République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTE des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire présenté par

Chama Fayrouz

En vue de l'obtention du Diplôme de

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Titre

Formes quadratiques définies sur un vecteur aléatoire gaussien

Membres du Comité d'Examen

Pr.	Yahia Djabrane	UMKB	Président
Pr.	Meraghni Djamel	UMKB	Encadreur
Dr.	Abdelli Djihane	UMKB	Examinateur

Juin 2023

Dédicace

Je dédie cet humbel travail :

A mon père qui fait l'impossible pour me donner le bonheur

et pour suivre mes études jusqu'à ce jour.

A ma mère qui m'a soutenue et encouragée durant mes années d'études.

Fayrouz Chama

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je remercie du plus profond de mon coeur **ALLAH**, tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ce travail.

Je remercie du fond de mon coeur, mes parents qui m'ont soutenue, encouragée et motivée.

Je remercie mon encadreur **Dr. Meraghni Djamel**, d'avoir accepté de diriger ce projet et pour sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire pour ses encouragements, et ses précieux conseils.

Je remercie également tous les enseignants et employés de la Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de Vie, en particulier ceux du Département de Mathématiques.

Enfin je remercie ma famille et toute personne m'ayant aidée et guidée pour la réalisation de ce mémoire.

Fayrouz Chama

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les formes quadratiques définie sur un vecteur gaussien sont un sujet important dans les mathématiques modernes. Elles ont des applications en statistique, en théorie de l'information et en théorie du signal. Une forme quadratique est une expression de la forme $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2$, où x_1 et x_2 sont des variables et a, b et c sont des constantes. Lorsqu'on parle de formes quadratiques définies sur un vecteur gaussien, on considère que les variables sont des composantes d'un vecteur aléatoire gaussien.

Elles sont utilisées en statistique pour modéliser la distribution des données ainsi que pour estimer les coefficients des modèles de régression linéaire multiple. En d'autres termes, l'objectif de l'utilisation des formes quadratiques en statistique est de comprendre et caractériser la structure des données afin d'effectuer des inférences sur des populations.

Ce mémoire se compose de deux chapitres :

- **Chapitre 1 :** Vecteurs aléatoires. Ce chapitre, est consacré à la définition et aux propriétés des vecteurs aléatoires et à leurs types (discret et continu). Et s'attache à donner un exemple pour chaque type de vecteur aléatoire.
- **Chapitre 2 :** Vecteurs aléatoires gaussiens. Dans ce chapitre, on introduit quelques notions sur les vecteurs aléatoires gaussiens, la loi du Khi-deux et les résultats fondamentaux sur les formes quadratiques.

Les résultas et les représentations graphiques sont obtenus à l'aide du logiciel de traitement statistique R et les codes de programmation sous R, et les abréviations et notations utilisées sont rassemblés en deux annexes.

Chapitre 1

Vecteurs aléatoires

Ce chapitre est consacré aux notions de base (loi de probabilité multivariée, fonction de densité, vecteur moyen, matrice de covariance, fonction caractéristique,...) sur les vecteurs aléatoires.

1.1 Vecteur aléatoire

Définition 1.1.1 *Soient $X_1, X_2, ..., X_p$ $(p \geq 1)$ des variables aléatoires (v.a) définies sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Le p-uplet $X = (X_1, X_2, ...X_p)'$ est appelé vecteur aléatoire réel sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Ce vecteur prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^p$:*

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) = (X_1(\omega), ..., X_p(\omega))' \end{array}$$

On l'appelle aussi v.a multidimensionelle ou multivariée.

Remarque 1.1.1

1. *Les v.a $X_1, X_2, ..., X_p$ sont appelées composantes du vecteur X.*
2. *Dans le cas particulier $p = 2$ on parle de couple aléatoire.*

Selon la nature des composantes $X_1, X_2, ..., X_p$, on distingue deux types de vecteurs aléatoires : discret et continu. On note que, par la suite, on ne va s'interesser qu'aux vecteurs aléatoires continus.

Définition 1.1.2 *Le vecteur aléatoire X est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a discrète. Dans le cas où ces composantes sont des v.a continues, on dira que X est un vecteur aléatoire continu.*

1.2 Loi de probabilité

1.2.1 Fonction de répartition conjointe

La loi d'un vecteur aléatoire X est donné par sa fonction de répartition F définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$$F(x_1, ..., x_p) := P(X_1 \leq x_1, ..., X_p \leq x_p). \tag{1.1}$$

Elle possède des propriétés semblables à celles d'une v.a (unidimensionnelle) (voir [4], page 47).

1.2.2 Densité de probabilité conjointe

La fonction de répartition F, définie par (1.1) , étant dérivable (presque partout) sur $\mathbb{R}^p$, on définit la densité de probabilité conjointe par

$$f(x_1, ..., x_p) := \frac{\partial^p F(x_1, ..., x_p)}{\partial x_1 .... \partial x_p}.$$

Elle vérifie les deux assertions suivantes (voir [4], page 48) :

- f est positive.
- f est intégrable avec $\int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x_1, ..., x_p) dx_1 ... dx_p = 1.$

Remarque 1.2.1 *On exprime la fonction de répartition en termes de la densité de pro-*

babilité :

$$F(x_1, ..., x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_p} f(u_1, ..., u_p) du_1 ... du_p.$$

1.2.3 Densités marginales et conditionnelles

Soit X_k $(k = 1, ..., p)$ une composante quelconque du vecteur aléatoire X. La fonction de répartition marginale de X_k est définie par (voir [4], page 69)

$$F_k(x_k) := P(X_k \leq x_k) = F(\infty, ..., \infty, x_k, \infty, ..., \infty),$$

et sa densité de probabilité marginale est

$$f_k(x_k) := \frac{\partial F_k(x_k)}{\partial x_k} = \int_{\mathbb{R}^{p-1}} f(x_1, ..., x_p) dx_1 ... dx_{k-1} dx_{k+1} ... dx_p.$$

Si on partage le vecteur X en deux blocs (sous vecteurs) $X^{(1)} := (X_1, X_2, ..., X_q)'$ et $X^{(2)} := (X_{q+1}, X_2, ..., X_p)'$ de dimensions respectives q et $p - q$ telles que $1 \leq q \leq p - 1$:

$$X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Alors, on définit la fonction de répartition et la densité de probabilité de $X^{(1)}$ par

$$F(x_1, ..., x_q) := P(X_1 \leq x_1, ..., X_q \leq x_q, X_{q+1} \leq \infty, ..., X_p \leq \infty),$$

et

$$f(x_1, ..., x_q) := \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_p) dx_{q+1} ... dx_p,$$

respectivement. Autrement dit, la densité conjointe des composantes $X_1, ..., X_q$ est obtenue en intégrant la densité du vecteur $(X_1, ..., X_p)'$ par rapport aux coordonnées restantes.

Remarque 1.2.2 *Plus généralement, la densité d'un sous ensemble de composantes est obtenue en intégrant la densité conjointe f par rapport au sous ensemble complémentaire (voir [4], page 50).*

La densité conditionnelle du bloc $X^{(2)}$ sachant $X^{(1)}$ est définie, dans le cas où $f(x_1, ..., x_q)$ est non nulle, par

$$f_{X^{(2)}/X^{(1)}}(x_{q+1}, ..., x_p) = \frac{f(x_1, ..., x_p)}{f(x_1, ..., x_q)}.$$

1.2.4 Indépendance

Les composantes $X_1, ..., X_p$ du vecteur X sont dites indépendantes si et seulement si les densités conditionnelles sont égales aux densités marginales respectives :

$$f_{X_k/(X_1,...,X_{k-1},X_{k+1},...,X_p)}(x_k) = f_{X_k}(x_k), \ k = 1, ...p.$$

Ceci est équivalent à dire que la densité conjointe est égale au produit des densités marginales : (voir [3], page 6)

$$f(x_1, ..., x_p) = f_{X_1}(x_1)...f_{X_p}(x_p). \tag{1.3}$$

On en déduit les deux résultats suivants.

Proposition 1.2.1 *Si les v.a $X_1, ..., X_p$ sont indépendantes alors l'espérance de leur produit est égal au produit de leurs espérances :*

$$E\left[\prod_{i=1}^{p} X_i\right] = \prod_{i=1}^{p} E[X_i]. \tag{1.4}$$

Preuve. On a

$$E\left[\prod_{i=1}^{p} X_i\right] = \int_{\mathbb{R}^p} x_1...x_p f(x_1, ..., x_p) dx_1...dx_p.$$

Le résultat découle en utilisant l'équation (1.3). ∎

Proposition 1.2.2 *Les v.a $X_1, ..., X_p$ sont indépendantes si et seulement si*

$$\forall u \in \mathbb{R}^p,\ \varphi_X(u_1, ..., u_p) = \varphi_{X_1}(u_1)....\varphi_{X_p}(u_p),$$

où φ_{X_i} $(i = 1, ..., p)$ désigne la fonction caractéristique marginale.

Preuve. (Voir [9], page 87). ■

1.2.5 Vecteur moyen et matrice de covariance

L'espérance du vecteur aléatoire X ou vecteur moyen est défini par (voir [1], page 87) :

$$\mu = E(X) := (\mu_1, ..., \mu_p)',$$

où $\mu_k := E[X_k]$ désigne l'espérance de la composante X_k, $k = 1, ..., p$.

La matrice de covariance du vecteur aléatoire X est une matrice carrée d'ordre p, notée par Σ, de terme général (voir [1], page 88)

$$\sigma_{ij} := Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)],\ i, j = 1, ..., p.$$

Matrice de corrélation

La matrice de corrélation du vecteur aléatoire X est une matrice carrée d'ordre p, notée par R, de terme général

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},\ i, j = 1, ..., p.$$

Remarque 1.2.3 *1. Σ et R sont deux matrices symétriques définies positives.*

2. On a $\sigma_{ij} = E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j]$ et $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, $i, j = 1, ..., p$.

3. Le terme diagonal σ_{ii} de Σ n'est autre que la variance de la v.a X_i (on le note alors par σ_i^2) et celui de R est $\rho_{ii} = 1$.

4. Les écritures matricielles de Σ et R sont

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & . & . & . & \sigma_{1p} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \sigma_{1p} & & & & \sigma_p^2 \end{pmatrix} \quad et \; R = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & \rho_{1p} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \rho_{1p} & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Proposition 1.2.3 *Si les v.a $X_1, ..., X_p$ sont indépendantes alors les deux matrices Σ et R sont diagonales. On dit alors que ces v.a sont non corrélées deux àdeux.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le résultat (1.4) de la proposition (1.2.1). ∎

Remarque 1.2.4 *La réciproque de la proposition (1.2.3) n'est pas vraie (tout comme celle de la proposition 1.2.1). En d'autres termes, deux v.a non corrélées ne sont pas nécessairement indépendantes.*

1.3 Exemples

1.3.1 Cas discret

Soit (X, Y) un couple aléatoire discret distribué selon le tableau suivant :

$y \diagdown x$	0	1	2
1	0.24	0.18	0.12
2	0.16	0.22	0.08

On résume les fonctions de probabilité marginales, définies par

$$P_X(x) = \sum_y P(x, y) \text{ et } P_Y(y) = \sum_x P(x, y),$$

(avec la distribution conjointe), dans le tableau 1.1.

$y \diagdown x$	0	1	2	$P_Y(y)$
1	0.24	0.18	0.12	0.54
2	0.16	0.22	0.08	0.46
$P_X(x)$	0.40	0.40	0.20	1

Tab. 1.1 – Loi conjointe d'un couple aléatoire discret et ses marginales

Puisque on a

$$P(0,1) \neq P_X(0).P_Y(1),$$

alors les deux composantes X et Y ne sont pas indépendantes.

Les lois de probabilité conditionnelles correspondantes sont présentées dans les tableaux 1.2 et 1.3.

x	0	1	2	total
$P_{X/Y=1}$	$\frac{0.24}{0.54}$	$\frac{0.18}{0.54}$	$\frac{0.12}{0.54}$	1
$P_{X/Y=2}$	$\frac{0.16}{0.46}$	$\frac{0.22}{0.46}$	$\frac{0.08}{0.46}$	1

Tab. 1.2 – Loi conditionnelle de X sachant Y d'un couple aléatoire discret (X,Y)

y	1	2	total
$P_{Y/X=0}$	$\frac{0.24}{0.40}$	$\frac{0.16}{0.40}$	1
$P_{Y/X=1}$	$\frac{0.18}{0.40}$	$\frac{0.22}{0.40}$	1
$P_{Y/X=2}$	$\frac{0.12}{0.20}$	$\frac{0.08}{0.20}$	1

Tab. 1.3 – Loi conditionnelle de Y sachant X d'un couple aléatoire discret (X,Y)

Le vecteur moyen est (après calcul)

$$\mu = (0.80, 1.46)'.$$

Les matrices de covariance et de corrélation sont

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.012 \\ 0.012 & 0.25 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & 0.032 \\ 0.032 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Cas continu

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité

$$f(x, y) = \left(\frac{5}{2} - x\right) y I_{[0,1]^2}(x, y).$$

Les densités marginales sont

$$f_X(x) = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - x\right) y I_{[0,1]}(x) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - x\right) I_{[0,1]}(x),$$

et

$$f_Y(y) = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - x\right) y I_{[0,1]}(y) dx = 2y I_{[0,1]}(y).$$

On obtient les densités conditionnelles comme suit :

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - x\right) I_{[0,1]}(x),$$

et

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = 2y I_{[0,1]}(y).$$

On constate que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on a

$$f(x, y) = f_X(x).f_Y(y).$$

Alors, on conclut que X et Y sont indépendantes, et donc elles sont non corrélées. Par coséquent, les matrices Σ et R seront diagonales. Le vecteur moyen est (après calcul)

$$\mu = (0.46, 0.67)'.$$

Les matrices de covariance et de corrélation sont

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.06 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Vecteurs aléatoires gaussiens

Dans ce chapitre, on présente les définitions et propriétés fondamentales des vecteurs aléatoires mutinormaux.

2.1 Définition

Un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ est un vecteur aléatoire gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a réelle gaussienne.

$$a'X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2), \; a \in \mathbb{R}^p$$

On en déduit que toutes les composantes de X sont des v.a gaussiennes réelles.

Définition 2.1.1 *Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_p)'$ un vecteur aléatoire, X est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a gaussienne. Autrement dit, pour toute suite réelle $(a_1, a_2, ..., a_p)$ la v.a*

$$Z = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_pX_p,$$

est gaussienne.

Remarque 2.1.1 *On a*

$$X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma) \Longrightarrow a'X \sim \mathcal{N}(a'\mu, a'\Sigma a), \ a \in \mathbb{R}^p.$$

En particulier

$$X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma) \Longrightarrow X_j \sim \mathcal{N}\left(\mu_j, \sigma_j^2\right), \ j = 1, ..., p.$$

2.1.1 Propriétés

Densité de probabilité

Soit $\mu = (\mu_1, ..., \mu_p)'$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et Σ une matrice réelle symétrique définie positive ($\det \Sigma \neq 0$) de la forme (1.5) . La densité de probabilité du vecteur X est définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)' \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}.$$

On dit que X est de distribution multinormale de paramètres μ et Σ qui représentent le vecteur moyen et la matrice de covariance. On écrit $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$.

Remarque 2.1.2 *Le cas particulier où $\mu = 0$ et $\Sigma = I_p$ correspond au vecteur multinormal standard Z de densité*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z'z\right\}.$$

Le passage du cas général au cas standard se fait via le changement de variable

$$Z = \Sigma^{-1/2}(X - \mu),$$

où $\Sigma^{-1/2}$ est l'inverse de la matrice racine $\Sigma^{1/2}$. Pour des détails sur la définition de cette dernière se référer à ([9], page 88).

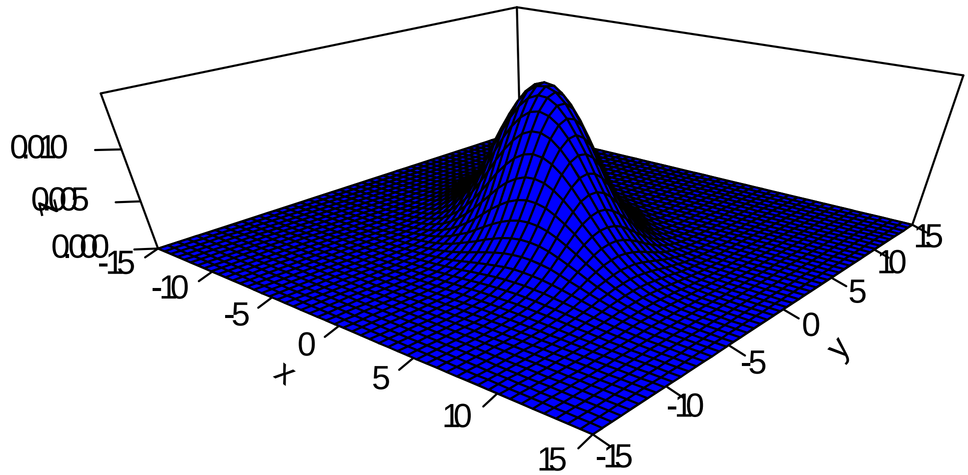

Fig. 2.1 – La densité binormale

Fonction caractéristique

Proposition 2.1.1 *La fonction caractéristique du vecteur* $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ *est égale à*

$$\varphi_X(a) = \exp\{ia'\mu - \frac{1}{2}a'\Sigma a\}, \ a \in \mathbb{R}^p, \tag{2.1}$$

où i *est le nombre complexe dont le carré est égal à* -1.

Remarque 2.1.3 *Dans le cas standard* $X \sim \mathcal{N}_p(0, I_p)$, *on a*

$$\varphi_X(a) = \exp\{-\frac{1}{2}a'a\}, \ a \in \mathbb{R}^p. \tag{2.2}$$

Preuve. La formule (2.1) se déduit de la formule (2.2) par un simple changement de variable. Pour la démonstration de cette dernière, (voir [9], page 89). ∎

2.1.2 Indépendance des composantes

La réciproque de la proposition 1.2.3 est vraie pour des v.a $X_1, ..., X_p$ représententant les composantes d'un vecteur aléatoire gaussien. On le résultat suivant, (voir [1], page 81).

Proposition 2.1.2 *Les composantes $X_1, ..., X_p$ du vecteur $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées (c-à-d Σ et/ou R sont diagonales).*

Preuve. L'implication directe est vraie pour un vecteur aléatoire quelconque (voir la propostion 1.2.3). Pour la réciproque, si la matrice Σ est diagonale alors

$$\begin{aligned}\varphi_X(a_1, ..., a_p) &= \exp\{i\sum_{j=1}^{p} a_j\mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} a_j^2\sigma_j^2\} = \exp\{\sum_{j=1}^{p}\left(ia_j\mu_j - \frac{1}{2}a_j^2\sigma_j^2\right)\} \\ &= \prod_{j=1}^{p}\exp\{ia_j\mu_j - \frac{1}{2}a_j^2\sigma_j^2\} = \prod_{j=1}^{p}\varphi_{X_j}(u_j).\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la proposition 1.2.2, les v.a $X_1, ..., X_p$ sont indépendantes. C'est le résultat recherché. ■

2.1.3 Lois conditionnelles

On partitionne le vecteur X en deux sous vecteurs $X^{(1)} := (X_1, ..., X_q)'$ et $X^{(2)} := (X_{q+1}, ..., X_p)'$, de dimensions respectives q et $p-q$ telles que $1 \leq q \leq p-1$, comme en (1.2). On décompose le vecteur moyen μ et la matrice de covariance Σ comme suit, ([1], page 94) :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix} \text{ et } \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Sous la condition $\det(\Sigma_{22}) > 0$, la loi de probabilité conditionnelle de $X^{(1)}$ sachant $X^{(2)}$ est une loi gaussienne $q-$dimensionnelle d'espérance

$$E\left[X^{(1)}/X^{(2)} = x^{(2)}\right] = \mu^{(1)} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\left(x^{(2)} - \mu^{(2)}\right),$$

et de matrice de covariance

$$Cov\left(X^{(1)}/X^{(2)}\right) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}.$$

2.1.4 Théorème central-limite multivarié

C'est la généralisation du célèbre théorème central limite unidimensionnel. Soit $\left(X^{(1)}, ..., X^{(n)}\right)$ un échantillon, de taille $n \geq 1$, d'un vecteur aléatoire X de dimension $p \geq 2$. Ce théorème dit que, sous certaines conditions, la somme des vecteurs $X^{(1)}$, $X^{(2)}, ...$ et $X^{(n)}$ est asymptotiquement de distribution multinormale. Leur moyenne empirique l'est aussi.

On suppose que l'espérance de X vaut μ et que sa matrice de covariance est égale à Σ. On pose

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} \text{ et } \overline{X}_n := \frac{S_n}{n}.$$

Proposition 2.1.3 (Théorème Central Limite) *On les deux résultats équivalents suivants :*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}_p\left(0, \Sigma\right) \ \ et/ou \ \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}_p\left(0, I_p\right).$$

Preuve. Voir [3], page 14. ■

2.1.5 Loi binormale

Dans le cas particulier $p = 2$, le vecteur $X = (X_1, X_2)'$ est appelé couple aléatoire. En notant la corrélation ρ_{12} entre les deux composantes X_1 et X_2 par ρ, on peut écrire $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$. Ainsi la matrice de covariance s'écrit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Si X est gaussien, alors sa densité probabilité est définie par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$
$$\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + (\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}.$$

La distribution de X_1 conditionné par X_2 est

$$(X_1/X_2 = x_2) \sim \mathcal{N}_p\left(\mu_1 + \rho\sigma_1(x_2-\mu_2), \sigma_1^2 - \rho\sigma_1^2\sigma_2\right).$$

Remarque 2.1.4 *Si $\rho = 0$, la densité de probabilité conjointe est égale au produit des deux densités marginales et les distributions conditionnelle et marginale sont les mêmes. Ceci implique l'indépendance des deux composantes X_1 et X_2.*

2.2 Formes quadratiques

On commence cette section par un rappel des proprétés fondamentales de la distribution du Khi-deux, qui est très fortement liée aux formes quadratiques.

2.2.1 Loi du Khi-deux χ^2_υ

Définition 2.2.1 *La loi du χ^2 est la distribution de la somme de carrés de v.a normales centrés réduites indépendantes : Si $X = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_\upsilon^2$ $(\upsilon \geq 1)$, avec $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $i = 1, ..., \upsilon$ indépendantes. Alors, $X \sim \chi^2_\upsilon$. Le paramètre υ est appelé degrés de liberté du Khi-deux.*

Densité de probabilité

La densité de probabilité de la loi du khi-deux à υ degrés de liberté est

$$f_\upsilon(x) = \frac{1}{2^{\upsilon/2}\Gamma\left(\upsilon/2\right)} x^{\upsilon/2-1} e^{-x/2},\ x > 0,$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx,\ r > 0.$$

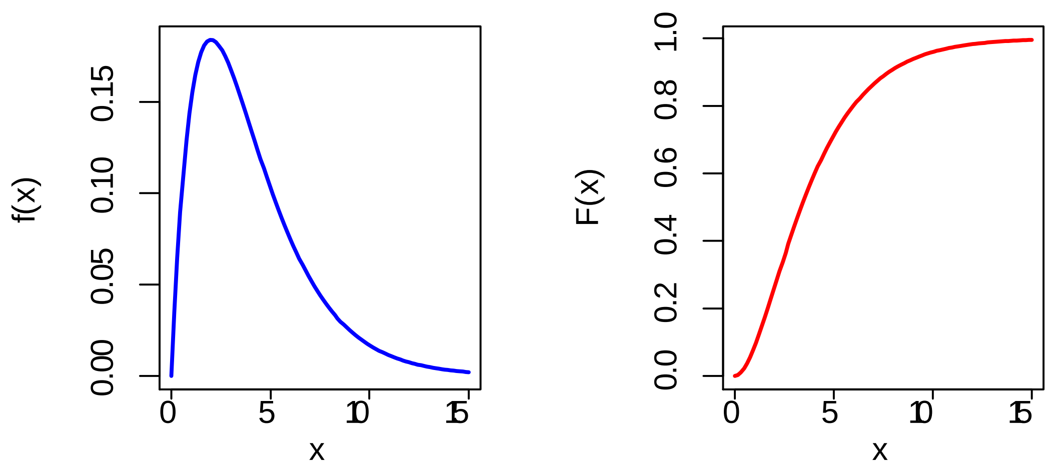

FIG. 2.2 – Densité de probabilité (gauche) et fonction de répartition (droite) de la loi χ^2_4

Fonction caractéristique

Proposition 2.2.1 *La fonction caractéristique de la loi Khi-deux à υ degrés de liberté est*

$$\varphi_X(t) = (1 - 2it)^{-\upsilon/2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Preuve. La démonstration détaillée se trouve dans [6], page 6. On a par définition

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}).$$

Alors

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} f_\upsilon(x)dx = \frac{1}{2^{\upsilon/2}\Gamma(\upsilon/2)} \int_0^{+\infty} x^{\upsilon/2-1} e^{-(1/2-it)x} dx.$$

En faisant le changement de variable $u = (1/2 - it)x$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \frac{1}{2^{\upsilon/2}\Gamma(\upsilon/2)} \frac{1}{(1/2-it)^{\upsilon/2}} \int_0^{+\infty} u^{\upsilon/2-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{2^{\upsilon/2}\Gamma(\upsilon/2)} \frac{1}{(1/2-it)^{\upsilon/2}} \Gamma(\upsilon/2) = \frac{1}{(1-2it)^{\upsilon/2}}. \end{aligned}$$

C'est le résultat voulu. ■

Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments (f.g.m) de la loi χ^2_υ est donnée par

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\upsilon/2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Preuve. La même démonstration que celle de la fonction cacractéristique. ■

Espérance-Variance

Si $X \sim \chi^2_\upsilon$, on a

$$E(X) = \upsilon \text{ et } V(X) = 2\upsilon.$$

En effet, d'après [7], page 73, la loi χ^2_υ est un cas particulier de la loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$, avec $\alpha = 1/2$ et $\beta = \upsilon/2$. Donc

$$E(X) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\upsilon/2}{1/2} = \upsilon \text{ et } V(X) = \frac{\beta}{\alpha^2} = 4\upsilon/2 = 2\upsilon.$$

Propriétés

1. Si $X \sim \mathcal{N}_p(0, I_p)$, alors $X'X \sim \chi^2_p$.
2. Additivité : si $X \sim \chi^2_r$ et $Y \sim \chi^2_s$ sont indépendantes, alors

$$Z = X + Y \sim \chi^2_{r+s}$$

Preuve.

1. On a $X'X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_p^2 \sim \chi^2_p$, car les X_i sont normales standard et indépendantes.
2. Si $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ sont les fonctions gérératrices des moments (f.g.m) de X et de Y, respectivement, alors la f.g.m $M_Z(t)$ de Z est, grâce à l'indépendance,

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t) = (1-2t)^{-r/2}(1-2t)^{-s/2} = (1-2t)^{-(r+s)/2}.$$

C'est la f.g.m d'une loi du Khi-deux à $(r+s)$ degrés de liberté. ■

2.2.2 Formes quadratiques

Définition 2.2.2 *Soient $Y = (Y_1, ..., Y_p)' \sim \mathcal{N}_p(0, I_p)$ et A une matrice symétrique d'ordre p et de rang $r \leq p$. La v.a*

$$Q := Y'AY,$$

est appelée forme quadratique définie (ou associée) sur le vecteur Y.

Cas particulier : distance de Mahalanobis

Si $X = (X_1, ..., X_p)' \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$, alors le vecteur $Y = \Sigma^{-1/2}(X - \mu) \sim \mathcal{N}_p(0, I_p)$. En prenant $A = I_p$, on obtient la forme quadratique

$$Q = Y'AY = (X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu).$$

C'est une forme quadratique (définie sur X) particulière appelée distance de Mahalanobis de X à μ et généralement notée par D^2 (voir [9], page 89).

Loi de probabilité

Proposition 2.2.2

$$D^2 := (X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu) \sim \chi^2_p.$$

Preuve. On a

$$D^2 = Y'Y = \sum_{j=1}^{p} Y_j^2,$$

avec $Y_j \sim \mathcal{N}(0,1)$, $j = 1, ..., p$, indépendantes. Par conséquent, D^2 est une v.a du Khi-deux à p degrés de liberté. ■

Remarque 2.2.1 *Dans le cas où A n'est pas nécessairement égale à I_p, avec $rang(A) = r$, on a*

$$Q = Y'AY \sim \chi^2_r.$$

Fonction caractéristique

Proposition 2.2.3 *La fonction caractéristique de la forme quadratique Q est*

$$\varphi_Q(t) = [\det(I - 2itA)]^{-1/2}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\varphi_Q(t) = E[\exp(itQ)] &= \int_{\mathbb{R}^p} \exp(ity'Ay)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \exp(ity'Ay)\frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y'y\right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left(-\frac{1}{2}y'(I_p - 2itA)y\right) dy.\end{aligned}$$

Si on pose $\Sigma = (I - 2itA)^{-1}$, alors on a

$$\begin{aligned}\varphi_Q(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \int_{\mathbb{R}^p} \exp\left(-\frac{1}{2}y'\Sigma^{-1}y\right) dy \\ &= (\det \Sigma)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{(2\pi)^{p/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y'\Sigma^{-1}y\right) dy\end{aligned}$$

Or la dernière intégrale est égale à 1, d'où le résultat voulu. ■

Propriétés

Les résultats suivants et leurs preuves sont extraits de [9].

1. La forme quadratique $Q = Y'AY$ associée à $Y \sim \mathcal{N}_p(0, I_p)$, avec $rang\,(A) = r$, suit la distribution du Khi-deux si et seulement si A est un opérateur de projection orthogonale (la matrice A est idempotente), c-à-d

$$Q \sim \chi^2_r \Longleftrightarrow A^2 = A.$$

2. Soient $X \sim \mathcal{N}_p(0, \sigma^2 I_p)$ et $Q_X = X'AX$ une forme quadratique, avec $rang\,(A) = r$. Alors

$$\frac{Q}{\sigma^2} \sim \chi^2_r \Longleftrightarrow A^2 = A.$$

3. Soient $U \sim \mathcal{N}_p(0, \Sigma)$ et $Q_U = U'AU$ une forme quadratique, avec $rang\,(A) = r$. Alors

$$Q_U \sim \chi^2_r \Longleftrightarrow A\Sigma A = A.$$

Indépendance de formes quadratiques

Proposition 2.2.4 (Théorème de Craig) *Soient* $X = (X_1, .., X_p)' \sim \mathcal{N}_p(\mu, I_p)$ *et* A_1 *et* A_2 *deux matrices symétriques de rang* $r \leq p$. *On définit les deux formes quadratiques* $Q_1 = X'A_1X$ *et* $Q_2 = X'A_2X$. *Alors* Q_1 *et* Q_2 *sont indépendantes si et seulement si* $A_1A_2 = 0$.

Preuve. Voir [9], page 96. ■

Remarque 2.2.2 *On généralise le résultat ci-dessus. Soient* $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$, A_1 *et* A_2 *deux matrices symétriques. Les formes quadratiques* $Q_1 = X'A_1X$ *et* $Q_2 = X'A_2X$ *sont indépendantes si et seulement si* $A_1\Sigma A_2 = 0$.

Proposition 2.2.5 (Théorème de Cochran) *Soit* $X \sim \mathcal{N}_p(0, I_p)$ *On suppose que la forme quadratique* $Q = X'X$ *se décompose en la somme de* k *formes quadratiques* $Q_i = X'A_iX$, *avec* $rang(A_i) = r_i$, $1 \leq i \leq k$, $\left(Q = \sum_{i=1}^{k} Q_i\right)$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i = p$.
- $A_i^2 = A_i$ *et* $A_iA_j = 0$, $i, j = 1, ..., k$ *avec* $i \neq j$.
- $Q_i \sim \chi^2_{r_i}, i = 1, ..., k$.
- *Les* Q_i *sont indépendantes.*

Preuve. Voir [9], page 97. ■

Remarque 2.2.3 *Etant donné* $X \sim \mathcal{N}_p(0, \sigma^2 I_p)$, *on suppose que* $Q = X'X$ *se décompose en* k *formes quadratiques,* $Q_i = X'A_iX$ *avec* $r(A_i) = r_i$. *Alors* $Q_1, ..., Q_k$ *sont mutuellement indépendantes et* $Q_i/\sigma^2 \sim \chi^2_{r_i}$ *si et seulement si* $\sum_{i=1}^{k} r_i = p$.

Conclusion

Ce travail est consacré, à l'étude de formes quadratiques définie sur un vecteur gaussien, on a présenté les notions de base (loi de probabilité multivariée, fonction de densité, vecteur moyen, matrice de covariance, fonction caractéristique,...) sur les vecteurs aléatoires. Ensuite on a donné quelque propriétés de vecteurs aléatoires gaussiens et les propriétés des formes quadratiques, dont le théorème de Cochran surl'indépendance des formes quadratiques de vecteurs gaussiens.

Bibliographie

[1] Bigot, J. (2014). Notes de cours de Probabilités.https ://www.math.u-bordeaux.fr/~jbigot/Site/Enseignement_files/cours_proba_ISAE.pdf.

[2] Boudib, S. (2019). Introduction aux processus gaussiens, mémoire de Master, Université de Biskra.

[3] Christophe, J. (2006). Processus Gaussiens. Université de La Rochelle.

[4] Dauxois, J.Y. (2011) . Cours de probabilités. Université de Toulouse.

[5] Deschamps, P. (2007) . Cours d'économétrie. Université de Fribourg.

[6] Dusart, P. (2018). Cours de statistiques inférentielles. https ://www.unilim.fr/pages_perso/pierre.dusart/Probas/cours_stat_S4.pdf.

[7] Lejeune, M. (2010). Statistique : la Théorie et ses Applications. Deuxième édition. Springer.

[8] Rush, J.J. (2013). Vecteurs gaussiens.préparation à l'agrégation. Université de Bordeaux 1.

[9] Saporta, G. (2011). Probabilités, analyse des données et statistique. Technip, Paris.

Annexe A : Codes R

Le langage R est un logiciel dans lequel de nombreuses techniques statistiques modernes et classiques ont été implémentées. Il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les représentations graphiques et les calculs. Dans cette section, on représente les fonctions de densité et de répartition de loi du Khi-deux et ainsi que que la densité binormale.

Loi binormale

#on construit la fonction à représenter f (voir [2], page 36)

Logiciel R

```
mu1<-0

mu2<-0

s11<-15

s12<-20

s22<-10

rho<-0.5

f<-function(x,y){

term1<-1/(2*pi*sqrt(s11*s22*(1-rho^2)))

term2<--1/(2*(1-rho^2))

term3<-(x-mu1)^2/s11

term4<-(y-mu2)^2/s22
```

```
term5<-2*rho*((x-mu1)*(y-mu2))/(sqrt(s11)*sqrt(s22))
term1*exp(term2*(term3+term4-term5))}
# on définit deux vecteurs correspondant aux axes x et y
x<-seq(-15,15,length=50)
y<-x
# on calcule la valeur de z=f(x,y) pour tous les couples x[i],y[i] avec la fonction outer
z<-outer(x,y,f)
#on utilise la fonction persp
x11()
persp(x,y,z,theta=40,phi=30,expand=0.5,col="blue",ticktype="detailed")
```

Loi du Khi-deux

```
nu=4     #degré de liberté
par(mfrow=c(1,2))
#x=seq(1,10,0.01)
curve(dchisq(x,nu),type="l",xlim=c(0,15),col="blue",ylab="f (x)",lwd=2)
curve(pchisq(x,nu),type="l",xlim=c(0,15),col="red",ylab="F (x)",lwd=2)
```

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

Notation	**Significations**
Ω	ensemble fondamental.
$\mathcal{A}$	tribu définie sur l'espace fondamental Ω.
$(\Omega, \mathcal{A})$	espace probabilisé.
ω	événement élémentaire.
$v.a$	variables aléatoires.
$c.\grave{a}.d$	c'est à dire.
$(X_1, .., X_p)$	échantillon de taille p de X.
A'	transposée de la matrice A.
F	fonction de répartition.
f	densité de probabilité.
ρ	cofficient de corrélation.
φ_X	fonction caractéristique.
P_{ij}	loi de probabilité conjointe.
P_{X_i}	la iéme loi marginale probabilité sur $\mathbb{R}$.
P_{X_i/X_j}	loi de probabilité conditionnelle.

Notation	**Significations**
$Cov(X_i, X_j)$	covariance entre X_i et X_j.
σ	l'écart type.
$E(X)$	espérance mathématique ou moyenne de X.
$V(X)$	variance de X.
Σ	matrice de covariance.
R	matrice de corrélation.
$\sim$	suit la loi.
$\xrightarrow{loi}$	converge en loi.
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	la loi normale d'espérace μ et de variance σ^2.
I_p	matrice identité.
M_X	fonction génératrice des moments.
χ^2_v	loi du Khi-deux.
Γ	loi Gamma.
Q	forme quadratique.
$\overline{X}_n$	moyenne empirique.
S^2_n	variance empirique.

ملخص

درسنا في هذه المذكرة بعض الخصائص العامة للأشعة العشوائية الغاوسية حيث قدمنا بعض النظريات والنتائج حول استقلالية وقوانين الأشكال التربيعية للأشعة العشوائية الغاوسية التي تتبع قوانين مربع كاي. هذه النتائج أساسية في التقدير الإحصائي واختبار الفرضيات الإحصائية. كما ذكرنا بنظرية كوكران مع دراسة محاكاة لوظيفة الكثافة ووظيفة توزيع مربع كاي.

الكلمات المفتاحية: الأشعة العشوائية، الأشعة الغاوسية، الاشكال التربيعية، نظرية كوكران.

Abstract

In this dissertation we have studied some of the general characteristics of random vectors and Gaussian random vectors, from where we have presented some theorems and results on the independence and the laws of quadratic forms of Gaussian random vectors, which follow Chi-two. These results are fundamental in statistics in the problems of variance decomposition, as we have stated Cochran’s theorem, with a simulation study for the density function and the Chi-two distribution function.

Keywords: Random vectors, Gaussian vectors, Quadratic forms, Cochran’s theorem.

Résumé

Dans ce mémoire on a étudie certains des caractéristiques générales des vecteurs aléatoires et des vecteurs aléatoires gaussiens, d’où on a présentés quelques théorèmes et résultats sur l’indépendance et les lois de formes quadratiques de vecteurs aléatoires gaussiens, qui est suivent des lois du Khi-deux. Ces résultats sont fondamentaux en statistique dans les problèmes de décomposition de variance, comme on a énoncé le théorème de Cochran, avec une étude de simulation pour la fonction de densité et la fonction de répartition de loi Khi-deux.

Mots clés : Vecteurs aléatoires, Vecteurs gaussiens, Formes quadratiques, Théorème de Cochran.