République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : *Probabilité*

Par

Azri Fatma Zohra

Titre :

Approximation des solutions des équations différentielles stochastiques par la méthode de Carathéodory

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**Chighoub Farid**	UMKB	Président
Dr.	**Mezerdi Mohamed Amine**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Chaouchkhouane Nassima**	UMKB	Examinatrice

19 Juin 2023

Dédicace

Je dédie cette mémoire

À la chose la plus précieuse que je posséde mes chéres parents.

À mes fréres et mes soeurs

À ma famille

À mes chéres amis

À tous mes proches.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette mémoire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers **mes parents**, **ma famille** et **mes amis**, pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements constants.

Je souhaite exprimer mes sincères remerciements à mon directeur de mémoire **Mr. Mohamed Amine Mezerdi**, pour sa précieuse guidance, ses conseils éclairés et sa disponibilité tout au long de ce processus.

Je tiens également à remercier les membres de mon jury **Mr. Chighoub Farid** et **Mme. Chaouchkhouane Nassima**, pour leur temps précieux et leur intérêt porté à mon travail.

Mes remerciements vont également à mes collègues et camarades de promotion, qui ont partagé leur savoir et leur expérience tout au long de cette aventure académique.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers **le département de mathématiques**, pour les ressources mises à ma disposition et pour l'environnement d'apprentissage stimulant qu'elle offre.

Notations et Symbols

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Ω :Est un ensemble fondamontal

$\mathcal{F}$:Est une tribu définie sur Ω

P :Est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$

μ :la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$

$\mathbb{R}^d$:Espace réel euclidien de dimension d

$B(\mathbb{R}^d)$:Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$

L^1 :Espace des processus intégrable

L^2 :Espace des processus de carée intégrable

L^p :Espace des porocessus de $p-$intégrable

$L^2([0,T])$:Espace des fonction de carée intégrable

EDS :Equation Différentielle Stochastique

$E[X]$:Espérance mathématique de v.a X

$E[./.]$:Espérance conditionnelle

$P.s$:Presque sûremente

$P-p.s$:Prêsque sûremente pour la mesure de probabilité

$s \wedge t$:$\min(s,t)$.

MB :Mouvemente Brownien

BDG :Inégalité de Burtholder -Davis -Gundy

Table des matières

Introduction

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation qui incorpore à la fois des éléments déterministes et stochastiques.

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

où b est le drift et σ est le coefficient de diffusion,t est le paramètre de temps et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Une solution d'une EDS est un processus stochastique $X(t)$ qui satisfait l'équation pour tout $t \in [0, T]$. L'existence et l'unicité des solutions fortes aux EDS dépendent de certaines conditions sur les coefficients b et σ,telles que la continuité, la condition de Lipschitz et les conditions de croissance linéaire. Diverses théories et techniques mathématiques, telles que le calcul d'Itô, la théorie des martingales et l'analyse stochastique, sont utilisées pour étudier les propriétés de l'existence et l'unicité de solutions fortes des EDS.

L'objectif principal de ce travail est d'approfondir l'étude de l'approximation du schéma numérique de Carathéodory pour les équations différentielles stochastiques (EDS). Ce schéma est introduit par le mathématicien grec Constantin Caratheodory au début du $20^{éme}$ siècle pour les équations différentielles ordinaires [4]. Par la suite,Bell et Mohammad l'ont étendu aux équations différentielles stochastiques [1], et Mao a apporté des contributions ultérieures [8] et [9],et la convergence de ce schéma pour les EDS de type Mckean-Vlasov a été étudiée par M.A.Mezerdi (voir [7]) . En général, les solutions des équations différentielles stochastiques (EDS) ne possèdent pas d'expressions explicites, à l'exception des EDS linéaires. Par conséquent, on recherche des solutions approximatives telles que les solutions itératives de Picard, plutôt que des solutions exactes.

Nous nous intéressons également à l'étude des questions essentielles concernant l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions fortes de telles équations par rapport aux conditions initiales et aux coefficients. La stabilité des systèmes dynamiques, qu'ils soient déterministes ou stochastiques, revêt une importance cruciale dans leur analyse, car elle permet d'évaluer la réaction du système face aux perturbations.

Ce mémoire est structurée en trois chapitres qui traitent de différentes problématiques liées à l'existence,l'unicité,la stabilité des EDS,ainsi que l'approximation du schéma de Carathéodory pour de telles équations. Voici un aperçu du contenu de ces chapitres :

Le premier chapitre constitue une introduction aux processus stochastiques, abordant des notions telles que le mouvement Brownien, l'intégrale stochastique et l'équation différentielle stochastique,entre autres.

Le deuxième chapitre se concentre sur les propriétés d'existence, d'unicité et de stabilité forte de la solution d'une EDS,en examinant notamment la condition de Lipschitz sur les coefficients.

Le troisième chapitre traite de la convergence du schéma numérique de Carathéodory pour les équations différentielles stochastiques. Ce schéma d'approximation est défini par une suite de solutions d'EDS présentant de légers retards, sous la condition de Lipschitz sur les coefficients.

Chapitre 1

Notions de base

Le premier chapitre de ce mémoire constitue une introduction aux notions fondamentales et aux résultats importants qui seront nécessaires par la suite. Nous avons utilisé les références suivantes pour étayer ce chapitre.([5], [6], [10], [11])

1.1 Processus stochastique :

Définition 1.1.1 *(**Filtration**) Une filtration sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sous-tribus telle que pour* $s \leq t$ *ona :*$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Définition 1.1.2 *(**Processus stochastique**) Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une variabla aléatoire* $(X_t)_{t\geq 0}$ *indexée par un ensembe* T

1. *Si* T *est un ensemble dénombrable totalemente ordonnée comme* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Q}$ *alors* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus stochastique à temps discrét*
2. *Si* $T = \mathbb{R}_+$ *alors* X *est un processus stochastique à temps continu*
3. *Pour* $t \subset T$ *fixé :*$w \in \Omega \rightarrow X_t(w)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

4. *Pour $w \in \Omega$ fixé, la fonction $t \in T \to X_t(w)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus*

Définition 1.1.3 ***(indistinguabilité)****On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_t$ sonte indistinguqbles si leurs trajectoires sont les même P.p.s ,c'est -à-dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t; \forall t \geq 0) = 1$$

Définition 1.1.4 *(**Modification des processus**)On dite que $Y = (Y_t)_t$ est une version (ou modification) de $X = (X_t)_{t\geq 0}$ si :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \qquad ; \forall t \geq 0$$

Proposition 1.1.1 ***Définition 1.1.5 (Egalité de deux processus stochastique)*** *On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_t$ ont même lois s'ils ont même lois fini -dimensionnelles pour tout $(t_1, ..., t_p) \in T$et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_p}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_p})$$

Définition 1.1.6 *(**Processuce continue**) On dite que le processus est à trajectoires continues (ou est continu)si les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout w*

Définition 1.1.7 *(**Processus càdlàg**) Un processus est dite càdlàg (continu à droite ,pourvu de limites à gauche)si ses trajectoires sont continues à droite , pourvu de limites à gauche.*

Définition 1.1.8 ***(Processus càglàd)*** *Un processus est dite càglàd (continu à gauche ,pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche , pourvu de limites à droite*

Définition 1.1.9 *(**processus mesurable**) Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit mesurable si l'application définie sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \beta(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ par $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable*

Définition 1.1.10 ***(Temps d'arrêt)*** *Soit* $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Une v.a $T : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *est un* $(\mathcal{F}_t)$ *temps d'arrêt si* $\forall t \geq 0$ *,*$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

On associe à un temp d'arrêt T *les tribus suivantes :*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

$$\mathcal{F}_{T^+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0, A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

$$\mathcal{F}_{T^-} = \sigma(\{A \cap \{A \cap t\}\,; A \in \mathcal{F}_\infty, t \geq 0, A \in \mathcal{F}_t\}).$$

1.2 Martingale en temps continu :

Définition 1.2.1 *Un processus* $X = (X)_{t\epsilon\mathbb{R}_+}$ *adapté par rapport à une filtration* $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ *et telle que* $\forall t\epsilon\mathbb{R}_+$ *,*$(X_t)_{t\geq 0}\epsilon L^1$ *(ie :*$E\,|X_t| < +\infty$*) est appelé :*

- *Une martingale si* $\forall s \leq t : E\,(X_t \backslash \mathcal{F}_s) = X_s$.
- *Une sur- martingale si* $\forall s \leq t : E\,(X_t \backslash \mathcal{F}_s) \leq X_s$.
- *Une sous - martingale si* $\forall s \leq t : E\,(X_t \backslash \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

Définition 1.2.2 *Soit* X *une martingale on dit que* X *est une martingale réguliére s'il existe une variable aléatoire* η *telle que :*

$$\forall t \in I : X_t = E\,[\eta \diagup \mathcal{F}_t]$$

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 ***(Mouvement Brownien)*** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique à valeurs réelles ,*B *est un Mounemente Brownien standard si*

1. $B_0 = 0$.

2. $\forall 0 \leq s < t < \infty$,*la variable aléatoire* $B_t - B_s$ *est independante de* $(B_u)_{u\epsilon[0,s]}$.

3. $\forall 0 \leq s < t, B_t - B_s$ *suite la loi normale* $N(0, t-s)$

4. *Les trajectoires* $t \to B_t(\omega)\, p\_p.s$ *continues.*

Proposition 1.3.1 Proposition 1.3.2 *Soit* $B = (B_t)_{t\geq 0}$*un prosessus stochastique telle ques toutes les trajectoires sont continuues et telle que* $B_0 = 0$.*Alors les propriétes suivante sont eauivalentes :*

i : *Le processus* B *est un Mouvement Brownien standard.*

ii : *Le processus* B *est un processus gaussien avec espérance*

$$\begin{cases} Esperance\ m(t) = 0 \\ Covariance\ \ \Gamma(s,t) = \min\{s,t\} = s \wedge t \end{cases}.$$

1.4 Intégrale stochastique (Intégrale d'itô)

Définition 1.4.1 ***(Intégrales stochastiques)l***'*ntégrale stochastique est un intégrale de la forme :*

$$\int_a^b X_s(\omega) dB_s(\omega)$$

ou $a, b\epsilon\mathbb{R}_+, (X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus stochastique* ,$(B_t)_{t\geq 0}$ *est un M.B.*

Définition 1.4.2 *(**Bon processus**)On dit que* $\{\theta_t, t \geq 0\}$ *est un "bon processus " s'il est* $\mathcal{F}_t$ *-adapté,càdlàg, et si :*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty; \forall t \geq 0$$

L'intégrale stochastique est vérifier les propriétes suivantes :

1. Linéarité :Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux " bon processus"on donc

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int_0^t (\alpha X_s(\omega) + \beta Y_s(\omega)) dB_s(\omega) = \alpha \int_0^t X_s(\omega) dB_s(\omega) + \beta \int_0^t Y_s(\omega) dB_s(\omega)$$

2. Centrage :Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un " bon processus" et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B alors ona :

$$E\left[\int_0^t X_s(\omega)dB_s(\omega)\right] = 0$$

3. Appartenance à L^2 :Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un " bon processus" et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B alors ona :

$$E\left[\int_0^t (X_s(\omega)dB_s(\omega))^2\right] = E\left[\int_0^t X_s^2(\omega)ds\right]$$

Définition 1.4.3 ***(Processus d'Itô)****Un processus $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé processus d'Itô s'il est la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

ou b_s est un processus $\mathcal{F}_t$adapté ,tq :

$$\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty, \mathbb{P}\text{-}p - s$$

σ est un "bon processus local", $x = X_0 \in \mathbb{R}$

On écrit généralemente le processus d'Itô par la forme différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le processus (b_t) s'appelle la derivé (drift)du processus X ,et $\sigma(t)$ s'appele le coefficient du diffusion

Théorème 1.4.1 (1 **ére formule d'Itô**)Supposons g de class C^2 alors :

$$g(X_t) = g(x) + \int_0^t g'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(X_s)\sigma_s^2 dB_s$$

Si g est à dérivées bornées ,le processus

$$g(X_t) - \int_0^t g'(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t g"(X_s)\sigma_s^2 dB_s$$

est une martingale

cette formule s'ecrite

$$dg(X_t) = g'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^t g"(X_t)d\left\langle X\right\rangle_t$$

Théorème 1.4.2 (**2éme formule d'Itô**)Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t , de class C^2 par rapport à x on a :

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)d\left\langle X\right\rangle_s$$

On peut écrire la formule d'Itô sous la forme différentielle

$$g(t, X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)d\left\langle X\right\rangle_t$$

1.5 Quelques inégalités :

Théorème 1.5.1(L'inégalité de cauchy Schwartz) $\forall t \in [0, T]$ est f fonction :$[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\int_0^t f(s)ds\right)^2 \leq t\int_0^t (f(s))^2\, ds$$

Théorème 1.5.2 (L'inegalité de Burkholder Davis Gaundy) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ espace de probabilité filtré, et soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale définie sur cette espace .Si $p > 0$ Alors $\exists c_p, C_p$ telle que $0 < c_p < C_p < +\infty$ ona :

$$c_p E\left[\left\langle M, M\right\rangle^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[(M^*)^p\right] \leq C_p E\left[\left\langle M, M\right\rangle^{\frac{p}{2}}\right]$$

ou $M_t^* = \sup \{|M_s| \diagup 0 \leq s \leq t\}$

Lemme 1.5.1 ***(Granwall)*** *Soit* $T > 0$ *et* $F \geq 0, A \geq 0$ *,et* $v(.)$ *est une fonction borné,positive et Borel mesurable sur* $[0, T]$ *.Si*

$$v(t) \leq F + A \int_0^t v(s) ds$$

Alors

$$v(t) \leq F \exp(At)$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques(EDS)

2.1 Formulation du probléme

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, muni d'une filtration (F_t), $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Considérons l'EDS suivant

$$\begin{cases} dX_t = \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \\ X_0 = x \end{cases} \qquad \forall 0 \leq s \leq t < T \tag{2.1}$$

t est le paramètre de temps et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

On suppose que :

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

Les hypothèses suivantes sera considérée tout au long de cette mémoire

(H_1) **(La condition Lipchitz)** Il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L\,|x - y|$$

(H_2) **(La condition de croissance linéaire)** Il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1 + |x|)$$

2.2 Existence et unicité de la solution d'une EDS :

Dans cette partie du chapitre, nous abordons la question fondamentale de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique. Nous examinerons les conditions requises pour garantir l'existence d'une solution ainsi que les circonstances dans lesquelles cette solution est unique. En nous appuyant sur des concepts clés tels que la continuité des coefficients et la condition de Lipschitz, nous explorerons les théorèmes et les résultats pertinents qui établissent les fondements de cette analyse.

Le théorème suivant nous donne l'existance et l'unicité de la solution d'une EDS.

Théorème 2.2.1 Soient $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ deux solutions de l'EDS (2.1) avec $X(0) = x$ et $Z(0) = z$ deux conditions initiales de $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ respectivement. Sous les hypothèses $(H_1), (H_2)$, l'EDS (2.1) admet une unique solution telle que $E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2] < +\infty$.

Preuve.

1. Unicité de la solution : Soit :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dB_s$$
$$\text{et } Z_t = z + \int_0^t b(s, Z(s))ds + \int_0^t \sigma(s, Z(s))dB_s$$

on a :

$$|X_t - Z_t|^2 = \left| x - z + \int_0^t (b(s, X(s)) - b(s, Z(s)))ds + \int_0^t (\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, Z(s)))dB_s \right|^2$$

On utilise l'inégalité suivante :$|a + b + c|^2 \leq 3\,|a|^2 + 3\,|b|^2 + 3\,|c|^2$

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t<T} |X_t - Z_t|^2\right] &\leq 3E\left[|x - z|^2\right] + 3E\left[\sup_{s\leq t<T}\left|\int_0^t (b(s, X(s)) - b(s, Z(s)))ds\right|^2\right] \\ &+ 3E\left[\sup_{s\leq t<T}\left|\int_0^t (\sigma(s, X(s)) - \int_0^t \sigma(s, Z(s)))dB_s\right|^2\right] \end{aligned}$$

l'utilisation de l'inégalité de Schwartz et BDG nous donne :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t<T} |X_t - Z_t|^2\right] &\leq 3E\left[|x - z|^2\right] + 3t\int_0^t \left[E\,|(b(s, X(s)) - b(s, Z(s)))|^2\,ds\right] \\ &+ 3C_2\int_0^t \left[E\,|(\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, Z(s)))|^2\right] ds \\ &\leq 3(t + C_2)\int_0^t E[|(b(s, X(s)) - b(s, Z(s)))|^2 \\ &+ |(\sigma(s, X(s)) - \sigma(s, Z(s)))|^2]ds + 3E\left[|x - z|^2\right] \end{aligned}$$

on applique l'hypothése (H_1), ona

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t<T} |X_t - Z_t|^2\right] &\leq 3E\,|x - z|^2 + 3(t + C_2)L^2\int_0^t E(|X_s - Z_s|^2)ds \\ &\leq 3E\,|x - z|^2 + 3(t + C_2)L^2\int_0^t E(\sup_{s\leq t<T} |X_s - Z_s|^2)ds \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, on trouve :

$$E(\sup_{t<T} |X_t - Z_t|^2) \leq 3E\,|x - z|^2\,e^{(3(t+C_2)L^2t)}$$

en suppose maintenant que $x = z$ donc $|x - z|^2 = 0$ alors $E\left[\sup_{t<T} |X_t - Z_t|^2\right] = 0$ et on conclu $X_t = Z_t \ldots \mathbb{P}.p.s. \ldots \forall t \in [0, T]$

2. Existence de solution : La démonstration de l'existence est semblable à la démonstration d'existence utilisée pour les équations différentielles ordinaires. On définit $X(0) = x$ et $X(k)$

de manière inductiveselon les règles suivantes :.

$$X_t^{k+1} = x + \int_0^t b(s, X_s^k)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^k)dB_s$$
$$\text{et } X_t^k = x + \int_0^t b(s, X_s^{k-1})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{k-1})dB_s$$

Alors :

$$X_t^{k+1} - X_t^k = \int_0^t b(s, X_s^k)ds - \int_0^t b(s, X_s^{k-1})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^k)dB_s - \int_0^t \sigma(s, X_s^{k-1})dB_s$$

On a :$|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$

$$E\left[\sup_{t<T} \left|X_t^{k+1} - X_t^k\right|^2\right] \leq 2E\left[\sup_{s \leq t<T} \left|\int_0^t b(s, X_s^k)ds - \int_0^t b(s, X_s^{k-1})ds\right|^2\right]$$
$$+ 2E\left[\sup_{s \leq t<T} \left|\int_0^t \sigma(s, X_s^k)dB_s - \int_0^t \sigma(s, X_s^{k-1})dB_s\right|^2\right]$$

On utilise l'inégalité de Schwartz et de BDG, on obtient :

$$E\left[\sup_{t<T} \left|X_t^{k+1} - X_t^k\right|^2\right] \leq 2TE\left[\int_0^t \left|b(s, X_s^k) - b(s, X_s^{k-1})\right|^2 ds\right]$$
$$+ 2C_2E\left[\int_0^t \left|\sigma(s, X_s^k) - \sigma(s, X_s^{k-1})\right|^2 ds\right]$$
$$\leq 2(T + C_2)\int_0^t E\left[\left|b(s, X_s^k)d - b(s, X_s^{k-1})\right|^2 + \left|\sigma(s, X_s^k) - \sigma(s, X_s^{k-1})\right|^2\right] ds$$

D'aprés (H_1) :

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{t<T}\left|X_t^{k+1}-X_t^{k+}\right|^2\right] &\leq 2(T+C_2)L^2\int_0^t E\left[\left|X_s^k-X_s^{k-1}\right|^2\right]ds \\
&\leq 2(T+C_2)L^2\int_0^t E(\sup_{s\leq t<T}\left|X_s^k-X_s^{k-1}\right|^2)ds \\
&\leq A_n\int_0^t E(\sup_{s\leq t<T}\left|X_s^k-X_s^{k-1}\right|^2)ds
\end{aligned}
$$

Telle que :$A_n = 2(T+C_2)L^2$

Pour $k=0$

$$
\begin{aligned}
E[\sup|X^{(1)}-X^{(0)}|^2] &\leq 2C^2T^2(1+E\left|x\right|^2)+2C^2T(1+E\left|x\right|^2) \\
&\leq A_1T
\end{aligned}
$$

Avec $A_1 = 2C^2T(1+E\left[\left|x\right|^2\right])+2C^2(1+E\left[\left|x\right|^2\right])$

Par recurence :

$$
E\left[\sup_{t<T}\left|X_t^{k+1}-X_t^{k}\right|^2\right] \leq \frac{(AT)^{n+1}}{(n+1)!}
$$

Ceci implique en particulier que $\left(X_t^k\right)$ est une suite de Cauchy. Donc $\left(X_t^k\right)$ converge vers une limite (X_t) qui est l'unique solution de (2.1)

■

2.3 Exemple de l'EDS :

Soiente α et β deux fonction continues,la solution unique forte de l'EDS

$$
\begin{cases}
dX_t = \alpha(t)X_tdt+\beta(t)X_tdB_t \\
X_0 = 2
\end{cases}
$$

est

$$X_t = \exp\left\{\int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds + \int_0^t \beta(s)dB_s + 2\right\}$$

Preuve. :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \alpha(t)dt + \beta(t)dB_t$$

On applique la formule d'Ito à la fonction $v(x) = \ln x$,

$$v'(x) = \frac{1}{x}, v"(x) = -\frac{1}{x^2}, d\langle X\rangle_t = \beta^2(t)X_t^2 dt$$

on pose : $x = X_t$

$$d(v(X_t)) = v'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}v"(X_t)d\langle X\rangle_t$$

$$\begin{aligned} d(\ln X_t) &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{\beta^2(t)X_t^2}{X_t^2}dt \\ &= \frac{\alpha(t)X_t dt + \beta(t)X_t dB_t}{X_t} - \frac{1}{2}\beta^2(t)dt \\ &= (\alpha(t) - \frac{1}{2}\beta^2(t))dt + \beta(t)dB_t \end{aligned}$$

par l'intégrale des deux cotés, on a :

$$\ln X_t = \int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds + \int_0^t \beta(s)dB_s + 2$$

Donc :

$$X_t = \exp\left\{\int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds + \int_0^t \beta(s)dB_s + 2\right\}$$

2.4 Stabilité de l'equation différentielle stochastique :

La stabilité de la solution d'une équation différentielle stochastique est d'une importance capitale dans l'étude des systèmes dynamiques. Elle permet d'évaluer la sensibilité de la solution aux perturbations aléatoires et de déterminer si le système converge ou diverge au fil du temps.(Voir [2] et [3])

2.4.1 Stabilité de la solution par rapport à la condition initiale :

La stabilité par rapport à la condition initiale d'une équation différentielle stochastique fait référence à la sensibilité de la solution de l'équation aux variations de la condition initiale. Si l'équation différentielle stochastique est stable par rapport à la condition initiale, cela signifie que de petites perturbations dans la condition initiale entraîneront de petites variations dans la solution à long terme.

Soit l'EDS suivant :

$$\begin{cases} dX_t^n = b(t, X_t^n) + \sigma(t, X_t^n) \\ X_0^n = x^n \end{cases}$$

Théorème 2.3.1 Notons X^n (resp. X) la solution de (2.1) correspondant au donnée initiale x_n(resp. x), et supposons que les fonctions b et σ satisfont les conditions (H_1) et (H_2), alors :

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\le T} |X_t^n - X_t|^2\right] = 0$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} |X_t^n - X_t|^2 &= \left| x_n - x + \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s))ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s))dB_s \right|^2 \\ &\le 3\,|x_n - x|^2 + 3\left| \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s))ds \right|^2 + 3\left| \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s))dB_s \right|^2 \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Schwartz et de BDG, on trouve :

$$E\left[\sup_{t\leq t}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3|x_n - x|^2 + 3TE\left[\int_0^t |(b(s,X_s^n) - b(s,X_s))|^2 ds\right]$$
$$+ 3C_2E\left[\int_0^t |(\sigma(s,X_s^n) - \sigma(s,X_s))|^2 ds\right]$$

D'aprés l'hypothése (H_1) on a :

$$E\left[\sup_{t\leq t}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3|x_n - x|^2 + 3(T+C_2)L^2\int_0^t E\left[|X_t^n - X_t|^2\right] ds$$
$$\leq 3|x_n - x|^2 + 3(T+C_2)L^2\int_0^t E\left[\sup_{s\leq t}|X_t^n - X_t|^2\right] ds$$

l'appliquation du lemme de Gronwall nous donne :

$$E\left[\sup_{t\leq t}|X_t^n - X_t|^2\right] \leq 3|x_n - x|^2 \exp(3(T+C_2)L^2t)$$

lorsque $n \to +\infty$ on a $x_n = x$.ceci implique que $\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\leq t}|X_t^n - X_t|^2\right] = 0$. ■

2.4.2 Stabilité de la solution par rapport aux coefficients :

Dans cette partie, nous examinerons la stabilité de l'EDS vis-à-vis des petites perturbations sur les coefficients b et σ. Supposons que nous ayons des suites de fonctions (b_n) et (σ_n), et considérons l'EDS correspondant :

$$\begin{cases} dX_t^n = b_n(t,X_t^n)dt + \sigma_n(t,X_t^n)dB_t \\ X_0^n = x \end{cases}$$

Théorème 2.3.2 Supposons b, b_n, σ et σ_n satisfont les conditions (H_1) et (H_2). De plus, supposons que pour tout $T > 0$ et tout ensemble compact K, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$i)$ $\sup_{t\leq T}(|b_n(t,x)| + |\sigma_n(t,x)|) \leq C(1+|x|)$

$ii)$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} \sup_{x\in K} |b_n(t,x) - b(t,x)| + \|\sigma_n(t,x) - \sigma(t,x)\| = 0$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2\right] = 0$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
|X_t^n - X_t|^2 &\leq 3\,|x-x|^2 + 3\left|(\int_0^t (b_n(s,X_s^n) - b(s,X_s))ds\right|^2 \\
&\quad + 3\left|(\int_0^t (\sigma_n(s,X_s^n) - \sigma(s,X_s))dB_s\right|^2 \\
&\leq 3\left|(\int_0^t (b_n(s,X_s^n) - b_n(s,X_s))ds\right|^2 + 3\left|(\int_0^t (b_n(s,X_s) - b(s,X_s))ds\right|^2 \\
&\quad + 3\left|(\int_0^t (\sigma_n(s,X_s^n) - \sigma_n(s,X_s))dB_s\right|^2 + 3\left|(\int_0^t (\sigma_n(s,X_s) - \sigma(s,X_s))dB_s\right|^{é}
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Schwartz et de BDG et la continuité de Lipschitz on trouve :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2\right] &\leq 3(T+C_2)L^2 \int_0^t E\left[\sup_{s\leq t} |X_s^n - X_s|^2\right] ds \\
&\quad + 3(T+C_2)E\int_0^t \left[|b_n(s,X_s) - b(s,X_s)|^2 + |\sigma_n(s,X_s) - \sigma(s,X_s)|^2\right] ds
\end{aligned}$$

L'application du lemme de Granwall nous donne :

$$E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n - X_t|^2\right] \leq K_n \exp(3(T+C_2)L^2T)$$

avec $K_n = 3(T+C_2)E\int_0^t \left[|b_n(s,X_s) - b(s,X_s)|^2 + |\sigma_n(s,X_s) - \sigma(s,X_s)|^2\right] ds$ ■

Donc la preuve est réalisée en utilisant les hypothèses (i) et (ii) pour démontrer que K_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Chapitre 3

Approximation des solutions des équations différenntielle stochastique par le schéma de Carathéodory :

Le schéma d'approximation de Carathéodory est défini comme une séquence de processus stochastiques générés par l'EDS retardé suivant :

$$\begin{cases} dX_t^n = b(x_{t-\frac{1}{n}}^n)dt + \sigma(x_{t-\frac{1}{n}}^n)dB_t & \forall t \in [0,T] \\ x^n(t) = x_0 \qquad \text{si } -\frac{1}{n} < t < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ sont des fonctions boréliennes bornées à valeurs réelles mesurables vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2).

Le schéma d'approximation de Carathéodory a pour objectif de se rapprocher de la solution d'un EDS en utilisant une suite d'approximations qui converge vers l'unique solution de l'équation différentielle stochastique. L'idée principale consiste à discrétiser l'EDS en divisant notre intervalle en sous-intervalles plus petits de taille $[0, \frac{1}{n}]$, puis à résoudre l'équation différentielle stochastique de manière plus précise dans chaque sous-intervalle

$[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}], [\frac{3}{n}, \frac{4}{n}]$...*etc* donc la définition de X^n sur l'intervalle $[0, \frac{1}{n}]$ est bien établie en tant que combinaison d'une intégrale de Lebesgue et d'une intégrale stochastique d'Itô. On peut continuer à définir X^n en effectuant une intégration stochastique itérée pas à pas de Lebesgue et d'Itô sur les intervalles successifs $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}], [\frac{3}{n}, \frac{4}{n}]$...*etc*

3.1 le schéma de Carathéodory pour les EDS lipschitz :

Afin de démontrer le résultat principal de cette section, nous nécessitons du lemme technique suivant.

Lemme 3.1.1 *Supposons que X_n soit défini selon l'équation (2.2) et que $0 < T < \infty$. Dans ce cas, les estimations suivantes sont vérifiées.*

1. $E[\sup_{-\frac{1}{n} \leq s \leq T} |X_s^n|^2] \leq C_1 e^{C_2 t}$
2. $E[|X_t^n - X_s^n|^2] \leq C_3 |t - s|$

Preuve. 1. On a :

$$X^n(t) = x_0 + \int_0^t b(s, X^n(s - \frac{1}{n}))ds + \int \sigma(s, X^n(s - \frac{1}{n}))dB_s$$

En utilisant l'inégalité $|a + b + c|^2 \leq 3|a|^2 + 3|b|^2 + 3|c|^2$ on a ■

$$\begin{aligned} |X^n(t)|^2 &= \left| x_0 + \int_0^t b(u, X^n(u - \frac{1}{n}))du + \int_0^t \sigma(u, X^n(u - \frac{1}{n}))dB_u \right|^2 \\ &\leq 3 \left| x_0 \right|^2 + 3 \left| \int_0^t b(u, X^n(u - \frac{1}{n}))du \right|^2 + 3 \left| \int_0^t \sigma(u, X^n(u - \frac{1}{n}))dB_u \right|^2 \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)|^2\right] \leq 3E\left|x_0\right|^2 + 3E\left[\sup\left|\int_0^t b(u, X^n(u-\frac{1}{n}))du\right|^2\right]$$
$$+ 3E\left[\sup\left|\int_0^t \sigma(u, X^n(u-\frac{1}{n}))dB_u\right|^2\right]$$

On utilise l'inégalité de Schwartz et BDG, on trouve

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)|^2\right] &\leq 3E\left|x_0\right|^2 + 3T\int_0^t E\left[\left|b(u, X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2 du\right] \\
&+ 3K_1\int_0^t E\left[\left|\sigma(u, X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2 du\right] \\
&\leq 3E\left|x_0\right|^2 + 3(T+K_1)\int_0^t E\left[\left|b(u, X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2 + \left|\sigma(u, X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2\right] du
\end{aligned}$$

D'aprés (H_2) :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)|^2\right] \leq 3E\left|x_0\right|^2 + 3(T+K_1)C^2\int_0^t \left(1 + E\left[\left|X^n(u-\frac{1}{n})\right|^2\right]\right) du$$

Donc

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)|^2\right] &\leq 3E\left|x_0\right|^2 + 3(T+K_1)C^2\int_0^t \left[1 + E\left(\sup_{u\leq t}\left|X^n(u-\frac{1}{n})\right|^2\right)\right] du \\
&\leq 3E\left|x_0\right|^2 + 3(T+K_1)TC^2\int_0^t E\left[\sup_{u\leq t}\left|X^n(u-\frac{1}{n})\right|^2\right] du \\
&\leq 3E\left|x_0\right|^2 + 3(T+K_1)TC^2\int_0^{t-\frac{1}{n}} E\left[\sup_{u\leq t}|X^n(u)|^2\right] du
\end{aligned}$$

L'application du lemme de Gronwall donne :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)|^2\right] \leq C_1\exp(C_2 t) \qquad\qquad 0<t<T$$

telle que C_1 et C_2 sont des constants.

2. supposons que $0 \leq s \leq t \leq t$

$$\begin{aligned}
E\left|X^n(t)-X^n(s)\right|^2 &= E\left[\left|\int_0^t b(X^n(u-\frac{1}{n}))du+\int_0^t \sigma(X^n(u-\frac{1}{n}))dB_u\right.\right.\\
&\left.\left.-\int_0^s b(X^n(u-\frac{1}{n}))du-\int_0^s \sigma(X^n(u-\frac{1}{n}))dB_u\right|^2\right]\\
&\leq 2E\left|\int_s^t b(X^n(u-\frac{1}{n}))du\right|^2+2E\left|\int_s^t \sigma(X^n(u-\frac{1}{n}))dB_u\right|^2
\end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Schwartz et de BDG, on a :

$$\begin{aligned}
E\left|X^n(t)-X^n(s)\right|^2 &\leq 2(t-s)\int_s^t E\left|b(X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2du+2K_1\int_s^t E\left[\sigma\left|(X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2\right]du\\
&\leq 2((t-s)+K_1)E\int_s^t\left[\left|b(X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2+\sigma\left|(X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2\right]du
\end{aligned}$$

D'aprés (H_2) :

$$\begin{aligned}
E\left|X^n(t)-X^n(s)\right|^2 &\leq 2((t-s)+K_1)C^2E\int_s^t\left[1+\left|X^n(u-\frac{1}{n})\right|^2\right]du\\
&\leq K_4\int_s^t\left[1+E\left|X^n(u-\frac{1}{n})\right|^2\right]du
\end{aligned}$$

Telle que $K_4 = 2((t-s)+K_1)C^2$

L'utilisation du 1er estimation nous donne :

$$E\left[|X^n(t)-X^n(s)|^2\right] \leq K_4(t-s)+K_4\int_s^t E\left[\left|X^n(u-\frac{1}{n})\right|^2\right]du$$

$$\begin{aligned}E\left[|X^n(t)-X^n(s)|^2\right] &\leq K_4(t-s)+K_4\int_s^t K_2\exp(K_3t)du\\ &\leq K_4(t-s)+K_4(K_2\exp(K_3t))(t-s)\end{aligned}$$

Alors il existe une constante C_3 telle que :

$$E\left[|X^n(t)-X^n(s)|^2\right] \leq C_3(t-s)$$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 3.1.1 Soient b et σ vérifiant les conditions (H_1) et (H_2), et soit (X_t^n) une suite définie par le schéma de Carathéodory (2.2) Alors la suite (X_t^n) converge uniformément dans L^2 vers la l'unique solution (X_t) de l'équation (2.1).

Preuve. Pour prouver la convergence de la suite (X_t^n) uniformément en L^2, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)-X(t)|^2\right]=0 \qquad n\geq 1, 0<t<\infty$$

Soit $m>n$

$$\begin{aligned}E\left[\sup_{t\leq T}|X^m(t)-X^n(t)|^2\right] &\leq 2E\left[\sup_{u\leq t}\left|\int_0^t\left(b(X^m(u-\frac{1}{m}))-b(X^n(u-\frac{1}{n}))\right)du\right|^2\right]\\ &+2E\left[\sup_{u\leq t}\left|\int_0^t\left(\sigma(X^m(u-\frac{1}{m}))-\sigma(X^n(u-\frac{1}{n}))\right)dB_u\right|^2\right]\end{aligned}$$

On applique l'inégalilté de Schwartz et de BDG :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X^m(t)-X^n(t)|^2\right] \leq 2TE\left[\int_0^t \left|b(X^m(u-\frac{1}{m}))-b(X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2 du\right]$$
$$+2K_1E\left[\int_0^t \left|\sigma(X^m(u-\frac{1}{m}))-\sigma(X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2 du\right]$$
$$\leq 2(T+K_1)E\int_0^t \left[\left|b(X^m(u-\frac{1}{m}))-b(X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2\right] du$$
$$+2(T+K_1)E\int_0^t \left[\left|\sigma(X^m(u-\frac{1}{m}))-\sigma(X^n(u-\frac{1}{n}))\right|^2\right] du$$

D'aprés H_1 :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X^m(t)-X^n(t)|^2\right] \leq 2(T+K_1)L^2\int_0^t E\left[\sup_{u\leq t}\left|X^m(u-\frac{1}{m})-X^n(u-\frac{1}{n})\right|^2\right] du$$
$$\leq 2(T+K_1)L^2\int_0^t E\left[\sup_{u\leq t}\left|X^m(u-\frac{1}{m})-X^n(u-\frac{1}{m})\right|^2\right] du$$
$$+2(T+K_1)L^2\int_0^t E\left[\sup_{u\leq t}\left|X^n(u-\frac{1}{m})-X^n(u-\frac{1}{n})\right|^2\right] du$$

On utilise la deuxiéme estimation, on a :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X^m(t)-X^n(t)|^2\right] \leq 2(T+K_1)L^2\int_0^t E\left[\sup_{u\leq t}\left|X^m(u-\frac{1}{m})-X^n(u-\frac{1}{m})\right|^2\right] du$$
$$+2(T+K_1)L^2\int_0^t C_3(u-\frac{1}{m}-u+\frac{1}{n})du$$
$$\leq 2(T+K_1)L^2\int_0^t E\left[\sup_{u\leq t}\left|X^m(u-\frac{1}{m})-X^n(u-\frac{1}{m})\right|^2\right] du$$
$$+2(T+K_1)L^2C_3(\frac{1}{n}-\frac{1}{m})T$$
$$\leq A\int_0^t E\left[\sup_{u\leq t}\left|X^m(u-\frac{1}{m})-X^n(u-\frac{1}{m})\right|^2\right] du+B(\frac{1}{n}-\frac{1}{m})$$

Telle que $A = 2(T + K_1)L^2$,$B = 2(T + K_1)L^2C_3T$

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\leq T}|X^m(t)-X^n(t)|^2\right] &\leq A\int_0^{t-\frac{1}{m}} E\left|X^m(u)-X^n(u)\right|^2 du + B(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}) \\
&\leq A\int_0^{t} E\left|X^m(u)-X^n(u)\right|^2 du + B(\frac{1}{n}-\frac{1}{m})
\end{aligned}
$$

On utilise le lemme de Gronwall pour obtenir :

$$
E\left[\sup_{t\leq T}|X^m(t)-X^n(t)|^2\right] \leq B(\frac{1}{n}-\frac{1}{m})\exp(At)
$$

Si $m \to +\infty$ alors

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)-X(t)|^2\right] &\leq B\frac{1}{n}\exp(At) \\
E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)-X(t)|^2\right] &\leq \frac{H}{n}
\end{aligned}
$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left[\sup_{t\leq T}|X^n(t)-X(t)|^2\right] = 0$ et on conclu que $X^n(t)$ la solution de (2.2) converge vers $X(t)$ l'unique solution de (2.1).Maintenant pour vérifier que la limite X est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (2.1), il est nécessaire de vérifier si X satisfait effectivement l'équation (2.1).

Soit $0 < t < T$ ona :

$$
\begin{aligned}
&E\left|\int_0^t\left[b(X^n(u-\frac{1}{n}))du - b(X(u))dB_u\right] + \int_0^t\left[\sigma(X^n(u-\frac{1}{n}))du - \sigma(X(u)\right])dB_u\right|^2 \\
&\leq 2(T+K_1)L^2\int_0^t E\left[\left|X^n(u-\frac{1}{n})-X(u)\right|^2\right]du
\end{aligned}
$$

$$\leq 2(T+K_1)L^2(\int_0^t E\left[\left|X^n(u-\frac{1}{n})-X(u)\right|^2\right]du+\int_0^t E\left[|X^n(u)-X(u)|^2\right]du)$$
$$\leq \frac{A}{n}$$

où A est une constante positive indépendante de n , On peut donc passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans L_2 dans (2.2) et obtenir $X(t)$ comme solution de (2.2).

3.2 Conclusion

Nous avons étudié l'approximation des équations différentielles stochastiques en utilisant le schéma numérique de Carathéodory. Pour ce faire, nous introduisons de petits retards dans l'équation d'origine. Les processus retardés sont calculés de manière récursive en effectuant une intégration stochastique successive sur de courts intervalles de temps. Nous avons démontré que, sous l'hypothèse de Lipschitz sur les coefficients, où $E\left|X^n(t) - X(t)\right|^2 \leq \frac{H}{n}$, la séquence de processus retardés converge fortement vers l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique.

Bibliographie

[1] Bell, D. R., & Mohammed, S. E. (1989). On the solution of stochastic ordinary differential equations via small delays. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 28(4), 293-299.

[2] Bahlali, K., Mezerdi, M. A., & Mezerdi, B. (2020). Stability of McKean–Vlasov stochastic differential equations and applications. Stochastics and Dynamics, 20(01), 2050007.

[3] Bahlali, K., Mezerdi, B., Ouknine, Y. (1998). Pathwise uniqueness and approximation of solutions of stochastic differential equations. In : S eminaire de Probabilit es XXXII. Berlin : Springer, pp. 166–187.

[4] Coddington, E. A., Levinson, N. (1955). Theory of Ordinary Differential Equations. NewYork - Toronto - London : Tata McGraw-Hill Education.

[5] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[6] Labed, B. (2021-2022). Cours de Mouvement Brownien et calcul stochastique.Université de Biskra.

[7] Mezerdi, M. A. (2021). On the convergence of carathéodory numerical scheme for Mckean-Vlasov equations. Stochastic Analysis and Applications, 39(5), 804-818.

[8] Mao, W., Hu, L., & Mao, X. (2018). Approximate solutions for a class of doubly perturbed stochastic differential equations. Advances in Difference Equations, 2018, 1-17.

[9] Mao, X. (1991). Approximate solutions for a class of stochastic evolution equations with variable delays. Numerical functional analysis and optimization, 12(5-6), 525-533.

[10] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differntial Equations and Diffusions Processes. 2nd edn. (North- Holland Publishing Company, 1989).

[11] Oksendal, B. (2000). Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications. 5th edition. Springer-Verlag.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'approximation des solutions des équations différentielles stochastiques par le schéma de Carathéodory, d'abord nous avons fait un rappel sur la notion de calcul stochastique, après nous avons étudié les questions d'existence et d'unicité de la solution forte de l'EDS et la stabilité de cette solution par rapport à la condition initiale et aux coefficients dans le cas de Lipschitz, et enfin nous avons traité le point de convergence du schéma de Carathéodory.

Mots-clés : Equations différentielles stochastiques, Existence et unicité, Stabilité, Carathéodory.

Abstract:

In this memory, we studied the approximation of the solutions of the stochastic differential equations by Carathéodory numerical scheme, firstly we gave a reminder on the notion of stochastic calculation, after that we studied the questions of existence and uniqueness of the strong solution of the SDE and the stability of this solution with respect to the initial condition and the coefficients in the Lipschitz case, and finally we treated the point of convergence of the Caratheodory scheme.

Key-words: Stochastic differential equations, SDE, Existence and uniqueness, Stability, Caratheodory.

الملخص:

في هذه المذكرة، درسنا تقريب حلول المعادلات التفاضلية العشوائية بطريقة التأخير، أولا قدمنا تذكيرا على حساب التكامل والتفاضل العشوائي وثانيا برهنا وجود ووحدانية الحل القوي للمعادلات التفاضلية العشوائية واستقرار هذا الحل من خلال الشرط الأولي والمعاملات و أخيرا برهنا الحل التقريبي بتأخير.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية، الوجود والتفرد، الاستقرار، التأخير.