République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Mébarki Imen

Titre :

conditions suffisantes pour les contrôles relaxés des EDSPR Non Lineaires

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**CHALA Adel**	UMKB	Président
Pr.	**GHERBAL Boulakhras**	UMKB	Encadreur
Dr.	**ABBA Abdelmadjid**	UMKB	Examinateur

Juin 2023

Dédicace

$\mathcal{A}$ mes parents

$\mathcal{A}$ mes frères

$\mathcal{A}$ mes soeurs

$\mathcal{A}$ mes amies

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements à **Dieu** tout-puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a données pour achever mon humble travail.

Mes sincères remerciements, mon respect et ma gratitude à mes parents qui ont toujours été là pour moi.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire monsieur **GHERBAL Boulakhras**, professeur de mathématiques à l'université de Biskra, pour sa

patience, ses conseils, sa confiance.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du Jury.

Je remercie à touts les enseignants du département de Mathématiques.

Je remercie également tous ceux qui ont partagé avec moi les moments difficile

Table des matières

.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un problème de contrôle relaxé pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastique progressives et rétrogrades de type champ moyen (EDSPR-CM). En particulier, on va établir les conditions suffisantes d'optimalité pour qu'un contrôle relaxé soit optimal, pour un problème de contrôle gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t^\mu = \int_U b\left(t, X_t^\mu, E\left[X_t^\mu\right], u\right) \mu\left(du\right) dt + \sigma\left(t, X_t^\mu, E\left[X_t^\mu\right]\right) dW_t \\ dY_t^\mu = -\int_U f\left(t, X_t^\mu, E\left[X_t^\mu\right], Y_t^\mu, E\left[Y_t^\mu\right], Z_t^\mu, E\left[Z_t^\mu\right], u\right) \mu\left(du\right) dt - Z_t^\mu dW_t \\ X_0^\mu = x, Y_T^\mu = h\left(X_T^\mu, E\left[X_T^\mu\right]\right), t \in T \end{cases}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien défni dans un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et b, et f sont deux fonctions mesurables. La fonction de coût a minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$ est définie sous la forme :

$$\begin{aligned} J\left(\mu\right) := E\Big[&\alpha\left(X_T^\mu, E\left[X_T^\mu\right]\right) + \beta\left(Y_0^\mu, E\left[Y_0^\mu\right]\right) \\ &+ \int_0^T \int_U l\left(t, X_t^\mu, E\left[X_t^\mu\right], Y_t^\mu, E\left[Y_t^\mu\right], Z_t^\mu, E\left[Z_t^\mu\right], u\right) \mu\left(du\right) dt\Big] \end{aligned}$$

Nous disons qu'un contrôle relaxé q est un contrôle relaxé optimal si

$$J(q) = \inf_{\mu \in \mathcal{R}} J(\mu).$$

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne un petit rappel sur le calcul stochastique :Filtration, mesurabilité, adaptation, esperance conditionnelle, mouvement Brownien, Martingale, formule d'Itô...ect. De plus, nous verrons les différents types de contrôle stochastique : contrôle admissible, contrôle optimal,contôle presque optimal,contrôle relaxé.

Dans le deuxième chapitre, on s'interesse d'un nouveau type des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires (EDSPR), ce type s'appel "champ moyen" c'est-à-dire le système dépend du processus d'état, ainsi que de sa distribution via l'esperence du processus d'état. On prouve dans ce chapitre, un théorème d'existence et d'unicité des solutions pour les EDSPR de type champ moyen.

Notre objectif dans le troisième chapitre, est d'établir les conditions suffisantes d'optimalité, pour les contrôles relaxés pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades non linéaires, de type champ moyen. Pour atteindre cet objectif, nous donnons les étapes nécessaires.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique et les types de contrôl stochastique

1.1 Calcul stochastique

1.1.1 Tribu

Définition 1.1.1 *Une tribu ou ($\sigma-$algèbre) sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω qui possède les troi propriétés suivantes :*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

ii) si $F \in \mathcal{F}$ alors, $F^c \in \mathcal{F}$, où F^c désigne le comlémentaire de F,

iii) si $(F_n, n \geq 1)$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors

$$\cup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}.$$

Remarque 1.1.1 *Si $F_1 \in \mathcal{F}$ et $F_2 \in \mathcal{F}$ alors, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est appelée une algèbre sur Ω. Les éléments de la tribeu $\mathcal{F}$ sont appelés des événements. Un singleton $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ est appelé un événement élémentaire. Lénsemble Ω est appelé l'événement certain.*[8]

1.1.2 Filtration

Définition 1.1.2 *(Filtration) Une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *pour tous* $0 \leq s \leq t$ *avec* t *dans* T. $\mathcal{F}_t$ *s'interprète comme l'information connue a l'instant* t *et elle augmente avec le temps. On pose* $\mathcal{F}_{\hat{T}} = \sigma\left(\cup_{t\in T}\mathcal{F}_t\right)$ *la plus petite* σ*-algèbre contenant tous les* $\mathcal{F}_t, t \in T$. *Le quadruplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ *est appelé espace de probabilité filtré, l'exemple canonique d'une filtration est le suivant : si* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est un processus stochastique, la filtration naturelle (ou canonique) de* X *est*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), t \in T$$

la plus petite σ*-algèbre par rapport à laquelle* X_s *est mesurable pour tous* $0 \leq s \leq t$. $\mathcal{F}_t^X$ *s'interprète comme toute l'information qu'on peut extraire de l'observation des trajectoires de* X *entre* 0 *et* t. *On dit qu'une filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *satisfaite les conditions habituelles si elle est continue à droite, i.e. :*

$$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\, \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t, \forall t \in T$$

et si elle est complète, c-à-d $\mathcal{F}_0$ *contient les ensembles négligeables de* $\mathcal{F}_{\hat{T}}$. *On dit alors que l'espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ *satisfait les conditions habituelles. La continuité à droite de* $\mathcal{F}_t$ *signifie intuitivement qu'ayant observé toute l'information disponible jusqu'en* t *inclus, on n'apprend rien de plus par une observation infinitésimale dans le futur. La complétion d'une filtration signifie que, si un événement est impossible, cette impossibilité est déjà connue à l'instant* 0. *Partant d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *quelconque, on construit une filtration satisfaisant les conditions habituelles, en prenant pour tout* $t \in T$ *la tribu* $\mathcal{F}_{t^+}$ *à laquelle on rajoute la classe des ensembles négligeables de* $\mathcal{F}_{\hat{T}}$. *La* *filtration ainsi construite est appelée l'augmentation habituelle de* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$*. Dans la suite, on se donne une filtration* $F = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *.*[13]

1.1.3 Processus stochastique

Définition 1.1.3 *Un processus stochastique à temps continu est une famille* $X = (X_{t,}t \in [0, +\infty[)$ *de variables aléatoires indèxées par le temps* t *définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Définition 1.1.4 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit adapté (par rapport à* $\mathbb{F}$*) si pour tout* $t \geq 0, X_t$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*[13]

1.1.4 Quelques Inégalités

Proposition 1.1.1 (Inégalité de Jensen) *Soit* $M \in L^1(\mathcal{F})$ *,* φ *une fonction convexe telle que* $\varphi(M) \in L^1(\mathcal{F})$ *,alors*

$$\varphi(E[M]) \leq E[\varphi(M)].$$

Propriété 1.1.1 (Convergence monotone) *Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite croissante de variables aléatoire réel intégrables, qui converge vers une variable* X *que l'on suppose intégrable, alors*

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$

Propriété 1.1.2 (Fatou) *Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite croissante de variables aléatoire réel positiveset intégrables,telle que* $\liminf_{n\to\infty} X_n$ *est une variable intégrable, alors*

$$E\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n].$$

Propriété 1.1.3 (Convergence dominée) *Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite croissante de variables aléatoire réel intégrables qui converge en probabilité vers* X*, et on suppose qu'il existe*

U intégrable telle que $\forall n \geq 0; |X_n| \leq U$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$

Théorème 1.1.1 *(Bienaymé Tchebychev) si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$alor pour tout $r > 0$*

$$P(|X - E[X]| \geq r) \leq \frac{Var(X)}{r^2}$$

1.1.5 L'espérance Conditionnelle

Théorème 1.1.2 *Soit X une variable aléatoire dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Alors, il existe une unique variable aléatoire $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :*

1) Y est G-mesurable,

2) pour tout $A \in G$, on a

$$E[X1_A] = E[Y1_A].$$

Propriété de l'espérance conditionnelle

– Si X est intégrable et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$, alors :

$$E[E[X|G]] = E[X].$$

– Soit $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$E[\alpha X + Y|G] = \alpha E[X|G] + E[Y|G], \text{ p.s.}$$

– Soit X une variable aléatoire dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$, alors, pour tout $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $X \leq Y$ p.s, on a :

$$E[X|G] \leq E[Y|G], \text{ p.s.}$$

- Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$, si $X \geq 0$ p.s, alors :

$$E[X|G] \geq 0, \text{ p.s.}$$

- Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tell que$X$ est G-mesurable, alors :

$$E[X|G] = X.$$

- Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que X et XY sont intégrable et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$, telles que X est G-mesurable, alors :

$$E[XY|G] = XE[Y|G], \text{ p.s.}$$

- En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors :

$$E[X|Y] = E[X].$$

- Soit X et Y deux variables aléatoires avec $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espérance de X sachant Y est définie par :

$$E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$$

où $\sigma(Y)$ est la tribu engendrée par la variable aléatoire Y.

- Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\varphi : \ R \to R$ une application convexe telle que $\varphi(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors :

$$\varphi(E[X|\mathcal{F}]) \leq E[\varphi(X)|\mathcal{F}], \text{ p.s.}$$

1.1.6 Martingale à temps continu

Définition 1.1.5 *Un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ adapté et tel que $M_t \in L^1$, pour tout $t \geq 0$, est appelé:*

(i) Martingale si, pour tous $0 \leq s < \ t$,

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s.$$

(ii) surmartingale si, pour tous $0 \leq s < t$,

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s.$$

(iii) sous-martingale si, pour tous $0 \leq s < t$,

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s.$$

Proposition 1.1.2 *(i)L'opposé d'une surmartingale est une sous-martingale et inversement.*

(ii)La somme de deux surmartingales (resp. sous-martingales) est une surmartingale (resp. sous-martingale).

(iii) L'ensemble des martingales forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(iv) Si l'on compose une martingale avec une fonction convexe, on obtient une sous-martingale.

1.1.7 Mouvement Brownien

Définition 1.1.6 *(Mouvement Brownien stondard) :Le mouvement brownien standard est un processus stochastique continu qui est constitué d'une collection de variables aléatoires continues $\{W(t), t \geq 0\}$,tel qu'à l'origine*

1. $W_0 = 0$
2. Le mouvement brownien possède des accroissements stationnaires, $\forall 0 \leq s \leq t$, $W(t) - W(s)$ est de loi gaussienne, centée de variance $(t - s)$.

3. Pour toute partition de temps $[0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = t]$. les accroissements

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_n) - W(t_{n-1})$$

sont indépendant.

4. Le mouvement brownien possède des trajectoires continues.

Proposition 1.1.3 *Le processus* $(W_t)_{t\geq 0}$*est un processus gaussien* (*centrée*)*de fonction de covarionce*

$$K(s,t) = \min\{s,t\}.$$

Proposition 1.1.4 *Le mouvement Brownien standard* (W_t) *est une* $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in T}$*-martingale (à trajectoire) continue.*

1.1.8 Variation quadratique du mouvement Brownien

Définition 1.1.7 *(Variation quadratique) Un processus* X *est dit à variation quadratique finie s'il existe un processus noté* $\langle X\rangle$*tel que pout toute suite de subdivisions* $\Delta_n = \sup_{0\leq i\leq n}(t_{i+1} - t_i)$*de* $[0,t]$, $k \in N$,*tel que* $\lim\limits_{n\to\infty} |\Delta_n| \to 0$,*on a*

$$\langle X\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |X(t_{i+1}) - X(t_i)|^2, \ \mathbb{P} - ps.$$

Proposition 1.1.5 *Pour toute famille de subdivision* Δ_n,*on a la variation quadratique du mouvement Brownien définie comme suite*[7] *:*

$$[B,B](t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |B(t_i) - B(t_{i-1})|^2.$$

Théorème 1.1.3 *La variation quadratique du mouvement Brownien sur* $[0,t]$ *est* t.

Théorème 1.1.4 *Soit* $W(t)$ *un mouvement Brownien, alors*

1. $W(t)$ est une martingale.

2. $W(t)^2 - t$ est une martingale

1.1.9 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique. Par exemple le calcul de l'intégrale classique $\int_0^t W_s dW_s$ posait problème, car elle n'a pas un sens mathématique, les trajectoires des processus stochastiques ne sont pas différentiables. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique qui nous aide à mieux appréhender le problème de différentiabilité des processus stochastiques.

Processus d'Itô en dimension 1

Définition 1.1.8 *(Processus d'Itô en dimension 1).*

Soit W_t un mouvement Brownien de dimension 1 sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus d'Itô de dimension 1 (ou intégrale stochastique) est un processus stochastique X_t sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\, ds + \int_0^t v(s,\omega)\, dW_s \tag{1.1}$$

avec $v \in \mathcal{W}_H$ tel que

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t v(s,\omega)^2\, ds < \infty,\ \text{pour tout } t \geq 0\right] = 1$$

et u est H_t-adapté vérifiant

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty, \forall t \geq 0\right] = 1.$$

Un processus X_t de la forme de (1.1) peut s'écrire parfois sur cette forme plus courte :

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

Formule d'Itô en dimension multiple

(Formule d'Itô en dimension multiple)Soit

$$dX_t = udt + vdW_t$$

un processus d'Itô de dimension n comme défini ci-dessus. Soit $g(t,x) = (g_1(t,x), ..., g_p(t,x))$ une fonction C^2 de $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors le processus $Y(t,\omega) = g(t, X(t))$ est aussi un processus d'Itô dont sa $k^{ème}$ composante est donnée par

$$dY_k = \frac{dg_k}{dt}(t,X)\,dt + \sum_i \frac{dg_k}{dx_i}(t,X)\,dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{d^2 g_k}{dx_i dx_j}(t,X)\,dX_i dX_j$$

avec

$$dW_i \times\ dW_j = \delta_{i,j}dt, \quad dW_i \times\ dt = dt \times\ dW_i = dt \times\ dt = 0.$$

1.2 Contrôle stochastique

Le contrôle stochastique caractérisé par :

1.2.1 Etat du systéme

Un système dynamique se caractérise par son état à tout instant qui peut être discret ou continu. Tout en considérant sa variation continue. L'horizon (l'intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini. Les variables quantitatives se représentent par l'état du système et elles sont en nombre fini à valeurs réelles. Au moment t, l'état du système sera noté l'application $t \to X_t(\omega)$ d'écrit l'évolution du système. Cette évolution est fournie par un modèle probabiliste. Exemple l'état du système gouverné par un EDS, EDSR, EDSPR, EDDSR, EDDSPR...ect.

1.2.2 Contrôle admissible

La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôle admissible que nous modèlisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponible à cette instant. Un contrôle admissible est un processus u_t adapté par rapport à une filtration et prend ses valeurs dans un espace d'action $A \subset \mathbb{R}^n$. On note par U_{ad} l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

1.2.3 Critère (fonctionnelle) de coût

L'objectif est de minimiser (ou maximiser) sur l'ensemble des contrôles admissibles une fonctionnelle J. Pour d'écrire un problème de contrôle stochastique, il est important de préciser quelle est l'information disponible à tout instant.

1.2.4 Contrôle optimal

Définition 1.2.1 *: Le contrôIe optimal minimiser (ou maximiser) la fonction de coût J sur I'ensemble des contrôIes admissibles U_{ad}. C'ést à dire un contrôle admissible u^* est dit optimal s'il vérifie*

$$J(u^*) = \inf_{v \in U} J(v).$$

1.2.5 Contôle presque optimal

Définition 1.2.2 *Soit* $0 < \epsilon$, *le contrôle presque optimal ou* ϵ*-optirnal est note par* v^{ϵ} *tel que :*

$$J(v^{\epsilon}) \leq J(v) + \epsilon, \forall U_{ad}.$$

1.2.6 Contrôle feed-back

Définition 1.2.3 *Soit* v_t *un contrôle* $\mathcal{F}_t$*-adapté, et soit* $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ *la filtration naturelle. Un contrôIe* v_t *est appelé un contrôle feed-back si* v_t *est aussi adapté par rapport la filtration* $\{\mathcal{F}_t^X\}$*. On dit aussi qu'un contrôIe* v_t *est feed-back si et seulement s'il dépend de* X*.*

1.2.7 Contrôle relaxé

Définition 1.2.4 *Soit* V *l'ensemble des mesures de Radon sur* $[0,T] \times A$ *dont la projection sur* $[0,T]$ *coïncide avec la mesure de Lebesgue* dt *muni de la tribu borélienne, la plus petite tribu telle que l'application* $q \to \int f(s,a)q(ds,da)$ *soit mesurable pour toute fonction* f *mesurable, bornée et continue en* a*.*

Définition 1.2.5 *: Un contrôle relaxé* q *est une variable aléatoire* $q(\omega, dt, da)$ *à valeur dans* V *telle que pour chaque* $t, 1_{[0,t]}\, q$ *est* $\mathcal{F}_t$*- mesurable.*

$$(\mathcal{F}_t = \sigma(W(s) \quad 0 \leq s \leq t)).$$

Tout contrôle relaxé peut être intégré en

$$q(\omega, dt, da) = dtq(\omega, t, da).$$

Où $q(t, da)$ *est un processus progressivement mesurable à valeur dans l'espace des mesures de probabilités.*

1.2.8 Contrôle singulier

Définition 1.2.6 *Soit A_1 un sous-ensemble fermé convexes de $\mathbb{R}$ et $A_2 = [0, +\infty[$. Soient U_{ad}^1 et U_{ad}^2 deux classes des processus mesurables défnies comme suit :*

$$U_{ad}^1 = \{u\,(.) : [s,T] \times \Omega \to A_1; \mathcal{F}_t\text{-adapté } \}$$

et

$$U_{ad}^2 = \{\eta\,(.) : [s,T] \times \Omega \to A_2; \mathcal{F}_t\text{-adapté } \}$$

Un contrôle admissible strict-singulier est paire (u, η) de $A_1 \times A_2$ à valeur mesurable, tel que:

1.η est à variation bornée non décroissante continue à gauche, limite à droite et $\eta_0 = 0$, appelé contrôle singulier

2.

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |u_t|^2 + |\eta_T|^2\right] < \infty.$$

On note $U_{ad}^1 \times U_{ad}^2$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles stricts-singuliers. Notons que puisque $d\eta_t$ peut être singulier par rapport à la mesure de Lebesgue dt, nous appellons η, la partie singulier du contrôle et le processus u sa partie absolument continue.

1.3 Méthodes des résolutions en contrôle stochastique

Dans le domaine de la théorie du contrôle optimal, il existe essentiellement deux méthodes (approches) pour la résolution dans les cas déterministes ou stochastiques, le principede la programmation dynamique et le principe de maximum de Pontryagin.

Le principe de la programmation dynamique qui a une version infinitésimale d'équation d'Hamilton Jaccobi Bellman et de maximum de Pontryagin.

1.3.1 1.Le principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique est un principe fondamental de la théorie du contrôle stochastique. Le principe de la programmation dynamique de Bellman permet de résoudre, a travers d'une équation aux dérivées partielles, appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman certain probléme analytiquement. Généralement l'équation aux dérivées partielles de Bellman n'est pas facile à résoudre et il faut supposer que la solution soit de classe C^2, nous pouvons sinon supposer qu'elle est seulement localement bornée mais dans ce cas la solution sera au sens de la viscosité. En appliquant formellement ce principe où on peut minimiser la fonction valeur $V(t,x)$ associée à un problème de contrôle stochastique à tempe continu satisfait à une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$\frac{dV}{dt}(t,x) + \inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}} \left[L_u V(t;x) + g(t,x,u)\right] = 0 \quad ,\forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$$

où L_u est le générateur infinitésimale de second-ordre associé à la diffusion $X(t)$ solution de l'équation

$$J(u) = E\left[\int_0^T f(s,x(s),u(s))ds + g\left(x(T)\right)\right]$$

avec un contrôle u donné par la formule suivante :

$$L_u V = g(x,u)D_x(V) + \frac{1}{2} tra\left[\sigma^*(x,u)\sigma(x,u)D_x^2(V)\right]$$

Lorsqu'on cherche à maximiser un gain, l'équation aux dérivées partielles devient sous forme :

$$-\frac{dV}{dt}(t,x) - \sup_{u\in\mathcal{U}_{ad}} \left[L_u V(t;x) + g(t,x,u)\right] = 0$$

On peut avoir cette dernière équation de la façon suivante :

$$-\tfrac{dV}{dt}(t,x) - H\left(t,x,D_x,v(t;x),D_x^2,v(t;x)\right) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

telle que $\forall (t,x,p,M) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S(n)$ où $S(n)$ est l'ensemble des matrices symétrique $n \times n$:

$$H(t,x,p,M) = \sup_{u \in U_{ad}} \left[b(x;u)p + \frac{1}{2} tra\left(\sigma^* \sigma(x,u)M\right) + g(t,x;u) \right]. \tag{1.2}$$

La fonction (1.2) est dite l'Hamiltonien du problème de contrôle associé.

En remarquant que si la fonction de valeur est continue et pas nécessairement de classe C^2 et satisfait le principe d'optimalité de la programmation dynamique alors, elle est solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante.

1.3.2 2.Le principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin a été utilisé dans la théorie du contrôle optimal. Il fournit les conditions nécessaires d'optimalité pour minimiser une fonctionnelle de coût $J(u(.))$ tout en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variations. La dérivée de la fonctionnelle $J(u(.))$ par rapport à un certain paramètre de perturbation doit être positive. Ceci entraîne que

$$\frac{dJ\left(u\left(\theta\right)\right)}{d\theta}|_{\theta=0} \geq 0.$$

Ce principe consiste à introduire un processus adjoint, solution d'une certaine équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Chapitre 2

Exeistence et unicité des solutions pour les EDSPR de type champ moyen

2.1 Introduction

Les équations différentielles gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des"différentielles stochastiques", ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS). Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{2.1}$$

où l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $x\prime$ et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre un, comme en (2.1) (seule la dérivée première est impliquée) avec $f(t, x) = f + bx$ indépendant de t et affine par rapport à x. Symboliquement, l'équation (2.1) se réécrit

$$dx_t = f(t, x_t)dt.$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $(x_t)_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroit, à la date t, selon le taux $f(t, x_t)$. Par exemple, avec $f(t, x_t) = f(t)x_t$, l'équation $dx_t = f(t)x_t dt$ modélise le cours d'un actif financier x_t soumis au taux d'intérêt variable $f(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $f(t)$. Il est bien connu que la solution est

$$x_t = x_0 exp(\int_0^t f(s)ds).$$

Les EDS sont des généralisations des équations (2.1) où la dynamique déterministe d'évolution est perturbée par un terme aléatoire. On peut considérer que ce bruit est un processus gaussien généralement modélisé par un mouvement Brownien W et une intensité de bruit $\sigma(x, t)$

$$dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

2.2 Existence et unicité des solution pour les EDS

Hypothèses

On se donne

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, W_t)$ un mouvement Brownien standard à valeur dans $\mathbb{R}^n$

(ii) ξ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de carré intégrable et $\mathcal{F}_0$- mesurable (et donc indépendant du mouvement Brownien W)

(iii) Deux fonctions

$$f : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \ \mathbb{R}^d \to f(t,x) \in \mathbb{R}^d$$
$$\sigma : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \ \mathbb{R}^d \to \sigma(t,x) \in \mathbb{R}^{d\times n}.$$

Notons

$$|f| = \left(\sum_{i=1}^{d} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, |\sigma| = (trace(\sigma\sigma^{tr}))^{\frac{1}{2}}.$$

Nous supposons qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \geq 0; x, y \in R^d$:

$$|f(t,0)| + |\sigma(t,0)| \leq K$$
$$|f(t,x) - f(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|.$$

Les hypothèses impliquent que f et σ sont à croissance au plus linéaire :

$$|f(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K\left(1 + |x|\right).$$

Considérons l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$X_t = \xi + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \quad t \geq 0$$

le coefficient de "ds", c-à-d $f(s, X_s)$, s'appelle le coefficient de dérive et celui de "dW_s", c-à-d $\sigma(s, X_s)$, s'appelle le coefficient de diffusion. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, nous désignons par $X^{s,x} = \{X_t^{s,x}; t \geq 0\}$ le processus solution de l'équation

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^{t\vee s} f(r, X_r^{s,x})dr + \int_s^{t\vee s} \sigma(r, X_r^{s,x})dW_r \quad t \geq 0.$$

Notons $X^x = X^{0,x}$. Etant donnée une variable aléatoire ξ, $\mathcal{F}_0$- mesurable et à valeurs dans

$\mathbb{R}^d$, nous désignons par $X^{s,\xi}$, le processus :

$$\left\{ \quad X_t^{s,\xi}(\omega), \quad \omega \in \Omega. \quad \right\}$$

Définition 2.2.1 *(Solution forte d'EDS) Soit* $d, m \in N$, *et*

$$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$
$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}.$$

Notons $\mathcal{F}_t$ *la tribu engendrée par* W_s, $s \leq t$ *et par* X_0, *complétée par les ensembles négligeables* $\mathcal{N}$. *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est appellé une solution forte de*

$$\begin{cases} dX_t = & b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t \\ X_0 = & x \end{cases}$$

si

1.
$$X_0 = x$$

2.
$$\int_0^t \left\{ |b(X(s))^2| + |\sigma(X(s))^2| \right\} ds < \infty$$

3.
$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dW_s, t \in [0, T], \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 2.2.2 *(Solution forte unique d'EDS) : On dit que l'équation admet une solu-*

tion forte unique, si pour chaque deux solutions fortes X_t et Y_t on a :

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in R_+}|X_t - Y_t| > 0\right\} = 0$$

c'est à dire :

$$\mathbb{P}\left\{X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{R}_+\right\} = 1.$$

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses (1), (2) et (3), il existe une solution unique $X \in [M^2]^d$ de l'EDS .*

2.3 Existence et unicité des solutions pour les EDSPRs de type champ moyen

On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, E[X_t])dt + \sigma(t, X_t, E[X_t])dW_t \\ -dY_t = f(t, X_t, E[X_t], Y_t, E[Y_t], Z_t, E[Z_t])dt - Z_t dW_t \\ X_0^\mu = x, Y_T^\mu = g\left(X_T^\mu, E\left[X_T^\mu\right]\right) \end{cases} \tag{2.2}$$

telle que les fonctions suivantes soient mesurables et bornées :

$$b : \Omega \times \ [0,T] \times \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$b : \Omega \times \ [0,T] \times \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$$

$$g : \Omega \times \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$f : \Omega \times \ [0,T] \times \ \mathbb{R}^n \times \ \mathbb{R}^n \times \ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^m.$$

Ce système peut être interpréter sous forme intégrale comme suit :

$$\begin{cases} X_t = & x + \int_0^t b(s, X_s, E[X_s])ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, E[X_s])dW_s, t \ > 0 \\ Y_t = & g(X_T, E[X_T]) + \int_t^T f(s, X_s, E[X_s], Y_s, E[Y_s], Z_s, E[Z_s])ds \\ & - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Le système (2.2)est appelé équation différentielle stochastique progressive et rétrograde (EDSPR) de type champ moyen. Telle que, le coeffcient b s'appelle le drift, σ s'appelle le diffusion de l'EDS et f s'appelle le générateur de l'EDSR.

–On travaillera avec deux espaces de processus

–On notera tout d'abord par $S^2(\mathbb{R}^n)$ l'éspace vectoriel formé du processus X_t, progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que :

$$||X_t||_{s^2}^2 = E\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_t|^2\right] < \infty.$$

Et $S_c^2(\mathbb{R}^n)$ le sous-éspace formé par les processus continus

–Et ensuite $M^2(\mathbb{R}^{m\times d})$ celui formé par le processus Z_t progressivement mesurable,à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$, telle que :

$$||Z_t||_{M^2}^2 = E\left[\int_0^T ||Z_t||^2 dt\right] < \infty.$$

–Les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes défnies précedemment.

–Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $S^2(\mathbb{R}^n) \times S_c^2(\mathbb{R}^n) \times M^2\left(\mathbb{R}^{m\times d}\right)$.

Définition 2.3.1 *On appelle solution du système des équations différentielles stochastiques progréssives rétrogrades (EDSPR) de type champ moyen (2.2)(EDSPR), tout triple (X, Y, Z) de processus progressivement mesurables à valeurs $\mathbb{R}^n\times$ $\mathbb{R}^m$ $\times\mathbb{R}^{m\times d}$ et de carré* *intégrable tels que :*

$$\begin{cases} X_t = & x + \int_0^t b(s, X_s, E[X_s])ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, E[X_s])dW_s, t > \ 0 \\ Y_t = & g(X_T, E[X_T]) + \int_t^T f(s, X_s, E[X_s], Y_s, E[Y_s], Z_s, E[Z_s])ds \\ & - \int_t^T Z_s dW_s \ , 0 \le t \le T. \end{cases}$$

2.4 Théoréme d'existance et d'unicité

Théorème 2.4.1 *(Existence et unicité [12])Soient b, σ, f et g des fonctions Boréliennes. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $t \in [0, T]$, et tout*

$$(x_1, x_1', x_2, x_2', y_1, y_1', y_2, y_2', z_1, z_1', z_2, z_2') \in \mathbb{R}^{4n+4m+4m\times d}$$

1. Condition de Lipschitz :

$$|b(t, x_1, x_1') - b(t, x_2, x_2')| + ||\sigma(t, x_1, x_1') - \sigma(t, x_2, x_2')|| \le k(|x_1 - x_2| + |x_1' - x_2'|)$$

et

$$|g(x_1 - x_1') - g(x_2 - x_2')| \le k(|x_1 - x_2| - |x_1' - x_2'|).$$

2. Croissance linéaire :

$$|b(t, x, x')| + ||\sigma(t, x, x')|| \le k\left(1 + |x| + |x'|\right).$$

3.

$$E\left[\int_0^T |f(s, 0, 0, 0, 0, 0, 0)|^2\right] ds < +\infty.$$

Alors, il existe une solution unique (X, Y, Z) de l'EDSPR de type champ moyen (2.2).

Preuve.

1. L'existence : Nous construisons la solution par la méthode d'itération de Picard. En défi-

nissant la suite $(X^n, Y^n, Z^n)_{n\in N}$ telle que $X_0 = x, Y_0 = Z_0 = 0$,et $(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1})$ c'est la solution du système d'EDSPR de type champ moyen suivante : ■

$$\begin{cases} X_t^{n+1} = & x + \int_0^t b(s, X_s^n, E[X_s^n])ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n, E[X_s^n])dW_s \\ Y_t^{n+1} = & g(X_T^n, E[X_T^n]) + \int_t^T f(s, X_s^n, E[X_s^n], Y_s^n, E[Y_s^n], Z_s^n, E[Z_s^n])ds \\ & -\int_t^T Z_s^{n+1} dW_s. \end{cases} \tag{2.3}$$

Et telles que les intégrales stochastiques sont bien défnies car il est clair par récurrence que pour chaque n, X_t^{n+1} est continu et adapté, donc le processus $\sigma(s, X_s^n, E[X_s^n])$ l'est aussi.–Premièrement, on montre l'existance de solution de l'EDS dans(2.2), pour $t \in [0, T]$, vérifant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que $\forall t \in [0, T]$.

$$E\left[|X_t^n|^2\right] \leq C_n.$$

Supposons que $E\left[|X_t^n|^2\right] \leq C_n$ et on montrer que

$$E\left[|X_t^{n+1}|^2\right] \leq C_{n+1}. \tag{2.4}$$

On a :

$$|X_t^{n+1}|^2 = |x + \int_0^t b(s, X_s^n, E[X_s^n])ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n, E[X_s^n])dW_s|^2$$

comme on a $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, par passage a l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[|X_t^{n+1}|^2\right] &\leq 3\left(|x|^2 + E\left[\left(\int_0^t |b(s, X_s^n, E[X_s^n])|ds\right)^2\right]\right. \\ &\left. +E\left[\left(\int_0^t ||\sigma(s, X_s^n, E[X_s^n])||dW_s\right)^2\right]\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Appliquant l'isométrie, le théorème de Fubini et la croissance linéaire, on trouve :

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^n, E[X_s^n])dW_s\right)^2\right] \\ &= E\left[\int_0^t ||\sigma(s, X_s^n, E[X_s^n])||^2 ds\right] \\ &\leq E\left[\int_0^t k^2\left(1 + |X_s^n|^2 + E[|X_s^n|^2]\right) ds\right] \\ &\leq \int_0^t k^2\left(1 + E\left[|X_s^n|^2\right] + E\left[E[|X_s^n|^2]\right]\right) ds \\ &\leq \int_0^t k^2\left(1 + 2E\left[|X_s^n|^2\right]\right) ds. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\int_0^t b(s, X_s^n, E[X_s^n])ds\right)^2\right] \\ &\leq E\left[\left(\int_0^t ds\right) \times \left(\int_0^t |b(s, X_s^n, E[X_s^n])|^2\right) ds\right] \\ &\leq T.E\left[\int_0^t k^2\left(1 + |X_s^n|^2 + E[|X_s^n|^2]\right) ds\right] \\ &\leq \int_0^t k^2\left(1 + 2E\left[|X_s^n|^2\right]\right) ds \end{aligned} \tag{2.7}$$

remplaçant (2.6) et (2.7) dans (2.5) on trouve

$$\begin{aligned} E\left[|X_t^{n+1}|^2\right] &\leq 3\left(|x|^2 + TE\left[\int_0^t k^2\left(1 + |X_s^n|^2 + E[|X_s^n|^2]\right) ds\right]\right. \\ &\left. + \int_0^t k^2\left(1 + 2E\left[|X_s^n|^2\right]\right) ds\right) \\ &\leq C + C\int_0^t E\left[|X_t^n|^2\right] ds, \forall t \in [0, T], C > 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve (2.4). On va majorer par récurrence la quantité

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right].$$

En utilisant l'inégalité de Doob, on obtient :

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2\right]\\
&\le 2E\left[|\int_0^t\left(\sigma(s,X_s^n,E[X_s^n])-\sigma(s,X_s^{n-1},E[X_s^{n-1}])\right)dW_s|^2\right]\\
&+2E\left[|\int_0^t\left(b(s,X_s^n,E[X_s^n])-b(s,X_s^{n-1},E[X_s^{n-1}])\right)ds|^2\right]\\
&\le 2E\left[\int_0^t||\sigma(s,X_s^n,E[X_s^n])-\sigma(s,X_s^{n-1},E[X_s^{n-1}])||^2ds\right]\\
&+2TE\left[\int_0^t|b(s,X_s^n,E[X_s^n])-b(s,X_s^{n-1},E[X_s^{n-1}])|^2ds\right].
\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipschitziennes, on obtient pour $t\in[0,T]$

$$E\left[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2\right]\le 4\left(1+T\right)k^2E\left[\int_0^t|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds\right]$$

Alors

$$E\left[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2\right]\le C\int_0^t E\left[\sup_{0\le r\le s}|X_r^n-X_r^{n-1}|^2\right] \tag{2.8}$$

où

$$C=4\left(1+T\right)K^2.$$

Nous répétons la même méthode, en appliquant l'inégalité de Doob, à

$$|X_s^n-X_s^{n-1}|$$

pour obtenir

$$
\begin{aligned}
&|X_s^n - X_s^{n-1}|^2 \\
&\leq 2|\int_0^s \left(\sigma\left(r, X_r^{n-1}, E\left[X_r^{n-1}\right]\right) - \sigma\left(r, X_r^{n-2}, E\left[X_r^{n-2}\right]\right)\right) dW_r|^2 \\
&+2|\int_0^s \left(b\left(r, X_r^{n-1}, E[X_r^{n-1}]\right) - b\left(r, X_r^{n-2}, E\left[X_r^{n-2}\right]\right)\right) dr|^2 \\
&\leq 2\int_0^s ||\left(\sigma\left(r, X_r^{n-1}, E\left[X_r^{n-1}\right]\right) - \sigma\left(r, X_r^{n-2}, E\left[X_r^{n-2}\right]\right)\right)||^2 dr \\
&+2T|\int_0^s \left(b\left(r, X_r^{n-1}, E[X_r^{n-1}]\right) - b\left(r, X_r^{n-2}, E\left[X_r^{n-2}\right]\right)\right)|^2 dr
\end{aligned}
$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipshitziennes, donc :

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq r\leq s}|X_r^n - X_r^{n-1}|^2\right] &\leq C\int_0^s E\left[|X_r^{n-1} - X_r^{n-2}|^2\right] dr \\
&\leq C\int_0^s E\left[\sup_{0\leq k\leq r}|X_k^{n-1} - X_k^{n-2}|^2\right] dr.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

De même façon que (2.8) et (2.9), on peut trouver :

$$
E\left[\sup_{0\leq k\leq r}|X_k^{n-1} - X_k^{n-2}|^2\right] \leq \quad C\int_0^r E\left[\sup_{0\leq l\leq k}|X_l^{n-2} - X_l^{n-3}|^2\right] dk. \tag{2.10}
$$

En remplaçant (2.9) et (2.10) à (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}
& E\left[\sup_{0\le s\le t}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2\right] \\
& \le C\int_0^t E\left[\sup_{0\le r\le s}|X_r^n-X_r^{n-1}|^2\right] ds \\
& \le C^2\int_0^t \left(\int_0^s E\left[\sup_{0\le k\le r}|X_k^{n-1}-X_k^{n-2}|^2\right] dr\right) ds \\
& \le C^3\int_0^t \left(\int_0^s \left(\int_0^r E\left[\sup_{0\le l\le k}|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}|^2\right] dk\right) dr\right) ds \\
& \le C^3 E\left[\sup_{0\le l\le k}|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}|^2\right] \int_0^t \left(\int_0^s \left(\int_0^r dk\right) dr\right) ds \\
& \le C^3 E\left[\sup_{0\le l\le k}|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}|^2\right] \int_0^t \left(\int_0^s r\ dr\right) ds \\
& \le C^3 E\left[\sup_{0\le l\le k}|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}|^2\right] \int_0^t \frac{s^2}{2} ds \\
& \le \frac{C^3T^3}{3!} E\left[\sup_{0\le l\le k}|X_l^{n-2}-X_l^{n-3}|^2\right].
\end{aligned}$$

On répète cette méthode plusieurs fois, on trouve

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\le s\le T}|X_s^{n+1}-X_s^n|^2\right] & \le \frac{C^nT^n}{n!} E\left[\sup_{0\le s\le T}|X_s^1-X_s^0|^2\right] \\
& \le D\frac{C^nT^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Tchebychev, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le T}|X_s^{n+1}-X_s^n| \ge \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\
& \le D\frac{C^nT^n}{n!} / \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \\
& = 4D\frac{(4CT)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \geq \tfrac{1}{2^{n+1}}\right] \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} D\tfrac{C^n}{n!} / \left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \\
&= 4D\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(4C)^n}{n!} \\
&= 4De^{4CT} < \infty.
\end{aligned}$$

Ce qu'implique d'après le Lemme de Borel-Cantelli:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| > \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}\right] = 0.$$

Ce que signifer que:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}\right] = 1$$

c'est-à-dire :

$$\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \geq n_0, \text{ pour certaine } n_0 \in \mathbb{N}.$$

Avec probabilité égale à 1. Passons à la somme on trouve :

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^m - X_s^n| &\leq \textstyle\sum_{k=m\wedge n-1}^{m\vee n} \sup_{0\leq t\leq T} |X_s^{k+1} - X^k| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=m\wedge n-1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{n\wedge m}}.
\end{aligned}$$

Pour $m \wedge n \geq n_0(\omega)$, où $m \vee n = max\{m, k\}$. Alors le processus $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}^2$, donc convergente. Alors il existe un processus continu $(X_t)_{t\in[0,T]}$, tel que, $\sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t^n - X_t| \to 0$, quand $n \to \infty$, avec probabilité 1. Donc, $\mathbb{P} - p.s$ X_n converge vers un processus continu X_t. On vérife très facilement que X_t est une solution de l'EDS dans (2.2), en passant à la limite dans l'équation pregressive dans le système (2.3).

–Donc en passant à résoudre la deuxième équation par récurrence sur Y_n .

Prouvons maintenant que la suite (Y^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach B^2, en appliquant la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|Y_t^{n+1} - Y_t^n|^2$, en passant à l'intégrale entre t et T, on obtient

$$
\begin{aligned}
&e^{\alpha T}|g\left(X_T^n, E\left[X_T^n\right]\right) - g\left(X_T^{n-1}, E\left[X_T^{n-1}\right]\right)|^2 - e^{\alpha t}|Y_t^{n+1} - Y_t^n|^2 \\
&= \alpha \int_t^T e^{\alpha s}|Y_s^{n+1} - Y_s^n|^2 ds \\
&-2\langle \int_t^T e^{\alpha s}\left(Y_s^{n+1} - Y_s^n\right)^2, f\left(s, X_s^n, E\left(X_s^n\right), Y_s^n, E\left(Y_s^n\right), Z_s^n, E\left(Z_s^n\right)\right) \\
&-f\left(s, X_s^{n-1}, E\left(X_s^{n-1}\right), Y_s^{n-1}, E\left(Y_s^{n-1}\right), Z_s^{n-1}, E\left(Z_s^{n-1}\right)\right)\rangle ds \\
&+2\int_t^T \langle e^{\alpha s}\left(Y_s^{n+1} - Y_s^n\right)^2, Z_s^{n+1} - Z_s^n\rangle dW_s + \int_t^T e^{\alpha s}||Z_s^{n+1} - Z_s^n||^2 ds.
\end{aligned}
$$

Par passage à l'esperance et utilisant le fait que f est Lipshitzienne, on a:

$$
\begin{aligned}
&E\left[e^{\alpha t}|Y_t^{n+1} - Y_t^n|^2\right] + \alpha E\left[\int_t^T e^{\alpha s}|Y_s^{n+1} - Y_s^n|^2 ds\right] + E\left[\int_t^T e^{\alpha s}||Z_s^{n+1} - Z_s^n||^2 ds\right] \\
&\leq kE\left[e^{\alpha T}|X_T^n - X_T^{n-1}|^2\right] \\
&+2kE\left[\int_t^T e^{\alpha s}|Y_s^{n+1} - Y_s^n|\left(|X_s^n - X_s^{n-1}| + |E\left[X_s^n\right] - E\left[X_s^{n-1}\right]|\right.\right. \\
&\left.\left.+|Y_s^n - Y_s^{n-1}| + |E\left[Y_s^n\right] - E\left[Y_s^{n-1}\right]| + ||Z_s^n - Z_s^{n-1}|| + ||E\left[Z_s^n\right] - E\left[Z_s^{n-1}\right]||\right) ds.\right]
\end{aligned}
$$

Ce qui implique (d'après l'inégalité de Yong $(2ab \leq \frac{1}{\varepsilon^2}a^2 + \varepsilon^2 b^2)$) que:

$$
\begin{aligned}
&E\left[e^{\alpha t}|Y_t^{n+1} - Y_t^n|^2\right] + E\left[\int_t^T e^{\alpha s}||Z_s^{n+1} - Z_s^n||^2 ds\right] \\
&\leq kE\left[e^{\alpha T}|X_T^n - X_T^{n-1}|^2\right] + \left(k^2\varepsilon^2 - \alpha\right) E\left[\int_t^T e^{\alpha s}|Y_s^{n+1} - Y_s^n|^2 ds\right] \\
&+\frac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}|X_s^n - X_s^{n-1}|^2 ds\right] + \frac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}|Y_s^n - Y_s^{n-1}|^2 ds\right] \\
&+\frac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}||Z_s^n - Z_s^{n-1}||^2 ds\right] + \frac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}E\left[|X_s^n - X_s^{n-1}|^2 ds\right]\right] \\
&+\frac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}E\left[|Y_s^n - Y_s^{n-1}|^2\right] ds\right] + \frac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}E\left[||Z_s^n - Z_s^{n-1}||^2\right] ds\right]
\end{aligned}
$$

alors d'après le théoreme de Fubini :

$$\begin{aligned}
&E\left[e^{\alpha t}|Y_t^{n+1}-Y_t^n|^2\right]+E\left[\int_t^T e^{\alpha s}||Z_s^{n+1}-Z_s^n||^2ds\right]\\
&\leq kE\left[e^{\alpha T}|X_T^n-X_T^{n-1}|^2\right]\\
&+\left(k^2\varepsilon^2-\alpha\right)E\left[\int_t^T e^{\alpha s}|Y_s^{n+1}-Y_s^n|^2ds\right]\tfrac{12}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds\right]\\
&+\tfrac{12}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}|Y_s^n-Y_s^{n-1}|^2ds\right]\\
&+\tfrac{12}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}E\left[||Z_s^n-Z_s^{n-1}||^2\right]ds\right]
\end{aligned}$$

On choisit α et ε tel que $\frac{12}{\varepsilon^2}=\frac{1}{12}$et $144k^2-\alpha=0$, alors

$$\begin{aligned}
&E\left[e^{\alpha t}|Y_t^{n+1}-Y_t^n|^2\right]+E\left[\int_t^T e^{\alpha s}||Z_s^{n+1}-Z_s^n||^2ds\right]\\
&\leq kE\left[e^{\alpha T}|X_T^n-X_T^{n-1}|^2\right]\\
&+\tfrac{1}{12}E\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left(|X_s^n-X_s^{n-1}|^2+|Y_s^n-Y_s^{n-1}|^2+||Z_s^n-Z_s^{n-1}||^2\right)ds\right].
\end{aligned}$$

Donc pour $t=0$,on trouve:

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}|Y_t^{n+1}-Y_t^n|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}||Z_s^{n+1}-Z_s^n||^2ds\right]\\
&\leq kE\left[e^{\alpha T}|X_T^n-X_T^{n-1}|^2\right]+\tfrac{C}{12}\left(E\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}\left(|X_t^n-X_t^{n-1}|^2\right)\right]\right.\\
&+E\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}|Y_t^n-Y_t^{n-1}|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha t}||Z_s^{n+1}-Z_s^n||^2ds\right].
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Nous répétons la même méthode, en appliquant la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|Y_t^n-Y_t^{n-1}|$, pour obtenir:

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}|Y_t^n-Y_t^{n-1}|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}||z_s^n-z_s^{n-1}||^2ds\right]\\
&\leq k'E\left[e^{\alpha T}|X_T^{n-1}-X_T^{n-2}|^2\right]+\tfrac{c'}{12}\left(E\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}\left(|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}|^2\right)\right]\right.\\
&\left.+E\left[\sup_{0\leq t\leq T}e^{\alpha t}|Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}||Z_s^{n-1}-Z_s^{n-2}||^2ds\right]\right)
\end{aligned}\tag{2.12}$$

En remplaçant (2.11) dans (2.12) on a:

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|Y_t^{n+1}-Y_t^n|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}||z_s^{n+1}-z_s^n||^2ds\right]$$
$$\le kE\left[e^{\alpha T}|X_T^n-X_T^{n-1}|^2\right]+k^{'}E\left[e^{\alpha T}|X_T^{n-1}-X_T^{n-2}|^2\right]$$
$$+\tfrac{c}{12}E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left(|X_t^n-X_t^{n-1}|^2\right)\right]+\tfrac{C^{'}}{12}\left(E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left(|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}|^2\right)\right]\right.$$
$$\left.+\tfrac{c^{'}}{12^2}E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}||Z_s^{n-1}-Z_s^{n-2}||^2ds\right]\right)$$

On répète cette méthode plusieurs fois, on trouve:

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|Y_t^{n+1}-Y_t^n|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}||Z_s^{n+1}-Z_s^n||^2ds\right]$$
$$\le C\left(E\left[e^{\alpha T}|X_T^n-x_T^{n-1}|^2\right]+E\left[e^{\alpha T}|X_T^{n-1}-X_T^{n-2}|^2\right]+...\right.$$
$$\left....+E\left[e^{\alpha t}\left(|X_T^1-X_T^0|^2\right)\right]+C^{'}\left(E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left(|X_t^n-X_t^{n-1}|^2\right)\right]\right)\right.$$
$$\left.+E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left(|X_t^{n-1}-X_t^{n-2}|^2\right)\right]...+E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}\left(|X_t^1-X_t^0|^2\right)\right]\right)$$
$$+\tfrac{C''}{12^n}\left(E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|Y_t^n-Y_t^{n-1}|^2\right]\right.$$
$$+E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|Y_t^{n-1}-Y_t^{n-2}|^2\right]+...E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|Y_t^1-Y_t^0|^2\right]$$
$$+E\left[\int_0^T e^{\alpha t}||Z_s^n-Z_s^{n-1}||^2ds\right]$$
$$\left.+E\left[\int_0^T e^{\alpha t}||Z_s^{n-1}-Z_s^{n-2}||^2ds\right]....+E\left[\int_0^T e^{\alpha t}||Z_s^1-Z_s^0||^2ds\right]\right)$$

donc

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|Y_t^{n+1}-Y_t^n|^2\right]+E\left[\int_0^T e^{\alpha s}||Z_s^{n+1}-Z_s^n||^2ds\right]$$
$$\le \tfrac{D}{12^n}\to 0,\ \text{quand } n\to\infty.$$

Par conséquent, $(X^n,Y^n,Z^n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy $\mathcal{B}^2$, donc convergente. Alors,il existe un triple de processus stochastique $(X_t,Y_t,Z_t)\in\mathcal{B}^2$, tel que:

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}\left(|X_t^n-X_t|^2\right)\right]\to 0,\ E\left[\sup_{0\le t\le T}\left(|Y_t^n-Y_t|^2\right)\right]\to 0$$
$$E\left[\int_0^T ||Z_s^{n+1}-Z_s^n||^2dt\right]\to 0$$

quand $n \to \infty$, avec une probabilité égale à 1. C'est-à-dire:

$$\lim_{n\to+\infty} X^n = X, \lim_{n\to+\infty} Y^n = Y$$
$$\lim_{n\to+\infty} Z^n = Z.$$

Il est facile de vérifer que (X, Y, Z) est une solution de l'EDSPR (2.2) il suffit de faire une passage à la limite dans l'EDSPR de type champ moyen (2.3) .

2. L'unicite : Supposons que (X, Y, Z) et $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ deux solutions de (2.2) pour tout $t \in [0, T]$: comme $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, alors

$$\begin{aligned}
&E\left[|X_t - \hat{X}_t|^2\right] \\
&\leq 2E\left[|\int_0^t \{b(s, X_s, E[X_s]) - b\left(s, \hat{X}_s, E\left[\hat{X}_s\right]\right)\}ds|^2\right] \\
&+2E\left[|\int_0^t \{\sigma(s, X_s, E[X_s]) - \sigma\left(s, \hat{X}_s, E\left[\hat{X}_s\right]\right)\}dW_s|^2\right]
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par l'isométrie d'Itô on a :

$$\begin{aligned}
&E\left[|X_t - \hat{X}_t|^2\right] \\
&\leq 2TK^2 \int_0^t E\left[|X_s - \hat{X}_s|^2\right] ds + 2K^2 \int_0^t E\left[|X_s - \hat{X}_s|^2\right] ds \\
&= (2TK^2 + 2K^2) \int_0^t E\left[|X_s - \hat{X}_s|^2\right] ds \\
&= C \int_0^t E\left[|X_s - \hat{X}_s|^2\right] ds \text{ où } C = (2TK^2 + 2K^2)
\end{aligned}$$

soit

$$\phi(t) = E\left[|X_t - \hat{X}_t|^2\right], \quad \phi(t) \leq C \int_0^t \phi(s)\, ds \quad \forall t \in [0, t].$$

Utilisant le lemme de Granwall, on trouve :

$$E\left[|X_t - \hat{X}_t|^2\right] = 0. \tag{2.13}$$

En appliquant la formule d'Itô à $|Y_t-\hat{Y}_t|^2$, on obtient

$$d\left(|Y_t-\hat{Y}_t|^2\right) = \quad 2|Y_t-\hat{Y}_t|d\left(|Y_t-\hat{Y}_t|\right)+d\langle Y-\hat{Y},Y-\hat{Y}\rangle_t.$$

Par passage à l'intégrale de t à T et l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
&E\left[|Y_t-\hat{Y}_t|^2\right]+E\left[\int_t^T ||Z_s-\hat{Z}_s||^2ds\right]\\
&=E\left[|g\left(X_T,E\left[X_T\right]\right)-g\left(\hat{X}_T,E\left[\hat{X}_T\right]\right)|^2\right]\\
&+2E\left[\int_t^T\langle Y_s-\hat{Y}_s,f(s,X_s,E[X_s],Y_s,E[Y_s],Z_s,E[Z_s])\right.\\
&\left.-f(s,\hat{X}_s,E[\hat{X}_s],\hat{Y}_s,E[\hat{Y}_s],\hat{Z}_s,E[\hat{Z}_s])\rangle ds\right].
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&E\left[|Y_t-\hat{Y}_t|^2\right]+E\left[\int_t^T ||Z_s-\hat{Z}_s||^2ds\right]\\
&\leq K^2E\left[|X_T-\hat{X}_T|^2\right]\\
&+2KE\left[\int_t^T|Y_s-\hat{Y}_s|\left(|X_s-\hat{X}_s|+|E\left[X_s\right]-E\left[\hat{X}_s\right]|+|Y_s-\hat{Y}_s|\right.\right.\\
&\left.\left.+|E\left[Y_s\right]-E\left[\hat{Y}_s\right]|+|Z_s-\hat{Z}_s|+|E\left[Z_s\right]-E\left[\hat{Z}_s\right]|\right)ds\right].
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Yong on a :

$$\begin{aligned}
&E\left[|Y_t-\hat{Y}_t|^2\right]+E\left[\int_t^T ||Z_s-\hat{Z}_s||^2ds\right]\\
&\leq K^2E\left[|X_T-\hat{X}_T|^2\right]\\
&+2K^2\varepsilon^2E\left[\int_t^T|Y_s-\hat{Y}_s|^2ds\right]\\
&+\tfrac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T|X_s-\hat{X}_s|^2ds\right]+\tfrac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T|Y_s-\hat{Y}_s|^2ds\right]\\
&+\tfrac{6}{\varepsilon^2}E\left[\int_t^T||Z_s-\hat{Z}_s||^2ds\right]
\end{aligned}$$

on posant $\frac{6}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}$, alors :

$$E\left[|Y_t - \hat{Y}_t|^2\right] + \tfrac{1}{2}E\left[\int_t^T ||Z_s - \hat{Z}_s||^2 ds\right]$$
$$\leq K^2 E\left[|X_T - \hat{X}_T|^2\right] + \left(24K^2 + \tfrac{1}{2}\right) E\left[\int_t^T |Y_s - \hat{Y}_s|^2 ds\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}E\left[\int_t^T |X_s - \hat{X}_s|^2 ds\right].$$

Par l'inégalité (2.13) on a : $E\left[|X_s - \hat{X}_s|^2\right] = 0$ alors, $X_s = \hat{X}_s$ et $X_T = \hat{X}_T$, donc :

$$E\left[|Y_t - \hat{Y}_t|^2\right] + \tfrac{1}{2}E\left[\int_t^T ||Z_s - \hat{Z}_s||^2 ds\right]$$
$$\leq C\ E\left[\int_t^T |Y_t - \hat{Y}_t|^2 ds\right] \text{ avec } C\ = \left(24K^2 + \tfrac{1}{2}\right).$$

On peut extraire deux inégalités :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t - \hat{Y}_t|^2\right] \quad \leq CE\left[\int_t^T |Y_s - \hat{Y}_s|^2 ds\right] \tag{2.14}$$

$$\tfrac{1}{2}E\left[\int_t^T ||Z_s - \hat{Z}_s||^2 ds\right] \quad \leq CE\left[\int_t^T |Y_s - \hat{Y}_s|^2 ds\right] \tag{2.15}$$

D'après l'inégalité de Granwall à (2.14), (on a $b = 0$), donc :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t - \hat{Y}_t|^2\right] = 0.$$

Le lemme de Granwall appliqué à (2.15) nous donne :

$$E\left[\int_t^T ||Z_s - \hat{Z}_s||^2 ds\right] = 0$$

donc $Y_t \equiv \hat{Y}_t, Z_s \equiv \hat{Z}_s$ ce qui prouve l'unicité.

Chapitre 3

condition suffisantes pour les contrôles relaxés des EDSPR de type champ moyen

3.1 Formulation de problème

Dans ce chapitre, on va étudier un problème de contrôle relaxé pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastique progressives et rétrogrades de type champ moyen (EDSPR-CM). En particulier, on va établir les conditions suffisantes d'optimalité pour qu'un contrôle relaxé soit optimal, pour un problème de contrôle dirigé par le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t^\mu = \int_U b\left(t, X_t^\mu, E\left[X_t^\mu\right], u\right) \mu\left(du\right) dt + \sigma\left(t, X_t^\mu, E\left[X_t^\mu\right]\right) dW_t \\ dY_t^\mu = -\int_U f\left(t, X_t^\mu, E\left[X_t^\mu\right], Y_t^\mu, E\left[Y_t^\mu\right], Z_t^\mu, E\left[Z_t^\mu\right], u\right) \mu\left(du\right) dt - Z_t^\mu dW_t \\ X_0^\mu = x, Y_T^\mu = h\left(X_T^\mu, E\left[X_T^\mu\right]\right), t \in T \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$$
$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$$
$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \to \mathbb{R}^m$$
$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

sont deux fonctions mesurables et ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à n-dimensions telle que

$$E|\xi|^2 < \infty$$

et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien défni dans un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La fonction de coût a minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$ est définie sous la forme :

$$\begin{aligned} J(\mu) &:= E\left[\alpha\left(X_T^\mu, E\left[X_T^\mu\right]\right) + \beta\left(Y_0^\mu, E\left[Y_0^\mu\right]\right)\right. \\ &\left. + \int_0^T \int_U l\left(t, X_t^\mu, E\left[X_t^\mu\right], Y_t^\mu, E\left[Y_t^\mu\right], Z_t^\mu, E\left[Z_t^\mu\right], u\right) \mu(du)\, dt\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \to \mathbb{R}$$

sont deux fonctions mesurables.

Un contrôle relaxé q est dit optimal s'il vérifier

$$J(q) = \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu). \tag{3.3}$$

Nous supposons que :

(A) : $b, \sigma, f, \alpha, \beta, h, l$ sont continûment différentiable par rapport à $(x, x^{'}, v)$, ils sont bornées par $C(1 + |x| + |x^{'}| + |v|)$ et (l, f) sont continûment différentiable par rapport à $(x, x^{'}, y, y^{'}, z, z^{'})$,ils sont bornées $C(1 + |x| + |x^{'}| + |y| + |y^{'}| + |z| + |z^{'}| + |v|)$ et leurs dérivées par rapport à $(x, x^{'}, y, y^{'}, z, z^{'})$ sont continues et bornées

Remarque 3.1.1 *1)- Sous conditions précédentes, pour tout $\mu \in \mathcal{R}$, le système* (3.1) *admet une solution unique (d'après le Théoréme 2.4.1, d'existance et d'unicité (voir chapitre 2)).*

2)- Le problème de contrôle relaxé est une généralisation du problème de contrôle strict. En effet, si $q(du) = \delta_{u_t}(du)$ est une mesure de Dirac concentrée en un contrôle strict u_t, alors on obtient un problème de contrôle strict comme cas particulier de celui de contrôle relaxé.

3.1.1 Equations adjointes

Introduisons le système suivant d'équations différentielles stochastiques, appelé équations adjointes

$$\begin{cases} dp_t^q = -\left(H_x(t, \zeta_t^q, q_t, \mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{x'}(t, \zeta_t^q, q_t, \mathcal{X}_t^q)\right]\right) dt + P_t^q dW_t \\ p_T^q = \alpha_x(X_T^q, E\left[X_T^q\right]) + E\left[\alpha_{x'}(X_T^q, E\left[X_T^q\right])\right] + h_x(X_T^q, E\left[X_T^q\right])k_T^q \\ \qquad\qquad +E\left[h_{x'}(X_T^q, E\left[X_T^q\right])E\left[k_T^q\right]\right] \\ dk_t^q = \left(H_y(t, \zeta_t^q, q_t, \mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{y'}(t, \zeta_t^q, q_t, \mathcal{X}_t^q)\right]\right) dt \\ + \left(H_z(t, \zeta_t^q, q_t, \mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{z'}(t, \zeta_t^q, q_t, \mathcal{X}_t^q)\right]\right) dW_t \\ k_0^q = \beta_y(Y_0^q, E\left[Y_0^q\right]) + E\left[\beta_{y'}(Y_0^q, E\left[Y_0^q\right])\right] \end{cases} \tag{3.4}$$

où

$$\begin{aligned} H(t, x, x', y, y', z, z', \mu, p, P, k) := p &\int_U b(t, x, x', u)\mu(du) \\ &+ P\sigma(t, x, x') + k \int_U f(t, x, x', y, y', z, z', u)\mu(du) \\ &+ \int_U l(t, x, x', y, y', z, z', u)\mu(du) \end{aligned}$$

et

$$H(t,\zeta_t^{\mu},\mu_t,\mathcal{X}_t^{\mu}) := H\left(t,X_t^{\mu},E\left[X_t^{\mu}\right],Y_t^{\mu},E\left[Y_t^{\mu}\right],Z_t^{\mu},E\left[Z_t^{\mu}\right],\mu_t,p_t^{\mu},P_t^{\mu},k_t^{\mu}\right).$$

Théorème 3.1.1 *(Conditions suffisantes d'optimalité pour des contrôles relaxés). Supposons que*

$$H(t,\zeta_t^{q},q_t,\mathcal{X}_t^{q}) \leq H(t,\zeta_t^{q},\mu_t,\mathcal{X}_t^{q}),\mathbb{P}-p.s,\forall\mu\in\mathbb{P}(U). \tag{3.5}$$

Pour $q\in\mathcal{R}$, soit (X_t^q,Y_t^q,Z_t^q) et (p_t^q,P_t^q,k_t^q) sont les solutions de les EDSPR (3.1) et (3.4) respectivement. Supposons que les fonctions α,β,l , h et $(x,y,z)\to H(t,x,y,z,q,p,k)$ sont convexes. Alors, (X_t^q,Y_t^q,Z_t^q,q_t) est une solution optimale du problème de contrôle relaxé $\{(3.1)-(3.3)\}$ s'il vérifiée (3.5).

Preuve. Soit q un élément arbitraire de $\mathcal{R}$ (candidat d'être optimal). Pour tout $\mu\in\mathcal{R}$, on a

$$\begin{aligned}&J(\mu)-J(q)=E\left[\alpha(X_T^{\mu},E\left[X_T^{\mu}\right])-\alpha(X_T^{q},E\left[X_T^{q}\right])\right]+E\left[\beta(Y_0^{\mu},E\left[Y_0^{\mu}\right])-\beta(Y_0^{q},E\left[Y_0^{q}\right])\right]\\&+E\left[\int_0^T\left(\int_U l(t,\zeta_t^{\mu},u)\mu_t(du)-\int_U l(t,\zeta_t^{\mu},u)q_t\left(du\right)\right)dt\right].\end{aligned}$$

Puisque α et β sont convexes, alors

$$\begin{aligned}\alpha(X_T^{\mu},E\left[X_T^{\mu}\right])-\alpha(X_T^{q},E\left[X_T^{q}\right]) &\geq E\left[\langle\alpha_x(X_T^{q},E\left[X_T^{q}\right]),X_T^{\mu}-X_T^{q}\rangle\right]\\&\quad+E\left[\langle\alpha_{x'}(X_T^{q},E\left[X_T^{q}\right]),E\left[X_T^{\mu}-X_T^{q}\right]\rangle\right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta(Y_0^{\mu},E\left[Y_0^{\mu}\right])-\beta(Y_0^{q},E\left[Y_0^{q}\right]) &\geq \langle\beta_y(Y_0^{q},E\left[Y_0^{q}\right]),Y_0^{\mu}-Y_0^{q}\rangle\\&\quad+E\left[\langle\beta_{y'}(Y_0^{q},E\left[Y_0^{q}\right]),E\left[Y_0^{\mu}-Y_0^{q}\right]\rangle\right].\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&J(\mu)-J(q)\geq E\left[\langle\alpha_x(X_T^q,E\left[X_T^q\right]),X_T^\mu-X_T^q\rangle\right]+E\left[\langle\alpha_{x'}(X_T^q,E\left[X_T^q\right]),E\left[X_T^\mu-X_T^q\right]\rangle\right]\\
&+\langle\beta_y(Y_0^q,E\left[Y_0^q\right]),Y_0^\mu-Y_0^q\rangle+E\left[\langle\beta_{y'}(Y_0^q,E\left[Y_0^q\right]),E\left[Y_0^\mu-Y_0^q\right]\rangle\right]\\
&+E\left[\int_0^T\left(\int_U l(t,\zeta_t^\mu,u)\mu_t(du)-\int_U l(t,\zeta_t^q,u)q_t\left(du\right)\right)dt\right].
\end{aligned}
$$

On remarque d'après (3.4)

$$
\begin{aligned}
p_T^q&=\alpha_x(X_T^q,E\left[X_T^q\right])+E\left[\alpha_{x'}(X_T^q,E\left[X_T^q\right])\right]+h_x(X_T^q,E\left[X_T^q\right])k_T^q\\
&\qquad+E\left[h_{x'}(X_T^q,E\left[X_T^q\right])E\left[k_T^q\right]\right]\\
k_0^q&=\beta_y(Y_0^q,E\left[Y_0^q\right])+E\left[\beta_{y'}(Y_0^q,E\left[Y_0^q\right])\right].
\end{aligned}
$$

Ensuite nous avons

$$
\begin{aligned}
&J(\mu)-J(q)\geq E[p_T^q(X_T^\mu-X_T^q)]\\
&-E\left[\langle h_x(X_T^q,E\left[X_T^q\right])k_T^q+E\left[h_{x'}(X_T^q,E\left[X_T^q\right])E\left[k_T^q\right]\right],X_T^\mu-X_T^q\rangle\right]\\
&+E[\langle k_0^q,Y_0^\mu-Y_0^q)\rangle]\\
&+E\left[\int_0^T\left(\int_U l(t,\zeta_t^\mu,u)\mu_t(du)-\int_U l(t,\zeta_t^q,u)q_t\left(du\right)\right)dt\right].
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

En appliquant la formule d'Itô respectivement à $p_t^q(X_t^\mu-X_t^q)$ et $k_t^q(Y_t^\mu-Y_t^q)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
E[p_T^q(X_T^\mu-X_T^q)]\quad&=-E\left[\int_0^T\langle H_x(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)+E\left[H_{x'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right],X_t^\mu-X_t^q)\rangle\,dt\right]\\
&+E\left[\int_0^T\left\langle p_t^q,\int_U b\left(t,X_t^\mu,E\left[X_t^\mu\right],u\right)\mu_t(du)-\int_U b\left(t,X_t^q,E\left[X_t^q\right],u\right)q_t(du)\right\rangle dt\right]\\
&+E\left[\int_0^T\langle P_t^q,\sigma\left(t,X_t^\mu,E\left[X_t^\mu\right]\right)-\sigma\left(t,X_t^q,E\left[X_t^q\right]\right)\rangle\,dt\right]
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

et

$$\begin{aligned}
E\left[k_0^q\left(Y_0^\mu - Y_0^q\right)\right] \quad &= E\left[k_T^q\left(Y_T^\mu - Y_T^q\right)\right] \\
&-E\left[\int_0^T \left\langle H_y(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{y'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right], Y_t^\mu - Y_t^q\right\rangle dt\right] \\
&+E\left[\int_0^T \left\langle k_t^q, \int_U f(t,\zeta_t^\mu,u)\mu_t(du) - \int_U f(t,\zeta_t^q,u)q_t\left(du\right)\right\rangle dt\right] \\
&-E\left[\int_0^T \left\langle H_z(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{z'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right], Z_t^\mu - Z_t^q\right\rangle dt\right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

d'après la convexité de h, on a

$$\begin{aligned}
E\left[k_T^q\left(Y_T^\mu - Y_T^q\right)\right] &= E\left[\left\langle k_T^q, h(X_T^\mu, E\left[X_T^\mu\right]) - h(X_T^q, E\left[X_T^q\right])\right\rangle\right] \qquad (3.9)\\
&\geq E\left[\left\langle h_x(X_T^q, E\left[X_T^q\right])k_T^q + E\left[h_{x'}(X_T^q, E\left[X_T^q\right])E\left[k_T^q\right]\right], X_T^\mu - X_T^q\right\rangle\right]
\end{aligned}$$

Remplaçant (3.7) et (3.8) dans (3.6) avec l'utilisation (3.9), on trouve

$$\begin{aligned}
&J(\mu) - J(q) \\
&\geq E\int_0^T \left[H(t,\zeta_t^q,\mu_t,\mathcal{X}_t^q) - H(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right] dt \\
&-E\left[\int_0^T \left\langle H_x(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{x'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right], X_t^\mu - X_t^q)\right\rangle dt\right] \\
&-E\left[\int_0^T \left\langle H_y(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{y'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right], Y_t^\mu - Y_t^q)\right\rangle dt\right] \\
&-E\left[\int_0^T \left\langle H_z(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{z'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right], Z_t^\mu - Z_t^q)\right\rangle dt\right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

puisque H est convexe en (x,x',y,y',z,z') et linéaire en q, alors en utilisant le gradient généralisé de Clarke de H évalué en (x,x',y,y',z,z') et la conditions d'optimalité nécessaire(3.5)on a :

$$\begin{aligned}
&H(t,\zeta_t^q,\mu_t,\mathcal{X}_t^q) - H(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) \\
&\geq E\left[\int_0^T \left\langle H_x(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{x'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right], X_t^\mu - X_t^q)\right\rangle dt\right] \\
&+E\left[\int_0^T \left\langle H_y(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{y'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right], Y_t^\mu - Y_t^q)\right\rangle dt\right] \\
&+E\left[\int_0^T \left\langle H_z(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q) + E\left[H_{z'}(t,\zeta_t^q,q_t,\mathcal{X}_t^q)\right], Z_t^\mu - Z_t^q)\right\rangle dt\right].
\end{aligned}$$

Appliquant cette inégalité dans (3.10) on obtient

$$J(\mu) - J(q) \geq 0, \forall \mu \in \mathcal{R}.$$

Ce qui preuve l'optimalité du q.

Conclusion

On a établi dans ce mémoire les conditions suffisantes d'optimalité pour qu'un contrôle relaxé soit optimal, pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressives et rétrogrades non linéaires de type champ moyen (EDSPR-CM). Ici les cofficients du système dépendent des processus d'état ainsi que de leur distribution via l'esperance des processus d'état. De plus, la fonctionnelle de coût est aussi de type champ moyen.

Le probléme de contrôle relaxé est une généralisation du problème de contrôle strict. En effet, si $q_t(da) = \delta_{u_t}(da)$ est une mesure de Dirac concentrée en un seul point qu'est le contrôle strict $u_t \in U$, alors nous obtenons que le problème de contrôle strict est un cas particulier du problème de contrôle relaxé.

Bibliographie

[1] Aldéric,J. Martingales et Applications.Université de insa toulouse

[2] Bahlali, S. (2008). Necessary and sufficient optimality conditions for relaxed and strict control problems of forward-backward systems. Manuscript.

[3] Baroth,J., Schoefs,F.,&,Breysse,D.(2011) .Fiabilité des ouvrages : Sûreté, variabilité, maintenance.

[4] Bennadji,M. équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades faiblement couplées et contrôle optimal.Université de biskra

[5] Ben sacia ,A. (2021). Principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients non linéaires.Université de biskra

[6] Boussaha,A. (2018).Contrôle optimal stochastique.Université de biskra

[7] c Klebaner, F. (2005). Introduction to Stochastic Calculus with Applications.

[8] Dalang, R. C., & Conus, D. (2008). Introduction à la théorie des probabilités.

[9] Gall, J. F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique.

[10] Guiol, H. (2006). Calcul stochastique avancé.

[11] Jean-Francois Le Gall (2012). Mouvement Brownien, Martingales et Calcul Stochastique

[12] Mebarki,A.(2021). Les conditions nécessaires d'optimalités pour les EDSPR de type champ moyen.Université de biskra

[13] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61)

[14] Sam,A.(2021). Principe du maximum pour les systèmes EDSPRs et application.Université de biskra

[15] Saporta, B., & Zili, M. (2022). Martingales et mathématiques financières en temps discret

[16] karaouzene, N. équations Différentielles Stochastiques.Université de tlemcen

[17] Valmont, K. (2019). Contrôle optimal stochastique avec applications à la propagation de l'e-rumeur.Thèses de Doctorat.Université des Antilles

RÉSUMÉ

Nous intéressons dans ce travail aux conditions suffisantes d'optimalités, pour qu' un contrôle relaxé soit optimal pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades de type champ moyen. La fonction de coût est aussi de type champ moyen.

nous donnons quelque généralité sur le calcul stochastique et les différents types de contrôles stochastiques.

preuve du résultat d'existence et d'unicité des solutions pour les EDSPR non linéaires de type champ moyen dans le cas Lipschitzien.

nous établissons les conditions suffisantes d'optimalités d'un contrôle relaxé pour ce genre du système.

ABSTRACT

We are interested in this work, in the sufficients conditions of optimality, such that a relaxed control would be optimal for a system governed by forward backward stochastic differential equations of mean field type. The cost function is also of mean field type.
we give some general information on the stochastic calculus and the different types of stochastic controls.
the proof of the result of existence and uniqueness of solutions for nonlinear FBSDEs of mean field type in the Lipschitz case.
we establish the sufficients conditions of optimalitiy for a relaxed control for this kind of system.

ملخص

نحن مهتمون في هذا العمل بالشروط الكافية للأمثلية ، والتي يحققها التحكم الأمثل المريح لنظام تحكمه المعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية التقدمية التاخرية لنوع الحقل المتوسط. دالة التكلفة هي أيضًا من نوع الحقل المتوسط.
نقدم بعض المعلومات العامة عن حساب التفاضل والتكامل العشوائي وكذا انواع التحكم.
وجود الحلول للمعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية التقدمية التاخرية لنوع الحقل المتوسط في حالة ليبشيتز.
نؤسس الشروط الكافية للأمثلية والتي يحققها التحكم المريح لهذا النوع من النظام.