

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

NOUI Nesrine

Titre :

**Analyse de la qualité de certains estimateurs paramétrique**

Membres du Comité d'Examen :

Pr. SAYAH Abdallah	UMKB	Président
Pr. CHERFAOUI Mouloud	UMKB	Encadreur
Dr. SOLTANE Louiza	UMKB	Examinatrice

Juin 2023

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

À ma chère mère, la bougie de ma vie,

À mon cher père qui a tant sacrifié pour mon éducation,

À mes sœurs et frères, mon bras droit dans ma vie,

Allah vous protège tous.

## REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la force et la volonté pour terminer ce travail.

Un grand merci pour mon encadreur Pr. CHERFAOUI Mouloud pour les orientations scientifiques précises et ces conseils précieux.

Mes profonds remerciements vont aux membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Je remercie également tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Enfin, je remercie toute personne contribué, de près ou de loin, à la finalisation de ce travail.

# Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Table des figures	vi
Liste des tables	vii
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à la théorie d'estimation paramétrique</b>	<b>3</b>
Introduction . . . . .	3
1.1 Quelques définitions . . . . .	3
1.2 Estimation paramétrique et estimateur . . . . .	5
1.2.1 Méthode des moments . . . . .	5
1.2.2 Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	7
1.3 Propriétés d'un estimateur . . . . .	12
1.3.1 Le biais d'un estimateur . . . . .	12
1.3.2 Estimateur convergent . . . . .	14
1.3.3 Choix d'un estimateur . . . . .	17

1.4	Statistique exhaustive . . . . .	19
1.4.1	Théorème de factorisation . . . . .	21
1.4.2	Théorème de Darmois . . . . .	22
1.5	Estimateur efficace . . . . .	24
1.5.1	Information de Fisher . . . . .	24
1.5.2	Estimateur sans biais de variance minimale . . . . .	26
1.5.3	Inégalité de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao(FDCR) . . . . .	26
1.5.4	Théorème sur l'efficacité . . . . .	27
	Conclusion . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Système d'attente markovien avec feedback dépendant</b>	<b>29</b>
	Introduction . . . . .	29
2.1	Notion de file d'attente . . . . .	29
2.2	Notation de Kendall-Lee . . . . .	30
2.3	Mesures de performance d'une file d'attente . . . . .	33
2.4	File d'attente $M/M/1$ avec feedback dépendant . . . . .	35
2.4.1	Description du modèle . . . . .	35
2.4.2	Probabilité d'état du système . . . . .	36
2.5	Exemples d'application . . . . .	38
2.5.1	Exemple 01 : Cas feedback constante ( $\beta_n = \beta$ ) . . . . .	38
2.5.2	Exemple 02 : Cas $\beta_n = \frac{n}{n+1}$ . . . . .	39
	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Estimation des caractéristiques du système</b>	<b>42</b>
	Introduction . . . . .	42

3.1	Présentation de l'application . . . . .	42
3.2	Biais, variance et MSE des estimations . . . . .	45
3.3	Distribution des estimations . . . . .	51
	Conclusion . . . . .	54
	<b>Conclusion générale</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

# Table des figures

2.1	Représentation d'une file d'attente simple. . . . .	30
2.2	Representation d'une file d'attente $M/M/1$ avec Bernoulli feedback. . . . .	36
3.1	Code de source du simulateur implémenté sous MATLAB. . . . .	46
3.2	Variance et MSE de l'estimateur de $\rho$ en fonction de $T_{max}$ et $\rho$ . . . . .	48
3.3	Variance et MSE de l'estimateur de $E(\beta_n)$ en fonction de $T_{max}$ et $\rho$ . . . . .	48
3.4	Variance et MSE de l'estimateur de $\pi_0$ en fonction de $T_{max}$ et $\rho$ . . . . .	48
3.5	Variance et MSE de l'estimateur de $L_s$ en fonction de $T_{max}$ et $\rho$ . . . . .	48
3.6	Distribution de l'estimateur de $\rho$ en fonction $T_{max}$ et $\rho$ . . . . .	51
3.7	Distribution de l'estimateur de $E(\beta_n)$ en fonction $T_{max}$ et $\rho$ . . . . .	52
3.8	Distribution de l'estimateur de $\pi_0$ en fonction $T_{max}$ et $\rho$ . . . . .	52
3.9	Distribution de l'estimateur de $L_s$ en fonction $T_{max}$ et $\rho$ . . . . .	53

# Liste des tableaux

3.1	Caractéristiques exactes du système . . . . .	45
3.2	Estimations des paramètres de départ du système . . . . .	47
3.3	Estimations des caractéristiques du système . . . . .	47



# Introduction générale

Les modèles de file d'attente ont une grande importance sur le plan pratique, notamment pour prédire la qualité de service que les utilisateurs recevront ou le dimensionnement des ressources pour fournir un niveau de service approprié dans de nombreux domaines : télécommunications, transport, logistique, ou même les services d'urgence, les finances et les assurances.

Dans l'analyse probabiliste d'un modèle de file d'attente, c'est-à-dire lors de l'évaluation théorique de ses mesures de performance, on suppose souvent que les paramètres de départ de ce modèle sont fixes et exactes. Cependant, dans la pratique, les valeurs de ces paramètres ne sont disponibles que sous la forme d'un échantillon de données. En ce sens, pour évaluer les performances du système considéré, l'utilisation de techniques d'estimation statistiques (paramétriques et/ou non paramétriques), qui visent à fournir une approximation des valeurs (inconnues) des paramètres en exploitant les informations fournies par l'échantillon, est inévitable.

Dans ce mémoire, nous considérons le système de file d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback dépendant. Où, nous supposons que les paramètres de départ (taux d'arrivée  $\lambda$ , taux de service  $\mu$ , la probabilité de feedback  $1 - \beta_n$ , avec  $n$  est le nombre de clients dans le système) décrivant ce système ne sont quantifiés qu'à partir d'un échantillon d'observations. Dans une telle situation, il est clair que la substitution de ces paramètres de départ par leurs estimateurs dans les expressions des mesures de

performance (principe de plug-in) du système ne nous fournis que des estimations de ces dernières. Notre objectif de la présente étude est d'analyser la qualité des estimations des mesures de performance du système en question. Il est à souligner que pour l'échantillonnage nous avons fait recours à l'approche simulation à événements discrets.

Pour atteindre notre objectif, nous avons organisé le présent document comme suit :

- Dans Chapitre 1, nous rappelons quelques notions sur la théorie de l'estimation statistique qui seront utilisés dans notre l'étude.
- Dans Chapitre 2, nous présentons d'abord une brève introduction sur la théorie des files d'attente (notations, classification,...). Après cela, nous décrivons le système de file d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback dépendant et ses principaux mesures de performance.
- Avant de conclure, nous allons présenter dans le chapitre 3 l'application numérique (simulation) réalisée ainsi que la discussion des résultats numériques et graphiques obtenus.

Enfin, le présent document est complété et enrichi par une liste bibliographique.

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie d'estimation paramétrique

### Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire dans un premier lieu quelques définitions liées à la théorie d'estimation paramétrique. Par la suite, les critères de mesure de la qualité d'un estimateur seront abordés.

### 1.1 Quelques définitions

Dans cette section nous allons présenter quelques définitions qui nous permettront de comprendre le langage de la théorie d'estimation en générale et l'estimation paramétrique en particulier.

**Définition 1.1.1** (*Variable aléatoire*) Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire  $X$  toute fonction mesurable définie sur  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  et on note :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Remarque 1.1.1** *On peut distinguer dans la littérature et la pratique deux types de variables aléatoires à savoir des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires continues.*

**Définition 1.1.2** *(Echantillon) Soit  $X$  une variable aléatoire sur un référentiel  $\Omega$ . Un échantillon de  $X$  de taille  $n$  est un  $n$ -uplet  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de variables aléatoires et identiquement distribuées de même loi que  $X$ . La loi de  $X$  sera appelée loi mère. Une réalisation de cet échantillon est un  $n$ -uplet de réels  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .*

**Définition 1.1.3** *Un modèle statistique est une description mathématique approximative du mécanisme qui a généré les observations, que l'on suppose être un processus stochastique et non un processus déterministe. Il s'exprime généralement à l'aide d'une famille de distributions (ensemble de distributions) et d'hypothèses sur les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ . Chaque membre de la famille est une approximation possible de  $F$  : l'inférence consiste donc à déterminer le membre qui s'accorde le mieux avec les données.*

**Définition 1.1.4** *(Modèle paramétrique) Un modèle paramétrique est un modèle où l'on suppose le type de loi de  $X$  est connu, mais qu'il dépend d'un paramètre inconnu, de dimension  $n$ .*

**Exemple 1.1.1** *Les modèles suivants Sont des modèles paramétriques.*

1. *Le modèle gaussien  $\{N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ .*
2. *Le modèle exponentiel  $\{\varepsilon(\lambda), \lambda > 0\}$ .*

## 1.2 Estimation paramétrique et estimateur

L'approche paramétrique suppose que les données sont issues d'une loi de probabilité de forme connue dont seul le paramètre  $\theta$  est inconnu. L'objectif est de connaître une approximation de ce paramètre. Cette "approximation" est appelée désormais, dans le langage statistique, l'estimateur du paramètre inconnu.

Il existe de nombreuses méthodes pour estimer un paramètre  $\theta$ . Dans cette section, nous ne nous intéressons qu'aux deux méthodes d'estimation les plus usuelles, la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance. Mais il faut d'abord définir précisément ce que est un estimateur.

**Définition 1.2.1** (*Statistique et Estimateur*) Une statistique  $T(X)$  est une fonction mesurable de l'objet aléatoire  $X$  et éventuellement de paramètres connus, mais qui ne dépend pas de  $\theta$ . Un estimateur de  $\theta$  est une statistique  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$  destinée à approcher  $\theta$ .

### 1.2.1 Méthode des moments

Comme son nom l'indique, cette technique se base sur les moments, pour cela il est important de rappeler la définition des moments qui sont répartie en deux familles : moments théoriques et moments empiriques.

**Définition 1.2.2** (*Les moments théoriques*)

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f(x, \theta)$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ . Le moment théorique d'ordre  $r$  se calcule comme suit

$$\mu_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x, \theta) dx. \quad (1.1)$$

**Définition 1.2.3** (*Les moments empiriques*)

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon issu de la variable aléatoire  $X$  ayant une densité

$f(x, \theta)$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$ . Le moment empirique de d'ordre  $r$  de la v.a.  $X$  se calcule comme suit

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r. \quad (1.2)$$

Si le paramètre à estimer est l'espérance de la loi des  $X_i$ , alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon. Autrement dit, si  $\theta = E[X]$ , alors l'estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments (*EMM*) est

$$\hat{\theta} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Plus généralement, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , si  $E[X] = \varphi(\theta)$ , où  $\varphi$  est une fonction inversible, alors l'estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments est

$$\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\bar{X}_n)$$

Enfin, l'idée la plus générale de la méthode, pour  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ , consiste à estimer les paramètres recherchés en égalisant entre les moments théoriques (qui dépendent de ces paramètres inconnus) et les moments empiriques. L'égalisation se justifie par la loi des grands nombres qui implique que l'on peut "approcher" une espérance mathématique par une moyenne empirique. On est donc amené à résoudre un système d'équations, pour cela il faut alors prendre garde à pouvoir identifier tous les paramètres c'est-à-dire que le nombre d'équation dans le système doit être égale aux nombres de paramètres à estimer.

La quantification des moments empiriques sert à estimer un ou plusieurs paramètres de la loi d'intérêt. En effet, estimer  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ , consiste à résoudre le système d'équations.

$$\mu_r = m_r, \quad r = 1, 2, \dots, d. \quad (1.3)$$

Pour mettre au claire la présente technique ci-dessus soit deux exemples.

**Exemple 1.2.1 Loi exponentielle :** Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et de même loi exponentielle  $\exp(\lambda)$  dont la moyenne théorique est  $E[X] = \lambda$ . Donc l'estimateur de  $\lambda$  par la méthode des moments est

$$\hat{\lambda} = \bar{X}_n$$

**Loi Normale :** Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et de même loi normale  $N(m, \sigma^2)$ , c'est-à-dire  $E[X] = m$  et  $\text{Var}[X] = \sigma^2$ , donc les estimateurs de  $m$  et  $\sigma^2$  par la méthode des moments sont consiste à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E(X) &= m \\ E(X^2) &= \sigma^2 + m^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &= m \\ \bar{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sigma^2 + m^2 \end{cases}$$

La résolution de ce dernier système nous fournis les estimations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{m} &= \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \bar{X^2} - \hat{m}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

## 1.2.2 Méthode du maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance est une méthode statistique d'estimation est couramment utilisée pour inférer les paramètres de la distribution de probabilité d'un échantillon donné, elle a été développée entre 1912 et 1922 par le statisticien *Ronald Fisher*.

Selon le maximum de vraisemblance, les meilleurs estimés des paramètres d'un modèle sont ceux qui maximisent la probabilité des valeurs observées de la variable.

Cette méthode peut être appliquée peu importe la forme mathématique du modèle, ce qui permet de choisir les modèles les plus compatibles avec notre compréhension des processus naturels, sans être limités par les modèles déjà implémentés dans des logiciels statistiques. Pour mieux comprendre la méthode sois les deux définitions suivantes.

**Définition 1.2.4** (*fonction de vraisemblance*) Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la réalisation de l'échantillon théorique  $X_1, X_2, \dots, X_n$  issu de la variable aléatoire  $X$  qui admet  $f(x, \theta)$  comme densité de probabilité.

On appelle la vraisemblance notée  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$  la fonction de la variable  $\theta$  définie comme suit :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), & \text{Si } X \text{ est variable continue;} \\ \prod_{i=1}^n P_\theta(X = x_i), & \text{Si } X \text{ est variable discrète.} \end{cases} \quad (1.4)$$

**Définition 1.2.5** (*Estimateur du Maximum de Vraisemblance*) On appelle estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ , tout élément  $\hat{\theta}$  de  $\Theta$  maximisant la fonction vraisemblance, c'est-à-dire

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta). \quad (1.5)$$

La recherche de l'EMV peut se faire, sous certaines conditions, d'une manière directe et cela par la recherche de l'extremum maximale de  $L$ , c'est-à-dire quand la fonction  $L$  est deux fois dérivable par rapport à  $\theta$ , il suffit de vérifier les points suivants :

$$\begin{cases} 1) \frac{\partial L}{\partial \theta}(x_1, \dots, x_n, \theta) = 0, & \text{la solution de cette équation fournit } \hat{\theta}. \\ 2) \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}(x_1, \dots, x_n, \theta) < 0, & \text{pour assurer que } \hat{\theta} \text{ est un extremum maximal.} \end{cases} \quad (1.6)$$



Par définition la vraisemblance se calcule à partir d'un produit de  $n$  éléments, ainsi, pour des raisons calculatoire on préfère remplacer le problème définie dans (1.6) par un problème équivalent moins complexe. Puisque, la fonction logarithme Népérien ( $\ln$ ) est strictement croissante et  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  et  $\ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  atteignent leurs maximums pour la même valeur de  $\theta$ , il serait souvent plus aisé de résoudre le système d'équations équivalent suivant :

$$\begin{cases} 1) \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0, \\ 2) \frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta^2} < 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

plutôt que le système (1.6).

**Remarque 1.2.1** *Il est à noter que dans le cas où  $\theta$  est un paramètre de dimension  $d$  (c'est-à-dire  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ ),*

1. *on résout un système de  $d$  équations dont ces dernières sont obtenues en dérivant  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  par rapport à chacune des composantes de  $\theta$ .*
2. *pour assurée que la solution du système d'équations  $\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0$  est un extremum maximale il faut vérifier que la matrice  $\frac{\partial^2 L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta^2}$  est définie négative.*

**Exemple 1.2.2 Loi Exponentielle** *Soit  $X$  une v.a de densité exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . On note  $X \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda)$  dont la densité est :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), & \text{si } x > 0 \\ 0. & \text{sinon} \end{cases}$$

*Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un  $n$ -échantillon ( $n$ -réalisations) issue d'une v. a de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  inconnue. Pour estimer  $\lambda$  par la méthode EMV,*

construisant d'abord sa fonction de vraisemblance.

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) &= \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x_i}{\lambda}\right) \\ &= \lambda^{-n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Pour faciliter les calculs, il est préférable d'utiliser  $\ln L$  plutôt que  $L$ , dans ce cas, on a :

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = -n \ln(\lambda) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda}.$$

Calculons la dérivée première par rapport à  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{-n}{\lambda} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2} = 0, \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}, \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}. \end{aligned}$$

Pour assurer que le point obtenu est un extremum maximal, calculons la dérivée seconde par rapport à  $\lambda$  :

$$\left. \frac{\partial^2 \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\bar{X}} = \frac{n}{\lambda^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^3} \Big|_{\lambda=\bar{X}}.$$

On constate que

$$\left. \frac{\partial^2 \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\bar{X}} = \frac{-n}{\bar{X}^2} < 0.$$

Par conséquent  $\hat{\lambda}$  est un extremum maximal, dont l'expression est :

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

**Loi normale** *Supposons que les observations  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soit indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale de moyenne  $\theta$  inconnue et de variance  $\sigma^2$  connue.*

*La vraisemblance du modèle est définie par*

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right). \quad (1.8)$$

*La fonction log-vraisemblance est*

$$\log L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = -n \log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2. \quad (1.9)$$

*L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  est donné par*

$$\frac{\partial \log L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \iff \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = 0 \implies \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

*et*

$$\frac{\partial^2 \log L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\sigma^2} < 0.$$

*Alors, l'estimateur du maximum de vraisemblance est donnée par :*

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

## 1.3 Propriétés d'un estimateur

### 1.3.1 Le biais d'un estimateur

Soit  $T_n$  désigne l'estimateur du paramètre  $\theta$  et soulignons que tout estimateur  $T_n$  peut donner lieu à l'écriture suivante :

$$E(T_n) = \theta + B(n, \theta),$$

où  $B(n, \theta)$  est appelé le biais de  $T_n$ .

Ainsi, selon la fonction  $B(n, \theta)$  on peut distinguer trois types d'estimateurs. Ci-dessus les trois situations possibles illustrées par des exemples d'applications.

**Définition 1.3.1** (*Estimateur sans biais*) On dit que  $T_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$  si et seulement si :

$$B(n, \theta) = 0,$$

*c'est-à-dire*

$$E(T_n) = \theta.$$

**Exemple 1.3.1** Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon *i.i.d.* issu de la variable aléatoire  $X$  dont  $E(X) = m$ . L'estimateur empirique  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  de  $m$  est un estimateur sans biais. En effet, on a

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} n m = m.$$

**Définition 1.3.2** (*Estimateur avec biais*) On dit que  $T_n$  est un estimateur avec biais ou biaisé de  $\theta$  si et seulement si :

$$B(n, \theta) = E(T_n - \theta) = E(T_n) - \theta \neq 0,$$

*c'est-à-dire*

$$E(T_n) \neq \theta.$$

**Exemple 1.3.2** Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$  échantillon, l'estimateur empirique  $S^2$  est un estimateur biaisé de  $\sigma^2$  et ceci le fait que

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - E(\bar{X}^2) \\ &= E(x_i^2) - E(\bar{x}^2) = (V(X) + E^2(X) - (V(\bar{X}) + E^2(\bar{X}))) \\ &= \sigma^2 + m^2 - \frac{\sigma^2}{n} - m^2 \\ &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2 \end{aligned}$$

**Définition 1.3.3** (*Estimateur asymptotiquement sans biais*) On dit que l'estimateur biaisé  $T_n$  de  $\theta$  est un estimateur asymptotiquement sans biais si et seulement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, \theta) = 0,$$

*c'est-à-dire*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) = \theta.$$

**Exemple 1.3.3** Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon *i.i.d.* issu de la variable aléatoire  $X$  dont  $E(X) = m$ . L'estimateur empirique  $S^2$  de  $\sigma^2 < \infty$  est un estimateur sans biais. En effet, d'après l'exemple 1.3.2, on a

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2. \quad (1.10)$$

D'après cette dernière équation, il est clair que l'estimateur  $S^2$  est un estimateur avec biais mais asymptotiquement il est sans biais, car :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

### 1.3.2 Estimateur convergent

Dans cette section nous allons introduire quelques types de convergence d'une suite de variables aléatoires qui peuvent être adoptés à l'étude de convergence d'un estimateur  $T_n$  qui est lui aussi vu comme une suite de variables aléatoires.

Pour cela, considérant dans tout au long de cette section  $X_n$  une suite de *v.a.*

#### La convergence en loi

On note  $F_n$  et  $F$  les fonctions de répartition de  $X_n$  et  $X$  respectivement. on dit que  $X_n$  converge en loi vers  $X$  et on note :

$$X_n \xrightarrow{l} X,$$

si la suivante limite a lieu :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = F(X).$$

## La convergence en probabilité

On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow{p} X$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0,$$

Ou encore,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$$

Ainsi, on dit que  $T_n$  est un estimateur convergent de  $\theta$  si  $T_n$  tend vers  $\theta$  en probabilité quand  $n$  tend vers  $\infty$  c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| > \varepsilon) = 0,$$

et on note

$$T_n \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p} \theta.$$

## La convergence presque sûre

On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{p.s} X$  si :

$$P\left(\forall \omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P\left(\forall \omega : \left| \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) - X(\omega) \right| = 0\right) = 1,$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty,$$

c'est-à-dire la série converge.

**Remarque 1.3.1** *On parle d'estimateur fortement convergent lorsqu'on a convergence presque sûre de cet estimateur.*

**Proposition 1.3.1** *soit  $T_n$  un estimateur convergent du paramètre  $\theta$ , et soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue au point  $\theta$ . Alors  $\varphi(T_n)$  est un estimateur convergent de  $\varphi(\theta)$ .*

## La convergence en EMQ

Introduisant d'abord la définition suivante :

**Définition 1.3.4** (*Erreur Quadratique Moyenne : EQM*) *On appelle erreur quadratique moyenne d'un estimateur  $T_n$  par rapport à  $\theta$  la quantité :*

$$\begin{aligned} EQM(T_n, \theta) &= E[(T_n - \theta)^2] \\ &= V(T_n) + [B(n, \theta)]^2. \end{aligned}$$

avec  $V(T_n)$  est la variance de l'estimateur tandis que  $B(n, \theta)$  est son biais.

On dit que l'estimateur  $T_n$  en moyenne quadratique si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(T_n, \theta) = 0.$$

**Proposition 1.3.2** *Si un estimateur est sans biais ou asymptotiquement sans biais et si sa variance tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, alors il est convergent en EQM.*

**Exemple 1.3.4** *L'estimateur  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  est un estimateur convergent de  $m = E(X)$  en EQM, car :*

1.  $\bar{X}$  est un estimateur sans biais de  $m$ , (voir l'exemple 1.3.1),



$$2. V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

### 1.3.3 Choix d'un estimateur

Lors de l'estimation d'un paramètre il est possible qu'on ait à notre disposition plus d'un estimateur. Dans ce cas, il est de toute évidence de choisir le meilleur d'entre eux. Les deux définitions suivantes nous fournissent un premier aperçu sur sélection d'un estimateur.

**Définition 1.3.5** Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux estimateurs sans biais de  $\theta$ , on dit que  $T_1$  est plus efficace que  $T_2$  s'il est préférable au sens de la variance c'est-à-dire

$$V(T_1) \leq V(T_2).$$

**Définition 1.3.6** Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux estimateurs de  $\theta$ , on dit que  $T_1$  est meilleur (plus performant) que  $T_2$  au sens de l'EQM, si la variance c'est-à-dire

$$EQM(T_1) \leq EQM(T_2).$$

**Exemple 1.3.5** Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$  échantillon *i.i.d* et

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$
$$T_2 = \bar{X} + \frac{X_1 - X_2}{2}$$

deux estimateurs de  $m = E(X)$ .

On a pour  $T_1$ ,

$$\begin{aligned}
 E(T_1) &= E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}E(X_1 + X_2) \\
 &= \frac{1}{2}(E(X_1) + E(X_2)) = E(X_1) \\
 &= m
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

et

$$\begin{aligned}
 V(T_1) &= V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{4}(V(X_1) + V(X_2)) = \frac{1}{4}2V(X_1) \\
 &= \frac{\sigma^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Et pour  $T_2$  on a :

$$\begin{aligned}
 E(T_2) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i + \frac{X_1 - X_2}{2}\right) = E(\bar{X}) + \frac{1}{2}(E(X_1) - E(X_2)) \\
 &= E(\bar{X}) \\
 &= m \text{ (voir exemple 1.3.1),}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

et

$$\begin{aligned}
 V(T_2) &= V\left(\bar{X} + \frac{X_1 - X_2}{2}\right) \\
 &= V(\bar{X}) + \frac{1}{4}(V(X_1) + V(X_2)) \\
 &= V(\bar{X}) + \frac{1}{4}2V(X_1) \\
 &= \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (\text{voir exemple 1.3.2}) \\
 &= \left(\frac{2+n}{2n}\right)\sigma^2.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

On a d'une part, d'après (2.2) et (2.4) on remarque que les deux estimateurs  $T_1$  et  $T_2$  sont des estimateur sans biais de  $m$ . D'autre part, d'après (2.3) et (2.5) on  $V(T_1) \leq V(T_2)$ ,. Ainsi, on conclut que l'estimateur  $T_1$  est plus efficace que l'estimateur  $T_2$ .

## 1.4 Statistique exhaustive

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon d'une variable aléatoire  $X$ . On notera  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$  la densité de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  si  $X$  est une variable absolument continue, et la probabilité conjointe  $P(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n)$  si  $X$  est une variable discrète.

La fonction  $L(x; \theta)$ , considéré comme fonction de  $\theta$  seul, est appelé "vraisemblance" de  $\theta$ .

Soit également,  $T$  une statistique en fonction de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de loi  $g(t; \theta)$ .

**Définition 1.4.1** *La statistique  $T$  sera dite exhaustive, si l'on a  $L(x, \theta) = g(t, \theta)h(x)$ . En d'autres termes si la densité conditionnelle de l'échantillon est indépendante du paramètre  $\theta$ .*

$$P(X = x/T = t) \text{ ne dépend pas de } \theta.$$

La définition ci-dessous signifie qu'une fois  $T$  est connu, aucune valeur de l'échantillon

ni aucune autre statistique ne nous apportera de renseignements supplémentaire sur  $\theta$  :

**Exemple 1.4.1** Soit  $X$  une v.a qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\theta$ , soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une réalisation d'un  $n$ -échantillon iid, et soit la statistique

$$T = \sum_{i=1}^n X_i.$$

On montre que la statistique  $T$  est une statistique exhaustive pour  $\theta$ .

On a :

$$P(X_1, \dots, X_n / T = t) = \frac{P(X_1, \dots, X_n, T = t)}{P(T = t)}$$

La statistique  $T$  suit une loi de Poisson de paramètre  $n\theta$ , alors

$$P(T = t) = \frac{\exp(-n\theta) (n\theta)^t}{t!},$$

et

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n, T = t) &= P\left(x_1, \dots, x_{n-1}, T - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left( \frac{\exp(-\theta) (\theta)^{x_i}}{(x_i)!} \right) \frac{\exp(-\theta) (\theta)^{T - \sum_{i=1}^{n-1} x_i}}{(T - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)!} \\ &= \frac{\exp(-n\theta) (\theta)^t}{(x_1)! (x_2)! (x_{n-1})! (T - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)!} \end{aligned}$$

d'où

$$P(x_1, \dots, x_n / T = t) = \frac{t!}{(x_1)! (x_2)! (x_{n-1})! (T - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)!}.$$

La probabilité conditionnelle ne dépend pas de  $\theta$ , donc  $T$  est bien une statistique exhaustive pour  $\theta$ .

Dans l'exemple ci-dessus, on a vu que le calcul de la probabilité conditionnelle est loin d'être immédiat. Le théorème 1.4.1 va nous simplifier la tâche.

### 1.4.1 Théorème de factorisation

Soit un  $n$ -échantillon d'une variable aléatoire  $X$ . On note  $L(x, \theta)$  la densité jointe de  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , elle est appelée fonction de vraisemblance de  $\theta \in \Theta$  (ouvert de  $\mathbb{R}^d, d \geq 1$ ).

**Théorème 1.4.1** (*Théorème de factorisation*) *La statistique  $T(X)$  est une statistique exhaustive pour  $\theta$  si et seulement s'il existe deux fonctions mesurables  $g$  et  $h$  à valeurs positives dans  $\mathbb{R}_+$  telle que la densité jointe se met sous la forme :*

$$L(x, \theta) = h(x) \times g(T(x), \theta), \theta \in \Theta; x \in \mathbb{R}^n,$$

où

$$L(x, \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), & \text{si } X \text{ est absolument continue;} \\ \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta), & \text{si } X \text{ est discrète.} \end{cases}$$

avec  $\theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}^n, g(T(x), \theta)$  est la densité de la statistique  $T$  et  $h(x)$  ne dépend pas de  $\theta$ .

**Exemple 1.4.2** *Soit  $X \rightsquigarrow U[0, \theta], \theta > 0$ , et  $X = (x_1, \dots, x_n)$  un échantillon,*

$$T = \sup_{1 \leq i \leq n} x_i.$$

D'après le théorème de factorisation, la statistique  $T$  est exhaustive car :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{si } 0 \leq x \leq \theta; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$L(X, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n}.$$

La fonction de répartition de  $T$  :

$$G(t, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0; \\ \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq t \leq \theta; \\ 1, & \text{si } t \geq \theta. \end{cases}$$

Par conséquent, la densité de  $T$  est donnée par :

$$g(t, \theta) = \begin{cases} n \frac{1}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}, & \text{si } 0 \leq x \leq \theta; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que

$$h(x) = \frac{L(X, \theta)}{g(t, \theta)} = \frac{1}{nt^{n-1}} \quad 0 \leq x \leq \theta$$

ne dépend pas de  $\theta$ .

**Remarque 1.4.1** Le principe de factorisation nous donne un moyen de reconnaître si une statistique est exhaustive, mais ne permet pas de la construire ou même de savoir s'il en existe une.

## 1.4.2 Théorème de Darmais

Soit  $X$  une v.a. dont le domaine de définition ne dépend pas de  $\theta$ . Le théorème de Darmais stipule que une condition nécessaire et suffisante pour que l'échantillon

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  admette une statistique exhaustive est que la densité  $f(x, \theta)$  de la variable aléatoire  $X$  appartienne à une famille exponentielle.

La définition suivante nous mis au claire la notion "loi de famille exponentielle".

**Définition 1.4.2** *On appelle famille exponentielle à paramètre  $\theta$  toute loi de probabilité (discrète ou continue) dont la vraisemblance peut se mettre sous la forme :*

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \exp[\alpha(\theta)\beta(x) + \gamma(\theta) + \delta(x)] & \text{si } x \in \chi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\alpha$  est une fonction deux fois différentiables à valeurs dans  $\mathbb{R}^d, d \geq 1$ .
- $\beta$  est une fonction mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}^d, d \geq 1$ .
- $\gamma$  est une fonction réelle deux fois différentiables et ne dépend pas de  $x$ .
- $\delta$  est une fonction borélienne ne dépend pas de  $\theta$ .

**Exemple 1.4.3** *Soit  $X$  v.a suit une loi  $\gamma$  de paramètre  $\theta$  inconnu alors :*

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{1}{\Gamma(\theta)} \exp(-x) x^{\theta-1} \\ &= \exp \left[ \ln \left( \frac{1}{\Gamma(\theta)} \exp(-x) x^{\theta-1} \right) \right] \\ &= \exp [-\ln \Gamma(\theta) - x + (\theta - 1) \ln(x)] \end{aligned}$$

tel que  $\Gamma(\theta)$  est la fonction gamma définie par

$$\Gamma(\theta) = \int_0^{\infty} x^{\theta-1} \exp(-x) dx.$$

Alors,

$$\begin{cases} \beta(x) = \ln(x) \\ \alpha(\theta) = \theta - 1 \\ \gamma(\theta) = -\ln \Gamma(\theta) \\ \delta(x) = -x \end{cases}$$

et on a l'application

$$x_i \rightarrow \sum_{i=1}^n \beta(x_i) = \sum_{i=1}^n \ln(x_i),$$

est bijective et continûment différentiable pour tout  $i$ . Donc, la statistique exhaustive est :

$$\sum_{i=1}^n \ln(X_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^n X_i\right).$$

## 1.5 Estimateur efficace

Précédemment nous avons abordé le problème du choix d'un estimateur lorsque plusieurs statistiques ont été proposées. Dans cette section nous allons introduire deux nouvelles notions (Information de Fisher et Borne de Fréchet) qui nous permettra de vérifier si un estimateur  $T$  est efficace ou non.

### 1.5.1 Information de Fisher

**Définition 1.5.1** On appelle quantité d'information de Fisher  $I_n(\theta)$  apportée par un  $n$  échantillon sur le paramètre  $\theta$ , la quantité positive où nulle suivante :

$$I_n(\theta) = E\left(\left(\frac{\partial \ln L(X, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right) \quad (1.15)$$

où :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta).$$

Pour beaucoup de modèle statistique le développement de l'expression (1.15) en sa forme brute est très complexe. Le théorème suivant nous fournis une version équivalente à l'expression (1.15) dont le développement est moins complexe.

**Théorème 1.5.1** Si le domaine de définition de  $X$  ne dépend pas du paramètre  $\theta$



alors :

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= -E \left[ \frac{\partial S(X, \theta)}{\partial \theta} \right] \\ &= -E \left[ \frac{\partial^2 \ln L(X, \theta)}{\partial \theta^2} \right]. \end{aligned}$$

**Exemple 1.5.1** Soit  $X$  une v.a tel que  $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$  alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(x, \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right), \\ \ln L(x, \theta) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \ln(\sigma) - \frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2, \\ \frac{\partial \ln L(x, \theta)}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} (x - m), \\ \frac{\partial^2 \ln L(x, \theta)}{\partial m^2} = -\frac{1}{\sigma^2}, \end{array} \right.$$

Ainsi, l'information de Fisher pour cette v.a est donnée par :

$$I(m) = -E \left( \frac{\partial^2 \ln L(x, \theta)}{\partial m^2} \right) = \frac{1}{\sigma^2}.$$

## Propriétés de l'information de Fisher

La quantité d'information de Fisher vérifiée les propriétés suivantes :

1. **La positivité** : On a

$$I_n(\theta) = V(S(X, \theta)) \geq 0, \quad \forall \theta.$$

2. **L'additivité** : Une autre propriété fondamentale de l'information de Fisher est son additivité. L'information résultant de deux variables aléatoires indépendantes est la somme de leurs informations de Fisher. Soient  $X, Y$  deux v.a indépendantes. On note  $I_X(\theta)$  et  $I_Y(\theta)$  les informations au point  $\theta$  respectivement fournies par  $X, Y$ . L'information  $I_{(X,Y)}(\theta)$  au point  $\theta$  du couple  $(X, Y)$

peut être quantifier par :

$$I_{(X,Y)}(\theta) = I_X(\theta) + I_Y(\theta).$$

### 1.5.2 Estimateur sans biais de variance minimale

Il existe plusieurs théorèmes qui montrent que l'estimateur de variance minimale est lié à l'existence d'une statistique exhaustive.

**Théorème 1.5.2 (unicité)** *S'il existe un estimateur de  $\theta$  sans biais de variance minimale, il est unique.*

**Théorème 1.5.3 (Rao-Blackwell)** *Soit  $T$  un estimateur sans biais de  $\theta$  quelconque et  $U$  une statistique exhaustive pour  $\theta$ . Alors*

$$T^* = E(T/U),$$

*est un estimateur sans biais de  $\theta$  au moins aussi bon que  $T$ .*

**Théorème 1.5.4** *S'il existe une statistique exhaustive  $U$  de  $\theta$ , alors l'estimateur  $T$  sans biais de  $\theta$  de variance minimale est unique et ne dépend que de  $U$ .*

### 1.5.3 Inégalité de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao(FDCR)

Le résultat suivant nous indique que la variance d'un estimateur ne peut être inférieure à une certaine borne, qui dépend de la quantité d'information de Fisher apportée par l'échantillon sur le paramètre  $\theta$  : Si le domaine de définition de  $X$  ne dépend pas de  $\theta$ , on a pour tout estimateur  $T$  sans biais de  $\theta$  :

$$V(T) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

et si  $T$  est un estimateur sans biais de  $k(\theta)$  :

$$V(T) \geq \frac{[k'(\theta)]^2}{I_n(\theta)},$$

où  $k$  est une fonction dérivable.

**Définition 1.5.2** *On dit que  $T$  est un estimateur efficace si :*

1.  $T$  est un estimateur sans biais de  $\theta$  et

$$V(T) = \frac{1}{I_n(\theta)}.$$

2.  $T$  est un estimateur sans biais de  $k(\theta)$  et

$$V(T) = \frac{[k'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}.$$

### 1.5.4 Théorème sur l'efficacité

La borne de Cramer-Rao ne peut être atteinte que si la loi de  $X$  appartient à la famille exponentielle :

$$f(x, \theta) = \exp[\beta(x) \alpha(\theta) + \delta(x) + \gamma(\theta)]$$

car  $T$  est nécessairement exhaustive pour  $\theta$ . donc, il n'existe qu'une seule fonction  $k(\theta)$  qui puisse être estimée efficacement :

$$h(\theta) = -\frac{\gamma'(\theta)}{\alpha'(\theta)},$$

l'estimateur de  $h(\theta)$  est :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta(X_i)$$

la variance minimale est

$$\begin{aligned} V(T_n) &= -\frac{1}{n\alpha'(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\gamma'(\theta)}{\alpha'(\theta)} \right) \\ &= \frac{h'(\theta)}{n\alpha(\theta)}. \end{aligned}$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques notions sur la théorie d'estimations paramétriques telles : l'estimation, méthodes d'estimation et qualité d'un estimateur. Ces différentes notions vont être utiles, d'une manière directe ou indirecte, pour la discussion des résultats de notre étude de simulation présentée dans le chapitre 3.

# Chapitre 2

## Systeme d'attente markovien avec feedback dependant

### Introduction

Dans ce chapitre, une brève introduction sur la théorie des files d'attente sera introduite dans un premier lieu. Par la suite, nous présenterons le système de files d'attente markovien  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback de clients et certaines de ses caractéristiques.

### 2.1 Notion de file d'attente

Une file d'attente (queue) est un système stochastique composé d'un certain nombre (fini ou non) de place d'attente, d'un ou plusieurs serveurs et bien sûr de clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorités données, et quittent le système. La figure 2.1 est un schéma simplifier d'un système d'attente simple.

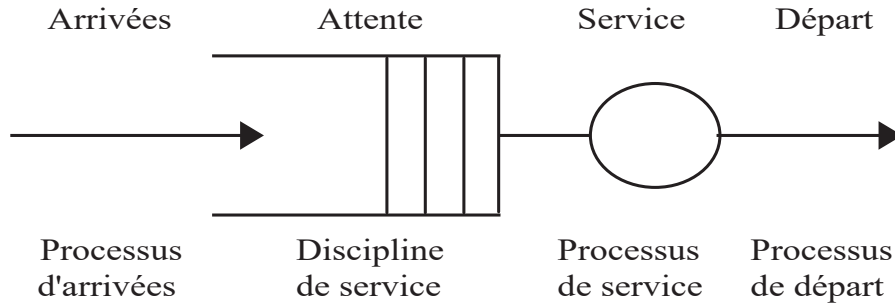


FIGURE 2.1 – Représentation d'une file d'attente simple.

## 2.2 Notation de Kendall-Lee

La notation de Kendall permet de décrire les files d'attente qui ont les propriétés ci-dessous :

- ▷ Les instants auxquels les clients arrivent est un processus de renouvellement en temps discret ou continu. Autrement dit, les durées entre chaque arrivée successive sont identiquement indépendamment distribuée (*i.i.d*), de loi  $A$  sur  $\mathbb{N}$  ou  $[0; \infty[$ . On numérote les différents clients à partir de 0 et l'on suppose que le client 0 arrive au temps 0. Ainsi, si  $T_n$  représente la durée entre l'arrivée du  $n^{ieme}$  client et celle du  $(n + 1)^ieme$  client, les  $T_n$  sont *i.i.d*, de loi  $A$ .
- ▷ Les temps de service des différents clients sont *i.i.d*, et indépendants du processus des entrées. On note  $B$  la loi du temps de service, et  $U_n$  le temps de service du  $n^{ieme}$  client. Ainsi,  $U_0, U_1, \dots$  sont *i.i.d*. de loi  $B$  et indépendant de  $T_n$ .

Un modèle d'attente est spécifié, en générale, par une suite de six symboles :

$$A/S/m/K/P/D$$

La signification de chaque symbole est :

- $A$  : nature du processus des arrivées,
- $S$  : nature du processus de service,

- $m$  : nombre de serveurs,
- $K$  : capacité d'accueil de la file d'attente,
- $P$  : taille de la population,
- $D$  : discipline de la file.

**Processus d'arrivées** Les clients arrivent au sein du système en décrivant un processus déterminé. Ils peuvent par exemple être régulières et leurs arrivées sont espacées par un temps égal soit à  $t$ , (c'est-à-dire : chaque  $t$  unité de temps, on a une arrivée) mais ce cas est rare et assez difficile à schématiser mathématiquement. Le modèle le plus simple et le plus courant est celui des arrivées complètement aléatoires, ce qui est caractérisé par le processus de Poisson.

**Processus de service** La deuxième composante d'un système de files d'attente est la quantité de service demandée par un client. Dans la majorité des cas, on suppose que la population des clients est homogène, ce qui entraîne que les services demandés sont identiquement distribués, ou ont une distribution commune dite distribution de service. En pratique, on rencontre la distribution exponentielle qui est la plus simple à manipuler mathématiquement. Une propriété assez importante de cette distribution est son manque de mémoire, qui pourrait être caractérisé par le fait que le temps résiduel d'un service est indépendant du temps déjà écoulé de ce service.

Dans la description des processus d'arrivées et de service, les symboles les plus courants sont :

- $M$  : loi *Exponentielle* (Memoryless).
- $E_k$  : loi d'*Erlang* –  $k$ .
- $\Gamma$  : loi *Gamma*.
- $D$  : loi *Déterministe* (taux d'inter-arrivées ou de service constant).
- $G$  : loi *Générale* (quelconque).

- $GI$  : loi Générale Indépendante.
- $H_k$  : loi Hyper *exponentielle* –  $k$ .
- $C_k$  : loi de *Cox* –  $k$ .
- $PH_k$  : loi de type "phase" à  $k$  étapes.

**Nombre de serveurs** Une station peut contenir plusieurs serveurs disposés en parallèle ou en série. Soit  $m$  le nombre de serveurs. Dès qu'un client arrive à la station, soit il trouve un serveur libre et le client entre immédiatement en service, soit tous les serveurs sont occupés et le client se place dans la file en attente d'un serveur qui se libère.

Pour définir une station multiserveur, il faut définir la distribution de service de chacun des serveurs. La plupart du temps, les serveurs sont supposés identiques (ils possèdent donc la même distribution) et indépendants les uns des autres.

**Capacité de la file** La capacité de la file peut être finie ou infinie. Lorsqu'elle est limitée et qu'un client arrive alors que cette file est pleine, le client est perdu, ou rentre dans l'orbite, s'il s'agit des systèmes avec rappels.

**Discipline du service** La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service. Les disciplines les plus courantes sont :

- ▷  $FIFO$  (First In First Out) ou  $PAPS$  (Premier Arrivé Premier Servi) : C'est le cas standard, dans laquelle les clients sont servis suivant l'ordre de leurs arrivées.
- ▷  $LIFO$  (Last In First Out) ou  $DAPS$  (Dernier Arrivé Premier Servi) : Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité.
- ▷  $RANDOM$  (Aléatoire) : Les clients accèdent au serveur de manière aléatoire,



indépendamment de l'ordre des arrivés.

- ▷ *Round–Robin* (Cyclique) : Tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuent un quantum  $Q$  de leurs temps de service et sont replacés dans la file, jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli. Cette discipline de service a été introduite afin de modéliser des systèmes informatiques en particulier.
- ▷ Avec priorité : Chaque client a une priorité (statique ou dynamique c'est-à-dire absolue ou relative), le serveur sélectionne le client de haute priorité.

**Remarque 2.2.1** *Lorsque les trois derniers éléments de la notation de Kendall ne sont pas précisés, il est sous-entendu que :*

$$K = \infty , P = \infty , D = FIFO.$$

## 2.3 Mesures de performance d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente ou d'un réseau de files d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données. Ce calcul se fait le plus souvent pour le régime stationnaire uniquement et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

- ▷  $L$  : Nombre moyen de clients dans le système,
- ▷  $Q$  : Nombre moyen de clients dans la file d'attente,
- ▷  $T$  : Temps moyen de séjour d'un client dans le système,
- ▷  $W$  : Temps moyen d'attente d'un client dans la file,
- ▷  $U$  : Taux d'utilisation de chaque serveur,

Il est à noter que ces mesures ne sont pas indépendantes les unes des autres, mais sont liées par les relations suivantes :

▷  $L = \lambda T$  (Formule de Little), où  $\lambda$  représente le taux d'arrivées.

▷  $Q = \lambda W$ .

▷  $T = W + \frac{1}{\mu}$ , où  $\mu$  représente le taux de service.

▷  $L = Q + \rho$ , tel que  $\rho$  est la charge du système donnée par (2.1).

De manière générale, une file d'attente est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté  $\lambda$ , est inférieur au nombre moyen de clients pouvant être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter  $\mu$  clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est  $m$ , dans ce cas la file est stable si et seulement si :

$$\lambda < m\mu \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1. \quad (2.1)$$

Dans la théorie des files d'attente, une file d'attente classique peut être décrite comme un système dans lequel les clients arrivent selon un processus d'arrivées, pour être servis par une installation de service selon un processus de service. Cependant, en pratique différents comportements du (des) serveur(s) et des clients peuvent être identifiés.

L'une des situations qu'on peut distinguer dans la pratique est bien que celle où tous les clients demandent le service *principal* et quelques-uns d'entre eux ont besoin de demander un autre service dite *supplémentaire*. Ce phénomène est bien connu dans la littérature de la théorie de files d'attente par la notion de "feedback de clients". Un exemple de file d'attente gouverné par cette variante sera exposé dans la section suivante.

## 2.4 File d'attente $M/M/1$ avec feedback dépendant

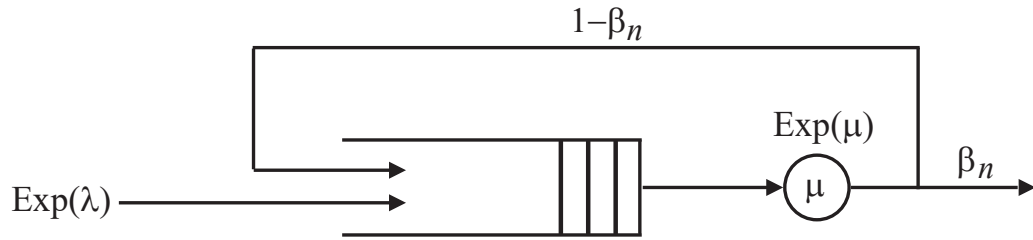
Dans cette, nous proposons de considéré un système markovien ( $M/M/1$ ) où le feedback des clients se fait selon une loi de Bernoulli mais sous l'hypothèse que le paramètre de cette loi dépend du nombre de clients dans le système.

### 2.4.1 Description du modèle

Considérons le modèle d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback fonctionnant sous les hypothèses suivantes :

- Les arrivées des clients de l'extérieurs, dites arrivées régulières, se produisent selon un flux de Poisson avec un taux d'arrivée moyen  $\lambda$ .
- Les clients sont servis selon le principe "Premier Arrivé, Premier Servi" (*FCFS* : First Come, First Served). De plus, les temps de service sont supposés être distribués selon une distribution exponentielle de taux  $\mu$ .
- Après avoir obtenu un service insatisfaisant, avec une probabilité  $\beta'_n = 1 - \beta_n$  ( $0 < \beta_n \leq 1$ ,  $n$  est le nombre de clients dans le système), le client peut rejoindre à nouveau le système, à la fin de la file d'attente, en tant que client de Bernoulli feedback pour recevoir un autre service supplémentaire. Sinon, il quitte le système définitivement avec une probabilité complémentaire, c'est-à-dire avec une probabilité  $\beta_n$ .
- Pour le service des deux types de clients, nous ne faisons pas la distinction entre une arrivée régulière et un client de Bernoulli feedback.
- Les processus des inter-arrivées et le processus de service sont supposé indépendants.

Le modèle peut être illustré par le schéma présenté dans la figure 2.2.



$n$ : est le nombre de clients dans le système

FIGURE 2.2 – Representation d'une file d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback.

### 2.4.2 Probabilité d'état du système

Dans cette section, nous allons présenter les probabilités d'état du système en régime stationnaire. Pour cela, soient les notations suivantes qui sont utilisées tout au long de la section. On note  $N(t)$  la variable désignant le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$  et  $\pi_n(t)$  la probabilité qu'il y ait  $n$  clients dans le système à la date  $t$  :

$$\pi_n(t) = P(N(t) = n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, à l'état stationnaire  $\pi_n; n \geq 0$ , sera la probabilité qu'il y ait  $n$  clients dans le système. En appliquant la théorie du processus de Markov, il est facile de formuler les équations des probabilités de transition qui régissent le processus  $\{(N(t), t \geq 0)\}$  et, par conséquent, nous pouvons déduire les équations d'état d'équilibre données dans les expressions (2.2)–(2.3).

$$\pi_0(t + dt) = (1 - \lambda dt) \pi_0(t) + \mu_1 dt \pi_1(t), \quad n = 0, \quad (2.2)$$

$$\pi_n(t + dt) = \lambda dt \pi_{n-1}(t) + (1 - (\lambda + \mu_n) dt) \pi_n(t) + \mu_{n+1} dt \pi_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \quad (2.3)$$

avec

$$\mu_n = \mu\beta_n.$$

Ainsi, le système d'équations ci-dessus peut être réécrit sous la forme suivant :

$$\pi'_0(t) = -\lambda\pi_0(t) + \mu_1\pi_1(t), \quad n = 0 \quad (2.4)$$

$$\pi'_n(t) = \lambda\pi_{n-1}(t) - (\lambda + \mu_n)\pi_n(t) + \mu_{n+1}\pi_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \quad (2.5)$$

avec  $\pi'_n(t)$  est la dérivée de  $\pi_n(t)$ .

Par conséquent, si le régime stationnaire existe alors, les équations (2.4)–(2.5) seront réduites à :

$$\lambda\pi_0 = \mu_1\pi_1, \quad n = 0, \quad (2.6)$$

$$(\lambda + \mu_n)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

Ainsi, la résolution de ce dernier système par le principe de récurrence nous permet de conclure que :

1. Le système considéré est stable (le régime stationnaire existe) si seulement si

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < \sup_n \beta_n \quad (2.8)$$

2. Si le système est stable alors  $\pi_n$  existent et sont donnés par :

$$\pi_n = \rho_n\pi_0 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

avec

$$\pi_0 = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \right]^{-1} \quad (2.10)$$

et

$$\rho_n = \begin{cases} 1 & , \quad si \quad n = 0 \\ \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\mu\beta_i} & , \quad si \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

## 2.5 Exemples d'application

Dans ce passage, nous introduisant les expressions explicites des caractéristiques du système précédent pour deux formes particulières de la probabilité  $\beta_n$ . Mais avant cela, rappelons d'abord que le nombre moyen de clients dans le système et en file sont définis respectivement par :

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n \quad (2.12)$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = L_s - (1 - \pi_0) \quad (2.13)$$

Une autre mesure de performance de grande importance et spécifique pour de tels système, c'est-à-dire les systèmes d'attente avec feedback dépendant, est la probabilité moyenne de quitter le système  $\mathbb{E}(\beta_n)$ . Par définition  $\mathbb{E}(\beta_n)$  est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\beta_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \pi_n}{1 - \pi_0} \\ &= \frac{\rho}{1 - \pi_0}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 2.5.1 Exemple 01 : Cas feedback constante ( $\beta_n = \beta$ )

Concéderons que  $\beta_n = \beta$ ,  $n \geq 1$  en exploitant les définitions et les résultats exposés précédemment on peut montrer que :

1. L'expression de  $\rho_n$  pour  $n \geq 1$ , dans ce cas, est donné par :

$$\rho_n = \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^n.$$

2. La condition de stabilité du système est :

$$\rho < \beta.$$

3. La probabilité que le système soit vide est donnée par :

$$\pi_0 = 1 - \frac{\rho}{\beta}. \quad (2.15)$$

4. Sous la condition de stabilité du système, l'expression du nombre moyen de clients dans le système est donnée par :

$$L_s = \frac{\rho}{\beta - \rho}. \quad (2.16)$$

5. Sous la condition de stabilité du système, l'expression du nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$L_q = \frac{\rho^2}{\beta(\beta - \rho)}. \quad (2.17)$$

### 2.5.2 Exemple 02 : Cas $\beta_n = \frac{n}{n+1}$

Concédons que  $\beta_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $n \geq 1$  en exploitant les définitions et les résultats exposés précédemment on peut montrer que :

1. L'expression de  $\rho_n$  pour  $n \geq 1$ , dans ce cas, est donné par :

$$\rho_n = (n + 1) \rho^n. \quad (2.18)$$

2. La condition de stabilité du système est :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

3. La probabilité que le système soit vide est donnée par :

$$\pi_0 = (1 - \rho)^2. \quad (2.19)$$

4. Sous la condition de stabilité du système, l'expression du nombre moyen de clients dans le système est donnée par :

$$L_s = \frac{2\rho}{1 - \rho}. \quad (2.20)$$

5. Sous la condition de stabilité du système, l'expression du nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$L_q = \frac{(3 - \rho)\rho^2}{(1 - \rho)}. \quad (2.21)$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés particulièrement au système d'attente  $M/M/1$  avec feedback dépendant dans un cadre probabiliste c'est-à-dire les paramètres de départ (taux d'arrivée  $\lambda$ , taux de service  $\mu$  et la distribution  $\beta_n$ ,  $n \geq 1$ ) décrivant notre système sont supposés connus.

Dans le chapitre suivant, nous allons reconsidérer le même système d'attente mais cette fois-ci sous l'hypothèse que les paramètres de départ le décrivant ne sont disponibles que sous forme d'échantillon. Par conséquent, pour l'évaluation de performance



du système dans telles situations le recours à la théorie d'estimation est nécessaire.

# Chapitre 3

## Estimation des caractéristiques du système

### Introduction

Dans ce chapitre, nous avons considéré l'analyse des propriétés statistiques (biais, variance, MSE,...) des estimateurs des mesures de performance stationnaires du système d'attente  $M/M/1$  avec feedback dépendant. En effet, sous l'hypothèse que les paramètres de départ décrivant notre système d'attente ne sont disponibles que sous forme d'un ensemble d'observations que nous avons échantillonnées à l'aide de la simulation à événements discrets et en procédant par le principe de plug-in, nous avons analysé l'impact de l'estimation de ces paramètres départ sur la qualité des estimations des mesures de performance du système en question.

### 3.1 Présentation de l'application

Dans cette section, nous avons considéré le même système d'attente décrit dans la Section 2.4.1, et nous supposons que les paramètres de départ (taux d'arrivée  $\lambda$ , taux

de service  $\mu$  et la distribution  $\beta_n, n \geq 1$ ) du système ne sont connus qu'à partir d'un échantillon d'observations. Dans une telle situation, il est clair que la substitution des paramètres de départ, supposés inconnus, par leurs estimateurs dans les expressions des mesures de performance du système ne nous fournira que des estimations pour ces mesures de performance.

L'idée de la présente étude est d'analyser, par simulation, l'impact de l'estimation des paramètres de départ décrivant le modèle en question sur les propriétés statistiques (distribution, biais, variance et erreur quadratique, loi) des estimateurs de ses mesures de performance données comme suit :

**Estimation du taux des arrivées :**

$$\hat{\lambda} = \frac{N_a}{T_{max}}; \quad (3.1)$$

avec  $T_{max}$  est la durée de simulation et  $N_a$  est le nombre total de clients arrivées durant l'intervalle  $]0, T_{max}[$ .

**Estimation du taux de service :**

$$\hat{\mu} = \frac{N_s}{T_s}; \quad (3.2)$$

avec  $N_s$  est le nombre totale de clients servis durant l'intervalle  $]0, T_{max}[$  et  $T_s$  est le temps cumulés des  $N_s$  services.

**Estimation de la charge du système :**

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}}; \quad (3.3)$$

**Estimation de la probabilité moyenne de non-feedback :**

$$\hat{\beta} = \frac{N_Q}{N_{fs}} = \frac{1}{N_{fs}} \sum_{i=1}^{N_{fs}} X_i; \quad (3.4)$$

avec  $N_{fs}$  est le nombre total de fins de service durant la simulation et  $X_i$  représente la décision du client à la fin du  $i$ -ième service où

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si le client quitte définitivement le système;} \\ 0, & \text{si le client rejoint à nouveau le système (feedback).} \end{cases}$$

Par conséquent,  $N_Q$  représente le nombre total de client qui ont décidés de quitter définitivement le système à la fin de leurs service durant la simulation.

**Estimation de la probabilité que le système soit vide :**

$$\hat{\pi}_0 = (1 - \hat{\rho})^2; \quad (3.5)$$

**Estimation de nombre moyen de clients dans le système :**

$$\hat{L}_s = \frac{2\hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}}; \quad (3.6)$$

Pour répondre à notre objectif, dans un premier lieux nous avons implémenter sous l'environnement MATLAB, un simulateur qui peut imiter le comportement du modèle d'attente considéré (voir Figure 3.1). Par la suite, pour réaliser les différents calculs intervenants dans l'analyse, nous avons implémenté un deuxième programme sous Matlab dont la principale tâche est d'exécuter les étapes suivantes.

**Etape 0.** Lire les paramètres de départ décrivant le système d'attente en question.

**Etape 1.** Générer  $mc$  échantillons pour ces paramètres en exécutant  $mc$  fois le simulateur.

**Etape 2.** Estimer les paramètres inconnus pour chacun des  $mc$  échantillons.

**Etape 3.** Calculer les caractéristiques stationnaires du système pour les estimations obtenues à l'étape 2.

**Etape 4.** Présentez les propriétés statistiques (numériques et/ou graphiques) des caractéristiques obtenues en 3.

## 3.2 Biais, variance et MSE des estimations

Dans cette application, nous nous sommes focalisés sur l'analyse de la convergence des estimations des caractéristiques du système d'attente  $M/M/1$  avec feedback dépendant au sens du biais, de variance et du MSE. Pour l'application numérique, nous avons fixé les différents paramètres associés au système d'attente considéré comme suit :  $\mu = 1$  et une probabilité de feedback  $1 - \beta_n = 1 - \frac{n}{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , et nous faisons varier : la charge du système  $\rho = \lambda \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$  et la durée de simulation  $T_{max} \in \{200, 300, \dots, 1000\}$ .

Table 3.1 présente les caractéristiques exactes du système lorsque nous avons considéré les paramètres ci-dessus. Tandis que les deux Tables 3.2 et 3.3 présentent leurs estimations moyennes obtenues sur 100 échantillons ( $mc = 100$ ). La variation de la variance et du MSE des estimations obtenues dans les différentes situations considérées, est présentée dans Figures 3.2–3.5.

$\lambda$	$\mu$	$\rho$	$L_s$	$\pi_0$	$E(\beta)$
0.20	1.00	0.20	0.5000	0.6400	0.5556
0.40	1.00	0.40	1.3333	0.3600	0.6250
0.60	1.00	0.60	3.0000	0.1600	0.7143
0.80	1.00	0.80	8.0000	0.0400	0.8333

TABLE 3.1: Caractéristiques exactes du système

```

1  function [ Results ] = simulationFeedBack ( lambda , mu , beta_n , Tmax)
2  t = [ 0 inf inf ];
3  n=0;
4  Pi =zeros( 1000 , 1);
5  tsim =0;
6  Na=0;
7  Ns=0;
8  Ts =0;
9  Ta =0;
10 Nfs =0;
11 NQ=0;
12 while tsim < Tmax
13     switch tsim
14         case t ( 1) % L'arrivée d'un nouveau client de l'exterieur
15             Na=Na+1; % Sommaton du Nombre d'arrivées
16             n=n+1;
17             if n==1
18                 t ( 2)= t ( 1);
19             end
20             ta =random ( 'exp' , 1/ lambda ); % Générer une v.a exponentielle
21             t ( 1)= t ( 1)+ ta ;
22             Ta =Ta +ta ; % Sommaton des durées d'inter-arrivées.
23             %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
24         case t ( 2) % Début d'un service
25             Ns=Ns+1; % Incrémentation du nombre de clients servis.
26             s =random ( 'exp' , 1/ mu ); %Générer une durée de service selon une loi Exp(mu)
27             t ( 3)= t ( 2)+ s ;
28             Ts =Ts +s; % Sommaton des durées de service
29             t ( 2)= inf ;
30         case t ( 3) % Fin d'un service
31             Nfs =Nfs +1; % Incrémentation du nombre de services.
32             u=random ( 'unif' , 0 , 1);
33             if u<beta_n ( n) %Le client Quitte le système
34                 NQ=NQ+1;
35                 n=n- 1;
36             end
37             if ne( n, 0)
38                 t ( 2)= t ( 3);
39             end
40             t ( 3)= inf ;
41     end
42     tsim1 = tsim ;
43     tsim = min( t );
44     Pi ( n+1)= Pi ( n+1) + ( tsim - tsim1);
45 end
46 Pi =Pi / sum( Pi ); % Estimation des probabilités Pn
47 Lambdahat = Na/ tsim ; % Estimation du taux des arrivées
48 Muhat = Ns/ Ts ; % Estimation du taux de service
49 Rhohat = Lambdahat / Muhat ; % Estimation de la charge du système
50 Betahat = NQ/ Nfs ; % Estimation de beta moyenne
51 P0= ( 1- Rhohat )^ 2; % Estimation de P0
52 Ls = ( 2* Rhohat )/( 1- Rhohat); % Estimation de Ls
53
54 Results = [ Na Nfs Lambdahat Muhat Rhohat Betahat Ls P0 ];
55 end

```

FIGURE 3.1 – Code de source du simulateur implémenté sous MATLAB.

$\rho = \lambda$	$T_{max}$	$N_a$			$N_s$			$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$
		$min(N_a)$	$\bar{N}_a$	$max(N_a)$	$min(N_s)$	$\bar{N}_s$	$max(N_s)$		
0.2	200	27	41.76	69	51	74.24	118	0.2062	1.0025
	500	84	102.97	130	147	183.22	250	0.2043	1.0093
	1000	167	200.21	252	284	358.00	451	0.1994	0.9955
0.4	200	57	81.02	111	95	127.79	168	0.4023	1.0062
	500	169	202.81	236	276	322.60	372	0.4046	0.9945
	1000	344	400.19	452	557	637.13	735	0.3997	1.0010
0.6	200	95	121.29	154	141	168.81	198	0.6039	1.0104
	500	266	301.54	348	379	420.50	477	0.6021	1.0099
	1000	541	603.65	674	763	840.66	912	0.6032	0.9993
0.8	200	130	159.05	195	161	188.78	223	0.7930	0.9956
	500	340	400.47	450	403	475.16	514	0.8002	0.9970
	1000	734	803.19	863	898	959.25	1019	0.8026	1.0037

TABLE 3.2: Estimations des paramètres de départ du système

$\rho = \lambda$	$T_{max}$	$\hat{\rho}$	$\bar{\beta}$	$\bar{L}_s$	$\bar{\pi}_0$
0.2	200	0.2079	0.5565	0.5203	0.6281
	500	0.2037	0.5615	0.5034	0.6373
	1000	0.2010	0.5590	0.5006	0.6406
0.4	200	0.4026	0.6249	1.2784	0.3633
	500	0.4082	0.6244	1.3274	0.3505
	1000	0.3998	0.6267	1.3145	0.3632
0.6	200	0.6004	0.7002	2.8702	0.1630
	500	0.5973	0.7111	2.8476	0.1666
	1000	0.6045	0.7144	3.0458	0.1579
0.8	200	0.7995	0.8037	6.1504	0.0511
	500	0.8046	0.8262	7.3942	0.0454
	1000	0.8006	0.8295	7.5727	0.0440

TABLE 3.3: Estimations des caractéristiques du système

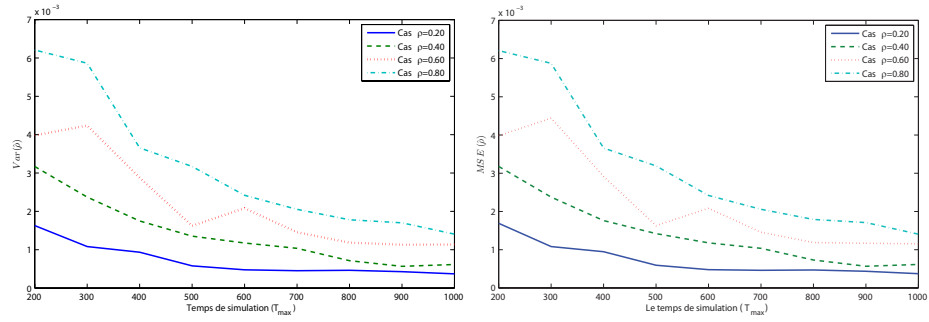


FIGURE 3.2 – Variance et MSE de l'estimateur de  $\rho$  en fonction de  $T_{\max}$  et  $\rho$ .

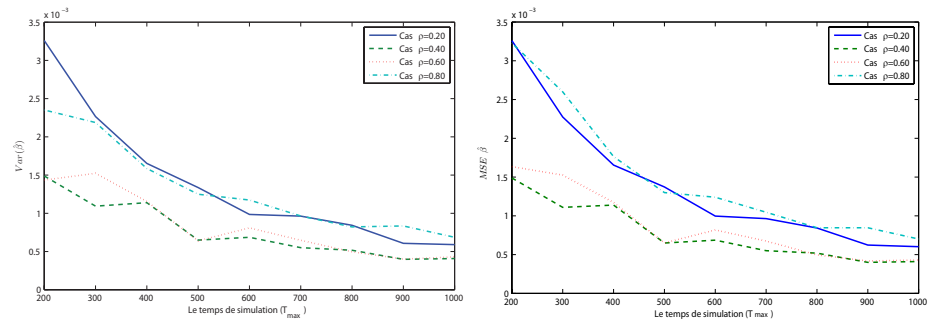


FIGURE 3.3 – Variance et MSE de l'estimateur de  $E(\beta_n)$  en fonction de  $T_{\max}$  et  $\rho$ .

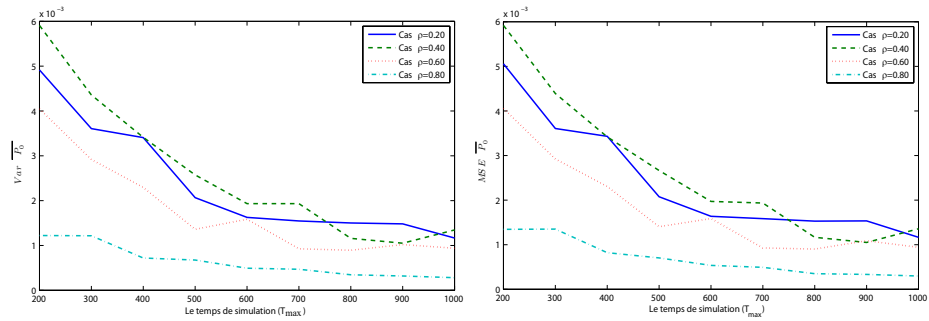


FIGURE 3.4 – Variance et MSE de l'estimateur de  $\pi_0$  en fonction de  $T_{\max}$  et  $\rho$ .

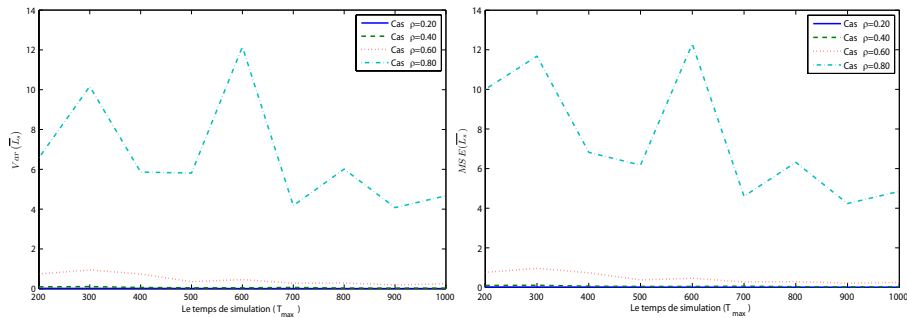


FIGURE 3.5 – Variance et MSE de l'estimateur de  $L_s$  en fonction de  $T_{\max}$  et  $\rho$ .



D'après les résultats graphiques présentés dans la figure 3.2 on remarque que :

- En fait et à mesure que la durée de simulation (la taille de l'échantillon) augmente la variance et le MSE de l'estimateur de la charge du système  $\rho$  décroissent. Ceci signifie que l'estimateur de  $\rho$  est convergent au sens de la variance et du MSE. Par conséquent, converge en biais car

$$MSE(\hat{\rho}) = \text{Biais}^2(\hat{\rho}) + v(\hat{\rho}).$$

- La valeur de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur et celle de sa variance sont pratiquement égales. Ceci nous permet de conclure que l'estimateur en question est un estimateur sans biais.
- La qualité des estimations est inversement proportionnelle à la charge du système.

D'après les résultats graphiques présentés dans la figure 3.3 on remarque que :

- En fait et à mesure que la durée de simulation augmente la variance et le MSE de l'estimateur de la charge du système décroissent. Ceci signifie que l'estimateur de la probabilité moyenne de quitter le système est convergent au sens de la variance et du MSE. Par conséquent, converge en biais. Ce dernier constat peut être dégagé également en comparant les résultats rangés dans la Table 3.3 avec ceux de la Table 3.1.
- L'estimateur de la probabilité moyenne  $E(\beta)$  est un estimateur asymptotiquement sans biais. En effet, car d'une part, pour de petites durées de simulation les écarts entre les valeurs du MSE de l'estimateur et celles de leurs variances sont relativement considérables et d'autre part ces écarts se réduisent en fait et à mesure que la durée de simulation augmente où on constatera que  $MSE \simeq var$ .
- La qualité des estimations dépend de la charge du système où les estimations les plus performantes sont obtenues pour des charges moyennes et elles perdent leurs qualités pour de faibles et fortes charges.

D'après les résultats graphiques présentés dans la figure 3.4 on remarque que :

- En fait et à mesure que la durée de simulation augmente la variance et le MSE de l'estimateur de la probabilité  $\pi_0$  décroissent. Ceci signifie que l'estimateur  $\hat{\pi}_0$  est convergent au sens de la variance et du *MSE*. Par conséquent, converge en biais.
- La valeur de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur et celle de sa variance sont pratiquement égales. Ceci nous permet de conclure que l'estimateur en question est un estimateur sans biais.
- Pour de faible et moyenne charge du système, on obtient des estimateurs ayant pratiquement la même qualité. Mais ça reste que les estimateurs les plus performants sont obtenus dans le cas de forte charge du système.

D'après les résultats graphiques présentés dans la figure 3.5 on constate que :

- Pour de faibles et moyennes charges du système les remarques faites dans le cas d'estimation de la charge du système  $\rho$  restent valable pour l'estimation du nombre moyen de clients dans le système  $L_s$ .
- Pour de fortes charges du système, quel que soit la durée d'échantillonnage, on obtient des estimateurs de  $L_s$  de mauvaises qualités. Ceci est engendré principalement par la lente convergence du biais (voir Tables 3.1 et 3.3) et de sa variation considérable. Mais, il est à noter que ce problème est lié à la théorie des files d'attente et non à la théorie d'estimation statistique. En effet, il est bien connu dans la théorie des files d'attente que lorsque la charge du système se rapproche de 1 ( $\rho \simeq 1$ ) le système est susceptible à être instable. Autrement dit, lorsque la charge est proche de 1, le processus  $X(t)$  représentant le nombre de clients dans le système a tendance à ne pas être stationnaire où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(X(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(X(t)) = \infty.$$

### 3.3 Distribution des estimations

L'objectif de la présente application est de visualiser graphiquement la distribution des estimations des caractéristiques du système d'attente  $M/M/1$  avec feedback dépendant, afin de vérifier leurs normalité asymptotique.

Pour l'application numérique, nous avons fixé les différents paramètres associés au système d'attente considéré comme suit :  $\mu = 1$  et une probabilité de feedback  $1 - \beta_n = 1 - \frac{n}{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , et nous faisons varier la charge du système  $\rho = \lambda \in \{0.3, 0.6, 0.9\}$  et la durée de simulation  $T_{max} \in \{250, 500, 1000\}$ .

Les histogrammes des distributions des estimations des caractéristiques du système en question obtenus sur 1000 échantillons ( $mc = 1000$ ) et pour les paramètres ci-dessus sont présentées dans les figures 3.6–3.9.

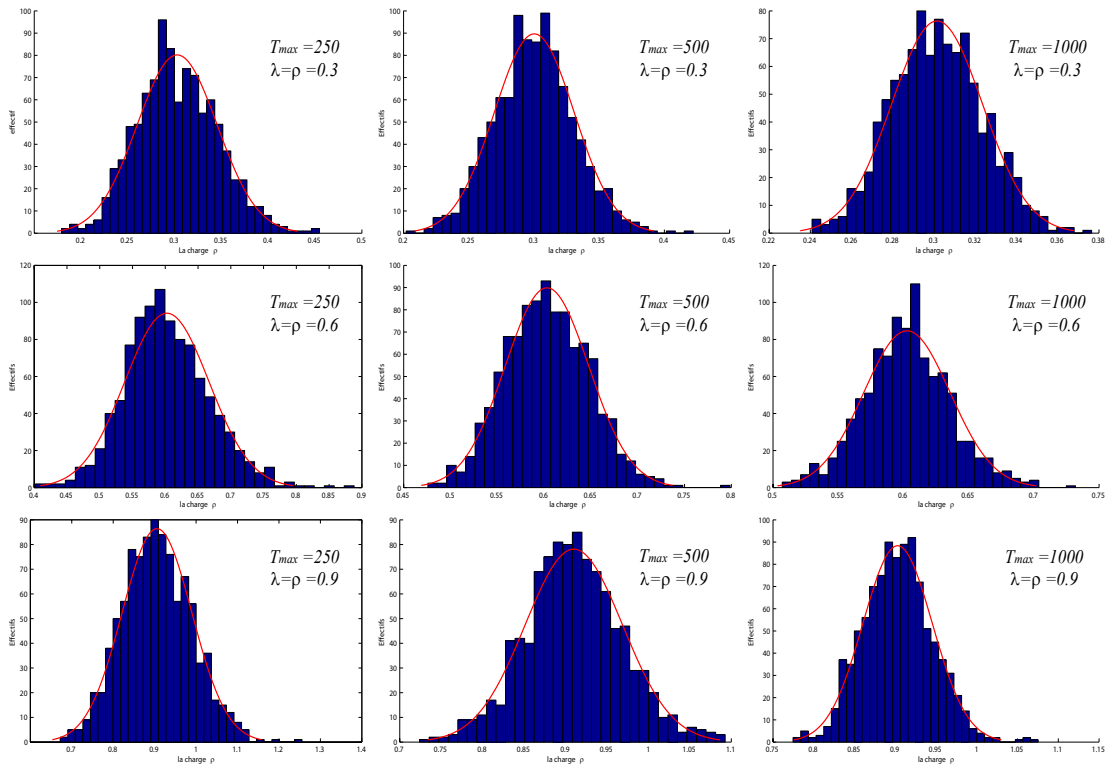


FIGURE 3.6 – Distribution de l'estimateur de  $\rho$  en fonction  $T_{max}$  et  $\rho$ .

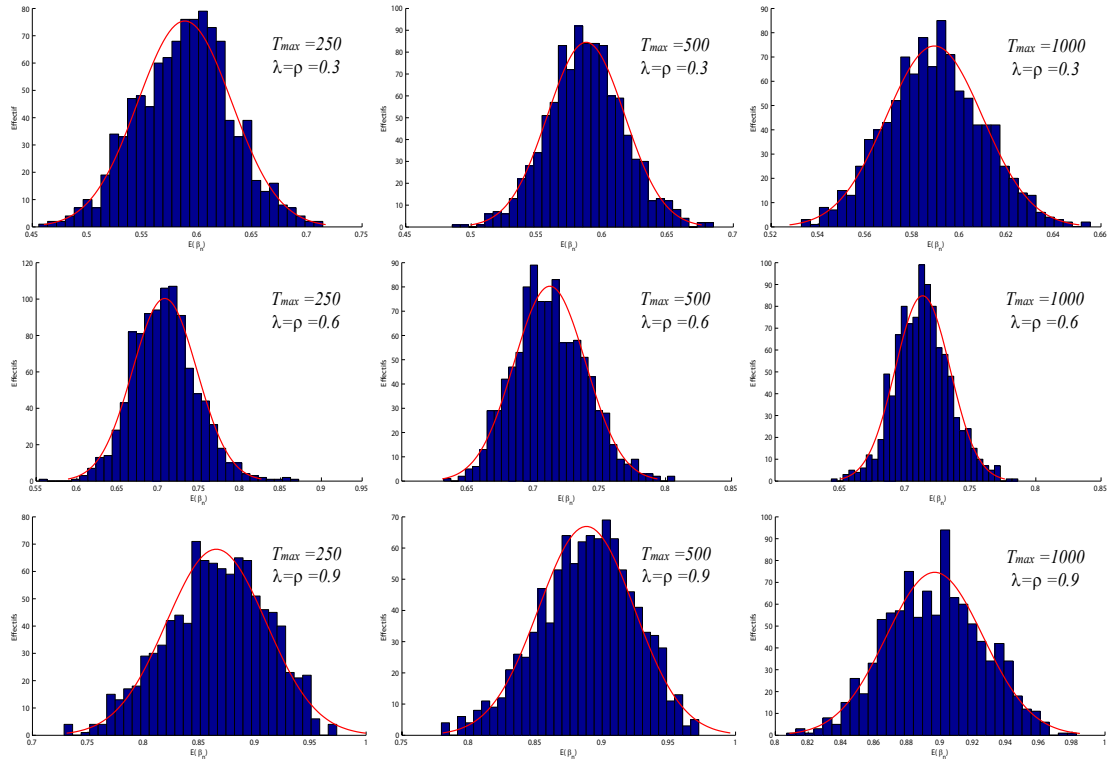


FIGURE 3.7 – Distribution de l'estimateur de  $E(\beta_n)$  en fonction  $T_{max}$  et  $\rho$ .

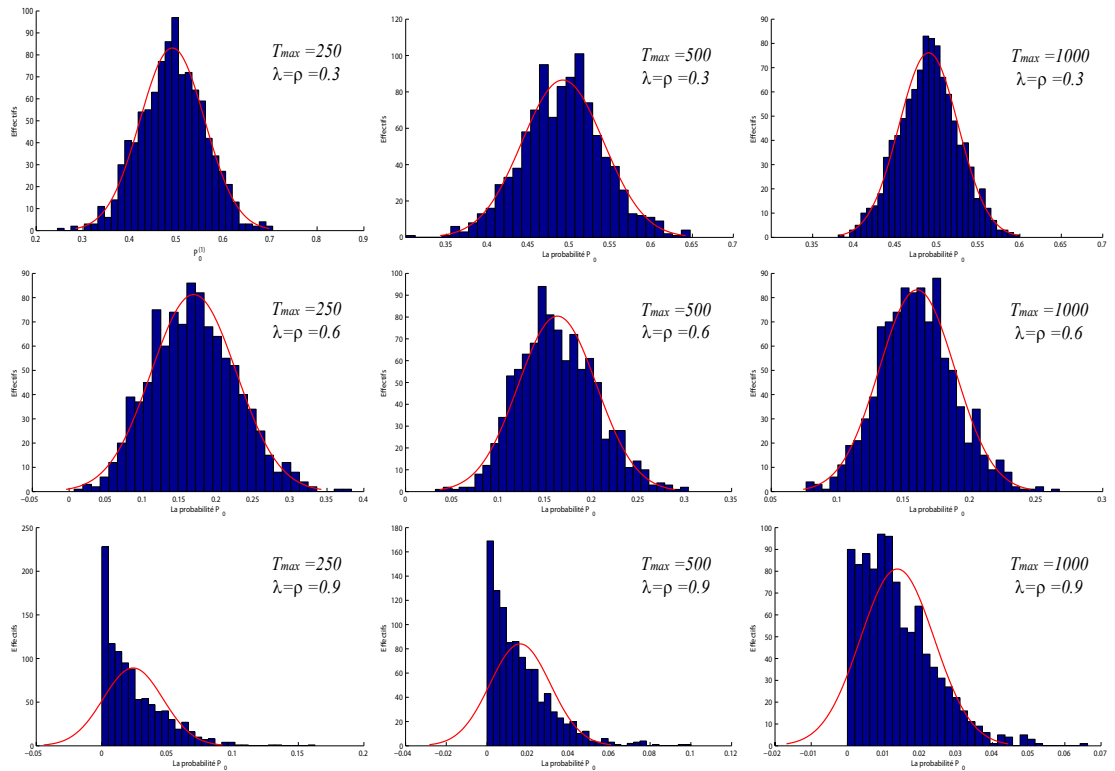


FIGURE 3.8 – Distribution de l'estimateur de  $\pi_0$  en fonction  $T_{max}$  et  $\rho$ .

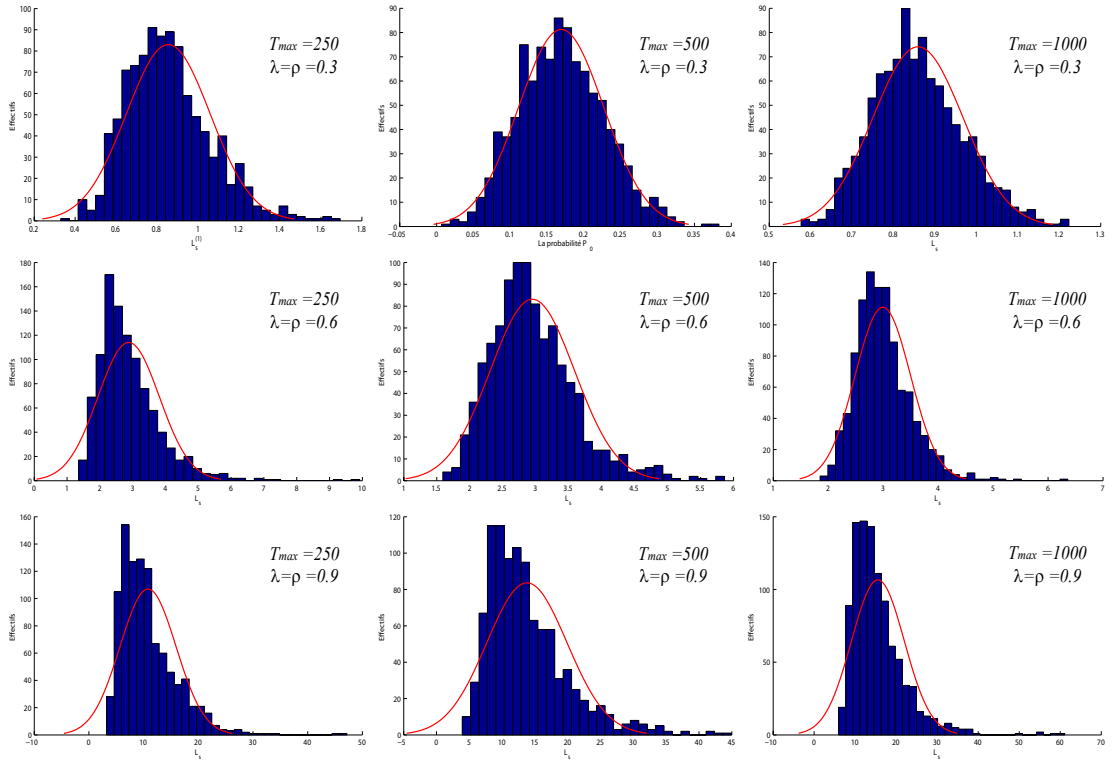


FIGURE 3.9 – Distribution de l’estimateur de  $L_s$  en fonction  $T_{max}$  et  $\rho$ .

## Discussion des résultats :

- D’après les résultats graphiques présentés dans la figure 3.6 on conclut que la distribution de l’estimateur de la charge du système est pratiquement une loi normale et ceci quel que soit la charge du système retenu et la durée de l’échantillonnage.
- D’après les résultats graphiques présentés dans la figure 3.7 on conclut que pour de faibles et moyennes charges du système la distribution de l’estimateur de la probabilité moyenne de quitter le système est pratiquement une loi normale pour toutes les durées de l’échantillonnage considérées dans l’étude. Tandis que, pour de fortes charges du système la distribution de l’estimateur de la probabilité moyenne s’éloigne de la distribution normale particulièrement lorsque des petites durées de simulations (de petit échantillons).
- D’après les résultats graphiques présentés dans la figure 3.8 on conclut que pour de faibles et moyennes charges du système la distribution de l’estimateur de la

- probabilité  $\pi_0$  est pratiquement une loi normale pour toutes les durées de l'échantillonnage considérées dans l'étude. Tandis que pour de fortes charges du système, la distribution de l'estimateur  $\hat{\pi}_0$  est très distincte de la distribution normale.
- D'après les résultats graphiques présentés dans la figure 3.9 on conclut que pour de faibles charges du système la distribution de l'estimateur du nombre moyen de clients dans le système  $L_s$  est pratiquement une loi normale pour toutes les durées de l'échantillonnage considérées dans l'étude. Par contre, dans le cas de moyennes et de fortes charges la distribution de l'estimateur  $\hat{L}_s$  elle est très distincte de la distribution normale.

## Conclusion

L'étude de simulation réaliser dans ce chapitre nous laisse de conclure que la qualité des estimations des mesures de performance d'un système d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback dépend à la fois d'un aspect statistique (la longueur de l'intervalle d'échantillonnage) et d'un aspect de la théorie de files d'attente (la charge du système). Plus précisément, nos résultats montrent que d'une manière générale, la qualité des estimations sont proportionnelle (respectivement, inversement proportionnelle) à la longueur de l'intervalle de l'échantillonnage (respectivement, à la charge du système).

# Conclusion générale

L'objectif du présent travail était d'analyser les propriétés statistiques des estimations des caractéristiques stationnaires d'un système d'attente markovien avec Bernoulli feedback dont la probabilité de feedback dépend du nombre de clients dans le système.

Ainsi, pour répondre à notre objectif et pour comprendre au mieux le travail réalisé, nous avons introduit dans un premier lieu quelques notions liées à la théorie d'estimation paramétrique et la théorie des files d'attente. Dans ce dernier point, nous avons mis l'accent sur le modèle d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback où nous avons exposé sa description, les équations d'équilibre lui associées ainsi que quelques-unes de ses mesures de performance stationnaires.

L'étude de simulation menée dans ce travail sur différents temps d'échantillonnage (simulation), différentes charges du système montrent, d'une part, que la qualité des estimations dépend à la fois de la charge du système, la durée de simulation et la caractéristique considérée dans l'estimation. D'autre part, l'impact de l'aspect de la théorie des files d'attente sur la qualité des estimations est plus considérable que celui d'aspect statistique.

Un autre constat de grande importance est que la distribution asymptotique des estimations ne se présente pas toujours sous forme d'une loi normale. Autrement dit, le comportement asymptotique de la loi des estimations n'obéissent pas toujours au théorème central limite.

Enfin, le présent travail peut être complété par ce qui suit :

- Confirmer théoriquement les résultats (convergence en EQM et en loi) obtenus dans le présent travail.
- Dégager les lois des estimations et leurs lois limite également.
- Considérer d'autres types d'échantillonnage et comparer la qualité des estimations.



# Bibliographie

- [1] M. Abba. Sur la théorie de l'estimation paramétrique, mémoire de master, université mohamed khider, Biskra, Algérie. 2019.
- [2] V. S. Adve, R. Nelson. The relationship between Bernoulli and fixed feedback policies for the  $M/G/1$  queue. *Operations research*, 42(2), 380-385, 1994.
- [3] Aide-mémoire Statistique et probabilités pour l'ingénieur, Dunod, Paris, 2001,2006.
- [4] G. D'Avignon, R. Disney. Single server queues with state dependent feedback. *INFOR : Information Systems and Operational Research*, 14(1), 71-85, 1976.
- [5] G. Ayyapan, A. M. G. Subramanian, G. Sekar.  $M/M/1$  retrial queueing system with loss and feedback under non-preemptive priority service by matrix geometric method. *Applied Mathematical Sciences*, 4(45-48), 2379-2389, 2010.
- [6] P. Bailly et C. Carrère (2015). *Statistiques descriptives : Théorie et applications*, PUG, coll.
- [7] P.M. Bernard et C. Lapointe, (1995). *Mesures statistiques en épidémiologie*, Presses de l'Université du Québec, Sainte-Foy, page 89.
- [8] M. Fackrell, P. Taylor, J. Wang. Strategic customer behavior in an  $M/M/1$  feedback queue. *Queueing Systems*, 97(3), 223-259, 2021.
- [9] R. Kumar, S. K. Sharma.  $M/M/1/N$  Queuing System with Retention of Reneged Customers, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*. 8(2012),

- 859-866, 2012.
- [10] R. Kumar, S. K. Sharma. A Markovian feedback queue with retention of renege customers and balking. *Advanced Modelling and Optimization*, 14(3), 681-688, 2012.
- [11] Lejeune, M. (2010). *Statistique la théorie et ses applications*. Springer-Verlag France, Paris.
- [12] A. Santhakumaran, V. Thangaraj. A single server queue with impatient and feedback customers. *International journal of information and management sciences*, 11(3), 71-79, 2000.
- [13] Saporta, G. (2011). *Probabilités, analyse des données et statistique*. Technip, Paris.
- [14] L. Takàcs. A single server Queue with Feedback. *Bell system Technical journal*, 42, 134-149, 1963.
- [15] V. Thangaraj, S. Vanitha. On the analysis of  $M/M/1$  feedback queue with catastrophes using continued fractions. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 53(1), 131-151, 2009.

## Résumé

Dans ce travail, nous avons abordé le problème d'estimation des caractéristiques stationnaires du système d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback. L'étude de simulation munie pour différents temps d'échantillonnage (simulation), différentes charges du système montrent, d'une part, que la qualité des estimations et leurs convergence en loi dépend à la fois de la charge du système, la durée de simulation et la caractéristique considérée dans l'estimation. D'autre part, l'impact de l'aspect de la théorie des files d'attente sur la qualité des estimations est plus considérable que celui d'aspect statistique.

**Mots clés :** File d'attente markovien, feedback, estimation, convergence, EQM.

## Abstract

In this work, we tackled the problem of estimating the stationary characteristics of the  $M/M/1$  waiting system with Bernoulli feedback. The simulation study provided for different sampling times (simulation times), and different system traffic intensity show, on the one hand, that the quality of the estimates and their convergence in law depends both on the system traffic intensity, the duration of the simulation, and the characteristic considered in the estimation. On the other hand, the impact of the queuing theory on the quality aspect of the estimates is more considerable than that of the statistical one.

**Key words :** Markovian queue, feedback, estimation, convergence, MSE.

## Résumé

Dans ce travail, nous avons abordé le problème d'estimation des caractéristiques stationnaires du système d'attente  $M/M/1$  avec Bernoulli feedback. L'étude de simulation munie pour différents temps d'échantillonnage (simulation), différentes charges du système montrent, d'une part, que la qualité des estimations et leurs convergence en loi dépend à la fois de la charge du système, la durée de simulation et la caractéristique considérée dans l'estimation. D'autre part, l'impact de l'aspect de la théorie des files d'attente sur la qualité des estimations est plus considérable que celui d'aspect statistique.

**Mots clés :** File d'attente markovien, feedback, estimation, convergence, EQM.

## Abstract

In this work, we tackled the problem of estimating the stationary characteristics of the  $M/M/1$  waiting system with Bernoulli feedback. The simulation study provided for different sampling times (simulation times), and different system traffic intensity show, on the one hand, that the quality of the estimates and their convergence in law depends both on the system traffic intensity, the duration of the simulation, and the characteristic considered in the estimation. On the other hand, the impact of the queuing theory on the quality aspect of the estimates is more considerable than that of the statistical one.

**Keywords:** Markovian queue, feedback, estimation, convergence, MSE.

## المخلص

في هذا العمل تناولنا مشكلة تقدير الخصائص نظام الانتظار ثابتة  $M / M / 1$  مع ردود الفعل برنولي. دراسة المحاكاة المقدمة لأوقات أخذ العينات المختلفة (المحاكاة)، مختلفة تظهر رسوم النظام، من ناحية، أن جودة التقديرات التقارب في القانون يعتمد على حد سواء على تحميل النظام، ومدة المحاكاة والخاصية التي تم النظر فيها في التقدير. من ناحية أخرى، فإن تأثير الجانب من نظرية الطابور على نوعية التقديرات هو أكثر أهمية من الجانب الإحصائي.

**الكلمات المفتاحية:** قائمة انتظار ماركوفيان، ردود الفعل، التقدير، التقارب.