Densités des lois marginales.
h	Densité de distribution jointe.
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
C	Distribution de la copule.
c	Densité de la copule.

I	Intervalle $[0, 1]$.
$\Phi(x)$	fd de la va x qui suit la loi normale.
T_v	Loi de Student à degré de liberté.
φ	Fonction génératrice de la copule archimédienne.
φ^{-1}	Fonction quantile de φ .
C^*	Copule de valeurs extrêmes.
\hat{C}	Copule de survie.
τ	Tau de Kendall.
ρ	Rho de Spearman.
β	Beta de Blomqvist.
γ	Gamma de Gini.
W	Copule maximum.
M	Copule minimum.
i.e.	C'est-à-dire.
ϱ	Coefficients de corrélation linéaire.
F^{-1}	Fonction quantile de F .
λ_U, λ_L	Dépendance de queue supérieure, inférieure.
$\theta, \alpha_1, \alpha_2$	Paramètres de la copule.
P	Polynôme de Legendre déplacé.
$[t]$	Partie entière de t .
α, β	Fonctions strictement croissantes.
$\hat{\alpha}$	L'estimateur de α .
$p.s$	Prèsque sur.
$p.p$	Prèsque par tout.

S_γ Distribution de la loi stable.

$\gamma, \sigma, \beta, \mu$ paramètre de la distribution stable.

ملخص

الكوبيل هي دالة متعددة المتغيرات تستخدم لنمذجة بنية الارتباط بين المتغيرات العشوائية. في هذا العمل نهتم بدراسة مفهوم الكوبيل وبعض خصائصها بصفة عامة، ثم تطرقنا بصفة خاصة الى دراسة عائلة الكوبيل فارلي-غامبول-مورغنسترن مع القيام بتطبيق على معطيات حقيقية.
الكلمات المفتاحية: كوبيل، الارتباط، مقياس الارتباط.

Résumé

Une copule est une fonction multivariée utilisée pour modéliser la structure de la dépendance entre les variables aléatoires. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du concept de copule et de certaines de ses propriétés en général, puis nous avons abordé en particulier l'étude de la famille de copule FGM avec une application sur des données réelles.

Mots-clés : copule, dépendance, mesure d'association.

Abstract

A copula is a multivariate function used to model the structure of dependence between random variables. In this work, we are interested in the study of the concept of copula and some of its properties in general, and then we have approached in particular the study of the FGM copula family With an application on real data.

Keywords : copula, dependency, measure of association.