République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Natture et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

ELHAMEL Amina

Titre :

Sur Les Equations D'ondes

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	REZKI Ibrahim	UMKB	Président
Dr.	GUIDAD Derradji	UMKB	Encadreur
Dr.	ADOUANE Saida	UMKB	Examinatrice

Juin 2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon pére.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

-En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

.

REMERCIEMENTS

Avant tout nous remercions ALLAH qui nous a orienté au chemin du savoiret aux portes de la science.

je remercie mes parents car grâce à eux que j'ai pu continuer mes études à un niveau si avancé.

Je remercie mon encadreur **Dr** :GUIDAD Derradji qui m'a guidé dans mon projet et m'aider à trouver des solutions pour avancer. Ainsi que les **Dr** : REZKI Ibrahim et ADOUANE Saida. Qui m'ont accepté de présider les jurys de soutenance.

je suis particuliérement reconnaissante envers **Pr :** ATTAF Abd Alleh le doyen de ma facultré, sans oublier de remercier tous mes ensiengnants de primaire à l université.

En fin, je remercie toutes les personnes, amis, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans la plupart des phénomènes physiques, chimiques et même dans d'autres domaines, on doit formuler les problèmes par des modèles mathématiques. Ces modèles génèrent souvent des équations aux dérivées partielles notées en abrégé EDP. La formulation a vu le jour au cours du 17ème siècle lors de la naissance de la mécanique (Newton, Leibniz,....), et s'est élargie à d'autres sciences, en particulier en physique. Les EDP les plus fréquentes en physique sont celles du second ordre. Leur étude est donc d'un grand intérêt pratique, en particulier l'équation des ondes est un modèle pour étudier les vibrations ou la propagation d'ondes. L'établissement de l'équation des ondes est venu de l'étude des vibrations d'une corde de violon. Afin de pouvoir modéliser ce comportement, les mathématiciens du ont appliqué la deuxième loi de Newton à la corde, d'‘abord vue comme un ensemble fini de masses ponctuelles reliées par des ressorts (dont le comportement est donné par la loi de Hooke établie en 1660).

L'équation des ondes est un modèle simplifié pour la propagation des ondes sonores, électromagnétiques et élastiques. Elle implique une quantité scalaire réelle .

L'étude des EDP reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21 ème siècle. D'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géométrie et en analyse.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante :

Dans la premier Chapitre, nous présentons une introduction aux équations aux dérivées partielles, ou on rassemble toutes les notions et résultats de base que nous utiliserons par suite.

Le deuxième Chapitre expose quelques méthodes de résolution l'équation d'ondes.

Le troisième Chapitre est consacré pour l'exposition de quelques exemples.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

.

EDP	:	Équation aux dérives partielles.
D	:.	Désigne un ouvert de IR^n
C^1	:	Ensemble des fonctions une fois dérivables et dont la premiére dérivée est continue.
C^2	:	Ensemble des fonctions deux fois dérivables et dont la dérivée seconde est continue.
∂D	:	Frontière de D
∇	:	Le laplacien
Δ	:	Le discriminant
$const$	:	Une constante

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous allons présenter les équations aux dérivées partielles et les équations aux dérivées partielles de premier ordre et les équations aux dérivées partielles de second ordre.

1.1 Équation aux dérivées partielles

Définition 1.1.1 *Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante* (u *ci-dessous*) *et les variables indépendantes* ($x_1, x_2, \ldots$*ci-dessous*) *une ou plusieurs dérivées partielles.*

Cette équation est ainsi de la forme :

$$F(x_1, x_2, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, ...) = 0 \tag{1.1}$$

où F *est une fonction de plusieurs variables. Si* n *est le nombre de variables indépendantes, alors nous considérons le* n*-uplet de variables indépendantes* $(x_1, x_2, ...)$ *comme appartenant à un domaine* D *convenable de* IR^n.

Définition 1.1.2 *Une solution de l'équation (1.1) est une fonction* $u = u(x_1, x_2, ...)$ *des variables indépendantes* $x_1, x_2, ...$*dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux points de* D *et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation (1.1).*

1.1.1 Dimension et Ordre d'une EDP

Définition 1.1.3 *La dimention est le nombre de variable indépendantes dont dépend la fonction inconnue* u.

Définition 1.1.4 *L'ordre est le plus haut dégré de dérivation présent dans l'équation.*

Exemple 1.1.1 $x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2 = \exp(x+y) \Longrightarrow$*est de dimension 2 et d'ordre 3.*

1.1.2 Équation aux dérivées partielles linéaire

Définition 1.1.5 *Une équation aux dérivées partielles est linéaire par rapport à la fonction* u *et à toutes ses dérivées partielles. On peut écrire sous la forme :*

$$L(u) = f \tag{1.2}$$

L *est un opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP.*

f *est une fonction de* n *variables indépendantes définie sur un domaine de* IR^n.

Proposition 1.1.1 *Un opérateur* L *est linéaire ssi* $L(au+bv) = aL(u)+bL(v)$*, quels que soient les nombres réels* a, b *et les fonctions* u, v*. Implicitement nous supposons que la fonction* $au + bv$ *est aussi une fonction.*

Définition 1.1.6 *Une équation aux dérivées partielles homogène est :*

$$L(u) = 0$$

Exemple 1.1.2 *L'EDP suivant :*

$$u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$$

est linéaire non homogéne ($pour\ D = IR^2$, $u = u(x,y)$) *car elle peut s'écrire sous la forme* (1.2) *où*

$$Lu = u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est un opérateur linéaire et $f(x,y) \equiv 1$. *Vérifions la linéarité de* L *: Soit* a *et* b *sont deux nombres réels quelconques et* u *et* v *deux fonctions* ($i.e.$ *il faut que* u *et* v *soient des fonctions dont les dérivées partielles apparaissant dans la définition de* Lu *existent sur* D), *on a*

$$\begin{aligned} L(au+bv) &= (au+bv) + y\frac{\partial^2(au+bv)}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2(au+bv)}{\partial x^2} \\ &= a(u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + b(v + y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) \\ &= aL(u) + bL(v). \end{aligned}$$

1.1.3 Résolution des EDP

Résoudre une EDP dans un domaine D de IR^n, c'est trouver une fonction suffisamment différentiable dans D, telle que la relation (1.1) soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans D. Si les différentes solutions d'une EDP s'écrivent sous la même forme, cette forme est appelée solution générale de l'équation. Comme la solution générale d'une EDP implique des fonctions arbitraires.

Théorème 1.1.1 *La solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n dépend linéairement de n fonctions arbitraires.*

Exemple 1.1.3 *On veut résoudre l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

D'abord, on pose $v(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, ce qui implique pour tout (x,y) que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Ceci signife que $v(x,y)$ est constante pour tout y fixé. Alors

$$v(x,y) = C(y)$$

où C est une fonction arbitraire de y. On se ramène à trouver u telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C(y).$$

Un raisonnement similaire conduit à

$$u(x,y) = C(y)x + D(y)$$

où D est une fonction arbitraire.

1.1.4 Conditions initiales et conditions au bord

Pour trouver les solutions particulières, à partir de la solution générale, on va imposer les conditions respectives sur l'ensemble des solutions.

Les contraintes les plus fréquentes sont :

1-Condition initiale

Si u une fonction de $(x,t) \in IR^n \times IR$, on donne $u(x,t_0) = u_0(x)$.

2-Condition au bord

Si u une fonctin de $x \in IR^n$ on a deux types de contraintes :

- Condition de Dirichlet : Où u est fixé à bord de D , telque $u\,|_{\partial D} = g$.

- Condition de Neumman : Où la dérivée normale de u est fixé telque $\frac{du}{dx}\,|_{\partial D} = g$.

1.1.5 Problèmes bien posés

Considérier une équation aux dérivées partielles sur un domaine avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution.

Définition 1.1.7 *On dit qu'un problème est bien posé si on a :*

-L'existence d'une solution du problème.

-Unicitée de cette solution.

-Stabilitée par rapport aux données du problème.

Exemple 1.1.4 *on prend* (P)

$$\begin{cases} -\nabla u + u = 0, & dans\ D \\ \quad u = 0, & sur\ \partial D \end{cases}$$

$D = \,]0,1[\, \times \,]0,1[\,.\ \partial D = \{(x,y) \in IR^2 \quad tq \quad x = 0 \ \ et \ \ y \in [0,1]\}\,.$

Toute fonction $u(x,y) = a(e^x - e^{-x})$, *avec* $a \in IR$ *est une solution de* (P) *selon les valeurs de* a. *Donc :* (P) *est une mal posé car l'unicité n'est pas vérifiée.*

1.2 Équation aux dérivées partielles de premier ordre

Définition 1.2.1 *Une équation aux dérivées partielles* 1^{er} *ordre d'inconne* u *de deux variable independantes* x, y *est une équation de la forme :*

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

où $(x, y) \in D$ *ouvert de* IR^2.

1.2.1 Méthode pratique pour résoudre l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

Soit l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \tag{1.3}$$

qui donne le système différentiel :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \tag{1.4}$$

pour résoudre (1.3) on cherche deux intégrales premières φ_1, φ_2 du ce système caractéristique.

Alors toute solution du problème posé est définie par :

$$F\left[\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)\right] = 0,$$

on note qu'il faut au moins qu'une des deux fonction φ_1, φ_2 déponde de z, F étant une fonction arbitraire.

Exemple 1.2.1

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Le système caractéristique est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \\ dz = 0. \end{cases}$$

On a

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \Longrightarrow xdx + ydy = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = c_1, \quad c_1 \in IR \ \ \text{une constante}$$

et

$$dz = 0 \Longrightarrow z = c_2, \ c_2 \in IR \ \ \text{une constante.}$$

Donc l'intégrale générale est de la forme

$$F(x^2 + y^2, z) = 0,$$

d'où

$$u(x, y) = H(x^2 + y^2).$$

1.3 Équation aux dérivées partielles de second ordre

Définition 1.3.1 *La forme générale d'une équation aux dérivées partielles du* $2^{éme}$ *ordre est :*

$$F(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0$$

pour $(x, y) \in D$ *ouvert de* IR^2.

1.3.1 Équation aux dérivées partielles de second ordre linéaire

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g, \tag{1.5}$$

où a, b, c, d, e, f et g sont fonctions de x et y qui ne s'annulent pas simultanément. Nous supposerons que u, a, b, c, d, e, f et g ont toutes au moins des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur un domaine D de IR^2.

Remarque 1.3.1 *Si $g(x, y) = 0$, on dit que l'EDP est homogène.*

Remarque 1.3.2 *Les coeffcients de l'EDP peuvent étre constantes.*

Exemple 1.3.1 $7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow$ *EDP d'ordre* 2 *linéaire homogéne à coefficients constantes.*

Exemple 1.3.2 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Longrightarrow$ *EDP d'ordre* 2 *linéaire homogéne à coefficients no constantes (dépondantes à $x$et y).*

1.3.2 Classification

Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

On définit le discriminant

$$\Delta = b^2 - ac$$

1. L'équation (1.5) est dite hyperbolique sur D si et seulement si $\Delta = b^2 - ac > 0$.
2. L'équation (1.5) est dite parabolique sur D si et seulement si $\Delta = b^2 - ac = 0$.
3. L'équation (1.5) est dite elliptique sur D si et seulement si $\Delta = b^2 - ac < 0$.

Remarque 1.3.3 *Si les coefficients* a, b, c *de l'équation* (1.5) *dans la domaine* D *sont constants,* $\Delta = const$ *et le classement de l'équation sera le même à tous les points du domaine.*

Exemple 1.3.3 *Pour l'équation :*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

nous avons alors $a = x^2, b = -2xy, c = y^2$ *et* $\Delta = b^2 - ac = (-xy)^2 - x^2y^2 = 0$ *donc l'équation est parabolique.*

Exemple 1.3.4 *Pour l'équation :*

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

nous avons alors $a = x, b = 0, c = 1$ et $\Delta = b^2 - ac = 0^2 - x = -x$

$$\text{donc}\begin{cases} x < 0 \Longrightarrow \text{ l'EDP est hyperbolique,} \\ x = 0 \Longrightarrow \text{ l'EDP est parabolique,} \\ x > 0 \Longrightarrow \text{ l'EDP est elliptique.} \end{cases}$$

1.3.3 Courbes caractéristiques

Théorème 1.3.1 *Si la fonction* a *n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de* (1.5) *sont les solutions de l'équation :*

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + c(x,y) = 0$$

•On voit que la recherche de caractéristiques se ramène à la résolution d'un problème du second ordre en $\frac{dy}{dx}$.

•L'existence de solutions réelles dépend alors du signe du discriminant réduit $b^2 - ac$, qui caractérise la nature de l'équation aux dérivées partielles.

$$\text{pour } a \neq 0 \begin{cases} b^2 - ac > 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2-ac}}{a} \\ b^2 - ac = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \\ b^2 - ac < 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a} \end{cases} \tag{1.6}$$

L'équation hyperboliques : Étant donnée une équation hyperbolique(1.5), les caractéristiques sont les solutions de (1.6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Après intégration, on obtient les courbes caractéristiques sous forme implicite :

$$\varphi_i(x, y) = c_i \ , \ i = 1, 2$$

où les $c_i \in IR$ sont des constantes.

L'équation paraboliques : Étant donnée une équation parabolique(1.5) , les caractéristiques sont les solutions de (1.6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

Après intégration, on obtient une courbe caractéristique sous forme implicite :

$$\varphi(x, y) = c,$$

où $c \in IR$ est une constante.

L'équation elliptiques : Étant donnée une équation elliptique (1.5) , les caractéristiques sont les solutions (1.6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}.$$

Soient $\varphi_1(x, y) = const$, et $\varphi_2(x, y) = const$, une forme implicite des courbes caractéristiques $\varphi_1$et φ_2 sont complexes conjuguées.

1.3.4 Changement de variables

Soient

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

deux nouvelles variables qui sont des fonctions de x et y ayant au moins leurs dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ contine sur le domaine D et telles que :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0 \ sur \ D.$$

En utilisant la règles des chaînes, nous avons

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x\partial y}\right)
\end{aligned}\right. \tag{1.7}$$

substituant (1.7) dans l'équation (1.5), on obtient :

$$a_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2b_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+c_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+d_1(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi}+e_1(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta}+f_1(\xi,\eta)u = g_1(\xi,\eta) \tag{1.8}$$

$$\left\{\begin{aligned}
a_1 &= a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\\
b_1 &= a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + b\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\\
c_1 &= a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\\
d_1 &= a\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + d\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + e\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\\
e_1 &= a\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) + d\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + e\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\\
f_1 &= f \qquad \text{et} \qquad g_1 = g.
\end{aligned}\right.$$

•Nous obtenons $\Delta_1 = b_1^2 - a_1c_1 = J^2 \times \Delta$, $(\Delta = b^2 - ac)$. Ceci prouve que la classification des équations en EDP est invariante sous des changements de variables.

•On va maintenant vois que les courbes caractéristiques permettent de définir un changement de variable à une forme simple de l'équation aux dérivées partielles (forme dite canonique) où certaine termes parmi a, b ou c ont été annulés.

1.3.5 Forme canonique

Type hyperbolique

Nous considérons le cas hyperbolique (i.e $\Delta = b^2 - ac > 0$ sur le domaine D), nous aurons deux coordonnées caractéristiques (ξ, η). Après ce changement de coordonnées, nous aurons une équation (1.5) pour laquelle $a_1 = c_1 = 0$ et nous obtenons après avoir divisé les deux côtés par $2b_1 \neq 0$ une EDP de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + d_2(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + e_2(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + f_2(\xi, \eta)u = g_2(\xi, \eta). \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) est la forme canonique d'une EDP hyperbolique sur un domaine D.

Type parabolique

Si notre EDP est parabolique sur le domaine D

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

Même en procèdant comme pour le cas hyperbolique, nous n'obtiendrons qu'une seule coordonnée caractéristique $\xi(x, y)$. Pour l'obtenir la second coordonnée caractéristique $\eta(x, y)$, il suffit de prendre une fonction $\eta(x, y)$ quelconque ayant au moins des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continue sur le domaine D telle que

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

On a $\Delta(x, y) = 0$ et $a_1 = 0$ donc

$b = 2i\sqrt{ac}$ avec $i = \pm 1$

$$a_1 = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\frac{\partial \xi}{\partial x} + i\sqrt{c}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

et

$$\begin{aligned} b_1 &= 2a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + b\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + 2c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{a}\frac{\partial \xi}{\partial x} + i\sqrt{c}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{a}\frac{\partial \eta}{\partial x} + i\sqrt{c}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Donc après ce changement de coordonnées, l'équation (1.5) sera transformée en une EDP de la forme

$$c_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_1(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + e_1(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + f_1(\xi,\eta)u = g_1(\xi,\eta).$$

Après avoir divisé les deux côtés de l'équation (1.5) par $c_1 \neq 0$, nous obtenons la forme canonique d'une EDP parabolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_2(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + e_2(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + f_2(\xi,\eta)u = g_2(\xi,\eta),$$

qui est la forme canonique d'une EDP parabolique.

Type elliptique :

Si l'équation (1.5) est elliptique sur le domaine D, alors ses deux équations caractéristiques sont à valeurs complexes et les solutions de ces équations sont conjuguées entre elles. Nous avons les courbes suivantes :

$$\varphi_1(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y) = c_1 \; \varphi_2(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y) = c_2 \quad \text{et} \quad \varphi_2(x,y) = \overline{\varphi_1(x,y)}.$$

Si nous posons $\xi(x,y) = \varphi_1(x,y)$ et $\eta(x,y) = \varphi_2(x,y)$, ces variables ne prennent pas des valeurs réelles.

Les coordonnées caractéristiques dans le cas elliptique seront :

$$\alpha(x,y) = \frac{\xi(x,y) + \eta(x,y)}{2} \quad \text{et} \quad \beta(x,y) = \frac{\xi(x,y) - \eta(x,y)}{2i}, \qquad \text{où} \quad i^2 = -1.$$

Ceci signifie que α est la partie réelle de ξ et β est la partie imaginaire de ξ. Après ce changement de coordonnées, nous obtenons comme EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + d_4(\alpha,\beta)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + e_4(\alpha,\beta)\frac{\partial u}{\partial \beta} + f_4(\alpha,\beta)u = g_4(\alpha,\beta).$$

Cette équation est la forme canonique de l'équation elliptique.

Chapitre 2

Méthodes de résolution l'équation d'ondes

Dans ce chapitre, nous avons étudié les équations des ondes et dans le cas de dimension un, la forme canonique, la solution générale et le Problème de Cauchy et la formule de d'Alembert et étudié les équations des ondes en domaine borné, séparation des variables, considérations énergétiques.

On appelle "onde" les phénomènes vibratoires et les phénomènes de propagation dans un milieu sans transport de matière :

• Une onde se propage à partir d'une source dans toutes les directions de l'espace.

• La perturbation se transmet de proche en proche avec un transfert d'énergie sans transport de matière.

•Ce phénomène dépend du temps.

2.1 Équation des ondes

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles du second ordre du type équations hyperboliques décrivant les phénomènes de propagation d'ondes comme les ondes sonores, lumineuses ... Cette équation permettent de prédire et d'analyser le comportement des ondes apparaît dans de nombreux domaines.

Elle se présente sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla u = 0. \tag{2.1}$$

Une solution de (2.1) est une fonction u qui dépend des variables spatiales $x_1, x_2, ..., x_n$ et de t variable temps.

Si on pose $(x_1, x_2, ..., x_n) \in IR^n$ alors est définie pour $u \in IR^{n+1}$.

Si $n = 1$ les solutions de (2.1) sont appelées les ondes planes.

Si $n = 2$ les solutions de (2.1) sont appelées les ondes cylindriques.

Si $n = 3$ les solutions de (2.1) sont appelées les ondes sphériques.

La constante c représente la vitesse.

2.2 Équation des ondes en dimension un

On appelle équation des ondes (linéaire) homogène l' E.D.P d'évolution, du second ordre en temps (t) et en espace (x) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{et} \quad t > 0,\ x \in IR. \tag{2.2}$$

Où c est un nombre réel positif donné, homogène à la vitesse de propagation de l'onde.

En dimension un (d'espace), les équations des ondes modélisent les équations des cordes vibrantes.

2.2.1 Courbes caractéristiques

Les courbes caractéristiques de cette équation sont les solutions de :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - c^2 = 0, \Longrightarrow \Delta = c^2 > 0.$$

Donc il y a deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = \pm\frac{\sqrt{c^2}}{1} = \pm c.$$

Où encore :

$$dx = \pm c dt.$$

Après intégration, on obtient :

$$x = \pm ct + C \Longleftrightarrow C = x \pm ct, \qquad \text{telque } C \in IR \text{ une constante.}$$

Alors les courbes caractéristiques sont : $\begin{cases} \varphi_1(x,t) = x + ct. \\ \varphi_2(x,t) = x - ct. \end{cases}$

2.2.2 Forme canonique

Soient $\varphi_1(x,t)$ et $\varphi_2(x,t)$ les deux familles de courbes caractéristiques.

Pour obtenir la forme canonique de l'équation (2.2), on utilise le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases} \quad \text{et} \quad u(x,t) = u(\xi,\eta)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \xi}{\partial t} &= c & &\quad \text{et} \quad & \tfrac{\partial \xi}{\partial x} &= 1 \\ \tfrac{\partial \eta}{\partial t} &= -c & & & \tfrac{\partial \eta}{\partial x} &= 1 \end{aligned}$$

Par dérivation composée on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

Et, de même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[c\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right] \\
&= c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= c\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right] \\
&= c\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\right] \\
&= c\left[\left(c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) - \left(c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\right] \\
&= c\left(c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - c\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \\
&= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}. \tag{2.3}$$

Et on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{2.4}$$

En remplaçant (2.3) et (2.4) dans l'équation dans l'équation (2.2) donc on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right]-c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right]&=0\\
c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}&=0\\
-4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}&=0
\end{aligned}$$

Comme $c \in IR^*$ donc la forme canonique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0.$$

2.2.3 Solution générale

Comme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0.$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0.$$

On intègre par rapport à η

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi),$$

où f une fonction arbitraire.

Et de même, on intègre par rapport à ξ :

$$u(\xi,\eta)=F(\xi)+G(\eta),$$

où F est une primitive de la fonction arbitraire f et G une fonction arbitraire.

En revenant aux variables initiales x et t, il apparait que la solution générale de l'équation (2.2)

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct), \quad c \neq 0,$$

où $F, G \in C^2(IR)$ sont deux fonctions arbitraires.

Théorème 2.2.1 *Soit $u \in C^2(IR \times IR_+)$ solution de (2.2) alors u est la somme de deux ondes progressives $u_+, u_- \in C^2(IR)$ de vitesses respectives $+c$ et $-c$:*

$$u(x,t) = u_+(x+ct) + u_-(x-ct),$$

où

$u_+(x+ct) = F(x+ct)$ correspond à une onde qui se propage dans la direction des $x > 0$.

$u_-(x-ct) = G(x-ct)$ correspond à une onde qui se propage dans la direction des $x < 0$.

2.2.4 Problème de Cauchy et la formule de d'Alembert

Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes homogènes unidimensionnelles est donné par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in IR, \quad t > 0, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \qquad x \in IR, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x), \qquad x \in IR, \end{aligned} \tag{2.6}$$

Une solution classique du problème de Cauchy (2.5)-(2.6) est une fonction u qui est deux fois continuellement différentiable pour tout $t > 0$, telle que u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont continues pour $t > 0$, et telles que (2.5)-(2.6) sont satisfaits.

Théorème 2.2.2 *La solution du problème de Cauchy (2.5)-(2.6) est donnée par la formule suivante (appelée formule de d'Alembert)*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Si en plus, $f \in C^2(IR)$et $g \in C^1(IR)$, cette solution est classique telle que $u \in C^2(IR \times IR_+)$ donnée par la formule de D'Almebert.

Preuve. Rappelons que la solution générale de l'équation des ondes est de la forme

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct). \tag{2.7}$$

Notre objectif est de trouver F et G telles que les conditions initiales de (2.6) soient satisfaites.

En $t = 0$, on obtient

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x). \tag{2.8}$$

En différenciant (2.7) par rapport à t et en substituant $t = 0$, on obtient également

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = cF^{'}(x) - cG^{'}(x) = g(x). \tag{2.9}$$

Intégration de (2.9) sur $[0, x]$ donne

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds + C, \tag{2.10}$$

où $C = F(0) - G(0)$. Les équations (2.8) et (2.10) sont deux équations algébriques linéaires pour $F(x)$ et $G(x)$. La solution de ce système d'équations est

$$(2.8) + (2.10) \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + \frac{C}{2}, \tag{2.11}$$

$$(2.8) - (2.10) \Longrightarrow G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - \frac{C}{2}. \tag{2.12}$$

En substituant ces expressions pour F et G dans la solution générale (2.7)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+ct) + G(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds + \frac{C}{2} + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds - \frac{C}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds, \end{aligned}$$

on obtient la formule

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds,$$

qui s'appelle la formule de D'Alembert.

L'unicité vient directement de la formule d'Alembert. En effet, cette formule nous fournit une solution et on a montré que toute solution du problème de Cauchy est nécessairement égale à la solution de D'Alembert. ■

Exemple 2.2.1 *L'exemple suivant illustre l'utilisation de la formule d'Alembert.*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in IR, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ x+1, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

Donner $u(1, \frac{1}{2})$.

La formule de d'Alembert implique

$$\begin{aligned} u(1, \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}\left[f(\frac{3}{2}) + f(\frac{1}{2})\right] + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} g(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} g(s)ds + \int_{1}^{\frac{3}{2}} g(s)ds\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1ds\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.3 Équation des ondes en domaine borné

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \ x \in [0, L], \tag{2.13}$$

avec les condition initiales

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), \ x \in [0, L], \tag{2.14}$$

et les conditions de bord

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{pour tout} \ \ t > 0, \tag{2.15}$$

avec les relations de compatibilité entre les conditions initiales et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0.$$

2.3.1 Séparation des variables

La séparation des variables consiste à rechercher des solutions de (2.13), (2.14), (2.15) qui prendraient la forme :

$$u(x,t) = \psi(t)\varphi(x), \quad t > 0, x \in [0,L],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \psi(t)''\varphi(x),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi(t)\varphi''(x),$$

dans l'équation (2.13), nous obtenons

$$\psi''(t)\varphi(x) - c^2\psi(t)\varphi''(x) = 0,$$

donc

$$\frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)},$$

comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'ils sont constants, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in IR$ avec :

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \Longrightarrow \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0,$$

et

$$\psi''(t) = \lambda c^2\psi(t) \Longrightarrow \psi''(t) - \lambda c^2\psi(t) = 0.$$

Et on a obtenu deux équation à variable séparées.

La première équation

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0, \qquad x \in [0, L]\,,$$
$$\text{avec } \; \varphi(0) = \varphi(L) = 0.$$

Les solutions dépendent de la constante λ

- Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x},$$

où A et B sont des nombres réels.

- Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned}
\varphi(0) = 0 &\Longrightarrow A + B = 0 \Longrightarrow B = -A \\
\varphi(L) = 0 &\Longrightarrow A\left(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \\
\varphi(L) = 0 &\Longrightarrow 2A\sinh(\sqrt{\lambda}L) = 0 \\
&\Longrightarrow A = B = 0.
\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

- Si $\lambda = 0$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= Ax + B \\ \varphi(0) &= 0 \Longrightarrow B = 0 \\ \varphi(L) &= 0 \Longrightarrow AL = 0 \\ &\Longrightarrow A = 0. \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus

- Si $\lambda < 0$ alors

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x) \\ &\varphi(0) = 0 \Longrightarrow B = 0 \\ &\varphi(L) = 0 \Longrightarrow A\sin\left(\sqrt{-\lambda}L\right) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = 0$ ou bien $\sin\left(\sqrt{-\lambda}L\right) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n > 0$ entier. Il existe donc de solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{nx\pi}{L}\right),\ n > 0,$$

associées aux valeurs de λ_n suivantes

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à une valeur de λ. On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées la fonction propre, comme les vecteurs propres en algèbre linéaire, est définie à un scalaire multiplicatif près.

Le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^L f(x)\, g(x) dx,$$

orthogonalise la suite des $\varphi_n(x)$

Rappelons que $\begin{cases} \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}, \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}, \\ \cos(a)-\cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2}), \end{cases}$,pour tout $\alpha, \beta \in IR$.

-Si $n \neq m$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle &= \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left(\cos\left[(n-m)\frac{\pi}{L}x\right] - \cos\left[(n+m)\frac{\pi}{L}x\right]\right) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

-Si $n = m$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle &= \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\ &= \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \int_0^L \frac{1-\cos\left(2\frac{\pi n}{L}x\right)}{2} dx \\ &= \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

La deuxième équation

On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n''(t) = \lambda_n c^2 \psi_n(t), \qquad t > 0,$$

qui a pour solutions, étant donné que $\lambda_n < 0$

$$\psi_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right),$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 2 on trouve un espace vectoriel de dimension 2 de solutions. a_n et b_n sont des constantes arbitraires.

Par les deux équations, on a la solution sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right).$$

Il faut maintenant déterminer les coeffcients a_n et b_n grâce aux conditions initiales, ce qui donne pour $u(x,0) = u_0(x)$:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}c\ \ (0)\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}c\ \ (0)\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right) = u_0(x).$$

Les a_n peuvent donc s'interpréter comme étant les coordonnées de la décomposition de u_0 dans la base des $\varphi_n(x)$

$$\langle \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n(x), \varphi_m(x)\rangle = \langle u_0(x), \varphi_m(x)\rangle.$$

Comme les $\varphi_n(x)$ sont orthogonales

$$\begin{aligned}\langle u_0(x), \varphi_m(x)\rangle &= \langle \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n(x), \varphi_m(x)\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\langle \varphi_n(x), \varphi_m(x)\rangle \\ &= a_m\langle \varphi_m(x), \varphi_m(x)\rangle\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x)\rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x)\rangle} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right) u_0(x)dx.$$

Quand à la condition $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$, elle donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}c\ t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right)\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{cn\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}c\ t\right) + b_n \frac{cn\pi}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \frac{cn\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}c\ (0)\right) + b_n \frac{cn\pi}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}c\ (0)\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right)
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{cn\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right) = v_0.$$

On obtient donc :

$$b_n = \frac{L}{n\pi c}\frac{\langle v_0(x), \varphi_n(x)\rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x)\rangle} = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L v_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}cx\right)dx.$$

2.3.2 Considérations énergétiques

Étant donné $u \in ([0,L] \times IR_+)$, on définit l'énergie totale à l'instant t par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{[0,L]}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx.$$

Théorème 2.3.1 *si u_1, u_2 sont deux solution du problème (2.13), (2.14) , (2.15) alors $(u_1 = u_2)$ (la solution est unique)*

Chapitre 3

Exemples

Exemple 1 Résoudre le probléme suivant par la formule d'Alembert

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x \in IR, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) = x^2, \ x \in IR, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = 4x, \ x \in IR, \end{cases}$$

Solution 1 $\Delta = b^2 - 4ac = 4$, telle que : $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$.

Les équations caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 1,$$

$\Longrightarrow$

$$dx = \pm dt \Longrightarrow \int dx = \int \pm dt \Longrightarrow \begin{cases} x + t = c_1 \\ x - t = c_2 \end{cases}, \ c_1, c_2, \text{sont constantes.}$$

Posons les nouvelles variables :

$$\begin{cases} \xi(x,y) = x+t \\ \eta(x,y) = x-t \end{cases}$$

ces variables sont indépendantes car :

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Alors en utilisant le règle de chaîne qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)(1)^2 + 2(1)(1)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)(1)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)(0) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)(0) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)(1)^2 + 2(1)(-1)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)(-1)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)(0) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)(0) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) - 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\right]=0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=+4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\right)=0$$

$\Longrightarrow$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}\right)=0,$$

cette équation est la forme canonique, la solution générale est :

$$u(x,t)=F(x+t)+G(x-t),\ \text{deux fonction de classe } C^2(IR).$$

La formule de d'Alembert implique :

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds\\
u(x,t)&=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 4(s)ds\\
u(x,t)&=\frac{1}{2}\left[x^2+t^2+2xt+x^2+t^2-2xt\right]+2\,\frac{1}{2}(s)^2\Big|_{x-t}^{x+t}\\
u(x,t)&=x^2+t^2+(x+t)^2-(x-t)^2\\
u(x,t)&=x^2+t^2+4xt.
\end{aligned}$$

Exemple 2 Résoudre, en utilisant la méthode de séparation des variables le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ 0\le x\le 1,\ t>0,\\
u(0,t)=u(1,t)=0,\ t>0,\\
u(x,0)=u_0(x)=x(1-x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.
\end{array}\right. \tag{E}$$

Ce problème peut être interprété comme un problème de corde vibrante. Les extrémités de la corde sont fixées en $x = 0$, et $x = 1$ et la forme initiale donnée de la corde est $u_0(x) = x(1-x)$. La corde est alors relâchée avec une vitesse initiale nulle. L'équation $u(x,t)$ donne dans ces conditions, le déplacement de tout point x à instant ultérieur t.

Solution 1 Posons

$$u(x,t) = \psi(t)\varphi(x), \quad t > 0, x \in [0,1]\,,$$

dans l'équation (E), nous obtenons

$$\psi''(t)\varphi(x) - \psi(t)\varphi''(x) = 0,$$

par suite

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Comme les variables t et x sont indépendantes, nous déduisons qu'il existe une constante réelle telle que :

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda, \text{ d'ou } \begin{cases} \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \\ \psi''(t) - \lambda\psi(t) = 0 \end{cases}$$

Résolvons l'équation en φ

-Si $\lambda > 0$ alors les solutions générale est de la forme $\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$, où A et B sont des nombres réels. Par les conditions $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 0 \Longrightarrow A + B = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = 0 \Longrightarrow u(x,t) = 0$.

-Si $\lambda = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = Ax + B$ où A et B sont des nombres réels. Par les conditions $\Longrightarrow \varphi(x) = 0 \Longrightarrow u(x,t) = 0$.

-Si $\lambda < 0 \Longrightarrow \varphi(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x)+B\cos(\sqrt{-\lambda}x)$ où A et B sont des nombres réels, avec les conditions aux limite donc $A = 0$ ou bien $\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\left(n\pi\right)^2$, $n > 0$, $\lambda_n = -\left(n\pi\right)^2$donc

$$\varphi_n(x) = \sin\left(n\pi x\right),$$

Résolvons l'équation en ψ

$$\psi_n{''}(t) = \lambda_n \ \psi_n(t), \qquad t > 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$\psi_n(t) = a_n \cos\left(n\pi t\right) + b_n \sin\left(n\pi t\right).$$

Par les deux équations, on a la solution générale sous la forme

$$u_n(x,t) = \varphi_n(x)\psi_n(t) = \sin\left(n\pi x\right)\left[a_n \cos\left(n\pi t\right) + b_n \sin\left(n\pi t\right)\right],$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)\psi_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(n\pi t\right) + b_n \sin\left(n\pi t\right)\right)\sin\left(n\pi x\right).$$

La solution générale doit vérifier les conditions initiales :

$$u(x,0) = x(1-x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

En remplaçant les deux conditions initiales dans la solution générale, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(n\pi(0)\right) + b_n \sin\left(n\pi(0)\right)\right) \sin\left(n\pi x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(n\pi x\right) = u_0(x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\pi\right) b_n \sin\left(n\pi x\right) = 0.$$

Il reste donc à calculer les coefficients a_n ,b_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= 2\int_0^1 (x-x^2) \sin\left(n\pi x\right) dx \\ &= 2\underbrace{\int_0^1 x \sin\left(n\pi x\right) dx}_{i} - 2\underbrace{\int_0^1 x^2 \sin\left(n\pi x\right) dx}_{ii} \end{aligned}$$

donc en utilisant intégral par partie

$$i = \int_0^1 x\sin\left(n\pi x\right) dx \Longrightarrow \begin{cases} x \to 1 \\ \sin\left(n\pi x\right) \to -\frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi x\right) \end{cases}$$

$$i = -\frac{x}{n\pi}\cos\left(n\pi x\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi x\right) dx = -\frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi\right) + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin\left(n\pi x\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi\right)$$

$$ii = \int_0^1 x^2\sin\left(n\pi x\right) dx \Longrightarrow \begin{cases} x^2 \to 2x \\ \sin\left(n\pi x\right) \to -\frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi x\right) \end{cases}$$

$$ii = -\frac{x^2}{n\pi}\cos\left(n\pi x\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{n\pi}\cos\left(n\pi x\right) dx = -\frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi\right) + \frac{2}{n\pi}\underbrace{\int_0^1 x\cos\left(n\pi x\right) dx}_{iii}$$

$$iii = \int_0^1 x\cos\left(n\pi x\right) dx \Longrightarrow \begin{cases} x \to 1 \\ \cos\left(n\pi x\right) \to \frac{1}{n\pi}\sin\left(n\pi x\right) \end{cases}$$

$$iii = \frac{x}{n\pi}\sin\left(n\pi x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin\left(n\pi x\right) dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1)$$

$ii = \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x)\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi)-1)\right)$

$ii = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^3\pi^3}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^3\pi^3}$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\left(-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)\right) - 2\left(-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^3\pi^3}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^3\pi^3}\right) \\ &= \frac{4}{n^3\pi^3}\left(1-\cos(n\pi)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi}\int_0^L v_0(x)\sin(n\pi x)\,dx \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

Alors la solution générale

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^3\pi^3}\left(1-\cos(n\pi)\right)\cos(n\pi t)\sin(n\pi x).$$

Exemple 3 Montrer que si u_1 et u_2 sont deux solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Alors : $u_1 = u_2$ (la solution unique).

Solution 3 Considérons la situation $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ pour $x \in [0, L]$,

ou va montrer que dans ce cas le problème à un seul solution $u(x,t) = 0$ pour $x \in [0, L], t > 0$.

Soit la fonction $E(t)$ de t définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{[0,L]} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx,\ t > 0.$$

Cette fonction $E(t)$ est l'énergie de la corde au temps t.

Nous allons maintenant montrer que $E(t)$ est une fonction constante.

Ona :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + 2c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) dx \\ &= c^2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) dx.\end{aligned}$$

"Car $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$". En intégrant par parties, on a

$$\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) dx.$$

Donc : $\frac{d}{dt}E(t) = c^2\left[\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\Big|_0^L = 0$, parce que $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t > 0$ a comme conséquence que $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L,t) = 0$.

En d'autres mots $E(t)$ est une fonction constante. Ceci est la conservation de l'énergie.

On peut maintenant calculer $E(0)$.

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\int_{[0,L]}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)\right)^2\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{[0,L]}\left((g(x))^2 + c^2(f'(x))^2\right)dx = 0 \end{aligned}$$

parce que $E(t)$ est une fonction constante et $E(0) = 0$, donc $E(t) = 0$ pour tout t.

Comme $E(t)$ est l'intégrale d'une fonction dont les valeurs sont > 0 et que $E(t)$ est null on a :

$$\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) = 0,\ \ x \in [0, L]\,, t > 0,$$

donc : $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, est par consequent $u(x,t)$ est fonction constante. Comme $u(0,t) = 0$, on peut conclure que dans cette prémière situation (celle où $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$) pour $x \in [0, L]$.

On a que : $u(x,t) = 0$ pour $x \in [0, L]$, $t > 0$.

Maintenant u_1, u_2 est solution de : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$$\begin{aligned} &(u_1 - u_2)(0,t) = 0,\ \ (u_1 - u_2)(L,t) = 0 \\ &(u_1 - u_2)(x,0) = 0,\ \ \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t}(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Donc : $u_1 - u_2 = 0$ d'où : $u_1 = u_2$.

Bibliographie

[1] Baddari, K. & , Abbassov, A. (2009). Equation de la physique mathématique appliquées.

[2] Benjamin. Boutin. (Mars 2012). Eq des ondes calcul scientifique. Univ de Rennes1.

[3] Besseghir, S. & , Hachani, A. (2018 / 2019). Schéma aux différences finies pourl'équation des ondes. Université Echahid Hamma Lakhdar EL oued.

[4] Kelleche, A. (2019). Équation de la physique mathématique.

[5] Kellel, M, S. Résolution Numérique de l'Equation des Ondes Non Linéaire. Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem.

[6] Lesfari, A. (Mars 2015). Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles (Cours et exercices corrigés).Éditions Ellipses, Paris.

[7] Robert Bédard. Offert par le département de mathématique de l'Université du Quéec à Montréal.

[8] Sabit, S. Notions sur les équation aux dérivées patilles de l'Université du Ibn Khaldoun, Tiaret.

[9] Zitouni, S. & , Zennir, K. (2018). Equation aux Dérivées Partielles de nature physique : EDPs de nature physique Éditions Universitaires européennes.

[10] Djenidi, H. (2018). Quelque methodes de réolution d'EDP de probléme de Sturm-liouville. Université Mohamed Khider, Biskra.

Résumé :

Objectif principal de ce mémoire est de trouver des solutions de les équation d'onde de différentes manières (la formule de d'Alembert-- sépration des variables).

Mots clés :

Les équations des ondes -- problème de Chauchy -- La formule deD'Alembert - Séparation de variable

Abstract :

The main objective of this note is to find solutions of the wave equation in different ways (d'Alembert's formula--separation of variables).

Key words :

Wave equations -- Chauchy's problem -- D'Alembert's formula - Separation of variables

الملخص:

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو ايجاد حلول معادلة الموجة بطرق مختلفة(صيغة دالمبرت -- فصل المتغيرات)

الكلمات المفتاحية :

معادلات الموجة -- مشكلة كوشى - صيغة دالمبرت - فصل المتغيرات