-République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Nassi Nesrine

Titre :

Les dérivèes par rapport à une mesure de probabilité et contrôle optimal

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Lakhdari Imad Eddine**	**U. Biskra**	**Président**
Pr.	**Hafayed Mokhtar**	**U. Biskra**	**Encadreur**
Dr.	**Korichi Fatiha**	**U. Biskra**	**Examinatrice**

Juin2023

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes trés chers parents pour leurs sacrifices et leur soutien moral tout le long de mon cursus, ma chére mére qui m'a conseille, mon pére qui m'a encourgé.

A mes trés fréres et ma soeur à qui je souhaite une grande réussite dans leurs vies.

A'toute la famille Nassi.

Tous mes amis.

A' tous ceux qui ont contribué, de loin ou de prés, à la réalisation de ce projet.

NASSI NESRINE

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie Dieu, le Tout-Puissant, de m'avoir donné la force,

de survivre, ainsi que l'audace de sur monter toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer ma gratitude au directeur de recherche

★ Pr. Hafayed Mokhtar★

pour sa supervision de ce travail,

et je le remercie pour sa présence et ses précieux conseils.

Mes remerciements vont également aux membres du jury :

★ Dr.Lakhdari Imad Eddine★ & ★ Dr.Korichi Fatiha★

pour leur acceptation d'étudier ce travail.

Je remercie profondément :

★Ma famille★

★Ma amis★

ainsi que les personnesqui m'ont soutenu

de prés ou de loin

lors de la réalisation de ce memoire.

Merci.

Table des matières

Notations et Symbols

Tout d'abord, nous précisons les abrévations , les symboles utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$	:	Espace de probabilité filtré..
$B = (B(t))_{t\geq 0}$	:	Mouvement Brownien.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
$EDSR$	:	Equation différentielle stochastique rétrograde..
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	Produit scalaire.
C^1	:	Ensemble de fonction dérivable et dont la dérivée continue.
$J(\cdot)$	:	La fonction de coût à minimiser.
$p(t)$	:	Processus adjoint.
$\top$	:	Transposé.
$Tr(\cdot)$	:	Trace$(\cdot)$
R	:	Ensemble des contrôles relaxés.
$H(t, x, u, p, q)$	:	Hamiltonian.
$\mathcal{U}$	:	Ensemble des contrôles admissibles.
v	:	contrôle admissible.
u	:	contrôle optimal.

Introduction

Dans ce travail, on considére un probléme de contrôle stochastique de type mean-field, où le system est gouverné par des équations differentielle stochastiques de type mean-field (McKean-Vlasov) de la forme suivante : $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} dx^{\upsilon}(t) = f\left(t, x^{\upsilon}(t), P_{x^{\upsilon}(t)}, \upsilon(t)\right) dt + \sigma\left(t, x^{\upsilon}(t), P_{x^{\upsilon}(t)}, \upsilon(t)\right) dB(t) \\ x^{\upsilon}(0) = x_0, \quad t \in [0, T], \end{cases},$$

où les coefficient depend de temps,

Le coût a minimiser est de type mean-field de la forme :

$$J(\upsilon(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T l\left(t, x^{\upsilon}(t), P_{x^{\upsilon}(t)}, \upsilon(t)\right) dt + \psi\left(x^{\upsilon}(t), P_{x^{\upsilon}(t)}\right)\right]$$

Nous étudions un probléme de contrôle stochastique qui consistant à minimiser le coût défini ci dessus J sur un ensemble de controle admisible noté $\mathcal{U}$. Un contrôle admisible $u \in \mathcal{U}$ est appelé optimal si $J(u(\cdot)) = \inf_{\upsilon \in \mathcal{U}} J(\upsilon(\cdot))$.

Dans ce travail, notre objectif et d'établir des conditions nécéssaires d'optimalité sous forme d'un principe du maximum stochastique de Pontryagin. Le domain de controle est supposé convexe.

Dans ce qui suit, on donne une brévé descripition de ce mémoire.

► Dans le premier chapitre, on donne un bref rappel sur la théorie du calcul stochastique qui nous permet d'étudier le principe du maximum stochastique pour les problémes de contrôle optimal.

► Dans le deuxiéme chapitre, on s'intéresse au probléme de controle stochastique ,nous commençons par présenter les résultats principaux des contrôles stochastique de façon générale. On décrit briévement les différentes méthodes de résolutions du probléme de contrôle stochastique, les bien-connues, qui sont la méthode de la programmation dynamique (Principe de Bellman) et le principe du maximum de pontryagin.

► Dans Le troisiéme chapitre, nous avons présenté le principe du maximum stochastique de Bensoussan. Ce principe conduit à établir des conditions necessaires d'optimalité où le domaine de controle est supposé convexe. Le system étudié est gouverné par des équations differentielles stochastiques controllées. Le coefficient de diffusion est controllé. Cette étude nous permis de voir de prés les différentes étapes de calcul pour établir ces conditions.

►Dans le dernier chapitre, nous prouvons les conditions nécessaires d'optimalité pour notre probléme de contrôle pour des équations différentielles stochastiques gouvernées par des EDSs controllées de type McKean-Vlasor. La preuve est basée sur les dérivées par rapport à la mesure de probabilité et la perturbation convexe avec quelques proprietés et la formule d'Itô associée.

Chapitre 1

Rappel général de calcul stochastique

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les outils principaux du calcul stochastique,qui seront utiles tout au long de ce mémoire. On s'intéresse en particulier aux quelques résultats de base reposant sur la théorie des processus stochastique, le mouvement Brownien, processus d'Ito, les Equations différentielles stochastiques.

1.1 processus stochastique

Définition 1.1.1 ***(Filtration)*** *On appelle filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$, *une famille croissante de sous tribu de* $\mathcal{F}$. $(ie$ *pour tout* $s \leq t, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F})$.

Définition 1.1.2 ***(Filtration naturelle)*** *Soit* $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un processus stochastique dèfinie sur un espace de probabitè* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un filtration naturelle à* X *est la filtration dèfinie par*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X(t), s \leq t\right), \forall t \geq 0$$

Définition 1.1.3 ***(Processus stochastique)*** *On appelle processus stochastique* $X = (X(t))_{t \in T}$ *indexè par* T *et à valeur dans* $\mathbb{R}^d$ *une famille d'application mesurables de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $\left(\Omega, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, *tel que pour tout* $t \in T$, $X(t)$ *est une variable alèatoire.*

Remarque 1.1.1 *i) Si* $T = \mathbb{N}$ *on dit que* X *est un processus à temps discrit ,si* $T = \mathbb{R}_+$ *pour les processus à temps continu.*
ii) Pour $t \in T$ *fixè,* $\omega \in \Omega \longmapsto X(t)(\omega)$ *est une variable alèatoire sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
iii) Pour $\omega \in T$ *fixè,* $t \in T \longmapsto X(t)(\omega)$ *est une fonction à valeurs rèelles, appelèe trajectoire du processus* X.

Définition 1.1.4 ***(Modification et indistingabilitè)***
i) Un processus stochastique $(Y(t))_{t \in T}$ *est dit modification (version) de* $(X(t))_{t \in T}$ *si* $P(X(t) = Y(t)) = 1$, *pour tout* $t \in T$.
ii) Deux processus X *et* Y *sont dits indistinguable si* $P(X(t) = Y(t) : \forall t \in T) = 1$.

Définition 1.1.5 ***(Mesurabilitè)*** *On dit que processus* X *est mesurable si l'application* $(t, \omega) \longmapsto X(t)(\omega)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$*,est mesurable par rapport à* $(B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ *et* $B\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.1.6 ***(continuitè)*** *Un processus stochastique* $(X(t))_{t \in T}$ *est dit continu (resp.continu à droit .continu à gauch, croissant) si les trajectoirs sont continues (resp.continues à droit.continues à gauch, croissantes)* $\mathbb{P}-p.s.$

Remarque 1.1.2 *Il est possible de prouver que si* $(Y(t))_{t \in T}$ *est une modifcation de* $(X(t))_{t \in T}$ *et que* X *et* Y *sont continus à droite (ou à gauch) ,alors* X *et* Y *sont indistinguables.*

Définition 1.1.7 ***(processus càdlàg)*** *Un processus est càdlàg (continue à droite,pourvu de limites à gauch), si ses trajectoires son aussi continues à droite et pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.8 ***(Adaptation)*** *Un processus stochastique* $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ *est dit adaptè (par rapport à une filtration* $\mathcal{F}_t$*si* $X(t)$ *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable).*

Définition 1.1.9 ***(Progressivement Mesurable)*** *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à lafiltration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *si* $\forall t \in \mathbb{R}_+$*, l'application* $(s, \omega) \longmapsto X(t)(\omega)$ *de* $[0,t]$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $B([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $B(\mathbb{R}^d)$ *,* X *sera* $P-$*mesurable.*

Remarque 1.1.3 *Il est posible de prouver que :*

i) Si X *est progrrssivement mesurable ,alors* X *est adaplè .*

ii) Si X *est continu à droit (ou à gauch) et adaptè alors* X *est progrissivement mesurable.*

iii) Il est à retenir que le critère de Kolmogorov consiste à prouver l'existence d'une version continue d'un processus stochastique.

Définition 1.1.10 ***(Processus gaussienne)*** *Un processus* X *est gaussien si tout combinaison linèaire finie de* $(X(t), t \geq 0)$ *est une variable alèatoire gaussien, c'est -à-dire si* $\forall n, \forall t_i, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^{n} X_i = a_i X_i$ *est une variable alèatoire goussienne.*

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 ***(Mouvemenet Brownien)*** *On appelle un mouvement brownien standart un processus stochastique* B *à valeur rèells tel que :*

i) $B_0 = 0$*,p.s.*

ii) Si $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$*, les accroissements* $(B(t_i) - B(t_{i-1}), 1 \leq i \leq n)$ *sont independants,*

iii) Pour tout s, t, tel que $s \leq t$*,* $B(t) - B(s)$ *suit une loi gaussienne centrèe de variance* $(t-s)$ *,*

iv) $\mathbb{P}-p.s \longmapsto X(t)(\omega)$ *est continue.*

Proposition 1.2.1 *Soit $B = (B(t))_{t \in T}$ un processus stochastique telle que tous ses trajectoires sont continues et $B_0 = 0$, alors les propriètès sont èquivalentes*

i) Les processus B est un mouvement brownien stondard.

ii) Le processus B est un processus gaussien avec $\mathbb{E}(B(t)) = 0$ et

$$cov\left(B(s), B(t)\right) = \Gamma(s,t) = \min\left\{s,t\right\} = s \wedge t$$

Proposition 1.2.2 *Soit $B(t)$est un M.B alors :*

i) Pour tout $s > 0, \{B(t) - B(s) : t \geq 0\}$ est un M.B.

ii) $\{-B(t) : t \geq 0\}$ est un M.B.

iii) $\left\{cB_{\frac{t}{c^2}} : t \geq 0\right\}$ est M.B.

iv) $\left\{V_0 = 0 \text{ et } V_t = tB_{\frac{1}{T}} \text{si } t > 0 : t \geq 0 \right\}$ est un M.B.

Définition 1.2.2 ***(M.B-dimensionnel)*** *Un processus stochastique $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$est appelè un M.B d-dimensionnel si ses composantes $(B(t))_{t \in T}, ..., (B(t))_{t \in T}$ sont des mouvements browniens mutullement indèpendants.*

1.3 Intègrale stochastique

Définition 1.3.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilitè et B un mouvement brownien sur cet espace.*

on dèsigne par $\mathcal{F}_t^B = \sigma\left\{B(s), s \leq t\right\}$ la filtration naturelle du M.B.

L'intègrale stochastique ou l'intègrale d'Itô est une intègrale de la forme suivante :

$$\int_0^t X(s)dB(s), \ t \in T,$$

ou $\{X(s), s \geq 0\}$ est un processus stochastique

Définition 1.3.2 *On dit que $\{X(t), t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ −adaptè,*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)ds\right] < \infty, \text{ pour tout } t > 0.$$

.

1.3.1 Propriètès de l'intègrale stochastique

Proposition 1.3.1 *L'intègrale stochastique satisfait les propriètès :*

1) $X \longmapsto \int_0^t X(s)dB(s)$ *est linèaire.*

2) *Le processus* $\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)_{0\leq t\leq T}$ *est à trajectoires continues.*

3) *Le processus* $\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)_{0\leq t\leq T}$ *est adaptè à* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{0\leq t\leq T}$. .

4) $\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right] = 0$ *et* $Var\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right]$.

5) *Isomètrie :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (X(s)dB(s))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)ds\right].$$

6) *La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :*

$$< \int_0^t X(s)dB(s) >= \int_0^t X(s)ds.$$

7) *La covariation quadratique entre deux l'intégrales stochastiques est donnée par :*

$$< \int_0^t X(s)dB(s), \int_0^u Y(s)dBs >= \int_0^{t\wedge u} X(s)Y(s)ds.$$

1.3.2 Processus d'Itô

Définition 1.3.3 *Un processus X est un processus d'Itô s'ècrit comme*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t B(s)ds + \int_0^t \sigma_s dB(s),$$

où b est un processus adapté, tel que $\int_0^t |b(s)|\, ds < \infty$ p.s .pour tout $t \geq 0$,et σ un processus càglàg et adaptè, tel que $\int_0^t \sigma^2 ds < \infty$ p.s.pour tout $t \geq 0$. on utilise la notatoion sous la forme d'EDS

$$\begin{cases} dX(t) = b(t)dt + \sigma(s)dB(t) \\ X_0 = x. \end{cases}$$

avec le coefficient $B(t)$ s'appelle la dèrive du processus X (drift), et $\sigma(s)$ s'appette le coefficient de diffusion du processus X (volatilitè)

1.3.3 Formule d'Itô

Soit X est un processus d'Itô $dX(t) = b(t)dt + \sigma(s)dB(t)$.

Théoreme 1.3.1 ***(1$^{\text{ère}}$ formule d'Itô)*** *supposons f une fonction dèfinie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de class C^1par rapport à t, de class C^2 par rapport à x.On a*

$$f(X(t)) = f(X_0) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\sigma_s^2 ds.$$

cette formule s'ècrit comme

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))d\langle X_t\rangle,$$

avec

	dt	$dB(t)$
dt	0	0
$dB(t)$	0	dt

1.4 Equations diffèrentielles stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilitè muni d'un filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 1.4.1 *Soient b et σ deux fonctions mesurables bornèes de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs rèelles donnèes et B un $(\mathcal{F}_t)$ −mouvement brownien.Une èquation diffèrentielle stochastique (EDS) est une èquation de la forme*

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB(t) \\ X(0) = x(0), \end{cases} \tag{1.1}$$

ou sous forme

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB(t)$$

Définition 1.4.2 ***(Solution forte)*** *Une processus continu X est dit solution forte de l'EDS si :*

- *X est progressivement mesurable*
- *$\mathbb{P}-p.s$ $\int_0^t |b(s, X(s))| \, ds + \int_0^t |\sigma(s, X(s))|^2 \, ds < \infty$*
- *$\mathbb{P}-p.s$ on a :$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s)) \, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) \, dB(s), \forall t \in T.$*

1.4.1 Existence et Unicitè des solutions

Pour assurer l'existence et l'unicitè d'une solution on a besoin de deux types de conditions pour les fonctions b et σ.

Notation 1.4.1 *:*

i) $\mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$: *Espace de Banach constituè des processus* X *progressivemenet mesurable,*

Notation 1.4.2 *tels que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^2\right]<\infty \text{ et } ||X||=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

ii) $\mathbb{S}_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$: *sous espace de* $\mathbb{S}^2$*des processus* X *continus .*

Théoreme 1.4.1 *(**Existence et Unicitè**) Soient* b *et* σ *deux fonction borèliennes.supposons qu'il existe une constante* $K>0$ *tel que pour tout* $t\in[0,T]$ *,*

$x,y\in\mathbb{R}^n$:

Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq K|x-y|$$

Croissance linèaire :

$$|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|<K(1+|x|).$$

La condition initiale x *est de carrè intègrable ie :*$\mathbb{E}\left[|x_0|^2\right]<\infty$.

Alors l'EDS (1.1) possède une unidue solution appartient à $\mathbb{S}^2$*et donc à* $\mathbb{S}_c^2$.

Chapitre 2

Classes des contrôles stochastique et Mèthodes de rèsolution

La théorie du contrôle a été intialement dévelopée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthése des systéme de contrôle et de systéme dynamique (c'est àdire l'évolution du systéme au cours du temps), cette grande théorie a de nembreuses applications en gestion et en finance.

Dans ce chapitre on s'intéresse au contrôle optimal et ces déffirentes calasses, on étudie aussi deux méthodes pour la résolution des problémes de contrôle stochastique qui sont Le principe de la programmation dynamique et le principe du maximum du Pontryagin. [6, 15, 16]

2.1 Un problème de contrôle stochastique

D'une manière gènèrale,un problème de contrôle se construit par les caractèristiques suivantes :

État du système : Soit un système dynamique caractèrisè par son ètat à tout instant , le temps peut être continu ou bien discret.L'horizon (l'intervale de variation du temps)peut être fini ou infini. L'ètat du système reprèsente l'ensemble des variables quantitatives constituant une description totale du système.On notera $X(t, \omega)$ l'ètat du système à l'instant t. Une fois l'ètat soit dèfini, il s'agit de dècrire les lois d'èvolution de cet ètat en fonction du temps. L'application $t \longmapsto X(t)$ dècrire l'èvolution du système.cette èvolution est fournie par un modèle probabiliste.

Contrôle : Le dynamique $X(t)$ de l'ètat du système est agi par un contrôle que nous modèlisons comme un processus $u(t)$ dont la valeur peut être dècidèe a tout instant t en fonction des information disponibles à cet instant, c'est-à-dire que $u(t)$ est adaplé par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.

Critère de coût : La but principal du contrôle optimal est de minimiser (ou de maximiser selon le cas un gain ou bien une perte) une fonctionnelle

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, X(t), u(t))\, dt + h(X(T))\right], \tag{2.1}$$

sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles. La fonction valeur associèe à ce problème de contrôle stochastique est donnè par :

$$\begin{aligned} &\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{U} : \\ &v(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(t, x, u). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Un contrôle admissible $u^* \in \mathcal{U}$ est dit optimal si : $v(t, x) = J(t, x, u^*)$.

2.2 Classes des contrôles

1) Contrôle admissible : Un contrôle admissible est un processus $(u(t))_{t \in [0,T]}$mesurable $\mathcal{F}_t-$adaptè à valeurs dans un borèlien $U \subset \mathbb{R}^n$.

Notant par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles

$$\mathcal{U}=\left\{u\left(\cdot\right):[0,T]\times\Omega\longmapsto U,\ \text{tq } u\left(\cdot\right)\ \text{soit mesurable et } \mathcal{F}_t-\text{adaptè}\right\}.$$

2) Contrôle optimal : On dit qu'un contrôle stochastique u^* est optimal si :

$$J(u^*)=\inf\left\{J(u);\ \forall u\in U\right\}.$$

3) Contrôle feed-back : Soit $u(\cdot)$ un contrôle $\mathcal{F}_t$ $-$adaptè, et soit $\mathcal{F}_t^X$ la filtration naturelle engendrè par le processus X . On dit que $u(\cdot)$ est un controle feed-back si et seulement $u(\cdot)$ dèpend de X.

4) Contrôle singulier : Soit A_1 un sous-ensemble fermè de $\mathbb{R}$ et $A_2=[0,+\infty[$.

Soit $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux classes des processus mesurables dèfinie comme suit :

$$\mathcal{U}_1=\left\{u\left(\cdot\right):[0,T]\times\Omega\longmapsto A_1.\mathcal{F}_t-\text{adaptès}\right\},$$
$$\mathcal{U}_2=\left\{\eta(\cdot):[0,T]\times\Omega\longmapsto A_2.\mathcal{F}_t-\text{adaptès}\right\}.$$

Un contrôle admissible est un paire de processus mesurable $\left(u\left(\cdot\right),\eta\left(\cdot\right)\right)$, $\mathcal{F}_t-$adaptès à valeur dans $A_1\times A_2$,tel que :η est un variation bornèe, croissante et continue à gauch avec une limite à droite càglàd et $\eta(0_-)=0$. On note $\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.Notons que, depuis $d\eta\left(t\right)$ peut être singulier par rapport à mèsure de Lebesgue dt, nous appellons $\eta\left(.\right)$ la partie singulier de contrôle et le processus $u\left(\cdot\right)$ la partie absolûment continue.

5) Contrôle relaxé : Soit V l'espace des mesures aléatoires positives sur $[0,1]\times A$, dont les projections sur $[0,1]$ coïncident avec la mesure de Lebesgue et soit aussi la $\sigma-$algebre V comme la plus petit $\sigma-$algebre de sorte que les fonctions $\mu\longmapsto\int_{[0,1]}\int_A\phi(t,a)\ \mu_t(dt,da)$ sont mesurables, avec ϕ est une fonctions mesurable borné et continue en a. Un contrôle relâxé sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ est un variable àlèatoire μ à valeur dans V tel que $\mu(\omega, t, da)$ est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que pour chaque t : le processus $\mathbf{1}_{[0,t]}\mu$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable .

6) Contrôle approché : Soit $\varepsilon > 0$, le côntrôle u^ε est dit approché si pour tout contrôle $u \in U$ on a

$$J(u^\varepsilon) \leq J(u) + \varepsilon, \forall u \in U,$$

c'est à dire :

$$J(u^\varepsilon) = \inf \{J(u), \ \forall u \in U\} + \varepsilon.$$

Voir Hafayed et al [[2],[3],[4],[5],[6],[7]]

2.3 Méthodes de résolution

Dans le domiane de la thèorie du contrôle optimal, il existe essentiellement deux mèthodes pour la rèsolution dans les cas dèterministes ou stochastique, le principe de programation dynamique et le principe de maximale de pontryagin.

Le principes de la programmation dynamique qui a une version infintèsismale d'èquation d'Hamilton Jaccobi Bellman et de maximum de Pontryagin qui sera au centre de notre intèrêt, dans ce travail qui consiste à cherche les conditions nècessaires d'optimalitè satisfaites par un contrôle optimal $u^*(\cdot)$.

2.3.1 Le principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmatio est un principe fondamental de la thèorie du contrôle stochastique. le principe de la programmation dynamique de Bellman permet de résoudre, au travers d'une équation aux dérivées partielles de Bellman n'est pas facile à résoudre et il faut supposer que la solution soit de classe C^2, nous pouvons sinon supposer qu'elle est seulement localement bornèe mais dans ce cas la solution sera au sens de la viscositè.En appliquant formellement ce principe où on peut minimiser la fonction de valeur $V(t,x)$ associer à un problème de contrôle stochastique à tempe continu satisfait à une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. voir [7],[8, 9, 10, 11, 13]

$$\frac{dV}{dt}(t,x) + \inf\left[\mathcal{L}_u V(t,x) + g(t,x,u)\right] = 0, \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

où $\mathcal{L}_u$ est le gènèrateur infinitèsimale de second-ordre associè à la diffusion $X(t)$ solution de l'équation (2.3) avec un contrôle u donnèe par la formule suivante :

$$\mathcal{L}_u V = g(x,u) D_u(V) + \frac{1}{2} tra\left[\sigma^*(t,u)\ \sigma(x,u) D_x^2(V)\right]. \tag{2.4}$$

Lorsqu'on cherche à maximiser un gain, l'équation aux dérivées partielles devient sous forme :

$$-\frac{dV}{dt}(t,x) - \sup_{u\in\mathcal{U}}\left[\mathcal{L}_u V(t,x) + g(t,x,u)\right] = 0. \tag{2.5}$$

on peut avoir cette dernière équation de la façon suivante :

$$-\frac{dV}{dt}(t,x) - H(t,x,D_x v(t,x), D_x^2 v(t,x)) = 0, \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

telle que $\forall (t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S(n)$ où $S(n)$ est l'ensemble des matrices symètrique $n \times n$.

$$H(t,x,p,M) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left[b(x,u)p + \frac{1}{2} tra(\sigma^{*}\sigma(x,u)M + g(t,s,u) \right]. \tag{2.7}$$

La fonction (2.7) est dit l'Hamiltonien du problème de contrôle associé. En remarquant que si la fonction de valeur est continu et pas nécessairement de classe C^2 et satisfait le principe d'optimalité de la programmation dynamique, alors elle est solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante.

2.3.2 Le principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de pontryagin à été utilisé dans la théorie du contrôle optimale .Il fournit les conditions nécessaires d'optimalité pour minimiser une fonctionnelle de coût $J\left(u\left(\cdot\right)\right)$ tout en utilisant l'approche de Lagrang en calcul des variations . La dérivée de fonctionnelle $J\left(u\left(\cdot\right)\right)$ par rapport à un certain paramétre de pertubation doit être positive. Ceci entraîne que $\frac{d}{d\theta}\left(J\left(u_{\theta}\left(t\right)\right)\right)\Big|_{\theta=0} \geq 0$. Ce principe consiste à introduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde et d'une intégralité variationnelle.

Chapitre 3

Principe du maximum (convexe)

L'objectif dans ce chapitre est étudier et présenté le principe du maximum stochastique établit par Bensaussan, où le domaine de controle est supposé convexe. Cet étude a pour but d'établir des conditions nécessaires d'optimalité. Pour obtenir ces conditions, en utilisant une méthode de perturbation. L'intérêt de la perturbation de contrôle optimal $u^*(\cdot)$ est d'introduire un contrôle $u_\varepsilon(\cdot)$ sur lequel nous pouvons dérivé la fonction de cout $J(u_\varepsilon(\cdot))$.

3.1 Formulation du probléme

Soit T un nombre réel strictement positif fixé et $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré, $B(\cdot) = (B(t))_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien définie sur cet espace. Nous supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle de $B(\cdot)$ augmentée par les ensembles. $\mathbb{P}$-nulle. L'espace d'action, $\mathbb{U}$ est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{U}([0,T])$ est la classe de processus mesurables, $\mathcal{F}_t$ adaptés et carrés intégrables $u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{U}$.

On considére l' ´equation différentielle stochastique controllée EDSs:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dB(t) \\ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$. La fonction de coût est donné par :

$$J(u(.)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, x(t), u(t))dt + h(x(T))\right]. \tag{3.2}$$

où

$$g : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

3.1.1 Conditions sur les coefficients

Soient f, σ deux applications telles que les coefficients f, σ vérifiant les conditions suivantes :

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ et continuement différentiable en } x \text{ et } u \tag{3.3}$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ et continuement différentiable en } x \text{ et } u \tag{3.4}$$

$$\text{Les dérivées } f_x,\ f_u,\ \sigma_x,\ \sigma_u \text{ sont bornées} \tag{3.5}$$

$$|f(t, x, u)| \leq K_1(1 + |x| + |u|). \tag{3.6}$$

$$|\sigma(t, x, u)| \leq K_2(1 + |x| + |u|). \tag{3.7}$$

En remarquant que les dérivées f_x, f_u appartenant à $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\sigma_x = (\sigma_x^1, ..., \sigma_x^n)$, et

$\sigma_u = (\sigma_u^1, ..., \sigma_u^n)$ telle que pour tout $i = 1, ..., n : \sigma_u^i, \sigma_x^i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ .où t $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n)$ et $\sigma^i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i,}..., \sigma_{ni})^T$.

Soit $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ est un espace probabilité filtré donné, satisfaisant les conditions usuelles et $(B(t))_{t\geq 0}$ mouvement Brownien $n-$dimensionnel, et soit U un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ non vide.

On appelle contrôle admissible tout processus $(u(t))_{t\in[0,T]}$ appartient $\mathbb{L}([0,T], \Omega)$ a valeur dans U.

On note $\mathcal{U}([0,T])$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

$$\mathcal{U}([0,T]) = \left\{ u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{U} \text{ telle que } \mathbb{E} \int_0^T |u(t)|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Pour tout contrôle admissible.$\forall u(\cdot) \in \mathcal{U}([0,T]))$.

Notre probleme de controle optimale stochastique est un probléme d'optimisation où le system est gouverné par l'EDS de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t) + u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dB(t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

où x_0 est une variable aleatoire donnée. Le cout a minimiser est defini par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left[\int_0^T g(t, x(t), u(t))dt + h(x(T))\right] \tag{3.9}$$

sous les conditions suivantes :

$$g: \text{ est continuement différentiable en } x \text{ et } u \tag{3.10}$$

$$|g(t, x, u)| \leq C_1(1 + |x| + |u|) \tag{3.11}$$

$$g(t, 0, 0) \in \mathbb{L}^\infty(\,[0,T]) \tag{3.12}$$

$$\text{La dérivée de } h(\cdot) \text{ est continue et } |h_x| \leq C_2(1+|x|) \tag{3.13}$$

Perturbation convexe On perturbe le contrôle $u^*(\cdot)$ de la maniére suivante :

$\varepsilon \in [0,1]$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &= u^*(t) + \varepsilon(u(t) - u^*(t)) \\ &= \varepsilon u(t) + (1-\varepsilon)u^*(t) \end{aligned}$$

où $u^*(\cdot)$ est contrôle optimal et ε est plus petit. On remarque que $u_\varepsilon(\cdot)$: est contrôle admissible. On associées à $u^*(\cdot)$, $u_\varepsilon(\cdot)$ deux équations differentielles stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} dx^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t))dt + \sigma(t, x^*(t), u^*(t))dB(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} dx_\varepsilon(t) = f(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))dt + \sigma(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t))dB(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On appelle $x_\varepsilon(\cdot)$ est la trajectoire (l'état) correspendant à $u_\varepsilon(\cdot)$ et $x^*(t)$ est la trajectoire (l'état) correspondant à $u^*(\cdot)$.

Notation 3.1.1 *Pour tout* $\Psi = f, \sigma, g$ *on note* $\Psi^*(t) = \Psi\ (t, x^*(t) + u^*(t))$; *et* $\Psi_\varepsilon(t) = \Psi(t, x_\varepsilon(t) + u_\varepsilon(t))$.

3.1.2 Convergence des trajectoires perturbées

Lemme 3.1.1 *Pour tout* $t \in [0,T]$ *on a*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathbb{E}(\sup_{t \leq T} |x_\varepsilon(t) - x^*(t))|^2) = 0 \tag{3.14}$$

C'est à dire la trajectoire $x_\varepsilon(\cdot)$ *converge en* $\mathbb{L}^2(\,[0,T] \times \Omega)$ *vers* $x^*(\cdot)$

On dit aussi que $x_\varepsilon(\cdot)$ *converge en moyenne quadratique vers* $x^*(\cdot)$

Preuve. On a

$$|x_\varepsilon(t) - x^*(t)| \leq \int_0^t |f^\varepsilon(s) - f(s)|\, ds + \int_0^t |\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s)|\, dB(s)$$

on a $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ donc

$$|x_\varepsilon(t) - x^*(t)|^2 \leq 2(\int_0^t |f^\varepsilon(s) - f(s)|\, ds)^2 + 2(\int_0^t |\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s)|\, dB(s))^2$$

d'aprés l'inégalité de cauchy-schwarz, et l'isométrie d'Ito, on trouve que

$$\mathbb{E}\,|x_\varepsilon(t) - x^*(t)|^2 \leq 2\mathbb{E}(\int_0^t |f^\varepsilon(s) - f(s)|^2\, ds + 2\int_0^t |\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s)|^2\, ds)$$

comme f, σ sont lipschitziennes alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}\,|x_\varepsilon(t) - x^*(t)|^2 &\leq 2K\mathbb{E}\left[\int_0^t |u_\varepsilon\,(s) - u^*\,(s)|^2\, ds\right] \\ &= 2K\varepsilon^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |u\,(s) - u^*\,(s)|^2\, ds\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

d'où 3.14 ■

L'équation Linéairisée On définit $Z(t)$ de la maniére suivante

$$\begin{cases} dZ(t) = (f_x(t)Z(t) + f_u(t)(u(t) - u^*(t)))dt + (\sigma_x^*(t)Z(t) \\ \qquad\qquad + \sigma_u^*(t)(u(t) - u^*(t)))dB(t) \\ Z(0) = 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

D'aprés les conditions $f_x, f_u, \sigma_x, \sigma_u$ sont bornés et continues alors $Z \in \mathbb{L}^2([0,T] \times \Omega)$

Lemme 3.1.2 *Pour tout $t \in [0,T]$ on a la convergence suivante*

$$\mathbb{E}\left[\sup\left|\frac{x_\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} - Z(t)\right|^2\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3.16}$$

Preuve. On note $\gamma_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(x_\varepsilon(t) - x^*(t)) - \varepsilon Z(t))$ et $\upsilon(t) = u(t) - u^*(t)$.

$$\begin{aligned} d\gamma_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\left[f_u(t, x(t) + \varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t)) - f(t)\right. \\ &\left.-\varepsilon f_x(t)Z(t) - \varepsilon f_u(t)\upsilon(t)\right]dt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma\left(t, x(t) + \varepsilon(Z(t) + \gamma_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)\right) - \sigma^*(t) - \varepsilon\sigma_x^*(t)Z(t)\right. \\ &\left.-\varepsilon\sigma_u^*(t)\upsilon(t)\right]dB(t), \\ \gamma_\varepsilon(0) &= 0. \end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
d\gamma_{\varepsilon}(t) = (&\int_0^1 [f_x(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t))(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)) \\
&+ f_u(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t))\upsilon(t)]d\lambda)dt \\
&- \int_0^1 [f_x(t)Z(t) + f_u(t)\upsilon(t)]d\lambda)dt \\
&\int_0^1 [\sigma_x(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t))(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)) \\
&+ \sigma_u(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t))\upsilon(t)]d\lambda)dB(t) \\
&- \int_0^1 [\sigma_x^*(t)Z(t) + \sigma_u^*(t)\upsilon\left(t\right)]d\lambda)dB(t)
\end{aligned}
$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
d\gamma_{\varepsilon}(t) = (&\int_0^1 [f_x(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t))x_{\varepsilon}(t)]d\lambda dt \\
&+ \int_0^1 [\sigma_x(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t))x_{\varepsilon}(t)]d\lambda dB(t) \\
&+ \int_0^1 [f_x(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t)) - f_x(t)]Z(t)d\lambda dt \\
&+ \int_0^1 [\sigma_x(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t)) - Z(t)d\lambda dB(t) \\
&+ \int_0^1 [f_u(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t)) + f_u(t)]\upsilon(t)d\lambda dt \\
&+ \int_0^1 [\sigma_u(t, x(t) + \lambda\varepsilon\left(Z(t) + \gamma_{\varepsilon}(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t)) - \sigma_u^*(t)]\upsilon(t)d\lambda dB(t).
\end{aligned}
$$

d'aprés 3.5 et l'ingalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que

$$
\mathbb{E}\left|\gamma_{\varepsilon}(t)\right|^2 \leq c\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\gamma_{\varepsilon}(t)\right|^2 ds\right] + \rho\left(\varepsilon\right)
$$

où

$$\begin{aligned}
&\rho(\varepsilon) \\
&= c_1 \mathbb{E}\left(\int_0^t |Z(s)| \int_0^1 f_x(s, x(s) + \lambda\varepsilon\left(Z(s) + \gamma_\varepsilon(s)\right), u^*(s) + \lambda\varepsilon\upsilon(s)) - f_x(s)] d\lambda ds\right)^2 \\
&+ c_2 \mathbb{E}\left(\int_0^t |\upsilon(s)| \int_0^1 f_u(s, x(s) + \lambda\varepsilon\left(Z(s) + \gamma_\varepsilon(s)\right), u^*(s) + \lambda\varepsilon\upsilon(s)) - f_u(s)] d\lambda ds\right)^2 \\
&+ c_3 \mathbb{E}\int_0^t |Z(s)| \int_0^1 \left|\sigma_x(s, x(s) + \lambda\varepsilon\left(Z(s) + \gamma_\varepsilon(s)\right), u^*(s) + \lambda\varepsilon\upsilon(s)) - \sigma_x^*(s)\right|^2 d\lambda ds \\
&+ c_4 \mathbb{E}\left(\int_0^t |\upsilon(s)| \int_0^1 \left|\sigma_u(s, x(s) + \lambda\varepsilon\left(Z(s) + \gamma_\varepsilon(s)\right), u^*(s) + \lambda\varepsilon\upsilon(s)) - \sigma_u^*(s)\right|^2 d\lambda ds\right)
\end{aligned}$$

comme $f_x, f_u, \sigma_x, \sigma_u$ sont continue, Alors $\rho(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

et on trouve aussi d'aprés le lemme de Gronwall, on a

$$0 \leq \mathbb{E}\left|\gamma_\varepsilon(t)\right|^2 \leq \rho(\varepsilon)\exp(ct) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui termine preuve de 3.16. On défini aussi $\zeta(t)$ par

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = g_x^*(t)Z(t) + g_u^*(t)\left(u(t) - u^*(t)\right), \ \zeta(0) = 0.$$

■

Lemme 3.1.3 *Le cout $J(\cdot)$ est différentiable au sens de Gâteaux au u^*qui donner par la formule suivante :*

$$\frac{d}{d\varepsilon}J(u_\varepsilon(\cdot))\,|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}\left[h_x(x(T))Z(T) + \zeta(T)\right] \tag{3.17}$$

Preuve. *On a*

$$\frac{d}{d\varepsilon}J(u_\varepsilon(\cdot))_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{J(u_\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))}{\varepsilon}.$$

En déduit que la valeur

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\left(J(u_\varepsilon(\cdot)) - J(u^*(\cdot))\right)\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\left(g^*(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - g^*(t, x(t), u^*(t))dt\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[\frac{1}{\varepsilon}(h(x_\varepsilon(T) - h(x(T))\right]\\
&= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon).
\end{aligned}$$

où $I_1(\varepsilon)$ *est donné par le terme suivant*

$$\begin{aligned}
I_1(\varepsilon) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\left[g^*(t, x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - g^*(t, x(t), u^*(t))dt\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [g_x^*(t, x(t) + \lambda\left(x_\varepsilon(t) - x^*(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t))(Z(t) + x_\varepsilon(t))\\
&+ g_u^*(t, x(t) + \lambda\left(x_\varepsilon(t) - x(t)\right), u^*(t) + \lambda\varepsilon\upsilon(t))]d\lambda dt
\end{aligned}$$

et $I_1(\varepsilon)$ *est donné par le terme suivant* *3.14*

$$\begin{aligned}
I_2(\varepsilon) &= \mathbb{E}\left[\frac{h\left(x_\varepsilon(T)\right) - h(x(T))}{\varepsilon}\right]\\
&= \mathbb{E}\int_0^1 h_x\left(x(T)\right) - \lambda\left(x_\varepsilon(T) - x(T)\right)(x_\varepsilon(T) + Z(T))\, d\lambda
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} I_1 = \mathbb{E}\left[\zeta\left(T\right)\right]$$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} I_2 = \mathbb{E}\left[h_x(x(T))Z(T)\right],$$

à cause de la continuité de g_x, h_x *et* 3.14, 3.16. *D'où* 3.17 ■

3.1.3 Principe du maximum de Bensoussan

Dans cette section, on présente le théoréme de principe du maximum de introduit par Bensoussan (1982) . L'objectif de ce principe du maximum présenté ici est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité vérifié par une contrôle dite optimal dans le cas où le domaine de controle est supposé convexe. voir [1].

Equation adjointe

Définition 3.1.1 *Soit* $u^*(t)$ *un contôle optimal et* $x^*(t)$ *la trajectoire optimale correspondante. L'´equation adjointe est donnée par :*

$$\begin{cases} -dp(t) = \left[(f_x(t))^\top p(t) + g_x^*(t)\right] - \sum_{i=1}^n \left(\sigma_x^{*i}(t)\right)^\top q_i\left(t\right)dt + q(t)df(t) \\ p(T) = h_x\left(x\left(T\right)\right) \end{cases} \tag{3.18}$$

$p(t)$ *s'appelle processus adjoint où* $q\left(\cdot\right) = \left(q_1\left(\cdot\right), \cdots, q_n\left(\cdot\right)\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

Remarque 3.1.1 *Dans* $\mathbb{R}$ *le processus adjoint devient sous la forme*

$$\begin{cases} -dp(t) = [(f_x(t))p(t) + g_x^*(t) - \left(\sigma_x^{*i}(t)\right)q_i\left(t\right)dt + q(t)dB(t) \\ p(T) = h_x\left(x\left(T\right)\right) \end{cases}$$

Définition 3.1.2 *L'Hamiltonian est défini comme suit :*

$$H\left(t, x(t), u(t), p(t), q(t)\right) = f(t, x(t), u(t)).p(t) - tr(q^{\top}\left(t\right)\sigma\left(t, x(t), u(t)\right)) + g^{*}(t, x(t), u(t))$$

Dans $\mathbb{R}$, *on a*

$$H\left(t, x(t), u(t), p(t), q(t)\right) = f(t, x(t), u(t)).p(t) - q(t)\sigma\left(t, x(t), u(t)\right)) + g(t, x(t), u(t$$

Remarque 3.1.2 *Nous pouvons écrire l'équation 3.18 comme suit :*

$$\begin{cases} -dp(t) = H\left(t, x(t), u(t), p(t), q(t)\right)dt + q(t)df(t) \\ p(T) = h_x\left(x\left(T\right)\right) \end{cases}$$

Théoreme 3.1.1 ***(Principe du maximum de Bensoussn)*** *Soit* $\left(u^{*}\left(t\right), x\left(t\right)\right)$ *une paire optimale, Alors il existe un processus adjoint* $p(t)$ *vérifie l'équation 3.18 telle que pour tout* $u\left(t\right) \in \mathcal{U}_{ad}\left([0, T]\right)$ *on a*

$$\mathbb{E}\int_{0}^{T} H_u\left(t, x(t), u^{*}(t), p(t), q(t)\right)\left(u(t) - u^{*}(t)\right)dt \geq 0 \tag{3.19}$$

Preuve. On a $J\left(u^{*}\left(\cdot\right)\right) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}([0,T])} J\left(u\left(\cdot\right)\right)$,donc $J\left(u_{\varepsilon}\left(\cdot\right)\right) \leq J\left(u^{*}\left(\cdot\right)\right)$ ceci implique que

$$\frac{d}{d\varepsilon}J\left(u^{*}\left(\cdot\right)\right)|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}\left[h_x(x(T))Z(T) + \zeta(T)\right] \geq 0.$$

Il reste de démontrer qu'on a l'égualité suivante :

$$\mathbb{E}\int_0^T H_u\left(t, x(t), u^*(t), p(t), q(t)\right)\left(u(t)-u^*(t)\right) dt$$
$$= \mathbb{E}\left[h_x(x(T))Z(T)+\zeta(T)\right],$$

où H_u est la dérivé de l'hamiltonian par rapport à u. D'aprés la formule d'intégration par partie, (formule d'Itô $\mathbb{E}\left[p(t)Z(t)\right]$) , on obtient

$$\begin{aligned} p(t)Z(t) &= p(0)Z(0)+\int_0^t p(s)dZ(s)+\int_0^t Z(s)dp(s)+\int_0^t d\left\langle p(s), Z(s)\right\rangle \\ &= \int_0^t p(s)dZ(s)+\int_0^t Z(s)dp(s)+\int_0^t d\left\langle p(s), Z(s)\right\rangle, \end{aligned}$$

où $Z(0))=0$ et le crochet stochastique $\langle p(s), Z(s)\rangle$ détermine par la valeur

$$\begin{aligned} d\left\langle p(s), Z(s)\right\rangle &= -tr\left(q^\top(s)\left(\sigma_x^*(s)\, Z(s)+\sigma_u^*(s)\left(u(s)-u^*(s)\right)\right)\right) \\ &= -tr\left(q^\top(s)\left(\sigma_x^*(s)\, Z(s)\right)ds - tr(q^\top(s)\sigma_u^*(s)\left(u(s)-u^*(s)\right)\right) ds \end{aligned}$$

d'aprés 3.18 et 3.15 on obtient

$$\mathbb{E}[p(t)Z(t)]$$
$$= \mathbb{E}[\ \textstyle\int_0^t p(s)\left(f_x(s)Z(s)+f_u(s)(u(s)-u^*(s))\right)ds - \int_0^t \left(Z(t)(f_x(s))^\top p(s)+g_x^*(s)\right) ds$$

$$+\int_0^t Z(s)\sum_{i=1}^n \left(\sigma_x^{*i}(s)\right)^\top q_i(s)\, ds - \int_0^t \frac{\partial tr\left(q^\top(s)\,\sigma^*(s)\right)}{\partial x} Z(s)\, ds$$
$$-\int_0^t \frac{\partial tr\left(q^\top(s)\,\sigma^*(s)\right)}{\partial u}\left(u(s)-u^*(s)\right) ds].$$

On sait que le processus adjoint $p(t)$ verifié une équation differentielle stochastique rétrograde EDS avec une condition terminale

$$p(T) = h_x\left(x(T)\right),$$

Alors on déduit

$$\mathbb{E}\left[h_x(x(T))Z(T) + \zeta(T)\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_0^T p\left(s\right)\left(f_u(s)(u(s) - u^*(s))\right)ds - Z(s)g_x^*(s)ds\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(s, x(s), u*(s), p(s), q(s))(u(s) - u^*(s))ds\right]$$

ce qui implique

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, x(t), u^*(t), p(t), q(t))(u(t) - u^*(t))dt\right] = \mathbb{E}\left[\left[p(T)Z(T) + \zeta(T)\right]\right].$$
$$\forall u \in \mathbb{U}$$

d'où 3.19.Alors on a d'aprés 3.17

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, x(t), u^*(t), p(t), q(t))(u(t) - u^*(t))dt\right] \geq 0, \forall u \in \mathbb{U}$$

Ce qui termine la preuve de théoréme de principe du maximum stochastique de Bensoussan. ∎

Chapitre 4

Problème de contrôle stochastique de type mean-field

Dans ce chapitre, nous prouvons les conditions nécessaires d'optimalité pour notre probléme de contrôle optimal des équations différentielles stochastiques générales de type mean-field. La preuve est basée sur les dérivées par rapport à la mesure de probabilité et sur l'introduction des équations variationnelles avec quelques estimations sur les trajectoires assouciées. voir [14].et [7, 8, 9, 11, 1, 13, 15, 16]

4.1 L-dérivées par rapport à une mesure de probabilité

Nous rappelons briévement une notion importante dans McKean-Vlasov théorie de contrôle : Les L-dérivées par rapport à la loi de probabilité dans l'espace de Wasserstein qui a été introduite par P. Lions. L'idée principale est d'identifier une distribution $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^n)$ avec une variable aléatoire $x \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ telle que $\mu = P_x$.supposons que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est suffisamment rich en ce sens que pour chaque $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^n)$, on a une variable aléatoire $\vartheta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ telle que $\mu = P_\vartheta$, on suppose qu'il existe un sous -$\sigma - filed$ $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_0$ soit assez rich c'est à dire

$$Q_2(\mathbb{R}^n) = \left\{ P_\vartheta : \vartheta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0, \mathbb{R}^n) \right\}.$$

On note par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,t]}$ on la filtration engendrée par $B(\cdot)$, complétée et augmentée par $\mathcal{F}$. et $Q_2(\mathbb{R}^n)$ l'espace de toutes les probabilités du mesure μ sur $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_R)$ avec fini deuxiéme moment (c'ést-à-dire,$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \mu(dx) < \infty$.En particulier, muni de métrique 2-Wasserstein suivante :pour $\mu, \nu \in Q_2(\mathbb{R}^{2n})$,

$$W_2(\mu,\nu) = \inf_\rho \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^2 \rho(dx,dy) \right]^{\frac{1}{2}} : \rho \in Q_2(\mathbb{R}^{2n}), \rho(.,\mathbb{R}^n) = \mu, \rho(\mathbb{R}^n,.) = \nu \right\}.$$

Définition 4.1.1 ***(Fonction de lift)*** *Soit f une fonction donnée telle que f : $Q_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ On définit le lift fonction $\widetilde{f} : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que:*

$$\widetilde{f}(\vartheta) = f(P_\vartheta) \ , \ \vartheta \in \ \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0, \mathbb{R}^n).$$

En clair, La fonction de lift $\widetilde{f}$ de f, ne dépend que de la loi de $\vartheta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0, \mathbb{R}^n)$ et est indépendante du choix du représentant ϑ.

Définition 4.1.2 *Soit $f : Q_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ La fonction f est dérivable en un distribution $\mu_0 \in Q_2(\mathbb{R}^n)$, S'il exist $\vartheta_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$, avec $\mu_0 = P_{\vartheta_0}$ telque son lift $\widetilde{f}$ soit Fréchet-differentiable en ϑ_0 plus précisément, il exist un fonctionnelle linéaire continu $D\widetilde{g}(\vartheta_0) : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ telque :*

$$\widetilde{f}(\vartheta_0 + \xi) - \widetilde{f}(\vartheta_0) = \left\langle D\widetilde{f}(\vartheta_0) \ , \ \xi \right\rangle + o\left(\|\xi\|_2\right) = D_\xi f(\mu_0) + o(\|\xi\|_2). \tag{4.1}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *est le produit dual sur* $\mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^n)$ *.On appelle* $D_\xi g(\mu_0)$ *the Fréchet-derivative de* g *en* μ_0 *dans la direction* ξ*. dans ce cas on a*

$$D_\xi f(\mu_0) = \left\langle D\widetilde{f}(\vartheta_0)\ ,\ \xi\right\rangle \ = \ \frac{d}{dt}\widetilde{f}(\vartheta_0 + t\xi)\,|_{t=0} \quad ,avec \quad \mu_0 = P_{\vartheta_0}$$

En appliquant le théoréme de réprésentation de Riesz, il existe une variable aléatoire unique $\Theta_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^n)$ *telque :* $\langle D\widetilde{g}(x_0),\xi\rangle = (\Theta_0\ ,\ \xi)_2 = \mathbb{E}\left[(\Theta_0\ ,\ \xi)_2\right]$ *où* $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^n)$

qu'il exist une fonction de Borel $\Phi\left[\mu_0\right](\cdot) : \mathbb{R}^n. \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, dépendant uniquement de la loi* $\mu_0 = P_{\vartheta_0}$ *mais pas du choix particulier de la représentant* ϑ_0*, telque* $\Theta_0 = h\left[\mu_0\right](\vartheta_0)$ *on peut donc écrire 4.1 comme :*

$$f(P_x) - f(P_{\vartheta_0}) = h\left[\mu_0\right](\vartheta_0)\ \ \vartheta - \vartheta_0)_2 + o(\|\vartheta - \vartheta_0\|_2),$$

on note

$$\partial_\mu g(P_{\vartheta_0}, x) = h\left[\mu_0\right](\vartheta_0)\ \ ,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, on a les identités suivantes

$$D\widetilde{f}(\vartheta_0) = \Theta_0 = h\left[\mu_0\right](\vartheta_0) \ \ = \ \partial_\mu f(P_{\vartheta_0}, \vartheta_0),$$

et $D_\xi f(P_{\vartheta_0}) =< \partial_\mu f(P_{\vartheta_0}, \vartheta_0), \xi >$*, où* $\xi = \vartheta - \vartheta_0$*.*

Remarque 4.1.1 *On note que chaque* $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^n)$*,* $\partial_\mu f(P_{\vartheta_0}, \cdot) = h\left[P_\vartheta\right](\cdot)$ *n'est* *définie que dans un sens $P_\vartheta(dx)-p.s$ où $\mu = P_\vartheta$.*

On dite que $g \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^n))$ si pour tout $\vartheta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$, il existe une $P_\vartheta-$modifiction de $\partial_\mu f(P_\vartheta, \cdot\ )$, noté par lui même, telque

$\partial_\mu f : Q_2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est borné et Lipshitz continu, c'est-à-dire pour certain $C > 0$, il s'avére que :

1) $|\ \partial_\mu f(\mu, x)| \leq C$,$\forall \mu \in Q_2(\mathbb{R}^n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

2) $\left|\partial_\mu f(\mu, y) - \partial_\mu f(\mu', y')\right| \leq C(W_2(\mu, \mu') + \left|y - y'\right|)$, μ, $\mu' \in Q_2(\mathbb{R}^n)$, y, $y' \in \mathbb{R}^n$.

On précise que , si $f \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^n))$ La version de $\partial_\mu f(P_{x_0}, \cdot)$, $x \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$, indiquée dans la **Définition** 3.1.3 est unique.

4.2 Formulation du probleme

Soit $\mathbb{U}$ un sous -ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^k$. Un contrôle admisible υ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté à valeurs dans $\mathbb{U}$ satisfait $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|\upsilon_t\right|^n < \infty, n = 2, 3, ...$On note $\mathcal{U}\left([0, T]\right)$ l'ensemble des variables de contrôle admissibles. Pour un processus de commande $\upsilon\left(\cdot\right) \in \mathcal{U}\left([0, T]\right)$ donné. Dans ce mémoire de master, nous étudions un problème de contrôle optimal d'un équation différentielle stochastique (EDS) de type mean-field, où les coefficients dépendent, de manière non linéaire du processus d'état ainsi que de sa loi de probabilité $P_{x^\upsilon(t)}$. De plus le coût fonctionnel est aussi de type mean-field général.

$$\begin{cases} dx^\upsilon\left(t\right) = f\left(t, x^\upsilon\left(t\right), P_{x^\upsilon(t)}, \upsilon\left(t\right)\right)dt + \sigma\left(t, x^\upsilon\left(t\right), P_{x^\upsilon(t)}, \upsilon\left(t\right)\right)dB\left(t\right) \\ x^\upsilon\left(t\right) = x_0, \quad t \in [0, T]\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

où $P_X = P \circ X^{-1}$ désigne la loi de la variable aléatoire X. Les coefficients : f : $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times Q_2\left(\mathbb{R}^d\right) \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, σ : $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times Q_2\left(\mathbb{R}^d\right) \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$, sont données des fonctions déterministes. Considérez le coût fonctionnel

$$J\left(v\left(\cdot\right)\right)=\mathbb{E}\left[\int_{0}^{T}l\left(t,x^{v}\left(t\right),P_{x^{v}\left(t\right)},v\left(t\right)\right)dt+\psi\left(x^{v}\left(t\right),P_{x^{v}\left(t\right)}\right)\right]. \tag{4.3}$$

Ici $l:[0,T]\times\mathbb{R}^{n}\times Q_{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\times\mathbb{U}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\psi:\mathbb{R}^{n}\times Q_{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$

Dans ce travail, nous utiliserons l'hypothése suivante.

Hypothése(H1) Les applications f, σ, $l:[0,T]\times\mathbb{R}\times Q_{2}\left(\mathbb{R}\right)\times\mathbb{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\psi\left(\cdot,\cdot\right)\in C_{b}^{1,1}\left(\mathbb{R}\times Q_{2}\left(\mathbb{R}\right),\mathbb{R}\right)$ pour tous les $u\in\mathbb{U}$.

Hypothése(H2) Soit $\varphi\left(x,\mu\right)=f\left(t,x,\mu,v\right),\sigma\left(t,x,\mu,v\right),l\left(t,x,\mu,v\right),\psi\left(x,\mu\right)$, la fonction $\varphi\left(\cdot,\cdot\right)$ satisfait les propriétés suivantes

(i) Pour fixe $x\in\mathbb{R}$ et $\mu\in Q_{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$, La fonction $\varphi\left(\cdot,\mu\right)\in\mathbb{C}_{b}^{1}\left(\mathbb{R}\right)$ et $\varphi\left(\cdot,\mu\right)\in C_{b}^{1,1}$ $\left(Q_{2}\left(\mathbb{R}\right),\mathbb{R}\right)$.

(ii) Toutes les dérivées,et φ_{x} et $\partial_{\mu}\varphi$, pour $\varphi=f$, σ , l , ψ sont bornées et Lipschitz continues, avec des constantes de Lipschitz indépendantes de $v\in U$.

(iii) Les fonctions f, σ et l sont continûment différentiables par rapport à la variable de contrôle u.et toutes leurs dérivées sont continues et bornées.

Clairement, sous les hypothéses **(H1)** et **(H2),**.pour tout $v\left(\cdot\right)\in\mathcal{U}\left([0,T]\right)$ L'EDS 4.2 de McKean-Vlasov admet une unique solution forte $x^{v}\left(t\right)$ donnée par

$$x^{v}\left(t\right)=x_{0}+\int_{0}^{t}f(s,x^{v}\left(s\right),P_{x^{v}\left(s\right)},v(s))ds+\sigma\left(s,x^{v}\left(s\right),P_{x^{v}\left(s\right)},v(s)\right)dB\left(t\right).$$

Notre probléme de contrôle optimal est de minimiser le cout $J\left(\cdot\right)$

$$J\left(u\left(\cdot\right)\right)=\inf_{v\left(\cdot\right)\in\mathcal{U}\left([0,T]\right)}J\left(v\left(\cdot\right)\right). \tag{4.4}$$

4.3 Principe du maximum stochastique

Dans cette section, nous prouvons les conditions nécessaires d'optimalité pour notre probléme de contrôle optimal pour des équations différentielles stochastiques générales de McKean-Vlasor avec sauts. La preuve est basée sur les dérivées par rapport à la mesure de probabilité et sur l'introduction des équations variationnelles avec quelques estimations. On définit l'hamiltonien $H : [0,T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, associé à notre probléme de contrôle par

$$H(t,x,\mu,\upsilon,p,q) = l(t,x,\mu,\upsilon) + f(t,x,\mu,\upsilon)\,p + \sigma(t,x,\mu,\upsilon)\,q \tag{4.5}$$

Soit $(u(\cdot), x(\cdot))$ la solution optimale du probléme de contrôle 4.2-4.4. Alors pour tout $0 \leq \varepsilon \leq 1$ et $\upsilon(\cdot) \in \mathcal{U}([0,T])$, nous définissons le contrôle perturbé par

$$\upsilon^{\varepsilon} = u(\cdot) + \varepsilon \upsilon(\cdot)$$

On note $x^{\varepsilon}(\cdot)$, $x(\cdot)$, $\rho^{\varepsilon}(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ Les trajectoires d'état de 4.2 correspondant respectivement à $\upsilon^{\varepsilon}(\cdot)$ et $u(\cdot)$.

Pour simplifier, nous introduisons la abrégée $\varphi(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$, $\varphi^{\varepsilon}(t) = \varphi(t, x^{\varepsilon}(t), \upsilon^{\varepsilon}(t))$, où h et $\varphi = f,\ \sigma,\ l$ ainsi que leurs dérivées partielles par rapport à x et υ, aussi, on notera pour $\varphi = f,\ \sigma,\ l$:

$$\begin{cases} \partial_{\mu}\varphi(t) = \partial_{\mu}\varphi(t)\left(t, x(t), P_{x(t)}, u(t); \widehat{x}(t)\right), \\ \partial_{\mu}\widehat{\varphi}(t) = \partial_{\mu}\varphi(t)\left(t, \widehat{x}(t), P_{x(t)}, \widehat{u}(t); x(t)\right), \end{cases}$$

Maintenat, nous introduisons les équations variationnelles suivantes

$$\begin{cases} d\phi(t) = \left[f_x(t)\,\phi(t) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu f(t)\,\widehat{\phi}(t) \right] + f_v(t)\,\upsilon((t)) \right] dt \\ \qquad\qquad + \left[\sigma_x(t)\,\phi(t) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \sigma(t)\,\widehat{\phi}(t) \right] + \sigma_v(t)\,\upsilon((t)) \right] dB(t) \\ \phi(0) = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

sous les hypothéses (**H1**) et (**H2**), les équations 4.6 admettent unique solution adaptée $\phi(\cdot)$.

Équation adjointe :

$$\begin{cases} -dp(t) = f_x(t)\,p(t) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu f(t)\,\widehat{p}(t) \right] + \sigma_x(t)\,q(t) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \sigma(t)\,\widehat{q}(t) \right] \\ \qquad\qquad + l_x(t) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu l(t) \right], \\ p(T) = \psi_x\left(x(T), P_{x(T)} \right) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \psi(\widehat{x}(T), P_{x(T)}; x(T)) \right]. \end{cases} \tag{4.7}$$

Clairement, sous hypothéses (**H1**) et (**H2**), il est de prouver que l'EDSR 4.6 et 4.7 admet une unique solution forte.

Le résultat principal de ce travail est énoncé le théoréme suivant. Soit les hypothéses (**H1**) et (**H2**),

Théoreme 4.3.1 *Soit $(u(\cdot), x(\cdot))$ la solution optimal du probléme de contrôle 4.2 et 4.3. Alors il exicte $(p(\cdot), q(\cdot))$ solution de 4.7, telle que,$\forall \upsilon \in U$, on a*

$$\mathbb{E}\int_0^T \left[H_v\left(t, x(t), P_{x(t)}, u(t), p(t), q(t) \right) (\upsilon(t) - u(t)) \right] \geq 0,$$

où la fonction hamiltonienne H est défini par 4.5.

Afin de prouver notre résultat principal dans (le théoréme 4.1.1), nous présentons queques résultats auxiliaires.

Remarque 4.3.1 *d'aprés (le théoréme 4.1.1), on a dt-p.p et P-p.s*

$$H_{\upsilon}\left(t,x(t),P_{x(t)},u\left(t\right),p(t),q(t)\right)\left(\upsilon\left(t\right)-u\left(t\right)\right)\geq 0,$$

Lemme 4.3.1 *Supposons que les hypothéses (**H1**) et (**H2**) sont vérifies, alors on a*

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathbb{E}\left[\sup_{0<t<T}\left|x^{\varepsilon}\left(t\right)-x\left(t\right)\right|^{2}\right]=0$$

Preuve. En application des estimations stondards, l'intégralité de Boukhölder-Davis-Gundy on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^{\varepsilon}\left(t\right)-x\left(t\right)\right|^{2}\right]\leq\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|f^{\varepsilon}\left(s\right)+f\left(s\right)\right|^{2}ds+\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|\sigma^{\varepsilon}\left(s\right)+\sigma\left(s\right)\right|^{2}ds$$

D'aprés les conditions de Lipschitz sur les coefficients f,σ par rapport à x,μ et u,(l' hypothéses (**H2)-(ii)**), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^{\varepsilon}\left(t\right)-x\left(t\right)\right|^{2}\right]&\leq C_{T}\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left[\left|x^{\varepsilon}\left(t\right)-x\left(t\right)\right|^{2}+\left|W_{2}\left(P_{x^{\varepsilon}(s)},P_{x(s)}\right)\right|\right]ds \\ &+C_{T}\varepsilon^{2}\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|\upsilon\left(s\right)\right|^{2}ds.\end{aligned}\tag{4.8}$$

A partir de la définition de la métrique de Wasserstein $W_2(\cdot,\cdot)$,on a

$$W_2(P_{x^{\varepsilon}(s)} - P_{x(s)}) = \inf\left\{\mathbb{E}\left[|\widetilde{x}^{\varepsilon}(s) - \widetilde{x}(s)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } \widetilde{x}^{\varepsilon}(s), \widetilde{x}(s) \in \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d\right),\right. \tag{4.9}$$

$$\left.\text{avec } P_{x^{\varepsilon}(s)} = P_{\widetilde{x}^{\varepsilon}(s)}\right\}$$

$$\leq \left[\mathbb{E}\left|x^{\varepsilon}(t) - x(t)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.10}$$

par (la définition 3.1.3) et à partir de 4.8 et 4.9, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^{\varepsilon}(t) - x(t)\right|^2\right] \leq C_T\mathbb{E}\int_0^t \left|x^{\varepsilon}(t) - x(t)\right|^2 ds + M_T\varepsilon^2.$$

■

Lemme 4.3.2 *Suposon que les hypothéses (**H1**) et (**H2**) soient vérifiées. alors on a*

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sup_{0<t<T}\mathbb{E}\left|\frac{x^{\varepsilon}(t) - x(t)}{\varepsilon} - \phi(t)\right|^2 = 0 \tag{4.11}$$

Preuve. Nous mettons

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \frac{x^{\varepsilon}(t) - x(t)}{\varepsilon} - \phi(t), t \in [0, T],$$

Pour simpifier, nous utilisons les notations suivantes pour $\varphi = f, \sigma, l$:

$$\varphi_x^{\lambda,\varepsilon}(t) = \varphi_x\left(t, x^{\lambda,\varepsilon}, P_{x^{\varepsilon}(t)}, \upsilon^{\varepsilon}(t)\right),$$

$$\partial_{\mu}^{\lambda,\varepsilon}\varphi(t) = \partial_{\mu}\varphi\left(t, \left(t, \widehat{x}^{\varepsilon}, P_{\widehat{x}^{\lambda,\varepsilon}(t)}, \upsilon^{\varepsilon}(t); \widehat{x}(t)\right)\right),$$

$$\begin{aligned}
x^{\lambda,\varepsilon}(s) &= x(s) + \lambda\varepsilon\left(\eta^{\varepsilon}(s) + \phi(s)\right),\\
\widehat{x}^{\lambda,\varepsilon}(s) &= x(s) + \lambda\varepsilon\left(\widehat{\eta}^{\varepsilon}(s) + \widehat{\phi}(s)\right),\\
\upsilon^{\lambda,\varepsilon}(s) &= u(s) + \lambda\varepsilon\upsilon(s),
\end{aligned}$$

Puisque que $D_{\zeta} f(\mu_0) = \left\langle D\widetilde{f}(\vartheta_0), \zeta\right\rangle = \frac{d}{dt}\widetilde{f}(\vartheta_0 + t\zeta)_{t=0}$, nous avons la forme suivante du dévelooppement de Taylor

$$f(P_{\vartheta_0+\zeta}) - f((P_{\vartheta_0}) = D_{\zeta} f(P_{\vartheta_0}) + R(\zeta),$$

où $R(\zeta)$ est d'ordre $O(\|\zeta\|_2)$ avec $O(\|\zeta\|_2) \longrightarrow 0$ pour $\zeta \in \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d\right)$.

$$\begin{aligned}
\eta^{\varepsilon}(t) = {} & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f^{\varepsilon}(s) - f(s)\right] ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma(s)\right] dW(s)\\
& - \int_0^t \left[f_x(s)\phi(s) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_{\mu} f(s)\widehat{\phi}(s)\right] + f_{\upsilon}(s)\upsilon(s)\right] ds\\
& - \int_0^t \left[\sigma_x(s)\phi(s) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_{\mu}\sigma(s)\widehat{\phi}(s)\right] + \sigma_{\upsilon}(s)\upsilon(s)\right] dW(s)
\end{aligned}$$

Nous décomposons $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [f^{\varepsilon}(s) - f(s)]ds$ dans les trois parties suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f^{\varepsilon}(s) - f(s)\right] ds = {} & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f^{\varepsilon}(s) - f\left(s, x(s), P_{x^{\varepsilon}(s)}, \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right] ds\\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f\left(s, x(s), P_{x^{\varepsilon}(s)}, \upsilon^{\varepsilon}(s)\right) - f\left(s, x(s), P_{x(s)}, \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right] ds\\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f\left(s, x(s), P_{x(s)}, \upsilon^{\varepsilon}(s)\right) - f(s)\right] ds.
\end{aligned}$$

Nous remarque que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f^{\varepsilon}(s) - f\left(s, x(s), P_{x^{\varepsilon}(s)}, \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right] ds = \int_0^t \int_0^1 \left[f_x^{\lambda,\varepsilon}(s)\left(\eta^{\varepsilon}(s) - \phi(s)\right)\right] d\lambda ds,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f^{\varepsilon}(s) - f\left(s, x^{\varepsilon}(s), P_{x^{\varepsilon}(s)}, \upsilon^{\varepsilon}(s)\right)\right] ds = \int_0^t \int_0^1 \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu^{\lambda,\varepsilon} f(s)\left(\eta^{\varepsilon}(s) - \widehat{\phi}(s)\right)\right] d\lambda ds,$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[f\left(s, x(s), P_{x(s)}, \upsilon^{\varepsilon}(s)\right) - f(s)\right] ds = \int_0^t \int_0^1 f_\upsilon(s, x(s), P_{x(s)}, \upsilon^{\lambda,\varepsilon}(s))\upsilon(s)] d\lambda ds,$$

En appliquant la même décomposons pour σ, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|\eta^{\varepsilon}(t)\right|^2\right] = C(t)\,\mathbb{E}[\int_0^t \int_0^1 \left|f_x^{\lambda,\varepsilon}(s)\,\eta^{\varepsilon}(s)\right|^2 d\lambda ds$$

$$\int_0^t \int_0^1 \widehat{\mathbb{E}}\left|\partial_\mu^{\lambda,\varepsilon} f(s)\,\widehat{\eta}^{\varepsilon}(s)\right|^2 d\lambda ds + \int_0^t \int_0^1 \widehat{\mathbb{E}}\left|\partial_\mu^{\lambda,\varepsilon} \sigma(s)\,\widehat{\eta}^{\varepsilon}(s)\right|^2 d\lambda ds$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma^{\varepsilon}(s) = & \int_0^t \int_0^1 \left[f_x^{\lambda,\varepsilon}(s) - f_x(s)\right]\phi(s)\, d\lambda ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\partial_\mu^{\lambda,\varepsilon} f(s) - \partial_\mu f(s)\,\widehat{\phi}(s)\right)\right] d\lambda ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[f_\upsilon\left(s, x(s), P_{x(s)}, \upsilon^{\lambda,\varepsilon}(s)\right) - f_\upsilon(s)\right]\upsilon(s)\, d\lambda ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[\sigma_x^{\lambda,\varepsilon}(s) - \sigma_x(s)\right]\phi(s)\, d\lambda dW(s) \\
& + \int_0^t \int_0^1 \widehat{\mathbb{E}}[(\partial_\mu^{\lambda,\varepsilon}\sigma(s) - \partial_\mu\sigma(s))\widehat{\phi}(s)] d\lambda dW(s) \\
& + \int_0^t \int_0^1 \left[\sigma_\upsilon\left(s, x(s), P_{x(s)}, \upsilon^{\lambda,\varepsilon}(s)\right) - \sigma_\upsilon(s)\right]\upsilon(s)\, d\lambda dW(s)
\end{aligned}$$

Maintenant les dérivés de f, σ par rapport à (x, μ, υ) sont Lipshitz continies dans (x, μ, υ) , on a

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |\gamma^{\varepsilon}(s)|^2\right] = 0$$

Puisque les dérivés de f, σ et γ sont bornés par rapport à (x, μ, υ) , on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |\eta^{\varepsilon}(t)|^2\right] \leq C(t)\left\{\int_0^t |\eta^{\varepsilon}(t)|^2 ds + \mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |\gamma^{\varepsilon}(s)|^2\right]\right\}.$$

D'aprés le lemme de Gronwall, on obtient $\forall t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |\eta^{\varepsilon}(t)|^2\right] \leq C(t)\left\{\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |\gamma^{\varepsilon}(s)|^2\right] \exp\left\{C(s)ds\right\}\right\}.$$

Enfin on pose $t = T$ et $\varepsilon \longrightarrow 0$, la preuve de (lemme 4.1.2) on obtient le résultat souhaité. ■

Lemme 4.3.3 *Pour $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ on a l'inégalité suivant :*

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}\Big\{&\Big[\psi_x\left(x^*(T), P_{x^*(T)}\right)\big) + \widehat{\mathbb{E}}\left(\partial_\mu \psi\left(x^*(T), P_{x^*(T)}\right)\right)\Big]\phi(T) \\
&+ \int_0^T [l_x\left(t, x^*(t), P_{x^*(T)}, u^*(t)\right)\phi(t) + \widehat{\mathbb{E}}\left(\partial_\mu l\left(t, x^*(t), P_{x^*(t)}, u^*(t)\right)\right)\phi(t) \\
&+ (u(t) - u^*(t))\, l_u\left(t, x^*(t), P_{x^*(t)}, u^*(t)\right)\Big\}\, dt.
\end{aligned}$$

Preuve. on a

$$
\begin{aligned}
0 &\leq J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right)-J\left(u^{*}(\cdot)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\psi(x^{\varepsilon}(T), P_{x^{\varepsilon}(T)})-\psi(x^{*}(T), P_{x^{*}(T)})\right] \\
&+ \mathbb{E}\int_{0}^{T}\left[\mathfrak{l}(t, x^{\varepsilon}(t), P_{x^{\varepsilon}(T)}, u^{\varepsilon}(t))-\mathfrak{l}(t, x^{*}(t), P_{x^{*}(t)}, u^{*}(t)))\right] dt,
\end{aligned}
$$

D'aprés la formule de Taylor-Young' on a $(\varepsilon \longrightarrow 0^{+})$

$$
\begin{aligned}
& J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right)-J\left(u^{*}(\cdot)\right) \\
&= E\left[\int_{0}^{T}\left\{l_{x}(t)\left(x^{\varepsilon}(t)-x^{*}(t)\right)+\widehat{E}\left[\widehat{l_{\mu}^{*}}(t)\left(\widehat{x}^{\varepsilon}(t)-\widehat{x}^{*}(t)\right)\right]\right.\right. \\
&+ l_{u}(t)\left(u^{\varepsilon}(t)-u^{*}(t)\right)+E\left[\psi_{x}(x^{*}(T))\left(x^{\varepsilon}(T)-x^{*}(T)\right)\right] \\
&+ E\left[\widehat{E}[\psi_{\mu}^{*}(T)\left(\widehat{x}^{\varepsilon}(T)-\widehat{x}^{*}(T)\right)]\right]+o(\varepsilon)\,.\left(\varepsilon \longrightarrow 0^{+}\right)
\end{aligned}
$$

■

Preuve. (Preuve de Théorème de principe du maximum) Par l'application de la formule d'Ito pour le terme $p(t)\phi(t)$ avec $\phi(0)=0$, où

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(p(T)\phi(T)) &= \mathbb{E}\int_{0}^{T} p(t)d\phi(t)+\mathbb{E}\int_{0}^{T}\phi(t)dp(t) \\
&+ \mathbb{E}\int_{0}^{T} q(t)\left[\sigma_{x}(t)\,\phi(t)+\widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_{\mu}\sigma(t)\,\widehat{\phi}(t)\right]\right. \\
&+ \sigma_{u}(t)\left(u(t)-u^{*}(t)\right)\Big]\,dt
\end{aligned}
$$

avec le terme $p(T) = \psi_x\left(x^*(T), P_{(x^*(T))}\right) + \widehat{\mathbb{E}}\left[\partial_\mu \psi\left(x^*(T), P_{(x^*(T))}\right)\right]$ on a,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left[\psi_x\left(x(T), P_{x(T)}\right) + \widehat{\mathbb{E}}\left(\partial_\mu \psi\left(x(T), P_{x(T)}\right)\right)\right]\phi(T)\right\} \\
&= \mathbb{E}\int_0^T p(t) f_u(t)(u(t) - u^*(t))dt + \mathbb{E}\int_0^T q(t)\sigma_u(t)(u(t) - u^*(t))dt \\
&- \mathbb{E}\int_0^T \phi(t) l_x(t)\, dt - \mathbb{E}\int_0^T \phi(t)\widehat{\mathbb{E}}\left(\partial_\mu l(t)\right) dt,
\end{aligned}
$$

Finalement, d'aprés *Lemme 4.3.3,* on trouve

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T p(t) f_u(t)(u(t) - u^*(t))dt + \mathbb{E}\int_0^T q(t)\sigma_u(t)(u(t) - u^*(t))dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T l_u(t)(u(t) - u^*(t))\, dt, \\
&= \mathbb{E}\int_0^T H_u(t, x^*(t), P_{(x^*(t)}, u^*(t), p(t), q(t))(u(t) - u^*(t))\, dt.
\end{aligned}
$$

Ce qui termine la preuve du théorème 4.3.1. ■

Conclusion

Le but de ce mémoire est d'étudier le principe du maximum stochastique pour un probleme de controle optimal de type mean-field. Les coefficients de system et le cout sont dépendent, de manière non linéaire du controle, et processus d'état ainsi que de sa loi de probabilité. Ce principe conduit à établir des conditions necessaires d'optimalité où le domaine de controle est suposé convexe. Cette étude nous permis de voir prés les différentes étapes de calcul pour établir ces conditions. la preuve de ce principe du maximum est basée sur la dérivée par rapport a une mesure de probabilité au sense de P.L. Lions. Cette méthode de dérivation a été démontré par P.L. Lions dans un cours "Lion *(Lions P.L. (2013). Cours au Collége de France : Théorie des jeu à champs moyens. http ://www college-de-france.fr/default/EN/all/equ[1]der/audiovideo.jsp.).*

Annexe

Lemme de Gronwall

Lemme 4.3.4 *Soient $T > 0$ et ϕ une fonction positive bornée sur $[0, T]$, On suppose qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$, telles que pour tout $t \in [0, T]$ on a :.*

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(s)\, ds,$$

Alors

$$\forall t \in [0, T] \quad \phi(t) \leq \alpha \int_0^t \exp(\beta s) ds.$$

L'inégalité Bukhölder-Davis-Gandy

Théoreme 4.3.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute martingale locale continue $\int_0^t \sigma(s, x(s))\, dB(t)$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, x(s))\, dB(t) \right|^2 \right] \leq C\mathbb{E} \int_0^T |\sigma(s, x(s))|^2\, ds.$$

Bibliographie

[1] Bensoussan A (1983), Lectures on stochastic contr.In Lect.Notes in Math.972,Springer Varlag, pp.1-62.

[2] Buckdahn R., Li J., & Ma J. (2016). A stochastic maximum principle for general mean-field systems. Appl. Math. Optim. 74(3), 507-534.

[3] Jenblac, M. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY, Lecture Notes, University of Évry.

[4] Guenane L., Hafayed M., Meherrem S., & Abbas S. (2020). On optimal solutions of general continuous-singular stochastic control problem of McKean-Vlasov type. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 43(10), 6498-6516.

[5] Hafayed, M. (2009), Gradient généralisés et contrôle stochastique, thése de doctorat, Université Mohamed khider Biskra, pp 102.

[6] Hafayed, M. (2013). A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal singular stochastic control. Communications in Mathematics and Statistics, 1(4), 417-435.

[7] Hafayed, M. (2013). A mean-field maximum principle for optimal control of forward-backward stochastic differential equations with Poisson jump processes. International Journal of Dynamics and Control, 1(4), 300-315.

[8] Hafayed M. Abbas S. Veverka P. (2013) : On necessary and sufficient conditions for near-optimal singular stochastic controls, Optimization Letters, Springer, Optim. Lett. (7)5, 949-966.

[9] Hafayed M, Abbas S.(2013) : On Stochastic Near-optimal Singular Controls for Jumps Diffusions : Necessary and Sufficient Conditions , Journal of Dynamical and Control Systems, Springer 19(4), 503-517.

[10] Hafayed M. Abbas S. : (2014) On Near-optimal Mean-field stochastic singular controls : necessary and sufficient conditions for near-optimality. Journal of Optimization Theory and Applications, Springer Vol 160, 778-808.

[11] Hafayed, M., Tabet, M., & Boukaf, S. (2015). Mean-Field Maximum Principle for Optimal Control of Forward-Backward Stochastic Systems with Jumps and its Application to Mean-Variance Portfolio Problem. Communications in Mathematics and Statistics, 3(2), 163-186.

[12] Hafayed M., Meherrem. S., Eren, Ş., & Guçoglu, D.H. (2018). On optimal singular control problem for general Mckean-Vlasov differential equations : necessary and sufficient optimality conditions. Optim. Control Appl. Methods 39(3), 1202-1219.

[13] Lakhdari I.E., Miloudi H., & Hafayed M. (2020). Stochastic maximum principle for partially observed optimal control problems of general McKean-Vlasov differential equations. Bull. Iran. Math. Soc. DOI 10.1007/s41980-020-00426-1.

[14] Lions P.L. (2013). Cours au Collége de France : Théorie des jeu à champs moyens. http ://www college-de-france.fr/default/EN/all/equ[1]der/audiovideo.jsp.

[15] Meherrem S., & Hafayed M. (2019). Maximum principle for optimal control of McKean-Vlasov FBSDEs with Lévy process via the differentiability with respect to probability law. Optim. Control Appl. Methods, 40(3), 499-516.

[16] Yong.J.,& Zhou,X. Y. (1999), Stochastique controls,Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer Verlag.

Résumé

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie d'optimisation stochastique et le contrôle optimal stochastique. Dans ce mémoire de Master, nous étudions un problème de contrôle optimal d'un équation différentielle stochastique (EDS) de type mean-field, où les coefficients dépendent, de manière non linéaire du processus d'état ainsi que de sa loi de probabilité. De plus le coût fonctionnel est aussi de type mean-field général. Les conditions nécessaires à l'optimalité sous forme de principe du maximum sont établies. La preuve des principaux résultats est basée sur les dérivées par rapport à la mesure de probabilité introduite par Lion (Lions P.L. (2013). Cours au Collége de France: Théorie des jeu à champs moyens. http://www college-de-france.fr/default/EN/all/equ[1]der/audiovideo.jsp

Mots-clés: Equations différentielles stochastiques de type mean-field, équations adjoints, contrôle optimal stochastique, principe de maximum stochastique, Dérivées par rapport a une measure de probabilité

Abstract

In this work, we study the optimal control of a stochastic differential equation (SDE) of mean-field type, where the coefficients depend, nonlinearly, on both the state process as well as of its law. Moreover the cost functional is also of general mean-field type. The necessary conditions for optimality in the forme of maximum principle is established. The proof of main results is based on the dérivatives with respected to probability measure witch has been introduced by Lion (Lions P.L. (2013). Cours au Collége de France: Théorie des jeu à champs moyens. http://www college-de-france.fr/default/EN/all/equ[1]der/audiovideo.jsp.)

Keywords: Optimal stochastic control, Mean-field stochastic differential equations, derivatives with respected to probability measure. Law of probability, adjoint equations.

ملخص

نهتم في هذه المذكرة بموضوع في الإحتمالات والمراقبة المثلى للمعادلات التفاضلية العشوائية ذات الصنف "الحقل المتوسط" والتي تسمى ايضا McKean-Vlasov .

نتطرق بالضبط إلى مسألة مبدأ الأعظمية العشوائي المنتظم الخاص بهذا النوع من المعادلات التفاضلية التي تسمح لنا بإيجاد الشروط الضرورية لحساب قيمة المراقبة المثلى. يعتمد برهاننا على استخدام اشتقاقات الدوال بالنسبة للقياسات الإحتمالية و الذي اسسه الباحث P.L.Lions