République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : Probabilité

Par ROMEILI Amina

Sur les Problèmes de Contrôle Optimal de Risque de Sensibilité

Devant le Jury :

Dr.	TAMER Lazhar	UMKB	Président
Pr.	CHALA Adel	UMKB	Encadreur
Dr.	GHOUL Abd Elhak	UMKB	Examinateur

Soutenu Publiquement le 18/06/2023

Dédicace

Ce mémoire est le fruit des efforts fournis et des sacrifices consentis par plusieurs personnes que je ne pourrai oublier de remercier.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi Abd Elhafid et Sabah. Je remercie mes frères et ma seul sœur Halima, mon conjoint Fayssal et mon fils qui ont droit Siradj, eux aussi, à toute mon appréciation

Enfin, je remercie mes beaux-parents Djemoui et Fadhila, qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

A tous ceux qui m'aiment.

A tous ceux que j'aime.

$\mathcal{R}$emerciements

Mes remerciements s'adressent d'abord à Dieu, créateur de toutes choses, pour son souffle et tous ses innombrables bienfaits.

Aussi, je remercie mon Directeur de mémoire, le Professeur **CHALA Adel** d'avoir accepté de m'encadrer dans la conception et l'élaboration de ce travail, et aussi pour le dévouement manifesté malgré toutes ses nombreuses occupations.

Mes remerciements aux membres de Jury : Dr.**TAMER Lazhar**, Dr.**GHOUL Abd Elhak**, pour avoir accepté d'étudier et d'évaluer ce travail, nous sonnes très reconnaissant à leurs remarques et commentaires qui nous aidions beaucoup pour mieux présenter ce document.

Notations et symboles

EDS	Equation différentielle stochastique
$EDSR$	Equation différentielle stochastique rétrograde
$\mathbb{P}.p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$v.a$	Variable aléatoire
exp	Exponentiel.
$\langle X \rangle_t$	Variation quadratique de X sur $[0, t]$.
L^2	Espace des processus carré intégrables

Table des matières

Introduction

Le problème de contrôle optimal stochastique est très important dans la théorie du contrôle, et d'un point de vue mathématiques, et il est considéré comme un grand nombre d'applications dans les domaines d'économie.

Notre objectif dans cette mémoire est d'étudier les conditions nécessaires à l'optimalités dans le cas où le domaine de contrôle est convexe pour deux problèmes différents, le premier problème a été introduite par Kushner depuis l'année 1972 [6], et le deuxième problème a été introduite par Boualem Djehiche, voir aussi le papier de Chala et all 2023 [4].

On doit utiliser ici le principe connue sous le noms : Pricinpe du maximum de Pontryagin 1962 voir [10].

◁ Nous avons commencé le mémoire dans le premier chapitre avec quelque rappels, parmi eux : mouvement Brownien, martingale, formule d'Itô et l'EDS ect....

◁ La première problème qui se trouve dans le deuxième chapitre est basée sur le problème de contrôle optimal stochastique suivante.

Soit l'équation différentielle stochastique donné par la formule :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

où $x \in L^2$, telle que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard. A est un sous ensemble non vide, fermé et convexe dans $\mathbb{R}$, et T un nombre réel strictement positif.

La fonction de coût sera donner par :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, X(t), u(t))dt + h(X(T))\right].$$

L'objet du contrôle optimal stochastique est de minimiser un coût sur un ensemble U de tous les contrôles admissibles :

$$J(\widehat{u}) \leq J(u),\ \forall u \in U_{ad}.$$

$\triangleleft$ Dans le dernier chapitre le problème du contrôle optimal est étudié sous la forme suivante :

On considère l'équation différentielle stochastique donné par :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Notre objectif est de minimisé la fonction de coût d'une performance au risque de sensibilité définit par :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\exp \varepsilon \left(h(X(T)) + \int_0^T g(t, X_t, u_t)dt\right)\right],\ \text{avec } \varepsilon \in [0, 1].$$

Notre but de contrôle optimal est minimiser d'une fonction de coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U_{ad}, on donnera seulement les résultats de bases qui nous permet d'établir les condition nécessaire d'optimalité.

Chapitre 1

Initiations sur les processus stochastiques

Dans ce chapitre, on expose le concept du calcul stochastique, puis nous allons mettre l'accent sur les calculs d'Itô. Dans ce dernier nous avons utilisé les références [2, 3, 5, 7].

1.1 Rappel

1.1.1 Tribu

Définition 1.1.1 (Tribu) *Soit E un ensemble, on appel tribu de partie de E, tout sous ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ telle que*

◀ $E \in \mathcal{A}$.

◀ $A \in \mathcal{A}$, *alors* $A^c \in \mathcal{A}$.

◀ $A_0, ..., A_n \in \mathcal{A}$, *alors* $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Définition 1.1.2 (Tribu engendrée) *Soit E ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est la plus petit tribu contenant $\mathcal{C}$. On note $\delta(\mathcal{A})$, alors*

$$\delta(\mathcal{A}) = \cap_{\substack{\mathcal{C} \subset A_i \\ A_i \subset E}} A_i.$$

1.1.2 Variable Gaussienne

Définition 1.1.3 (Variable aléatoire) *Une v.a est une application mesurable X d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans un espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

– On dit que la v.a X suit la loi normale centré et réduite $\mathcal{N}(0,1)$, si elle admet densité

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

– Une v.a X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle admet densité

$$f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.1.3 Esperance conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $\mathcal{G}$ une sous tribu dans $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.4 (Espérance conditionnelle) *On appelle l'espérance condition-*

nelle de la variable aléatoire X sachent $\mathcal{G}$ tel que

$$\begin{cases} X \text{ est } \mathcal{G} - \text{mesurable}, \\ \int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} \ \forall A \in \mathcal{G}. \end{cases}$$

Proposition 1.1.1 (Propriété d'espérance conditionnelle) *Soit X et Y deux variables aléatoires, an a*

1) Linéarité : a, b deux constant $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(y \mid \mathcal{G})$.

2) Croissance : X et Y deux v.a $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid G)$.

3) Si X $\mathcal{G}-$mesurable, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.

4) Si Y $\mathcal{G}-$mesurable, alors $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.

5) $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{F}$ et X v.a, alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.

6) Si X indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

7) Si une v.a telle que $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\forall p \geq 1$,

alors $\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \leq \|X\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}$.

8) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$,

alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$.

9) Si Φ application convexe et mesurable, alors $\mathbb{E}(\Phi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \Phi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))$.

1.2 Processus stochastique

Définition 1.2.1 (Filtration) *Une filtration est une famille croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$, c à d $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ $\forall t \leq s$.*

Définition 1.2.2 (Processus stochastique(aléatoire)) *Un processus aléatoire est une famille de variable aléatoire $X = (X_t)_{t \in I}$ avec $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, est appelée* *processus stochastique indexé l'ensemble I, et $I = [0,T]$ pour $T \in [0,\infty)$, ou $I = [0,\infty)$.*

Définition 1.2.3 (Processus gaussienne) *Un processus $X = (X_t)_{t\in I}$ est gaussienne si toute combinaison linéaire $a_1X_{t_1} + a_2X_{t_2} + ... + a_nX_{t_n}$ suit une loi gaussienne pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t_1,\ t_2, ..., \ t_n \in I$, et $a_1,\ a_2, ..., \ a_n \in \mathbb{R}$.*

1.2.1 Martingales

Définition 1.2.4 (Martingale à temps continu) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$, est dit martingale si*

i/Pour tout $t \geq 0$ $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$.

ii/Pour tout $t \geq 0$ $X_t$est $\mathcal{F}_t-$mesurable (i.e X $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$adapté).

iii/Pour tout $t,\ s \geq 0$ tel que $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$.

Définition 1.2.5 *Le processus X est dit*

$\mathcal{F}-$sous-martingale si (iii) est remplacé par

$$\text{Pour tout } t,\ s \geq 0 \text{ tel que } s \leq t,\ \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

$\mathcal{F}-$Sur-martingale si (iii) est remplacé par

$$\text{Pour tout } t,\ s \geq 0 \text{ tel que } s \leq t,\ \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s.$$

1.2.2 Mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique.

Définition 1.2.6 *Le processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est Mouvement Brownien standard si les condition suivantes sont vérifiées*

1/ $B_0 = 0$.

2/ $\forall 0 \leq s < t < +\infty$ *la variable aléatoire* $B_t - B_s$ *est indépendante de* $(B_u)_{u\in[0,s]}$.

3/ $\forall 0\leq s<t<+\infty, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}(B_t - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_A \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)dx,$ *avec* $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

4/ Les trajectoires $t \longrightarrow B_t(w)$ $\mathbb{P}.p.s$ *continues.*

- ***Proposition 1.2.1*** *Soit* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique, tel que toutes les trajectoires sont continues est* $B_0 = 0$, *alors les propriétés suivantes sont équivalents*

  1/ Le processus B *est un Mouvement Brownien standard.*

  2/ Le processus B *est un processus gaussienne avec espérance* $m(t)$ *et covariance* $Cov(X_t, X_s) = \Gamma(s,t) = \min\{s,t\} = s \wedge t$.

1.2.3 Processus d'Itô

Les processus d'Itô, sont des processus écrits sous la forme

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \tag{1.1}$$

où est b une processus $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}-$adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty$ $\mathbb{P}.p.s$ $\forall\ t \geq 0$,

et σ un "bon processus local" (ie : càglad, $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}-$adapté, $\int_0^t \sigma_s^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}.p.s$ $\forall\ t \geq 0$).

On peut utiliser la forme différentielle d'EDS

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

X_0 : Condition initiale.

b_t : Le coefficient de dérive (drift) du processus.

σ_t : Le coefficient de diffusion.

Le processus $t \longrightarrow x + \int_0^t b_s ds$ la partie a variation finie du processus X.

Le processus $\int_0^t \sigma_s dB_s$ est la partie martingale du processus X.

1.2.4 Formules d'Itô

Soit X un processus d'Itô donnée par la formule (1.1).

Théorème 1.2.1 (1ère formule d'Itô) *Supposons f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s) d\langle X\rangle_s .$$

Cette formule s'écrit sous la forme différentielle

$$\begin{cases} df(X_t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s) d\langle X\rangle_t , \\ f(X_0) = f(x). \end{cases}$$

Théorème 1.2.2 (2éme formule d'Itô) *Soit f est une fonction définie de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x (ie :*

$f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$)

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\left\langle X\right\rangle_s,$$

Cette formule s'écrit sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d\left\langle X\right\rangle_t, \\ f(0, X_0) = f(0, x). \end{cases}$$

Théorème 1.2.3 (3éme formule d'Itô) *Soient X et Y deux processus d'Itô. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées*

$$\begin{aligned} &f(X, Y) \\ &= f(X_0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s)d\left\langle X\right\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s)d\left\langle Y\right\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)d\left\langle X, Y\right\rangle_s. \end{aligned}$$

Un processus $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$, continu $\mathcal{F}_t$−adapté.

1) Pour f indépendante de Y_t, on retrouve la 1ère formule d'Itô.

2) Pour $Y_t = t$, on retrouve la 2ème formule d'Itô.

1.3 Equation différentielles stochastique (EDS)

Soient b et σ deux fonction mesurables bornées de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles donnée, et B un $(\mathcal{F}_t)-$Mouvement-Brownien, l'équation déffirentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Définition 1.3.1 *Une solution forte de l'équation différentielle stochastique (1.2), X est un processus continu tel que*

1- X est Progressivement mesurable.

2- $\mathbb{P}.p.s$ $\int_0^T \left(|b(t, X_t)| + |\sigma(t, X_t)|^2\right) dt < \infty$.

3- $\mathbb{P}.p.s$ $X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$.

Notation 1.3.1 *Soit $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ est l'éspace vectoriel formé des processus X, progressivement mesurables, à valeur dans $\mathbb{R}^k$, tel que $\|X\|^2_{\mathcal{S}^2} = \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2) < \infty$. $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ est le sous–espace formé par les processus continus.*

Théorème 1.3.1 *Soient b et σ deux fonction mesurables bornées de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$*

*1/ **Condition de Lipschitz** : Il existe une constante $K > 0$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout x, $y \in \mathbb{R}$*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y| .$$

*2/ **Condition de croissance** : Il existe une constante $L > 0$, telle que pour tout*

$t \in \mathbb{R}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq L(1 + |x|).$$

3/ $\mathbb{E}\left[|x|^2\right] < \infty$.

Alors il existe une unique solution forte $x \in \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^n)$ *de* (1.2).

Exemple 1.3.1 (Processus d'Ornstien-Uhelnbeck) *Soit l'EDS* $dV_t = -aV_t dt + \sigma dB_t \quad V_0$ *donnée, pour trouvé l'unique solution explicite de l'EDS, d'ou il existe* K *et* L*, tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|ax - ay| + |\sigma - \sigma| \leq K\,|x - y|\,, \ \textit{avec}\ K = |a|$$

et

$$|ax| + |\sigma| \leq |a|\,|x| + |\sigma| \leq L(1 + |x|)\ \textit{avec}\ L = \sup(|a|\,, |\sigma|).$$

Pour cela, on pose $X_t = f(t, V_t) = V_t \exp at$*, pour tout* $t \geq 0$,
avec $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, V_t) = aV_t \exp at$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(t, V_t) = \exp at$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(t, V_t) = 0$, *d'après la 2ème formule d'Itô, on trouve*

$$\begin{aligned} dX_t &= df(t, V_t) = aV_t \exp atdt + \exp atdV_t, \\ &= aV_t \exp atdt + \exp at(-aV_t dt + \sigma dB_t) = \sigma \exp atdB_t. \end{aligned}$$

En intégrant de 0 *à* t

$$X_t = f(0, V_0) + \int_0^t \sigma \exp asdB_s.$$

D'autre part $X_t = V_t \exp at$, *alors la solution explicite de l'EDS est*

$$V_t = V_0 \exp(-at) + \int_0^t \sigma \exp(-a(t-s)).$$

Le Mouvement Brownien géométrique ou le processus log-normal défini par l'équation

$$X_t = x + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s \quad \text{avec } \mu,\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Ce l'équivaut

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Si on pose $y_t = X_t \exp(-\mu t)$, $\forall t \geq 0$, *et* $f(t, X_t) = X_t \exp(-\mu t)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) = -\mu X_t \exp(-\mu t)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) = \exp(-\mu t)$, *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) = 0$, *d'après la 2ème formule d'Itô, on trouve*

$$\begin{aligned} dy_t = f(t, X_t) &= -\mu X_t \exp(-\mu t) dt + \exp(-\mu t) dX_t, \\ &= -\mu X_t \exp(-\mu t) dt + \exp(-\mu t)(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t), \\ &= \sigma X_t \exp(-\mu t) dB_t, \\ &= \sigma y_t dB_t. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Appliquons la 1ère formule d'Itô sur $g(y_t) = \ln(y_t)$, *alors* $g(y) = \ln(y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(y) = \frac{1}{y}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(y) = -\frac{1}{y^2}$, *et* $d\langle y \rangle_t = \sigma^2 y_t^2 dt$, *alors*

$$dg(y_t) = d\ln(y_t) = \frac{1}{y_t} dy_t + \frac{1}{2}(-\frac{1}{y^2})\sigma^2 y_t^2 dt.$$

En remplaçant $y_t = X_t \exp(-\mu t)$, *dans l'expression précédent, on trouve que*

$$dg(y_t) = \sigma dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt,$$

et $g(y_0) = \ln(y_0) = \ln(x)$, *alors*

$$\begin{aligned}\ln(y_t) &= \ln(x) + \int_0^t \sigma dB_s - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} ds,\\ &= \ln(x) + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t.\end{aligned}$$

Donc

$$y_t = x \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t). \tag{1.4}$$

D'après (1.4), *on obtient* X_t :

$$\begin{aligned}X_t &= y_t \exp(\mu t),\\ &= \exp(\mu t)(x \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)),\\ &= x \exp(\sigma B_t - (\frac{\sigma^2}{2} + \mu) t).\end{aligned}$$

1.4 Inégalités et théorèmes utiles.

Cette section est prendre à partir de la référence [5].

Proposition 1.4.1 (Inégalité maximale) *Soit* θ *un bon processus alors :*

$$\mathbb{E}([\sup_{\mathbf{t} \leq \mathbf{T}} \int_0^t \theta_s dB_s]^2) \leq 4\mathbb{E}(\int_0^T [\theta_s dB_s]^2) = 4\mathbb{E}(\int_0^T \theta_s^2 ds). \tag{1.5}$$

Proposition 1.4.2 (Inégalité de Hölder) *Soient* $p, q \in [1, \infty[$ *des exposants* *conjugués i.e :*$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *.Si* f,g *sont des applications mesurables, alors :*

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q .$$

Quand $p=q=2$ *l'inégalité de Hölder donne* ***l'inégalité de Cauchy-Schwartz****, i.e :*

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_2 \| g \|_2 . \tag{1.6}$$

Lemme 1.4.1 (Lemme de Gronwall) *Soit* $g:[0,T]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue telle que, pour tout* t, $g(t)\leq a+b\int_0^t g(s)ds$, $a\in\mathbb{R}$, $b\geq 0$, *alors pour tout* t, $g(t)\leq a\exp(bt)$.

Soit $B=(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$, où $\mathcal{F}_t^B=\sigma(B_s,\ s\leq t)$ sa filtration naturelle.

Théorème 1.4.1 (Théorème de représentation des martingales) *Soit* X *un* $(\mathcal{F}_t^B)-$*martingale telle que* $\sup\mathbb{E}(X_t^2)<+\infty$, *alors il existe un unique processus prévisible* Z *tel que* $\mathbb{E}(\int_0^t |Z_s|^2\,ds)<+\infty$, *et tel que*

$$\forall t\in[0,T], \quad X_t=X_0+\int_0^t |Z_s|^2\,dB_s.$$

Théorème 1.4.2 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soient* f *une fonction définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$, *et* $a\in U$, *si* f *est classe* C^{m+1} *sur* U *et si* $h\in\mathbb{R}^n$ *est tel que le segment* $[a,a+h]$ *est inclus dans* U, *on a :*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+Df(a)+...+\frac{1}{k!}D^m f(a)(h)^m \\ &\quad+\int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!}D^{m+1}f(a+th)(h)^{m+1}dt. \end{aligned}$$

1.5 Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

Cette partie est également prendre de [3]

Problème 1.5.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré,* $T \geq 0$*, et* ξ *variable aléatoire mesurable par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_T$*, soit l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{cases} -\dfrac{dY_t}{dt} = f(Y_t),\ t \in [0, T]\,, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

En imposant que, pour tout instant t*, le processus* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *est* $\mathcal{F}-$*adapté. À titre d'exemple* $f{\equiv}0$*. et* $Y_T = \xi$ *n'est pas adapté si le processus* ξ *n'est pa déterministe. Nous n'avons qu'approximation appartient à* L^2-*adapté est la martingale* $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$*. Si* $\mathcal{F}_t$ *est la filtration naturelle d'un Mouvement Brownien, d'après le théorème de représentation des martingales, il existe unique* Z *adapté et carré intégrable, tel que*

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s.$$

Le calcul élémentaire montre alors que

$$Y_t = \xi - \int_0^t Z_s dB_s,\ \ ie : dY_t = -\int_0^t Z_s dB_s \ \text{et}\ Y_T = \xi.$$

On a $Y_t = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s$ *et* $Y_T = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T Z_s dB_s$*, alors*

$$Y_t - Y_T = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s - \mathbb{E}(\xi) - \int_0^T Z_s dB_s = -\int_t^T Z_s dB_s,\ \ \text{avec}\ Y_T = \xi.$$

Donc

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s.$$

On a $Y_t - Y_T = -\int_t^T Z_s dB_s$, *alors* $-(-Y_t + Y_T) = -\int_t^T Z_s dB_s$, *donc*

$$-dY_t = -Z_t dB_t \text{ avec } Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître le processus Z qui a pour rôle de rendre le processus Y adapté. Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z. L'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Notation 1.5.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brwonien de $d-$dimensionnel sur cet espace.*

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de mouvement brwonien $(B_t)_{t\geq 0}$.

Soit $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ est l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, a valeur dans $\mathbb{R}^k$, tel que $\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2} = \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2) < \infty$.

$\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ est le sous–espace formé par les processus continus.

$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ est l'espace vectoriel formé des processus Z, progressivement mesurables, a valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que $\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty$, où si $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z_t\|^2 = trace(ZZ^*)$.

Nous nous donnons une application aléatoire f :$[0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tel que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ le processus $(f(t, y, z))_{0\leq t\leq T}$ progressivement mesurables, et une variable aléatoire ξ $\mathcal{F}_T-$mesurable et à valeur dans $\mathbb{R}^k$.

Soit l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante

$$\{-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t,\ \forall t \in [0, T]\,,\ \text{avec } Y_T = \xi,$$

où sous forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s,\ \forall t \in [0, T]\,. \tag{1.7}$$

Définition 1.5.1 *Une solution de l'EDSR (1.7) est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant*

1. Y et Z sont des progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k \times d}$.
2. $\mathbb{P}.p.s \left(\int_0^t |f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right) ds < \infty$.
3. $\mathbb{P}.p.s$ on a $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$, et $0 \leq t \leq T$.

Hypothèse **(L)**

1/ La fonction f est Lipschizienne ie : Il existe une constante $K > 0$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $y,\ z,\ y',\ z' \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq K\left(|y - y'| + \|z - z'\|\right)$.

2/ Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2\, ds\right) < \infty.$$

Théorème 1.5.1 (Pardoux–Peng 90) *[9] Soit un couple (ξ, f) vérifier l'hypothèse (L), alors l'EDSR (1.7) possède une unique solution forte (Y, Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$.*

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique

Le but dans ce chapitre est d'étudier et présenter le principe du maximum stochastique, où le domaine de contrôle est convexe. L'objectif de cette étude est pour savoir l'ensemble des conditions nécessaires d'optimalités, et j'ai utilisé la référence suivante [1].

2.1 Formulation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard. A est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}$, et T un nombre réel strictement positif. Considérons maintenant l'EDS suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $x \in L^2$, et $b : [0, T] \times \mathbb{R} \times A \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Maintenant, on définit la fonction de coût par :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, X_t, u_t)dt + h(X(T))\right], \tag{2.2}$$

où $g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \longrightarrow \mathbb{R}$, et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.1.1 (Contrôle admissible) *On appelle contrôle admissible tout processus $u(t)_{t\in[0,T]}$ appartient $L^2([0,T] \times \Omega)$ à valeur dans A*

$$U_{ad} = \left\{u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow A \ / \ \mathbb{E}\int_0^T |u|^2 \, ds{<}\infty\right\}. \tag{2.3}$$

Définition 2.1.2 (Contrôle optimal) *Le rôle de contrôle optimal est minimiser une fonction coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U_{ad}. On dit que le contrôle $\widehat{u}$ est optimal si*

$$J(\widehat{u}) \leq J(u) \ \forall u \in U_{ad}. \tag{2.4}$$

Définition 2.1.3 (Perturbation convexe) *On perturbe le contrôle $\widehat{u}(.)$ de la manière suivante :*

$$u^\theta(t) = \widehat{u}(t) + \theta(u(t) - \widehat{u}(t)), \tag{2.5}$$

où $u^\theta(t)$ est perturbation convexe, et $\theta \in [0,1]$ est suffisamment petite.

Hypothèses

(H$_1$)

$\lhd$ Les fonctions b, σ sont continument différentiable en x et u.

$\lhd$ Les dérivées b_x, b_u, σ_x, σ_u, sont bornées et continues.

◁ Il existe une constante $K > 0$,

$$\|b(t,x,u) - b(t,y,u)\| \leq K\|x-y\| \text{ et } \|b(t,x,u) - b(t,x,v)\| \leq K\|u-v\|, \tag{2.6}$$

$$\|\sigma(t,x,u) - \sigma(t,y,u)\| \leq K\|x-y\| \text{ et } \|\sigma(t,x,u) - \sigma(t,x,v)\| \leq K\|u-v\|, \tag{2.7}$$

$$|b(t,x,u) + \sigma(t,x,u)| \leq K(1+|x|+|u|). \tag{2.8}$$

◁ Les dérivées b_x, b_u, σ_x, σ_u, sont lipschitziennes par rapport x et u.

◁ Il existe une constante $K > 0$,

$$|b_x(t,x,u) + \sigma_x(t,x,u)| \leq K(1+|x|+|u|), \tag{2.9}$$

$$|b_u(t,x,u) + \sigma_u(t,x,u)| \leq K(1+|x|+|u|).$$

(H$_2$)

◁ Les fonctions g, h sont continument différentiable en x et u.

◁ les dérivées g_x, g_u, h_x, h_u, sont bornée et continues.

◁ les dérivées de h sont bornées par $c(1+|x|)$ et g est bornée par $c(1+|x|+|u|)$ tel que $c > 0$.

Remarque 2.1.1 *On remarque que $u^\theta(t)$ est un contrôle admissible.*

Remarque 2.1.2 *Le problème* (2.1) , (2.2) , (2.4) *est appelé le problème du contrôle optimal.*

Les deux équation différentielles stochastiques qui associées aux $u^\theta(t)$, et $\widehat{u}(t)$ sont définies par

$$\begin{cases} d\widehat{X}_t = b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)dt + \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)dB_t, \\ \widehat{X}_0 = x, \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{cases} dX_t^\theta = b(t, X_t^\theta, u_t^\theta)dt + \sigma(t, X_t^\theta, u_t^\theta)dB_t, \\ X_0^\theta = x. \end{cases} \tag{2.11}$$

On appelle $X^\theta(.)$ est la trajectoire correspondant à $u^\theta(.)$ et $\widehat{X}(.)$ est la trajectoire correspondant à $\widehat{u}(.)$.

On suppose que les conditions de Fillipov soient vérifiées, alors le contrôle optimal toujours existe.

Pour cela on suppose l'existence du contrôle optimal $\widehat{u}_t$.

2.2 Convergence des trajectoires perturbées

Lemme 2.2.1 *Sous l'hypothèse (H_1), pour tout $t \in [0, T]$ on a*

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}(\sup_{t \leq T} \left| X^\theta(t) - \widehat{X}(t) \right|^2) \longrightarrow 0. \tag{2.12}$$

Preuve. D'après les formule (2.10), (2.11) et $\forall t \in [0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left| X^\theta(t) - \widehat{X}(t) \right|^2 \\ &= \left| \int_0^t (b(t, X_t^\theta, u_t^\theta)dt + \sigma(t, X_t^\theta, u_t^\theta))dB_t - \int_0^t (b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)dt + \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t))dB_t \right|^2 \\ &\leq \left(\left| \int_0^t (b(t, X_t^\theta, u_t^\theta) - b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t))dt \right| + \left| \int_0^t (\sigma(t, X_t^\theta, u_t^\theta) - \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t))dB_t \right| \right)^2. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité : $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\left|X^{\theta}(t) - \widehat{X}(t)\right|^2 \leq 2\left|\int_0^t (b(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t))dt\right|^2 \\ + 2\left|\int_0^t (\sigma(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t))dB_t\right|^2.\end{aligned}$$

D'après (1.5) et (1.6), on trouve :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|X^{\theta}(t) - \widehat{X}(t)\right|^2 \\ &\leq 2\mathbb{E}(\int_0^t (1)^2\, ds \int_0^t \left|b(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 ds) \\ &+ 2\mathbb{E}(\int_0^t \left|\sigma(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 ds) \\ &= 2T\mathbb{E}(\int_0^t \left|b(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 ds) \\ &+ 2\mathbb{E}(\int_0^t \left|\sigma(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 ds).\end{aligned}$$

On ajoute $\pm b(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t)$ et $\pm\sigma(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t)$ dans la deuxième membre du l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|X^{\theta}(t) - \widehat{X}(t)\right|^2 \\ &= 2T\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|b(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - b(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t) + b(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t) - b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 ds\right) \\ &+ 2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\sigma(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - \sigma(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t) + \sigma(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t) - \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 ds\right), \\ &\leq 4T\mathbb{E}\int_0^t \left|b(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - b(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t)\right|^2 ds + 4T\mathbb{E}\int_0^t \left|b(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t) - b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 ds \\ &+ 4\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma(t, X_t^{\theta}, u_t^{\theta}) - \sigma(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t)\right|^2 ds + 4\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma(t, X_t^{\theta}, \widehat{u}_t) - \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\right|^2 ds.\end{aligned}$$

D'après (2.6) et (2.7) , on trouve que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|X^{\theta}(t)-\widehat{X}(t)\right|^{2} \\
&\leq 4TK\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|u_{s}^{\theta}-\widehat{u}_{s}\right|^{2}ds+4TK\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|X_{s}^{\theta}-\widehat{X}_{s}\right|^{2}ds \\
&+4L\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|u_{s}^{\theta}-\widehat{u}_{s}\right|^{2}ds+4L\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|X_{s}^{\theta}-\widehat{X}_{s}\right|^{2}ds.
\end{aligned}$$

D'après (2.5) , on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|X^{\theta}(t)-\widehat{X}(t)\right|^{2} \\
&\leq 4TK\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|\widehat{u}_{s}+\theta(u_{s}-\widehat{u}_{s})-\widehat{u}_{s}\right|^{2}ds+4TK\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|X_{s}^{\theta}-\widehat{X}_{s}\right|^{2}ds \\
&+4L\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|\widehat{u}_{s}+\theta(u_{s}-\widehat{u}_{s})-\widehat{u}_{s}\right|^{2}ds+4L\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|X_{s}^{\theta}-\widehat{X}_{s}\right|^{2}ds \\
&=4TK\theta^{2}\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|(u_{s}-\widehat{u}_{s})\right|^{2}ds+4TK\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|X_{s}^{\theta}-\widehat{X}_{s}\right|^{2}ds \\
&+4L\mathbb{E}\theta^{2}\int_{0}^{t}\left|(u_{s}-\widehat{u}_{s})\right|^{2}ds+4L\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|X_{s}^{\theta}-\widehat{X}_{s}\right|^{2}ds \\
&\leq\left(4TM+4LN\right)\theta^{2}+4T(K+L)\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|X_{s}^{\theta}-\widehat{X}_{s}\right|^{2}ds.
\end{aligned}$$

Comme $\left|X^{\theta}(t)-\widehat{X}(t)\right|^{2}$ est continue, d'aprés lemme de Gronwall, on obtient

$$0\leq\lim_{\theta\longrightarrow 0}\mathbb{E}\left|X^{\theta}(t)-\widehat{X}(t)\right|^{2}\leq\lim_{\theta\longrightarrow 0}4\theta^{2}(TM+4LN)\exp T(4LN\theta^{2}+4T(k+L))=0.$$

En vertu d'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy on obtient (2.12). ■

On définit **Equation linéaire** $Z(t)$ par

$$\begin{cases}
dZ(t)=\left(b_{x}(t,\widehat{X}_{t},\widehat{u}_{t})Z(t)+b_{u}(t,\widehat{X}_{t},\widehat{u}_{t})v(t)\right)dt \\
+\left(\sigma_{x}(t,\widehat{X}_{t},\widehat{u}_{t})Z(t)+\sigma_{u}(t,\widehat{X}_{t},\widehat{u}_{t})v(t)\right)dB_{t}, \\
Z(0)=0,
\end{cases}\tag{2.13}$$

avec $Z \in \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$, et $v(t) = u(t) - \widehat{u}(t)$.

Remarque 2.2.1 *1/ Comme les dérivées b_x, b_u, σ_x, σ_u, sont bornées et continues, alors le processus $Z\left(t\right)$ est bornée.*

2/ D'après l'hypothèse (H_1) l'équation (2.13) possède unique solution forte.

Lemme 2.2.2 *Sous l'hypothèse (H_1) pour tout $t \in \left[0, T\right]$, on a la convergence suivante*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\frac{X^\theta(t) - \widehat{X}(t)}{\theta} - Z(t)\right|^2\right] \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{2.14}$$

Preuve. Pour tout $t \in [0, T]$, on pose

$$\Gamma_\theta(t) = \frac{X^\theta(t) - \widehat{X}(t)}{\theta} - Z(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
&d\Gamma_\theta(t)\\
&= \frac{1}{\theta}\Big(b(t, X_t^\theta, u_t^\theta) - b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) - \theta b_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)Z(t) - \theta b_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)v(t)\Big)\, dt\\
&+ \frac{1}{\theta}\Big(\sigma(t, X_t^\theta, u_t^\theta) - \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) - \theta\sigma_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)Z(t) - \theta\sigma_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)v(t)\Big)\, dB_t.
\end{aligned}$$

Comme $X_t^\theta = \theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right) + \widehat{X}(t)$, et $u^\theta(t) = \widehat{u}(t) + \theta v(t)$, alors

$$\begin{aligned}
d\Gamma_\theta(t) = \frac{1}{\theta}&\Big(b(t, \widehat{X}(t) + \theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \theta v(t)) - b(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\\
&-\theta b_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)Z(t) - \theta b_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)v(t)\Big)\, dt\\
&+ \frac{1}{\theta}\Big(\sigma(t, \widehat{X}(t) + \theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \theta v(t)) - \sigma(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)\\
&-\theta\sigma_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)Z(t) - \theta\sigma_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)v(t)\Big)\, dB_t.
\end{aligned}$$

D'après le développement de Taylor avec un reste intégrale d'ordre $(m = 0)$, alors

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_\theta(t) = & \int_0^1 \Big(b_x(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \lambda\theta v(t)) \left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right) \\
& + b_u(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \theta\lambda v(t)) v(t) \Big) \, d\lambda dt \\
& - \int_0^1 \Big(b_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) Z(t) + b_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) v(t) \Big) \, d\lambda dt \\
& + \int_0^1 \Big(\sigma_x(t, \widehat{X}(t) + \theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \theta v(t)) \left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right) \\
& + \sigma_u(t, \widehat{X}(t) + \theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \theta v(t)) v(t) \Big) \, d\lambda dB_t \\
& - \int_0^1 \Big(\sigma_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) Z(t) + \sigma_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) v(t) \Big) \, d\lambda dB_t.
\end{aligned}
$$

Ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_\theta(t) = & \int_0^1 \Big[\Big(b_x(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \lambda\theta v(t)) \Gamma_\theta(t) \\
& + \Big(b_x(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \lambda\theta v(t)) - b_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) \Big) Z(t) \\
& + \Big(b_u(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \theta\lambda v(t)) - b_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) \Big) v(t) \Big) \, d\lambda \Big] \, dt \\
& + \int_0^1 \Big[\Big(\sigma_x(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \lambda\theta v(t)) \Gamma_\theta(t) \\
& + \Big(\sigma_x(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \lambda\theta v(t)) - \sigma_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t) \Big) Z(t) \\
& + \sigma_u(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \lambda\theta v(t)) - \sigma_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)) v(t) \Big) \, d\lambda \Big] \, dB_t.
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité : $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
&\left|\Gamma_\theta(t)\right|^2 \\
&\leq 2\left|\int_0^t \left(\int_0^1 (b_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(t))\Gamma_\theta(s) d\lambda\right) ds\right|^2 \\
&+ 4\left|\int_0^t \left(\int_0^1 \left(b_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s))\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. - b_x(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s)\right) Z(s) d\lambda\right) ds\right|^2 \\
&+ 4\left|\int_0^t \left(\int_0^1 \left(b_u(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s))\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. - b_u(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s)\right) v(s) d\lambda\right) ds\right|^2 \\
&+ 2\left|\int_0^t \left(\int_0^1 \sigma_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s))\Gamma_\theta(s) d\lambda\right) dB_s\right|^2 \\
&+ 4\left|\int_0^t \left(\int_0^1 \left(\sigma_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s))\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. - \sigma_x(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s)\right) Z(s) d\lambda\right) dB_s\right|^2 \\
&+ 4\left|\int_0^t \left(\int_0^1 \left(\sigma_u(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s))\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. - \sigma_u(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s)\right) v(s) d\lambda\right) dB_s\right|^2.
\end{aligned}
$$

Par passage à l'espérance, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\Gamma_\theta(t)\right|^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \left(\int_0^1 (b_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(t))\Gamma_\theta(s) d\lambda\right) ds\right|^2 \\
&+ 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \left(\int_0^1 \sigma_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s))\Gamma_\theta(s) d\lambda\right) dB_s\right|^2 \\
&+ \phi_\theta(s).
\end{aligned}
$$

Nous utilisons l'isométrie d'Itô, alors

$$
\begin{aligned}
&\phi_\theta(s) \\
&= 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (|Z(s)|\right.\right. \\
&\left.\left.\int_0^1 \left|(b_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s)) - b_x(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s))\right| d\lambda\right) ds\right)^2\right] \\
&+ 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (|v(s)|\right.\right. \\
&\left.\left.\int_0^1 \left|(b_u(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \theta\lambda v(s)) - b_u(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s))\right| d\lambda\right) ds\right)^2\right] \\
&+ 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(|Z(s)|^2\right.\right. \\
&\left.\left.\int_0^1 \left|\sigma_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s)) - \sigma_x(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s)\right|^2 d\lambda\right) ds\right] \\
&+ 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(|v(s)|^2\right.\right. \\
&\left.\left.\int_0^1 \left|\sigma_u(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s)) - \sigma_u(s, \widehat{X}_s, \widehat{u}_s)\right|^2 d\lambda\right) ds\right].
\end{aligned}
$$

Comme les dérivées b_x, b_u, σ_x, σ_u, sont bornée et continue, et d'après le théorème de convergence borné de Lebesgue, alors

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \phi_\theta(s) = 0.$$

D'aprés (1.5) et (1.6), on trouve que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\Gamma_\theta(t)\right|^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\Gamma_\theta(s)\right|^2 ds\right. \\
&\left.\int_0^t \left|\int_0^1 (b_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(t)) d\lambda\right|^2\right) ds \\
&+ 2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\Gamma_\theta(s)\right|^2 ds\right. \\
&\left.\int_0^t \left(\int_0^1 \left|\sigma_x(s, \widehat{X}(s) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(s) + Z(s)\right), \widehat{u}(s) + \lambda\theta v(s))\right| d\lambda\right)^2 ds\right] \\
&+ 0, \\
&= 2c\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\Gamma_\theta(s)\right|^2 ds\right).
\end{aligned}
$$

On trouve aussi comme $\left|\Gamma_\theta(t)\right|^2$ continue, d'après le lemme de Gronwall que

$$0 \leq \mathbb{E}\left|\Gamma_\theta(t)\right|^2 \leq \phi_\theta(s)\exp(2ct).$$

En vertu d'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy ce qui termine preuve de (2.14).

■

Lemme 2.2.3 *Sous l'hypothèse* ***(H₂)****, on a*

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta} J(u_\theta(.))\bigg|_{\theta=0} \\
&= \mathbb{E}\left[h_x(\widehat{X}(T))Z(T)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \left(\left(g_x(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)Z(T) + g_u(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t)v(t)\right) dt\right) \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Preuve. On a

$$\frac{d}{d\theta} J(u^\theta(.))\bigg|_{\theta=0} = \lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{1}{\theta}\left(J(u^\theta(.)) - J(\widehat{u}(.))\right).$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\left(J(u^{\theta}(.))-J(\widehat{u}(.))\right)\\
&=\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(\int_0^T\left(g(t,X_t^{\theta},u_t^{\theta})-g(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)\right)dt+h_x(X_T^{\theta})-h_x(\widehat{X}_T)\right).
\end{aligned}$$

En remplaçant $X_t^{\theta}=\widehat{X}(t)+\theta\left(\Gamma_{\theta}(t)+Z(t)\right)$ et $u^{\theta}(t)=\widehat{u}(t)+\theta v(t)$, dans l'expression précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\left(J(u^{\theta}(.))-J(\widehat{u}(.))\right)\\
&=\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(\int_0^T\left(g(t,\widehat{X}(t)+\theta\left(\Gamma_{\theta}(t)+Z(t)\right),\widehat{u}(t)+\theta v(t))-g(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)\right)dt\right)\\
&+\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(h_x(\widehat{X}_T+\theta\left(\Gamma_{\theta}(T)+Z(T)\right))-h_x(\widehat{X}_T)\right).
\end{aligned}$$

Par la développement de Taylor avec reste intégrale aux point (x,u), et $m=0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\left(J(u^{\theta}(.))-J(\widehat{u}(.))\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\int_0^T\int_0^1\left(g_x(t,\widehat{X}(t)+\lambda\theta\left(\Gamma_{\theta}(t)+Z(t)\right),\widehat{u}(t)+\lambda\theta v(t))\right)\right.\\
&\left(\Gamma_{\theta}(t)+Z(t)\right)d\lambda dt)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T\int_0^1\left(g_u(t,\widehat{X}(t)+\lambda\theta\left(\Gamma_{\theta}(t)+Z(t)\right),\widehat{u}(t)+\lambda\theta v(t))\right)v(t)d\lambda dt\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^1\left(h_x(\widehat{X}_T+\theta\left(\Gamma_{\theta}(T)+Z(T)\right))-h_x(\widehat{X}_T)\right)(\Gamma_{\theta}(T)+Z(T)))d\lambda\right)\\
&=I_1(\theta)+I_2(\theta).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\lim_{\theta\longrightarrow 0} I_1(\theta) \\
&= \lim_{\theta\longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 \left(g_x(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \lambda\theta v(t))\right)\right. \\
&\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right) d\lambda dt] \\
&+ \lim_{\theta\longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(\int_0^T \int_0^1 \left(g_u(t, \widehat{X}(t) + \lambda\theta\left(\Gamma_\theta(t) + Z(t)\right), \widehat{u}(t) + \lambda\theta v(t))\right) v(t) d\lambda dt\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence bornée de Lebesgue, et comme g_x , g_u sont bornées et continues, alors

$$\lim_{\theta\longrightarrow 0} I_1(\theta) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(g_x(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t))Z(t) + g_u(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t))v(t)\right) dt\right).$$

De plus

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\longrightarrow 0} I_2(\theta) &= \lim_{\theta\longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(\int_0^1 \left(h_x(\widehat{X}_T + \theta\left(\Gamma_\theta(T) + Z(T)\right))\right)(\Gamma_\theta(T) + Z(T))d\lambda\right) \\
&= \mathbb{E}\left(h_x(\widehat{X}_T)Z(T)\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
&\lim_{\theta\longrightarrow 0} \frac{1}{\theta}\left(J(u^\theta(.)) - J(\widehat{u}(.))\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(g_x(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t))Z(t) + g_u(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t))v(t)\right) dt + h_x(\widehat{X}_T)Z(T)\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Comme $\widehat{u}_t$ un contrôle optimal, alors

$$J(\widehat{u}(.)) \leq J(u^\theta(.)).$$

Donc

$$\frac{1}{\theta}\left(J(u^{\theta}(.)) - J(\widehat{u}(.))\right) \geq 0.$$

D'après l'expression précédent, et (2.16), on obtient

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(g_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))Z(t) + g_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))v(t)\right) dt\right) + \mathbb{E}\left(h_x(\widehat{X}_T)Z(T)\right) \geq 0. \tag{2.17}$$

Ce que termine la démonstration. ■

Equation adjoint et condition nécessaire d'optimalité

Soit l'équation adjointes associé à l'équation (2.1) :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t,\widehat{X}_t,p_t,q_t,\widehat{u}_t)dt + q_t dB_t, \\ p_T = h_x(\widehat{X}_T), \end{cases} \tag{2.18}$$

où $p, q \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$.

Remarque 2.2.2 *Il existe un unique solution forte $(p,q) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ de (2.18), voir [3].*

On définit la fonction d'Hamiltonien par

$$H(t,\widehat{X}_t,p_t,q_t,\widehat{u}_t) = g(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t) + p_t b(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t) + q_t\sigma(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t).$$

Théorème 2.2.1 (Condition nécessaire d'optimalité) *Soient $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F})_{t\geq 0},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(B_t)_{t\geq 0}$ un Mouvement brwonien, si $(\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)$ solution optimal du problème (2.1) , (2.2) , (2.4), alors*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_u(t,\widehat{X}_t,p_t,q_t,\widehat{u}(t))v(t)dt\right) \geq 0, \tag{2.19}$$

avec $(p,q) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ *c'est la solution d'équation adjointe* (2.18).

Preuve. Nous appliquons la formule d'intégration par parties d'Itô sur $\mathbb{E}\left(p_t Z(t)\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(d\left(p_t Z(t)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(dp_t Z(t)\right) + \mathbb{E}\left(p_t dZ(t)\right) + \mathbb{E}\left(\langle dp_t, dZ(t)\rangle\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(-H_x(t,\widehat{X}_t,p_t,q_t,\widehat{u}_t)dt + q_t dB_t\right) Z(t)\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(p_t\left(b_x(t,\widehat{X}_t,p_t,q_t,\widehat{u}_t)Z(t) + b_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right)dt\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(p_t\left(\sigma_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + \sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right)dB_t\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(q_t\left(\sigma_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + \sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right)dt\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left[-g_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) - p_t b_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) - q_t\sigma_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t)\right]dt\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(p_t\left(b_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + b_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right)dt\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(q_t\left(\sigma_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + \sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right)dt\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(-g_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + p_t b_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t) + q_t\sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right)dt\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(p_T Z(T)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(p_0 Z(0)\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(-g_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + p_t b_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(T) + q_t\sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right)dt\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(-g_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + p_t b_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t) + q_t\sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right)dt\right).
\end{aligned}$$

Avec $p_T = h_x(\widehat{X}_T)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(h_x(\widehat{X}_T)Z(T)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(-g_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + p_t b_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t) + q_t\sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right) dt\right).
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(g_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))Z(t) + g_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))v(t)\right) dt\right) + \mathbb{E}\left[\left(h_x(\widehat{X}_T)Z(T)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(g_x(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))Z(t) + g_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))v(t)\right) dt\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\int_0^T \left[-g_x(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)Z(t) + p_t b_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t) + q_t\sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right] dt\right) \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left(g_u(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t))v(t) + p_t b_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t) + q_t\sigma_u(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t)v(t)\right) dt \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t,\widehat{X}_t,p_t,q_t,\widehat{u}(t))v(t)dt\right].
\end{aligned}
$$

D'après (2.17), donc

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t,\widehat{X}_t,p_t,q_t,\widehat{u}(t))v(t)dt\right] \geq 0.
$$

On peut prendre $v(t) = u(t) - \widehat{u}(t)$, alors on obtient

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t,\widehat{X}_t,p_t,q_t,\widehat{u}(t))(u(t)-\widehat{u}(t))dt\right] \geq 0.
$$

Ce que termine la démonstration. ■

Chapitre 3

Résultats préliminaires sur le problème de performance au risque sensible

Dans ce chapitre, nous introduisons le modèle au risque sensible avec une nouvelle méthode de transformation du processus adjoint, voir [4].

3.1 Formulation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard. A est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}$. et T un nombre réel strictement positif. Considérons maintenant l'EDS suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $x \in L^2$, et $b : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonctionne de coût est donné par

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\exp \varepsilon \left(h(X_T) + \int_0^T g(t, X_t, u_t) dt \right)\right],$$

où $g : [0,T] \times \mathbb{R} \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\varepsilon \in [0,1]$.

Définition 3.1.1 (Contrôle admissible) *On appelle contrôle admissible tout processus $u(t)_{t\in[0,T]}$ appartient $L^2([0,T] \times \Omega)$ à valeur dans A,*

$$U_{ad} = \left\{ u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow A \ / \ \mathbb{E}\int_0^T |u|^2 \, ds{<}\infty \right\}.$$

Définition 3.1.2 (Contrôle optimal) *Le rôle de contrôle optimal est minimiser une fonction coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U_{ad}. On dit que le contrôle $\widehat{u}$ est optimal si*

$$J(\widehat{u}) = \inf J(u) \ \forall u \in U_{ad}.$$

Notation 3.1.1 *1/ Soit $S^2([0,T], \mathbb{R})$ est l'ensemble dans lequel processus Y est progressivement mesurables, a valeur dans $\mathbb{R}^k$, tel que $\|Y\|_{S^2}^2 = \mathbb{E}(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2) < \infty$.*

2/ $\mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R})$ l'ensemble des processus aléatoires Y un-dimensionnels mesurables qui satisfont $\|Y\|_{\mathcal{M}^2}^2 = \mathbb{E}(\int_0^T |Y_t|^2 \, dt) < \infty$.

3.2 Equations adjointes

Soit le processus auxiliaire ξ qu'est la solution de l'EDS suivant

$$\begin{cases} d\xi_t = g(t, X_t, u_t)dt, \\ \xi_0 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}$, on obtient le problème de contrôle suivant

$$\begin{cases} \begin{cases} d\xi_t = g(t, X_t, u_t)dt, \\ dX_t = b(t, X_t, u)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t, \\ \xi_0 = 0,\ X_0 = \zeta, \end{cases} \\ \text{objet dans} \\ J(u) = \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(X_T) + \int_0^T g(t, X_t, u_t)dt\right)\right], \\ J(\widehat{u}) = \inf\limits_{0\leq t\leq T}(J(u)). \end{cases} \tag{3.3}$$

On définit A_T^ε et Φ_T^ε par

$$\begin{aligned} A_T^\varepsilon &= \exp\varepsilon\left(h(X_T) + \int_0^T g(t, X_t, u_t)dt\right), \\ \Phi_T^\varepsilon &= h(X_T) + \int_0^T g(t, X_t, u_t)dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Hypothèse (H$_3$)

◁ Les fonctions b, σ, g et h de classe $C^1([0,T], \mathbb{R})$ par rapport à x.

◁ Les fonctions b, σ et g et toutes leurs dérivées sont bornées.

◁ La dérivée de h, g sont bornées par $C(1 + |x|)$.

Lemme 3.2.1 *On suppose que l'hypothèse sont vérifiées. Alors il existe deux pairs* *uniques de processus $\mathcal{F}_t^B-$adapté $(p_1^\varepsilon, q_1^\varepsilon) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ et $(p_2^\varepsilon, q_2^\varepsilon) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$, que sont las solutions des systèmes suivantes*

$$\begin{cases} p_1^\varepsilon(t) = q_1^\varepsilon(t) dB_t, \\ q_1^\varepsilon(T) = \varepsilon A_T^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} p_2^\varepsilon(t) = -\left(g_x(t, X_t, u_t) p_1^\varepsilon(t) + b_x(t, X_t, u_t) p_2^\varepsilon(t) + \sigma_x(t, X_t, u_t) q_2^\varepsilon(t)\right) dt \\ +q_2^\varepsilon(t) dB_t, \\ q_2^\varepsilon(T) = \varepsilon h_x(X_T) A_T^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{2} \sup |p_i^\varepsilon(t)|^2 + \int_0^T \left(|q_1^\varepsilon(t)|^2 + |q_2^\varepsilon(t)|^2\right) dt\right] < \infty.$$

Preuve. On pose $p_1^\varepsilon(t)$ le processus adjoint associé à l'EDS (3.2), $p_2^\varepsilon(t)$ le processus adjoint associé à l'EDS (3.1), on a

$$\begin{cases} dp_1^\varepsilon(t) = -H_\xi^\varepsilon(t, X_t, p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon, q_2^\varepsilon, u_t) dt + q_1^\varepsilon(t) dB_t, \\ p_1^\varepsilon(T) = \Gamma_\xi(T) = \varepsilon A_T^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} dp_2^\varepsilon(t) = -H_x^\varepsilon(t, X_t, p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon, q_2^\varepsilon, u_t) dt + q_2^\varepsilon(t) dB_t, \\ p_2^\varepsilon(T) = \Gamma_x(T) = \varepsilon h_x(X_T) A_T^\varepsilon. \end{cases}$$

Avec $J(u) = \mathbb{E}(\Gamma(\xi_T, X_T))$, et

$$H^\varepsilon(t, X_t, p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon, q_2^\varepsilon, u_t) = g(t, X_t, u_t) p_1^\varepsilon(t) + b(t, X_t, u_t) p_2^\varepsilon(t) + \sigma(t, X_t, u_t) q_2^\varepsilon(t).$$

Les dérivées de la fonctionnelle Hamiltonienne H^ε par rapport le composante ξ est $H_\xi^\varepsilon(t, X_t, p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon, q_2^\varepsilon, u_t) = 0$, et par raport le composante x est donner par $H_x^\varepsilon(t, X_t, p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon, q_2^\varepsilon, u_t) = g_x(t, X_t, u_t) p_1^\varepsilon(t) + b_x(t, X_t, u_t) p_2^\varepsilon(t) + \sigma_x(t, X_t, u_t) q_2^\varepsilon(t)$. Puis, on remplace les dérivées de l'Hamiltonienne dans les fonctions adjointes

(3.7), on obtient

$$\begin{cases} dp_1^\varepsilon(t) = 0 + q_1^\varepsilon(t)dB_t, \\ p_1^\varepsilon(T) = \Gamma_\xi(T) = \varepsilon A_T^\varepsilon, \end{cases}$$
$$\begin{cases} dp_2^\varepsilon(t) = -\left(g_x(t,X_t,u_t)p_1^\varepsilon(t) + b_x(t,X_t,u_t)p_2^\varepsilon(t) + \sigma_x(t,X_t,u_t)q_2^\varepsilon(t)\right)dt \\ +q_2^\varepsilon(t)dB_t, \\ p_2^\varepsilon(T) = \Gamma_x(T) = \varepsilon h_x(X_T)A_T^\varepsilon. \end{cases}$$

Donc, on soit arrivé à (3.5). ■

Soit l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante

$$\begin{cases} dp_1^\varepsilon(t) = q_1^\varepsilon(t)dB_t, \\ \quad p_1^\varepsilon(T) = \varepsilon A_T^\varepsilon. \end{cases} \tag{3.8}$$

La solution explicit de l'EDSR (3.8), donnée par $p_1^\varepsilon(t) = \varepsilon \mathbb{J}^\varepsilon(t)$, et

$\mathbb{J}^\varepsilon(t) = \mathbb{E}\left[A_T^\varepsilon \mid \mathcal{F}_t^B\right]$, pour tout $t \in [0,T]$.

Lemme 3.2.2 *On suppose l'hypothèse (H_3) satisfaits, alors le processus*

$$\mathbb{J}^\varepsilon(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(h(X_T) + \int_0^T g(t,X_t,u_t)dt\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right],$$

est uniformément bornée.

Remarque 3.2.1 *Il existe un unique solution $(p_1^\varepsilon, q_1^\varepsilon) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ de l'EDSR (3.8).*

Preuve. D'après l'hypothèse (H_3), on a les fonctions g, et h sont bornées par

$\lambda > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\left| h(X_T) + \int_0^T g(t, X_t, u_t)dt \right| &\leq \left(\lambda + \lambda \int_0^T dt \right) \\ &= \lambda \left(1 + T \right).\end{aligned}$$

Alors

$$-\lambda \left(1 + T \right) \leq h(X_T) + \int_0^T g(t, X_t, u_t)dt \leq \lambda \left(1 + T \right).$$

Par passage à l'exponentielle dans les trois membre du l'inégalité précédente, on obtient

$$0 < \exp \varepsilon \left(-\lambda \left(1 + T \right) \right) \leq A_T^\varepsilon \leq \exp \varepsilon \left(\lambda \left(1 + T \right) \right).$$

Par passage l'espérance conditionnelle dans les trois membre de l'inégalité précédente, on trouve

$$0 < \mathbb{E} \left[A_T^\varepsilon \mid \mathcal{F}_t^B \right] \leq \mathbb{E} \left[\exp \varepsilon C \left(1 + T \right) \mid \mathcal{F}_t^B \right], \ \forall t \in [0, T].$$

Donc

$$0 < \mathbb{J}^\varepsilon(t) \leq \exp \varepsilon \lambda \left(1 + T \right) = \rho, \ \forall t \in [0, T].$$

Alors le processus $\mathbb{J}$ est un processus uniformément borné. ■

Lemme 3.2.3 *Le processus* $(\Lambda_t^\varepsilon, l_t) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2$ *est la solution de l'EDSR quadratique suivante*

$$\begin{cases} d\Lambda_t^\varepsilon = -\left(g(t, X_t, u_t) + \dfrac{\varepsilon}{2} \left| l_t \right|^2 \right) dt + l_t dB_t, \\ \Lambda_T^\varepsilon = h(\widehat{X}_T), \end{cases} \tag{3.9}$$

le système (3.9) équivalent à dire que

$$\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon) = \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_t^T g(s, X_s, u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]. \tag{3.10}$$

Preuve. Premièrement, nous avons commencé par l'EDSR quadratique (3.9). Puis, on applique la 1ère formule d'Itô sur $\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)$. Pour $x = \Lambda_t^\varepsilon$, on pose $f(x) = \exp(\varepsilon x)$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x) = \varepsilon \exp(\varepsilon x)$ et
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = \varepsilon^2 \exp(\varepsilon x)$, donc

$$d\left(\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\right) = \varepsilon\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)d\Lambda_t^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)d\left\langle\Lambda^\varepsilon\right\rangle_t.$$

Nous remplaçons $d\Lambda_t^\varepsilon = -\left(g(t, X_t, u_t) + \frac{\varepsilon}{2}\left|l_t\right|^2\right)dt + l_t dB_t$, et $d\left\langle\Lambda^\varepsilon\right\rangle_t = \left|l_t\right|^2 dt$, dans l'expression précédente donc

$$\begin{aligned}
d\left(\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\right) &= \varepsilon\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\left(-\left(g(t, X_t, u_t) + \frac{\varepsilon}{2}\left|l_t\right|^2\right)dt + l_t dB_t\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\varepsilon^2\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\left(l_t\right)^2 dt \\
&= \varepsilon\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\left(\left(-g(t, X_t, u_t) - \frac{\varepsilon}{2}\left|l_t\right|^2\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\left(l_t\right)^2\right)dt \\
&\quad + \varepsilon\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)l_t dB_t \\
&= -\varepsilon\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)g(t, X_t, u_t)dt + \varepsilon\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)l_t dB_t.
\end{aligned}$$

Multiplier les deux membres dans l'expression précédente par $\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right) d\left(\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\right)\\
&+\varepsilon\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right) g(t,X_t,u_t)dt\\
&=\varepsilon\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right) l_t dB_t.
\end{aligned}$$

Comme $d\left(\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right)\right)=\varepsilon g(t,X_t,u_t)\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right)dt$, donc

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right) d\left(\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\right)\\
&+d\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right)\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\\
&=d\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds+(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\right)\\
&=\varepsilon\exp\left(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon+\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right) l_t dB_t.
\end{aligned}$$

En intégrant de t à T, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_t^T d\exp\left(\varepsilon\int_0^s g(r,X_r,u_r)dr+(\varepsilon\Lambda_s^\varepsilon)\right)\\
&=\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s,X_s,u_s)ds+(\varepsilon\Lambda_T^\varepsilon)\right)\\
&-\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds+(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\right)\\
&=\varepsilon\int_t^T\exp\left(\varepsilon\Lambda_s^\varepsilon+\varepsilon\int_0^s g(r,X_r,u_r)dr\right) l_s dB_s.
\end{aligned}$$

Par passage à $\mathcal{F}_t^B-$espérance conditionnelle dans l'expression précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s,X_s,u_s)ds+(\varepsilon\Lambda_T^\varepsilon)\right)\mid\mathcal{F}_t^B\right]\\
&-\mathbb{E}\left[\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds+(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\right)\mid\mathcal{F}_t^B\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\varepsilon\int_t^T\exp\left(\varepsilon\Lambda_s^\varepsilon+\varepsilon\int_0^s g(r,X_r,u_r)dr\right)l_s dB_s\right].
\end{aligned}$$

On a $\exp\left(\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds+\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\right)$ est $\mathcal{F}_t^B-$mesurable

et pour que $\varepsilon\int_t^T\exp\left(\varepsilon\Lambda_s^\varepsilon+\varepsilon\int_0^s g(r,X_r,u_r)dr\right)l_s dB_s$ est martingale, alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s,X_s,u_s)ds+(\varepsilon\Lambda_T^\varepsilon)\right)\mid\mathcal{F}_t^B\right]\\
&=0+\exp\int_0^t(\varepsilon g(s,X_s,u_s)ds+(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon))\\
&=\exp\varepsilon\left(\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right)\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Comme $\exp\varepsilon\left(\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right)$ est $\mathcal{F}_t^B-$mesurable, donc

$$\begin{aligned}
\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)=\mathbb{E}&\left[\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s,X_s,u_s)ds+(\varepsilon\Lambda_T^\varepsilon)\right)\mid\mathcal{F}_t^B\right]\\
\mathbb{E}&\left[\exp\varepsilon\left(-\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right)\mid\mathcal{F}_t^B\right].
\end{aligned}$$

D'après la définition de la condition terminal de l'EDSR (3.9), de l'équation ci dessus peut être reécrire la partie gauche

$$\begin{aligned}
&\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s,X_s,u_s)ds + \varepsilon(h(\widehat{X}_T))\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]\\
&\times \mathbb{E}\left[\exp\left(-\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\varepsilon\int_0^T g(s,X_s,u_s)ds - \varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds + \varepsilon(h(\widehat{X}_T))\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_t^T g(s,X_s,u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon) = \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_t^T g(s,X_s,u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right].$$

Donc le premier implique est vrai.

D'une autre part, on suppose que (3.10) est vrai, cela signifie que :

$$\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon) = \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_t^T g(s,X_s,u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right].$$

En multipliant les deux membres de l'expression précédent par $\exp\varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds$, alors

$$\begin{aligned}
&\exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon)\varepsilon\exp\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\\
&= \exp(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon + \varepsilon\int_0^t g(s,X_s,u_s)ds)\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_t^T g(s,X_s,u_s)ds + \int_0^t g(s,X_s,u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_0^T g(s,X_s,u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right] = \mathbb{E}\left[A_T^\varepsilon \mid \mathcal{F}_t^B\right] = \mathbb{J}^\varepsilon(t).
\end{aligned}$$

Si $t = 0$, alors $\mathbb{E}\left[A_T^\varepsilon \mid \mathcal{F}_0^B\right] = \mathbb{E}\left[\exp \varepsilon \left(h(\widehat{X}_T) + \int_0^T g(s, X_s, u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_0^B\right] = \exp(\varepsilon \Lambda_0^\varepsilon)$.

Soient B_t un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{F}_t^B$ la filtration naturelle de B_t. Si A_T^ε une variable aléatoire $\mathcal{F}_t^B-$mesurable, et de carré intégrable. D'après le théorème de représentation des martingales. Il existe un processus K_t prévisible et $\mathcal{F}_t^B-$adapté, tel que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[A_T^\varepsilon \mid \mathcal{F}_t^B\right] &= \mathbb{E}\left[A_T^\varepsilon \mid \mathcal{F}_0^B\right] + \int_0^t K_s dB_s \\
&= \exp(\varepsilon \Lambda_0^\varepsilon) + \int_0^t K_s dB_s.
\end{aligned}$$

D'où

$$\exp\left(\varepsilon \Lambda_t^\varepsilon + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right) - \exp(\varepsilon \Lambda_0^\varepsilon) = \int_0^t K_s dB_s.$$

Donc

$$\int_0^t d\exp\left(\varepsilon \Lambda_s^\varepsilon + \varepsilon \int_0^s g(r, X_r, u_r)dr\right) = \int_0^t K_s dB_s. \tag{3.11}$$

On applique la 2ème formule d'Itô sur $\exp(\varepsilon \Lambda_t^\varepsilon + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)$,

pour $x = \Lambda_t^\varepsilon$, on pose $f(t,x) = \exp(\varepsilon x + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \varepsilon g(t, X_t, u_t) \exp(\varepsilon x + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \varepsilon \exp(\varepsilon x + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varepsilon^2 \exp(\varepsilon x + \varepsilon \displaystyle\int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)$, alors

$$\begin{aligned}
&d \exp\left(\varepsilon \Lambda_t^\varepsilon + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right) \\
&= \varepsilon g(t) \exp \varepsilon \left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)\right) dt \\
&+ \varepsilon \exp \varepsilon \left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right) d\Lambda_t^\varepsilon \\
&+ \frac{\varepsilon^2}{2} \exp \varepsilon \left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right) d\left\langle \Lambda^\varepsilon \right\rangle_t \\
&= \varepsilon \exp \varepsilon \left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right) \left(g(t, X_t, u_t)dt + d\Lambda_t^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} d\left\langle \Lambda^\varepsilon \right\rangle_t\right).
\end{aligned}$$

D'après (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon \left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right)\right) K_t dB_t \\
&= \left(g(t, X_t, u_t)dt + d\Lambda_t^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} d\left\langle \Lambda^\varepsilon \right\rangle_t\right).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Comme $\exp\left(-\varepsilon \left(\Lambda_t^\varepsilon + \displaystyle\int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right)\right) K_t dB_t$ est martingale

$$d\left\langle \Lambda^\varepsilon \right\rangle_t = \left[\frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon \left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right)\right) K_t\right]^2 dt =: \left|l_t\right|^2 dt. \tag{3.13}$$

On remplace (3.13) par (3.12), nous trouvons

$$l_t dB_t = g(t, X_t, u_t)dt + d\Lambda_t^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \left|l_t\right|^2 dt.$$

Finalement

$$\begin{cases}
d\Lambda_t^\varepsilon = -\left(g(t, X_t, u_t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \left|l_t\right|^2\right) dt + l_t dB_t, \\
\Lambda_T^\varepsilon = h(\widehat{X}_T).
\end{cases}$$

Donc, l'équivalent existe. ■

Lemme 3.2.4 *La martingale $\mathbb{J}^{\varepsilon}(t)$ peut être réécrire sous la forme suivante*

$$\mathbb{J}^{\varepsilon}(t) = \exp\left(\varepsilon\Lambda_t^{\varepsilon} + \varepsilon\int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}^{\varepsilon}(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_0^T g(t, X_t, u_t)dt\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds + \int_t^T g(s, X_s, u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_t^T g(s, X_s, u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right] \\
&\times \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(\int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]
\end{aligned}$$

Comme $\exp\varepsilon\left(\int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right)$ est $\mathcal{F}_t^B-$mesurable, alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{J}^{\varepsilon}(t) \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\varepsilon\left(h(\widehat{X}_T) + \int_t^T g(s, X_s, u_s)ds\right) \mid \mathcal{F}_t^B\right]\exp\varepsilon\left(\int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right).
\end{aligned}$$

D'après la formule (3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}^{\varepsilon}(t) &= \exp(\varepsilon\Lambda_t^{\varepsilon})\exp\varepsilon\int_0^t g(s, X_s, u_s)ds \\
&= \exp\left(\varepsilon\Lambda_t^{\varepsilon} + \varepsilon\int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient le résultat demandé. ■

Le processus $(\Lambda_t^{\varepsilon}, l_t)_{t\geq 0}$ est la solution unique de l'EDSR (3.9), d'où $l_t = \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon\left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right)\right) K_t$, et $\mathbb{E}\left(\int_0^T |l_t|^2 \, dt\right) < 0$.

Lemme 3.2.5 *On particulier,* $\mathbb{J}^\varepsilon(t)$ *est la solution de l'EDSR suivante*

$$\begin{cases} d\mathbb{J}^\varepsilon(t) = \varepsilon \mathbb{J}^\varepsilon(t) l_t dB_t, \\ \mathbb{J}^\varepsilon(t) = A_T^\varepsilon. \end{cases}$$

En plus, le processus $\mathbb{J}^\varepsilon(t)$ *définit sur* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ *donné par*

$$\frac{\mathbb{J}^\varepsilon(t)}{\mathbb{J}^\varepsilon(0)} = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^t |l_s|^2 \, ds + \varepsilon \int_0^t l_s dB_s\right), \ 0 \leq t \leq T.$$

Preuve. On applique la 2ème formule d'Itô sur
$\mathbb{J}^\varepsilon(t) = \exp\left(\varepsilon \Lambda_t^\varepsilon + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} d\mathbb{J}^\varepsilon(t) &= \varepsilon \exp \varepsilon\left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right) \\ &\times \left(g(t, X_t, u_t)dt + d\Lambda_t^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} d\left\langle \Lambda^\varepsilon \right\rangle_t\right) \\ &= \varepsilon \exp \varepsilon\left(\varepsilon \Lambda_t^\varepsilon + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right) g(t, X_t, u_t)dt \\ &+ \exp \varepsilon\left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right) \\ &\times \left(-\left(\varepsilon g(t, X_t, u_t)dt + \frac{\varepsilon^2}{2} |l_t|^2\right) dt + \varepsilon l_t dB_t\right) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \exp \varepsilon\left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right) |l_t|^2 \, dt \\ &= \exp \varepsilon\left(\Lambda_t^\varepsilon + \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds)dt\right) l_t dB_t. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_0^t d\Lambda_t^\varepsilon &= \Lambda_t^\varepsilon \\ &= \Lambda_0^\varepsilon - \int_0^t \left(g(s, X_s, u_s)dt + \frac{\varepsilon}{2} |l_t|^2 \right) dt + \int_0^t l_t dB_t.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Nous remplaçons (3.14) par $\mathbb{J}^\varepsilon(t) = \exp\left(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right)$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{J}^\varepsilon(t) &= \exp\left(\varepsilon\Lambda_t^\varepsilon + \varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right) \\ &= \exp\left(\varepsilon\left(\Lambda_0^\varepsilon - \int_0^t \left(g(s, X_s, u_s)dt + \frac{\varepsilon}{2}|l_t|^2\right)dt + \int_0^t l_t dB_t\right)\right. \\ &\left.+\varepsilon \int_0^t g(s, X_s, u_s)ds\right) \\ &= \exp\varepsilon\left(\Lambda_0^\varepsilon - \int_0^t \frac{\varepsilon}{2}|l_t|^2 dt + \int_0^t l_t dB_t\right).\end{aligned}$$

Mais $\mathbb{J}^\varepsilon(0) = \exp\varepsilon(\Lambda_0^\varepsilon)$, donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{J}^\varepsilon(t)}{\mathbb{J}^\varepsilon(0)} &= \exp\varepsilon\left(\Lambda_0^\varepsilon - \int_0^t \frac{\varepsilon}{2}|l_t|^2 dt + \int_0^t l_t dB_t - \Lambda_0^\varepsilon\right) \\ &= \exp\varepsilon\left(-\int_0^t \frac{\varepsilon}{2}|l_t|^2 dt + \int_0^t l_t dB_t\right) := L^\varepsilon(t),\ t \in [0, T].\end{aligned}$$

D'où la réponse. ■

Remarque 3.2.2 *Les lemmes 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, et 3.2.5 sont essentiellement nous permet d'établir la formule explicite du processus adjoint $\widetilde{p_2}(t)$ qui associée à le problème du contrôle optimal (3.1), (2.2), et (2.4), avec $\widetilde{H^\varepsilon}$ est une fonction Hamiltonien assocée à (3.1), (2.2), (2.4).*

Conclusion et out look

Nous considérons un problème de contrôle optimal avec des fonctionnelles de performance au risque sensibles où l'ensemble du domaine de contrôle est nécessairement convexe, et le système est régi par des équations différentielles stochastique (3.1). Plus précisément, nous allons établissons les conditions nécessaires d'optimalité pour le principe du maximum stochastique avec un problème de contrôle au risque sensible (3.1), (2.2), (2.4).

Bibliographie

[1] Bensoussan, A. (1982)., Lectures on stochastic contr. In Lect. Notes in Math.972,Springer-Varlag, pp. 1-62.

[2] Breton, C. (2006)., Processus Gaussiens. Master IMA 2ème année, Université de La Rochelle.

[3] Briand, P. Mars (2001)., Equations différentielles stochastiques rétrogrades, INRIA institut.

[4] Chala, A., Digheche, A., Mansoul, B. (2023)., Necessary and Sufficient Optimality Conditions for Relaxed Control Problem with Risk Sensitive Performance. Journal of Appled Probability and Statistics. Volume 18, Number 1. pp 001-018.

[5] Jeanblanc, M. (2005)., Exercices de Calcul Stochastique. Université d'EVERY. pp 88.

[6] Kushner, H. J. (1972)., Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems, SIAM J. Control. pp 550-565.

[7] Hafayed, M. (2020)., Esperance conditionnelle et ses propriétés. Université Moha med khider Biskra. pp 28.

[8] Øksendal, B., Sulem, A. (2004)., Applied Stochastic Control of Jump Diffusions, Sprin ger, Berl.

[9] Pardoux, E., Peng , S. (1990)., Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems Cantrol,no. 1, pp 55-61

[10] Pontryagin, S. L., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R. V., Mischenko, E. F. (1962)., The mathematical Theory of Optima Control Processes. John Wiley . New York.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions le problème de contrôle stochastique, pour les systèmes régis par des équations différentielles stochastiques, avec le domaine de contrôle doit être convexe. Nous obtenons les conditions optimales nécessaires à partir de deux problèmes différents.

Le premier problème est centré sur le problème de contrôle d'une fonction de coût classique, et la deuxième partie se concentre sur le problème de contrôle avec un coût de performance au risque sensible

Summary

In this dissertation, we study the stochastic control problem, for systems governed by stochastic differential equations, where the control domain must be convex. We establish the necessary optimal conditions from two different problems.

The first problem focuses on the control problem of a classical, and the second part focuses on the control problem with a risk-sensitive performance cost

ملخص

في هذه الرسالة، ندرس مشكلة التحكم العشوائية بالنسبة للأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية، في مجال تحكم محدب. نحصل على الشروط المثلى اللازمة بمسألتين مختلفتين.

أين نخصص الجزء الأول لمسألة مشكلة التحكم لدالة تكلفة عادية، اما الجزء الثاني ذات مشكلة تحكم لدالة تكلفة أكثر حساسية