République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le Diplôme de

Master en **"Mathématiques Appliquées"**

Option : **Probabilités**

Présenté par

Bouzeggagh kaouthar

Titre :

Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies à deux barrières

Devant le Jury :

Pr.	**LABAD Boubakeur**	U.Biskra	Président
Dr.	**YEKHLEF Samia**	U.Biskra	Encadreur
Dr.	**CHAOUCH KHOUANE Nassima**	U.Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 19/06/ 2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

À mes chers parents, pour leurs sacrifices, leur amour, leur encouragement,

et leurs prières tout au long de mes études.

À mes frères, qui je souhaite une grande réussite dans leurs vies.

À toute ma famille.

À mes amis.

À tous ceux qui ont contribué, de loin ou de prés, à la réalisation de ce mémoire.

Remerciements

Je remercie "dieu" tout puissant de m'avoir donné la forcés, le courage et la patience d'arrivé a la fin de mes études.

Je teins à remercies vivement tous mes professurs.

Je remercie mon encadreur **Dr.Yakhlef Samia**, pour son encadrement, je le remercie vivement pour son écote, son aide, son encouragement, et pour ses conseils.

Et je veux exprime tout mon respect aux membres du jury **Pr.Labed Boubakeur** et **Dr.Chaouch khouane Nassima**, qui ont acceptés d'évaluer et juger mon travail,

Je souhaite exprimer enfin ma gratitudes et mes vifs remerciements à toute ma famille et mes amis pour leurs soutien.

Notations et symboles

Va	:	Variable aléatoire.
MB	:	Mouvement Brownien.
$\mathbb{P}-ps$	:	Prêsque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$E[X]$	:	Espérence mathématique de la variable aléatoire X.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réele uclidien de dimension d.
L^2	:	Espace des processus de carré intégrables.
Ω	:	Un ensemble fondamentale non vide.
$\mathbb{R}^{d\times k}$	:	Ensemble des matrices réelles $d \times k$.
$Var(X)$	:	Variance mathématique de la variable aléatoire X.
EDSRR	:	Equation différentielle stochastique rétrograde réfléchies.
BDG	:	Inégalité de Burkholder-Devis-Gundy.

Table des matières

Introduction

Depuis que Pardoux et Peng [9] ont introduit des équations différentielles stochastiques rétrogrades non linéaires ($EDSR$ en abrégé)avec coefficient Lipschitz, il s'ensuit de nombreux résultats dans ce sujet, où Lepeltier et San Martin [4] ont étudié les EDSR à coefficient continu, ils ont prouvé que dans ce cas il existe au moi une solution mais pas nécessairement unique. Lin et Peng [7] ont obtenu la g-sur solution pour les EDSR avec un coefficient de dérive continu.El Karoui, Kapoudjian, Pardou, Peng et Quenez [1] on considéré pour la première fois les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies ($EDSRR$, En abrégé) , comme généralisation du résultats de Pardaux et Peng, le cas où f est $K-$Lipschitz, c'est-à-dire que la solution devrait être supérieure ou inférieure à un processus donné. Il ont prouvé que si le coefficient est Lipschitz et que la barrière inférieure est continue, alors il existe une solution unique. Et puis,Lepeltier et San Martin [5]ont étudié les EDSR à coefficient continu et à deux barrières continues. Dans Hamadène [3], il a étudié le cas d'une barrière continue à droite et a des limite à gauche(Cadlag en abrégé) .

Récemment, Lepeltier et Xu [6] ont donné les résultats des $EDSR$ avec coefficient Lipschitz et Cadlag barrières, puis dans Peng et Xu [11] avec deux barrières dans L^2.

L'objectif de ce mémoire est de présenter un nouveau type des équations différentielles stochastiques rétrogrades que sont les $EDSR$ réfléchies, il ya beaucoup type des $EDSR$ réfléchies et nous avons choisi $EDSRR$ à deux barrières. L'$EDSRR$

à deux barrières est donné sous la forme suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds + A_T - A_t - K_T + K_t - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

La solution maintenant est obligée de rester entre deux barrières donnés. dans ce cas, la première composante dans la solution "Y" est maintenant entre deux barrières grâce à deux processus croissante K et A, la solution est un quadruplet de processus adapté (Y, Z, A, K).

Ce travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux rappels des résultats importante en calcule stochastique, nous avons donné des définitions, propriétés et des notions de base, pour l'utiliser dans le reste des chapitres .

Dans le deuxième chapitre, nous traitons des équations différentielles stochastiques rétrogrades, nous donnos une définition à ces équations et prouvons l'existence et l'unicité de la solution dans cas Lipschitz.

Dans le troisième chapitre, nous donnons la définition et la forme de l'$EDSRR$ à deux barrières, et citons la démonstration de l'existence de la solution par la méthode de pénalisation.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre on va présenter des notions générales concernant le calcul stochastique, MB, martingale, l'intégrale stochastique...ect et aussi de rappeler les définitions, les propriétés et quelques résultat pour les utiliser dans le reste de ce mémoire.

1.1 Notions de base

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Définition 1.1.1 *(**Processus stochastique**) Soit T un ensemble, on appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1

i) *Si nous aurons $T = \mathbb{N}$ ce qui correspond aux processus à temps discret.*

ii) *Si $T = \mathbb{R}_+$ ou $T = [0, a], a \in \mathbb{R}_+$ pour les processus à temps continu.*

Définition 1.1.2 ***(Processus mesurable)*** *Un processus* $X = (X_t)_{t\in T}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}^d$ *est dit mesurable si l'application* $(w,t) \to X(t,w) = X_t(w)$ *définie sur* $\Omega \times T$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(T)$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.3 ***(Processus continu)*** *On dit que le processus est à trajectoires continues(ou est continu) si les applications* $t \to X_t(w)$ *sont continues pour presque tout* w.

Définition 1.1.4 ***(Processus cadlàg)*** *Le processus* X *est dit cadlàg si les trajectoires sont continue à droite et a des limite à gauche* $\forall w \in \Omega$. *Même définition pour* ***caglàd****(continu à gauche limité à droite).*

Définition 1.1.5 ***(Processus adapté)*** *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \in T$.

Définition 1.1.6 *Soient* X *et* Y *deux processus.* X *est une* ***modification*** *de* Y *si pour tout* $t \in T$, *les v.a* X_t *et* Y_t *sont égales* $\mathbb{P}$*-ps :* $\forall t \in T, \quad \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$ *C'est à dire*

$$\forall t \in T, \quad X_t(w) = Y_t(w) \quad \mathbb{P} - ps.$$

On dit aussi que X *et* Y *sont stochastiquement équivalente.*

X *et* Y *sont* ***indistingables*** *si* $\mathbb{P} - ps$ *les trajectoires de* X *et de* Y *sont les mêmes c'est -à-dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \ \forall t \in T) = 1.$$

Remarque 1.1.2 *Il est claire que si* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont indistingables alors ils sont modifications l'un de l'autre. La réciproque est généralement fausse.*

Définition 1.1.7 ***(Filtration)*** *Une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une famille croissante* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *avec*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \qquad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Remarque 1.1.3 *Le quadruplet* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ *est appelé espace de probabilité filtré (ou base stochastique).*

Définition 1.1.8 ***(Filtration naturelle)*** *Filtration naturelle (propre) d'une processus* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est définie par*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t,\ t \in T).$$

$\mathcal{F}_t$ *est la classe des évènement que l'on peut identifier au temps* t*.*

Remarque 1.1.4 *On dit qu'une filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite i.e* $\mathcal{F}_t = \cap_{s\leq t}\mathcal{F}_s, \forall t \in \mathbb{T}$*, et si elle complet c'est -à-dire* $\mathcal{F}_0$ *contient les ensembles négligeables.*

Définition 1.1.9 ***(Processus progrressivement mesurable)*** *On dit que* X *est un processus progressivement mesurable* (*ou progressif*) *si pour tout* $t \in T$ *l'application* $(w, s) \to X(s, w)$ *définie sur* $\Omega \times [0, t]$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, t])$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 ***(Mouvement Brownien standard)*** *On appelle un mouvement Brownien standard tout processus stochastique* W_t *à valeurs réelles tel que :*

1) $\mathbb{P} - p.s\ t \to W_t(w)$ est continu.

2) Pour $0 \leq s < t$, $(W_t - W_s)$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_r, r \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée et de variance $(t - s)$.

3)$W_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi gaussienne centrée de variance t. On dit qu'un mouvement Brownien (MB dans la suite) part d'un point x si $W_0 = x$.

Proposition 1.2.1 *Soit W un MB standard donc on a :*

1. Pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\{W_r, r \leq s\}$.
2. $(-W)$ est aussi un MB.
3. Pour tout $c > 0$, $\left\{cW_{t/c^2}\right\}_{t\geq 0}$ est un MB.
4. Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ est un MB.

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *Une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{\ t\geq 0}$ si :*

1. Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
2. Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable.
3. Pour $\ 0 \leq s \leq t, \quad E\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = X_s.$

Définition 1.3.2 *Un processus X_t à valeurs réelles est une sur-martingale (resp.sous-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si :*

– X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté et intégrable,* $\forall t \geq 0$,

– $E[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s, \quad \forall s \leq t, \quad (resp. E[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s).$

Théorème 1.3.1 ***(Théorème d'arrêt)*** *Si X_t est une martingale et si δ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\delta \leq \tau$, alors*

$$E\left[X_\tau|\mathcal{F}_\delta\right] = X_\delta, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Remarque 1.3.1 *Rappelons qu'un processus X_t adapté et intégrable est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ,*

$$E[X_\tau] = E[X_0].$$

Théorème 1.3.2 *Soit X_t une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–martingale, alors X_t possède une modification càdlàg, i.e. dont les trajectoires sont continues à droite et possèdent des limites à gauche.*

Définition 1.3.3 ***(Martingale locale)*** *Soit X_t un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X_t est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$, $\mathbb{P} - p.s$, et pour tout n, $X^{\tau_n}\mathbf{1}_{\tau_n>0}$ est une martingale.*

Théorème 1.3.3 *Soit X_t une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu nul en 0, tel que $X_t^2 - \langle X_t, X_t\rangle$ soit une martingale locale.*

Proposition 1.3.1 *Soit X_t une martingale locale continue. Il y a un équivalence entre*

1. $X_0 \in L^2$ et $E[\langle X_t, X_t\rangle_\infty] < \infty$,
2. X_t est une martingale bornée dans L^2.

Définition 1.3.4 ***(Semi-martingale)*** *Une semi-martingale continue est un processus X qui s'écrit $X = M + U$, où M est une martingale locale continue et U est un processus continue adapté à variation borné tel que $U_0 = 0$.*

1.4 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, on désigne par $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ la filtration naturelle de MB. On cherche à définir l'intégrale stochastique(ou l'intégrale d'Itô) :

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dW_s, \tag{1.1}$$

où $(\theta_s)_{s\geq 0}$ est un processus stochastique et $(W_s)_{s\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

Définition 1.4.1 *On dit que* $\{\theta_t, t \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $\mathcal{F}_t^W-$*adapté, càdlàg et si :*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

1.4.1 Propriété de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1. $\theta \longmapsto \int_0^t \theta_s dW_s$ est linéaire.
2. Le processus $\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)_{t\in[0,T]}$ est à trajectoires continues.
3. Le processus $\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)_{t\in[0,T]}$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.
4. $E\left[\int_0^t \theta_s dW_s\right] = 0$ et $Var\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right) = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.
5. Propriété d'isométrie :

$$E\left[I_t^2(\theta)\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

1.4.2 L'intégrale stochastique

On cherche maintenant à définir l'intégrale (1.1), la construction de $I_t(\theta)$ se fait par discrétisation comme dans le cas de l'intégrale de Wiener.

Considérons tout d'abord les processus étagés du type

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbf{1}_{\left[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\right]}(t), \tag{1.2}$$

où $p_n \in \mathbb{N}$, $\left\{t_i^{(n)}\right\}$ une suite croissante de $[0,T]$, et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$ pour tout $i = 0, ..., p_n$. On défini $I_t(\theta^n)$ par

$$I_t(\theta^n) = \sum_{i=1}^{p_n} \theta_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right).$$

On peut vérifier que

$$E\left[I_t\left(\theta^n\right)\right]=0,\ \text{et}\ Var\left(I_t\left(\theta^n\right)\right)=E\left[\int_0^t\left(\theta_s^n\right)^2 ds\right].$$

Soit Ω l'espace des processus θ càglàd (c'est à dire, continue à gauche et limité à droite), $\mathcal{F}_t$-adapté tel que

$$\|\theta\|^2=E\left[\int_0^t\left|\theta_s\right|^2 ds\right]<\infty.$$

On peut définir $I_t\left(\theta\right)$ pour tout $\theta\in\Omega$, on approche θ par une suite de processus étagés donnée par (1.2), la limite étant dans $L^2\left(\Omega,[0,T]\right)$. L'intégrale $I_t\left(\theta\right)$ est alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_t\left(\theta^n\right)$ avec

$$E\left[I_t\left(\theta\right)\right]=0,$$

et

$$Var\left(I_t\left(\theta\right)\right)=E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

1.4.3 Calcule d'Itô

Définition 1.4.2 ***(Processus d'Itô)*** *On appelle processus d'Itô tout processus* $\left(X_t\right)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs réelles tel que* $\forall 0\leq s\leq t$

$$X_t=X_0+\int_0^t b(s)ds+\int_0^t\sigma(s)dW_s,\quad \mathbb{P}-p.s,$$

où, X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_0^t\mid b(s)\mid ds<\infty\ \text{et}\ \int_0^t\parallel\sigma(s)\parallel^2 ds<\infty,\ \text{où}\ \parallel\sigma\parallel=trace(\sigma\sigma^*).$$

Le processus s'écrit sous forme différentielle

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t, \quad X_0 = x.$$

Le coefficient b s'appelle le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Théorème 1.4.1 ***(Première formule d'Itô)*** *Soient $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + 1/2\int_0^t f''(X_s)\sigma^2(s)ds.$$

Théorème 1.4.2 ***(Deuxième formule d' Itô)*** *Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô, soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x. On a*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = f(0,X_0) &+ \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dX_s \\ &+ 1/2\int_0^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d\langle X\rangle_s. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.1 ***(Formule d'intégration par parties)*** *Soient $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ deux processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t .$$

1.5 Inégalités et théorèmes utiles

Théorème 1.5.1 ***(Thérème de représentation des martingales Browniennes)*** *Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale de carré intégrable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$, alors il* *existe un processus adapté* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *tel que :*

$$E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty, \quad p.s,$$

et $\mathbb{P}-p.s$ *on a :*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s, \quad \forall t \in [0,T].$$

Théorème 1.5.2 ***(Théorème de Fubini)*** *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b]\times[c,d]$ *à valeurs dans un ensemble* E*, alors :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Lemme 1.5.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit* $g:[0,T]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue telle que, pour tout* t *:*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\,ds, \quad a\in\mathbb{R}, \quad b\geq 0 \quad \forall t\leq T,$$

alors

$$g(t) \leq a\exp(bt).$$

Théorème 1.5.3 ***(Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (BDG))*** *Pour tout* $p>0$*, il existe des constantes positives* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale locale continue* $X=(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *et tout* $T>0$*, on ait*

$$c_p E\left[\langle X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Proposition 1.5.1 ***(Inégalité de Doob)*** *Soient* $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_n),\mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré,* $(X_t)_{t\geq 0}$ *une martingale continue, alors*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|\right] \leq 4E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right].$$

Lemme 1.5.2 ***(Lemme de Fatou)*** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite des fonctions mesurables positives, alors :*

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} \inf \ f_n\right) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu.$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

Le but de ce chapitre est d'introduire les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé), et montrer le résultat d'existence et d'unicité des solutions dans le cas Lipschitzienne.

2.1 Présentation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré, une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ et un processus Y qui est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} dY_t = -f(Y_t), t \in [0, T] \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Pour résoudre ce problème on va prendre le cas le plus simple où $f \equiv 0$, alors l'équation (2.1) devient

$$\begin{cases} dY_t = 0, \quad \forall t \in [0,T] \\ Y_T = \xi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_t = cte, \quad \forall t \in [0,T] \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

La solution de cette EDS est $Y_T = \xi$, qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. Le processus adapté le plus proche de la solution est la martingale $Y_t = E(\xi / \mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un MB et $\xi \in L^2[\Omega, \mathcal{F}_T]$, alors en appliquant le théorème de représentation des martingales browniennes d'Itô, il existe un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = E[\xi / \mathcal{F}_t] = E[\xi] + \int\limits_0^t Z_s dW_s,$$

si $t = T$, alors

$$\begin{aligned} Y_T &= E[\xi] + \int_0^T Z_s dW_s \\ &= E[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s + \int_t^T Z_s dW_s \\ &= Y_t + \int_t^T Z_s dW_s, \end{aligned}$$

donc

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s.$$

On voit donc apparaitre sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qu'est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté, pour généraliser on permet à f de dépendre du processus Z, l'équation devient alors :

$$\begin{cases} dY_t = -f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt + Z_t dW_t, & \forall t \in 0, T \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.2}$$

où sous forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall t \in [0, T]\,. \tag{2.3}$$

2.1.1 Notation et définition

Soit $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un MB de dimension d définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est la filtration naturelle de W. On considère les espaces suivant :

1. $S^2(\mathbb{R}^k)$: L'espace des processus Y_t, progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ telque :
$$\| Y \|_{S^2}^2 = E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} | Y_t |^2\right] < \infty.$$
2. $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$: Sous espace de S^2 formé par les processus continus.
3. $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k \times d}\right)$: Espace formé par les processus Z progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{k \times d}$, tel que
$$\| Z \|_{\mathcal{M}^2}^2 = E\left[\int_0^T \| Z_s \|^2\right] < \infty.$$
4. $\mathcal{B}^2$: Espace de Banach $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right) \times \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k \times d}\right)$, muni de la norme
$$\| (Y, Z) \|_{\mathcal{B}^2} = E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} | Y_t |^2 + \int_0^T \| Z_s \|^2 ds\right].$$

Les espaces $S^2, S_c^2, \mathcal{M}^2$ et $\mathcal{B}^2$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment.

Définition 2.1.1 *Les éléments de base de l'EDSR sont un couple* (ξ, f) *où*

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} & \to & \mathbb{R}^k \\ & (t,y,z) & \mapsto & f(t,y,z) \end{array}$$

La fonction f *est appelé le générateur, telle que pour tout* $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *le processus* $\{f(t, y_t, z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *soit progressivement mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_T$.

ξ *(La condition terminale)est* $\mathcal{F}_T-$*mesurable et de carré intégrable,* $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)$.

Définition 2.1.2 *Une solution de l'EDSR (2.3) est un couple*

$\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T} \in S^2 \times \mathcal{M}^2$ *vérifiant :*

a) Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$.

b) $\int_0^T \{| f(s, Y_s, Z_s) | + \| Z_s \|^2\} ds < \infty, \mathbb{P} - p.s.$

c) *Pour* $t \in [0,T]$ *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Remarque 2.1.1 *Comme les intégrales de l'équation précédente sont bein définies,* Y *est un semi-martingale continue.*

Proposition 2.1.1 *Supposons qu'il existe un processus* $(f_t)_{0\leq t\leq T}$*, positive appartient à* $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *et une constante positive* C *tel que :*

$$\forall (t, y_t, z_t) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, | f(t,y,z) | \leq f_t + C(| y | + \| z \|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR (2.3) telle que* $Z \in \mathcal{M}^2$*, alors* $Y \in S_c^2$.

Pour montrer cette proposition on a besoin du lemme de Gronwall et l'inégalité de Doob.

Lemme 2.1.1 *Supposons que* $Y \in S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *et* $Z \in \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$, *alors*

$$X_t = \left\{\int_0^t Y_s Z_s dW_s,\ t \in [0,T]\right\},$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. *En appliquant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy*(BDG), *donnent*

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t Y_s.Z_s dW_s \mid\right] &\leq CE\left[\left(\int_0^T \mid Y_s \mid^2 \parallel Z_s \parallel^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq CE\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t \mid \left(\int_0^T \parallel Z_s \parallel^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right], \end{aligned}$$

et par suite comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ *on obtient :*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t Y_s.Z_s dW_s \mid\right] \leq C'\left(E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid Y_t \mid^2\right] + E\left[\int_0^T \parallel Z_s \parallel^2\right] ds\right).$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse, d'ou le résultat

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t Y_s.Z_s dW_S \mid\right] < +\infty.$$

■

2.2 Existence et unicité des solutions

2.2.1 Cas Lipschitz

La notion des EDSR a été introduite par E.Pardoux et S.Peng en 1990, ils sont les premiers qui ont démontrent l'existence et l'unicité des solutions de EDSR dans le cas où le générateur f est non-linéaire .

On a l'application f définie sur $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ tel que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une va $\mathcal{F}_T-$mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler

Hypothèse(H)

1) Condition de Lipschitz :

Il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\mathbb{P}-ps$ en a pour tout t, y, y', z, z'

$$\mid f(t,y,z) - f(t,y',z') \mid \leq k (\mid y - y' \mid + \parallel z - z' \parallel).$$

2) Condition d'intégrabilité :

$$E\left[\mid \xi \mid^2 + \int_0^T \mid f(s,0,0)^2 \mid ds\right] < \infty.$$

Cas simple où f ne dépend ni de y ni z

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z, on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR:

$$Y_t = \xi + \textstyle\int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.4}$$

Lemme 2.2.1 *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$. L'EDSR (2.4) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$.*

On utilise le théorème de représentation des martingales Browniennes et le théorème de Fubini pour montrer ce lemme .

Preuve. On suppose que l'équation (2.4) possède une solution (Y, Z) vérifie $Z \in \mathcal{M}^2$. En appliquant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ on a :

$$\begin{aligned}
Y_t &= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s / \mathcal{F}_t\right]. \\
&= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds / \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_t^T Z_s dW_s / \mathcal{F}_t\right]. \\
&= E\left[\xi + \int_t^T F_s ds / \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^T Z_s dW_s / \mathcal{F}_t\right] + E\left[\int_0^t Z_s dW_s / \mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Comme $M_t = \int_0^t Z_s dW_s$ est une martingale, alors

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^t Z_s dW_s / \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^T Z_s dW_s / \mathcal{F}_t\right] &= E\left[M_t - M_T / \mathcal{F}_T\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$Y_t = E\left[\xi + \int_0^T F_s ds / \mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^t F_s ds / \mathcal{F}_t\right],$$

remarquons que d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, en faite dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable alors :

$$Y_t = E\left[\xi + \int_0^T F_s ds / \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t F_s ds = M_t - \int_0^t F_s ds.$$

Les hypothèses vérifie par ξ et F impliquent que M_t est une martingale brownienne, d'après le théorème de représentation des martingales Browniennes, il existe un unique processus $Z \in \mathcal{M}^2$ telle que :

$$Y_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds.$$

Ce qui implique que le couple (Y, Z) est une solution de l'EDSR(2.4), puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T F_s ds \right) \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s - \int_t^T Z_s dW_s.$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in \mathcal{M}^2$. ■

Cas où f dépend de y et de z

Théorème 2.2.1 ***(Pardoux-Peng 1990)*** *Sous les hypothèses (H), l'EDSR (2.3) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$.*

Preuve. L'idée de la démonstration est basé sur un argument de point fixe sur l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ des solutions (Y, Z) ceci en construisant l'application suivent :

$$\begin{aligned} \Psi : \ \mathcal{B}^2 &\quad \rightarrow \quad \mathcal{B}^2 \\ (U, V) &\quad \longmapsto \quad \Psi(U, V) = (Y, Z), \end{aligned}$$

pour (U, V) élément de $\mathcal{B}^2$, on définie $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR suivent :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s) \, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0, T],$$

telle que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est une solution de (2.3) si et seulement si (Y, Z) est un point fixe de Ψ, et on montre que Ψ est une application contractante, donc d'après le théorème de point fixe, il existe un unique $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$ telle que $\Psi(Y,Z) = (Y,Z)$ c'est à dire :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0,T].$$

Ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution l'EDSR (2.3) dans $\mathcal{B}^{2.}$ ■

2.3 EDSR linéaires

Les EDSR linéaires sont apparues en 1973 dans un article de J.Bismut, dans le cadre de la théorie du contrôle stochastique, comme pour les équations différentielles ordinaires, si f est linéaire on peut donner une formule explicite de la solution de l'EDSR. On se place dans le cas $k = 1$, ainsi Y est à valeur dans $\mathbb{R}$ et Z un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 2.3.1 *On considère l'EDSR linéaire suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{\alpha_s Y_s + \beta_s Z_s + \varphi_s\} ds - \int_t^T Z_s dW_s, \tag{2.5}$$

où $\{(\alpha,\beta)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné, $\{\varphi_s\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et ξ va $\mathcal{F}_T-$mesurable, de carré intégrable, à valeur réelles.

L'EDSR linéaire (2.5) possède une unique solution qui vérifie

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T \varphi_s \Gamma_s ds \diagup \mathcal{F}_t\right), \quad \forall t \in [0,T],$$

pour tout $t \in [0,T]$, *et*

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mid \beta_s \mid^2 ds + \int_0^t \alpha_s ds\right).$$

Preuve. Commençons par remarquer que le processus Γ vérifie

$$d\Gamma_t = \Gamma_t \left(\alpha_t dt + \beta_t dW_t\right), \qquad \Gamma_0 = 1.$$

En posant

$$f\left(t, y, z\right) = \alpha_t y + \beta_t z + \varphi_t,$$

et grâce à la bornitude des processus α, β et φ on voit que le générateur de l'EDSRL (2.5) est lipshitzien, par suite en appliquant le théorème de Pardoux-peng, il s'en suit que cette équation admet une solution unique (Y, Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$ et $Y \in S^2$.

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y\rangle_t \\ &= -\Gamma_t \varphi_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t \beta_t dW_t, \end{aligned}$$

ce qui montre que la processus

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \varphi_s \Gamma_s ds,$$

est une martingale car $\varphi \in \mathcal{M}^2$ et Γ, Y sont dans S^2.

Par suite

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \varphi_s \Gamma_s ds = E\left[\Gamma_T Y_T + \int_0^T \varphi_s \Gamma_s ds \diagup \mathcal{F}_t\right],$$

c'est à dire :

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left[\xi\Gamma_T + \int_t^T \varphi_s \Gamma_s ds \diagup \mathcal{F}_t\right].$$

■

2.3.1 Théorème de comparaison

Ce théorème permet de comparer les solutions de deux EDSR dans $\mathbb{R}$ dés que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs.

Théorème 2.3.1 *Soient* (Y, Z) *et* (Y', Z') *solutions des EDSR associées aux paramètres* (f, ξ) *et* (f', ξ')*.On suppose que* f *vérifie* (H)*,si* $\xi \leq \xi'$ $\mathbb{P}.p.s$

et $f(t, Y_t, Z_t) \leq f'(t, Y_t, Z_t) dt \otimes d \quad \mathbb{P}.p.s,$ *alors*

$$Y_t \leq Y'_t \quad \forall\ 0 \leq t \leq T \quad p.s.$$

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies à deux barrières

Dans ce chapitre, nous travaillons sur des EDSR à coefficient continu et avec deux barrières. Nous appliquons le résultat de Lepeltier et San Martin [4], qui ont montré que pour une fonction continue f, il existe une suite de fonctions Lipschitz (f_m), qui converge vers f lorsque $m \to \infty$, pour traiter le coefficient continu. La méthode de pénalisation est employée pour s'attaquer aux L^2 barrières. Notre preuve est également basée sur le théorème limite monotone de Peng [10]. Nous formulons d'abord le problème pour les solutions d' EDSRR avec deux barrières, et nous avons utilisé certains résultats préliminaires, puis nous donnons la preuve de l'existence de la solution pour les EDSRR à deux barrières.

3.1 Formulation du problème

Sur un espace de probabilité complet donné $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ est un MB standard d-dimensionnel, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ est l'augmentation de la filtration naturelle engendrée par le MB.

Nous introduisons les espaces suivants :

1. $L^2 = \{\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$, variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable avec $E[|\ \xi\ |^2] < \infty\}$,
2. $L^2_{\mathcal{F}} = \{\varphi : \Omega \times [0, t] \to \mathbb{R}^d$, processus $\mathcal{F}_t-$mesurable avec $E\left[\int_0^t |\ \varphi_t\ |^2\, dt\right] < \infty\}$,
3. $S^2_{\mathcal{F}} = \{\varphi \in L^2_{\mathcal{F}}$, Cadlag progressivement mesurable, processus avec $E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |\ \varphi_t\ |^2\right] < \infty\}$.

Nous donnons tout d'abord les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : La valeur terminale ξ est en L^2.

Hypothèse 2 : La fonction $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to f(t, w, y, z)$, pour tout $(t, w) \in [0, T] \times \Omega, f(t, w, y, z)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P} - p.s.$ Et il existe une constante K, tel que pour tout $(t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$|\ f(t, w, y, z)\ | \leq K(1 + |\ y\ | + |\ z\ |) \quad \mathbb{P} - p.s$$

Hypothèse 3 : Les barrières $L, U \in L^2_{\mathcal{F}}$ vérifient :

$$\begin{cases} E\left[ess \sup\limits_{0\leq t\leq T} \left(L_t^+\right)^2\right] < \infty, \\ E\left[ess \sup\limits_{0\leq t\leq T} \left(U_t^+\right)^2\right] < \infty, \\ L_T \leq \xi \leq U_T \quad p.s, \\ L_t \leq U_t, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Hypothèse 4 : Il existe un processus

$$X_t^0 = X_0^0 + A_t^0 - K_t^0 + \int_0^t Z_s^0 dW_s, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.1}$$

Avec $Z^0 \in L^2_{\mathcal{F}}, \quad A^0, K^0 \in S^2_{\mathcal{F}},$ sont croissants avec $A_0^0 = K_0^0 = 0$, tel que $L_t \le X_t^0 \le U_t$.

Nous introduisons la définition de la solution d'une EDSRR avec deux barrières L et U :

Définition 3.1.1 *Un quadruple $(Y, Z, A, K) \in S^2_{\mathcal{F}} \times L^2_{\mathcal{F}} \times S^2_{\mathcal{F}} \times S^2_{\mathcal{F}}$ est appelé une solution pour l'EDSRR avec la barrière inférieure $L \in L^2_{\mathcal{F}}$, la barrière supérieure $U \in L^2_{\mathcal{F}}$, la condition terminale $\xi \in L^2$, et le coefficient f s'il satisfait :*

1. *A, K en augmentant.*
2. *(Y, Z, A, K) satisfait l' EDSR suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds + A_T - A_t - K_T + K_t - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.2}$$

3. $L_t \le Y_t \le U_t \quad \mathbb{P} - p.s.$
4. *Cas de Skorokhod généralisé :*

   Pour chaque $L^*, U^* \in S^2_{\mathcal{F}}$, tel que $L_t \le L_t^* \le Y_t \le U_t^* \le U_t \quad \mathbb{P} - p.s,$

$$\int_0^T \left(Y_{s-} - L_{s-}^*\right) dA_s = \int_0^T \left(U_{s-}^* - Y_{s-}\right) dK_s = 0. \tag{3.3}$$

Dans ce mémoire, le résultat principale est le théorème suivant qui sera démontré dans la section (3).

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses $(1), (2), (3), (4)$ il existe au moins une solution (Y, Z, A, K) pour les EDSRR à deux L^2-barrières.*

3.2 Quelques résultats préliminaires

On va présenter quelques définitions et résultats préliminaires qui seront utilisés plus tard. Nous introduisons d'abord la g-sur solution qui est très importante pour la preuve du théorème d'existence :

Définition 3.2.1 *(Voir Peng [10], El karoui al [2]) On appelle un triple* $(Y, Z, A) \in S^2_{\mathcal{F}} \times L^2_{\mathcal{F}} \times S^2_{\mathcal{F}}$ *une g-sur solution si* A *est un processus croissant dans* $S^2_{\mathcal{F}}$ *et le triple satisfait :*

$$Y_t = Y_T + \int_t^T g\left(s, Y_s, Z_s\right) ds + A_T - A_t - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

Pour une fonction continue à croissance linéaire, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *(Voir Lepeltier et San Martin [4]) Soit* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p, \mid f\left(x\right) \mid \leq K\left(1 + \mid x \mid\right).$ *Définir une fonction continue à croissance linéaire*

$$f_m\left(x\right) = \inf_{y \in \mathbb{Q}^p} \left(f(y) + m \mid x - y \mid\right),$$

alors pour $m > K, \quad f_m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *satisfait :*

- *Croissance linéaire :* $\forall x \in \mathbb{R}^p, \mid f_m(x) \mid \leq K(1 + \mid x \mid),$
- *Monotonie :* $\forall x \in \mathbb{R}^p, f_m(x) \uparrow f(x),$
- *Condition de Lipschitz :* $\forall x \in \mathbb{R}^p, \mid f_m(x) - f_m(y) \mid \leq m \mid x - y \mid,$
- *Convergence forte :* $Si \quad x_m \to x, \quad alors \quad f_m(x_m) \to f(x).$

Le théorème limite monotone généralisé suivant des EDSR est prouvé dans Peng et Xu [11].

Considérez la suite suivante du processus d'Ito :

$$y^i_t = y^i_0 + \int_0^t g^i_s ds - A^i_t + K^i_t + \int_0^t z^i_s dW_s, \quad i = 1, 2, ... \tag{3.5}$$

Ici pour chaque i, les processus $g^i \in L^2_{\mathcal{F}}, \quad A^i, K^i \in S^2_{\mathcal{F}}$ sont donné, et $\{A^i, K^i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfait :

1. A^i est continue et croissante telle que $A_0^i = 0$ et $E\left(A_T^i\right)^2 < \infty$.
2. K^i est croissante et $K_0^i = 0$.
3. $K_t^i - K_s^i \geq K_t^j - K_s^j \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T \quad p.s, \quad \forall i \geq j.$
4. Pour chaque $t \in [0,T], K_t^j \uparrow K_t$ avec $E[K_T^2] < \infty$.

   De plus, nous supposons que :
5. $\{g^i, z^i\}_{i=1}^{\infty}$ converge faiblement vers (g^0, z) dans $L^2_{\mathcal{F}}$.
6. $\{y_t^i\}_{i=1}^{\infty}$ converge croissament vers (y_t) avec $E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} \mid y_t \mid^2\right] < \infty$.

Théorème 3.2.1 *Suposons que les hypothèses ci-dessus sont satisfaites, nous avons la limite de $\{y_t^i\}_{i=1}^{\infty}$, (y_t) a la forme suivante*

$$y = y_0 + \int_0^t g_s^0 ds - A_t + K_t + \int_0^t z_s dW_s,$$

où A et K sont des processus croissants en $S^2_{\mathcal{F}}$. Pour chaque $t \in [0,T]$,

A_t(resp K_t) est la limite faible (resp. forte) de $\{A_t^i\}_{i=1}^{\infty}$ (resp $\{K_t^i\}_{i=1}^{\infty}$). De plus pour tout $p \in [1.2]$, $\{z_t^i\}_{i=1}^{\infty}$ converge fortement vers z_t dans $L^P_{\mathcal{F}}$.

3.3 Preuve du résultat principal

Dans cette section, nous démontrons le **théorème 3.1.1** c'est-à-dire l'existence pour la solution de l'EDSRR avec deux barrières dans L^2(L^2-barrières). Premièrement, on considère, pour tout entier m, les EDSRR suivantes avec une barrière supérieure

U :

$$Y_t^m = \xi + \int_t^T f_m\left(s, Y_s^m, Z_s^m\right) ds + m \int_t^T \left(L_s - Y_s^m\right)^+ ds - K_T^m + K_t^m - \int_t^T Z_s^m dW_s. \tag{3.6}$$

comme les coefficients sont Lipschitz, d'après Peng et Xu [11] ces équations ont des solutions uniques $\left(Y^m, Z^m, K^m\right), \forall m \in \mathbb{N}$.

Alors pour tout $n, m \geq 1$, on considère les EDSR classiques suivantes :

$$\begin{aligned} Y_t^{n,m} = \xi &+ \int_t^T f_m\left(s, Y_s^{n,m}, Z_s^{n,m}\right) ds - \int_t^T Z_s^{n,m} dW_s + m \int_t^T \left(L_s - Y_s^{n,m}\right)^+ ds \\ &- n \int_t^T \left(Y_s^{n,m} - U_s\right)^+ ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Puisque

$$g_{n,m}(t, y, z) = f_m(t, y, z) + m\left(L_t - y\right)^+ - n\left(y - U_t\right)^+,$$

sont Lipschitz en (y, z) ,uniformément en (t, w), les équations ont des solutions uniques $\left(Y^{n,m}, Z^{n,m}\right)$, et par théorème de comparaison, on a que pour n fixé, $Y^{n,m}$ est croissant en m.

Définir

$$\begin{cases} A_t^{n,m} = m \int_0^t \left(L_s - Y_s^{n,m}\right)^+ ds, \\ K_t^{n,m} = n \int_0^t \left(Y_s^{n,m} - U_s\right)^+ ds, \end{cases}$$

On a la proposition suivante :

Proposition 3.3.1 *Il existe une constante C indépendante de n, m tel que :*

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(Y_t^{n,m}\right)^2\right] + E\left[\int_0^T \mid Z_t^{n,m} \mid^2 ds\right] + E\left[\left(A_T^{n,m}\right)^2\right] + E\left[\left(K_T^{n,m}\right)^2\right] \leq C. \tag{3.8}$$

Pour prouver ce résultat, nous avons besoin des deux lemmes suivants. Considérez l'équation suivante :

$$Y_t^m = \xi + \int_t^T f_m\left(s, Y_s^m, Z_s^m\right) ds + m \int_t^T \left(L_s - Y_s^m\right)^+ ds - \int_t^T Z_s^m dW_s. \qquad (3.9)$$

C'est une suite d' EDSR classique, il existe des solutions uniques (Y^m, Z^m), pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.3.1 *Pour l'équation (3.9), on a qu'il existe une constante C indépendante de m telle que :*

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(Y_t^m\right)^2\right] + E\left[\int_0^T \mid Z_s^m \mid^2 ds\right] + E\left[\left(A_T^m\right)^2\right] \leq C. \qquad (3.10)$$

Où $A_t^m := m \int_0^t \left(L_s - Y_s^m\right)^+ ds$.

En appliquant la formule d'Itô sur $\left(Y_t^m\right)^2$,la conclusion peut être déduite grâce au lemme de Gronwall et à l'inégalité B-D-G.

Nous pouvons facilement obtenir un résultat similaire au ***lemme 5.1*** de Peng et Xu *[11] :*

Lemme 3.3.2 *Il existe un quadruple $(Y^*, Z^*, A^*, K^*) \in S_{\mathcal{F}}^2 \times L_{\mathcal{F}}^2 \times S_{\mathcal{F}}^2 \times S_{\mathcal{F}}^2$ tel que*

$$Y_t^* = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^*, Z_s^*\right) ds + A_T^* - A_t^* - \left(K_T^* - K_t^*\right) - \int_t^T Z_s^* dW_s. \qquad (3.11)$$

Où A^*, K^* sont tous deux croissants et $L_t \leq Y_t^* \leq U_t \quad \mathbb{P} - p.s.$

Preuve. (Preuve de la proposition 3.3.1) : Soit (Y^+, Z^+) et (Y^-, Z^-) la solution des deux EDSR suivants :

$$Y_t^+ = \xi + \int_t^T f_m\left(s, Y_s^+, Z_s^+\right) ds + A_T^* - A_t^* + m \int_t^T \left(L_s - Y_s^+\right)^+ ds - \int_t^T Z_s^+ dW_s. \qquad (3.12)$$

$$Y_t^- = \xi + \int_t^T f_m\left(s, Y_s^-, Z_s^-\right) ds - \left(K_T^* - K_t^*\right) - n\int_t^T \left(Y_s^- - U_s^-\right)^+ ds - \int_t^T Z_s^- dW_s. \tag{3.13}$$

Où A^*, K^* est donné comme au **lemme 3.3.2**. D'après le théorème de comparaison du EDSR standard, nous avons :

$$Y_t^- \leq Y_t^{n,m} \leq Y_t^+ \qquad \forall t \in [0,T] \quad p.s.$$

Revoyez au **lemme 3.3.1**, évidumment on peut prouver le même résultat si on remplace f_m par $f_m + A_T^* - A_t^*$, en trouve :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(Y_t^+\right)^2\right] \leq C_1,$$

et on remplace

$$\begin{cases} f_m & \text{par} \quad f_m - \left(K_T^* - K_t^*\right), \\ m\int_t^T \left(L_s - Y_s^m\right)^+ ds & \text{par} \quad -n\int_t^T \left(Y_s^m - U_s\right)^+ ds, \end{cases}$$

on trouve

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(Y_t^-\right)^2\right] \leq C_2,$$

on a donc

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(Y_t^+\right)^2\right] + E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(Y_t^-\right)^2\right] \leq C,$$

alors

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(Y_t^{n,m}\right)^2\right] \leq \max\left\{E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(Y_t^+\right)^2\right], E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(Y_t^-\right)^2\right]\right\} \leq C.$$

Pour $A_T^{n,m}$,on considère l' EDSR suivante :

$$\tilde{Y}{}_t^m = \xi + \int_t^T f_m\left(s, \tilde{Y}{}_s^m, \tilde{Z}{}_s^m\right) ds - (K_T^* - K_t^*) + m\int_t^T \left(L_s - \tilde{Y}{}_s^m\right)^+ ds - \int_t^T \tilde{Z}{}_s^m dW_s. \tag{3.14}$$

On sait que Y^* satisfait $L_t \leq Y^* \leq U_t$ d'après le **lemme 3.3.2**, donc nous pouvons ajouter le terme nul :

$$m\int_t^T (L_s - Y_s^*)^+ ds,$$

au côté droite de (3.11) . Puisque $A_t^* \geq 0$, d'après le théorème de comparaison il s'ensuit que $Y_t^* \geq \tilde{Y}{}_t^m$, donc $U_t \geq \tilde{Y}{}_t^m$, alors $-m\int_t^T \left(\tilde{Y}{}_t^m - U_s\right)^+ ds$ est nul et peut donc être ajouté au côté droit de (3.14). Toujours à partir du théorème de comparaison, nous obtenons $\tilde{Y}{}_t^m \leq Y_t^{n.m}$, et donc :

$$0 \leq A_t^{n,m} \leq \tilde{A}{}_t^m := m\int_0^t \left(L_s - \tilde{Y}{}_s^m\right)^+ ds,$$

puis en suivant le même processus qu'au **Lemme 3.3.1,** on a

$$E\left(\tilde{A}{}_T^{n,m}\right)^2 \leq E\left(\tilde{A}{}_T^m\right)^2 \leq C.$$

On considère maintenant le EDSR :

$$\tilde{Y}{}_t^n = \xi + \int_t^T f\left(s, \tilde{Y}{}_s^n, \tilde{Z}{}_s^n\right) ds + A_T^* - A_t^* - n\int_t^T \left(\tilde{Y}{}_s^n - U_s\right)^+ ds - \int_t^T \tilde{Z}{}_s^n dW_s. \tag{3.15}$$

De même, on peut obtenir $E\left[(K_T^{n,m})^2\right] \leq C$.

Appliquons la formule d'Itô à $(Y_t^{n,m})^2$,on a :

$$
\begin{aligned}
&E\left[\mid Y_t^{n,m}\mid^2\right]+E\left[\int_t^T \mid Z_s^{n,m}\mid^2 ds\right]\\
&\leq C\left(1+E\left[\int_t^T \mid Y_s^{n,m}\mid^2 ds\right]\right)+\alpha E\left[\int_t^T \mid Z_s^{n,m}\mid ds\right]+\beta E\left[ess\sup_{0\leq t\leq T}\left(L_t^+\right)^2\right]\\
&+\gamma E\left[ess\sup_{0\leq t\leq T}\left(U_t^-\right)^2\right]+\frac{1}{\beta}E\left[(A_T^{n,m})^2\right]+\frac{1}{\gamma}E\left[(K_T^{n,m})^2\right].
\end{aligned}
$$

On choisir $\alpha=\frac{1}{3}$, on obtient

$$E\left[\int_0^T \mid Z_s^{n,m}\mid^2 ds\right]\leq C.$$

■

Et on a aussi

Lemme 3.3.3 *Il existe une constante C indépendante de m, telle que :*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}(Y_t^m)^2\right]+E\left[\int_t^T \mid Z_t^m\mid^2 ds\right]+E\left[(A_T^m)^2\right]+E\left[(K_T^m)^2\right]\leq C. \tag{3.16}$$

Où

$$A_t^m=m\int_0^t (L_s-Y_s^m)^+ ds.$$

Lemme 3.3.4 *D'après le **lemme 3.3.3** et d'après le théorème de comparaison, Y^m est croissante en m, donc il existe un processus Y tel que $Y^m\uparrow Y$, et d'après le lemme de Fatou $E\left[\sup_{0\leq t\leq T}Y_t^2\right]\leq C$.*
D'après le théorème de convergence dominée, il s'ensuit que

$$E\left[\int_0^T (Y_t-Y_t^m)^2 dt\right]\longrightarrow 0,\quad p.s\quad n\to\infty.$$

Preuve. (Preuve du théorème 3.1.1) Pour prouver **le théorème 3.1.1**, on fait tendre n vers ∞, alors

$$\begin{cases} Y^{n,m} \to Y^m & \text{en} \quad L^2_{\mathcal{F}}. \\ n\int_0^T (Y_s^{n,m} - U_s)^+ \, ds \to K_T^m & \text{en} \quad L^2. \\ Z^{n,m} \to Z^m & \text{en} \quad S^2_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Où (Y^m, Z^m, K^m) est l'unique solution de l' EDSRR :

$$Y_t^m = \xi + \int_t^T f_m(s, Y_s^m, Z_s^m) \, ds - (K_T^m - K_t^m) - m\int_t^T (L_s - Y_s^m)^+ \, ds - \int_t^T Z_s^m dW_s. \tag{3.17}$$

On sait que $Y^m \leq U \quad \mathbb{P} - p.s.$

Nous avons déjà obtenu la conclusion que (Y^m, Z^m) est la solution de (3.17) . Récrire (3.17) dans la version suivante :

$$Y_t^m = Y_0^m + \int_0^t f_m(s, Y_s^m, Z_s^m) \, ds - A_t^m + K_t^m - \int_0^t Z_s^m dW_s. \tag{3.18}$$

Posons $g_t^m = -f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)$, avec **le lemme 3.3.3**, on en déduit que toutes les hypothèses du **théorème 3.2.1** sont satisfaites. Il s'ensuit que sa limite Y est dans $S^2_{\mathcal{F}}$ et a la forme :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g_s^0 ds + A_T - A_t - (K_T - K_t) - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{3.19}$$

Où (g^0, Z, A) est la limite faible de $\{g(., Y^m, Z^m), Z^m, A^m\}_{i=1}^{\infty}$ dans $L^2_{\mathcal{F}}, K$ est la limite forte de $\{K_t^m\}_{i=1}^{\infty}$ dans $L^2_{\mathcal{F}}, A$ et K sont des processus croissants dans $S^2_{\mathcal{F}}$.

De plus, pour tout $t \in [1, 2]$, on a $\lim\limits_{m\to\infty} E\int_t^T \mid Z_s^m - Z_s \mid^p ds = 0$.

Dans le **lemme 3.2.1**, nous avons montré que la suite de la fonction Lipschitz f_m

converge fortement vers la fonction continue f,donc nous obtenons

$$f_m\left(.,Y^m,Z^m\right)\rightarrow f\left(.,Y,Z\right)$$

à cause de la convergence forte de Y^m vers Y et de la convergence faible de Z^m vers Z, puis :

$$Y_t=\xi+\int_t^T f\left(s,Y_s,Z_s\right)ds+A_T-A_t-\left(K_T-K_t\right)-\int_t^T Z_s dW_s. \tag{3.20}$$

Le seul problème qui reste est de vérifier la condition de Skorokhod est satisfaite. Pour la barrière supérieure U, il est facile de prouver que pour tout $U^*\in S^2_{\mathcal{F}}$ et $Y\leq U^*\leq U$, si l'on considère m suffisamment grand, alors $Y^m\leq U^*\leq U$. Pour la solution de l'EDSRR (3.17), on obtient :

$$\int_0^T\left(U^*_{t-}-Y^m_{t-}\right)dK^m_t=0,$$

à partir de la condition de Skorokhod généralisée. On obtient donc :

$$\int_0^T\left(U^*_{t-}-Y_{t-}\right)dK^m_t=0,$$

Puisque $0\leq U^*_{t-}-Y_{t-}\leq U^*_{t-}-Y^m_{t-}$. De plus $K^m_T\uparrow K_T$, donc :

$$0\leq\int_0^T\left(U^*_{t-}-Y_{t-}\right)d\left(K_t-K^m_t\right)\leq\left(K_T-K^m_T\right)\max_{t\in[0,T]}\left(U^*_{t-}-Y_{t-}\right)\rightarrow 0.$$

La condition de Skorokhod pour la barrière supérieure U est obtenu.

Enfin nous prouvons que la condition de Skorokhod est vraie pour la barrière inférieure L. Considérons l'EDSR suivante :

$$\tilde{Y}{}_t^m = \xi + \int_t^T f_m\left(s, \tilde{Y}{}_s^m, \tilde{Z}{}_s^m\right) ds + m\int_t^T \left(L_s - \tilde{Y}{}_s^m\right)^+ ds - (K_T - K_t) - \int_t^T \tilde{Z}{}_s^m dW_s. \tag{3.21}$$

On note $\overline{Y}^m := \tilde{Y}{}^m - K$ et on réécrit l'EDSR :

$$\overline{Y}{}_t^m = \xi - K_T + \int_t^T f_m^K\left(s, \overline{Y}{}_s^m, \tilde{Z}{}_s^m\right) ds + m\int_t^T \left(L_s - K_s - \overline{Y}{}_s^m\right)^+ ds - \int_t^T \tilde{Z}{}_s^m dW_s. \tag{3.22}$$

Où $f_m^K(t,y,z) := f_m(t, y+K, z)$.

Considère une EDSR de coefficient f^K et de barrière inférieure L^K, où

$$\begin{cases} f^K(t,y,z) & = & f(t, y+K, z), \\ \text{et} & & \\ L^K & = & L - K, \end{cases}$$

alors l'EDSR ci-dessus est l'équation pénalisée de ce problème, on sait qu'il admet l'unique solution $\left(\overline{Y}^m, \tilde{Z}{}^m, \tilde{A}{}^m\right)$.Lorsque $m \to \infty$, on obtient la limite

$$\overline{Y}_t = \xi - K_T + \int_t^T f^K\left(s, \overline{Y}_s, \widetilde{Z}_s\right) ds + \widetilde{A}_T - \widetilde{A}_t - \int_t^T \widetilde{Z}_s dW_s. \tag{3.23}$$

Ici $\widetilde{A}$, est la limite faible de $L^2_{\mathcal{F}}$ de

$$\tilde{A}{}_t^m = m\int_0^t \left(L_s - \tilde{Y}{}_s^m\right)^+ ds = m\int_0^t \left(L_s - K_s - \overline{Y}{}_s^m\right)^+ ds.$$

Supposons que $\ddot{Y}$ est une f^K-sur solution avec décomposition $\left(\ddot{Z}, \ddot{A}\right)$, qui satisfait (3.23) et $\ddot{Y}_t \geq L_t - K_t$. Par la méthode de comparaison, on a

$$\overline{Y}{}_t^m \leq \ddot{Y}_t,$$

donc

$$\bar{Y}_t \leq \ddot{Y}_t.$$

C'est-à-dire que $\bar{Y}$ est la plus petite f^K-sur solution avec $\bar{Y}_T = \xi - K_T$ qui domine $L - K$ et d'après le théorème de comparaison on a $Y_t^m \geq \tilde{Y}{}_t^m$, donc on obtient :

$$\tilde{A}_t^m - \tilde{A}_s^m = m \int_s^t \left(L_r - \tilde{Y}{}_r^m \right)^+ dr \geq A_t^m - A_s^m \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Donc $\tilde{A}_t - \tilde{A}_t \geq A_t - A_s$.D'après (3.20) nous savons que $Y - K$ est une f^K-sur solution, comparer cela avec (3.23) nous avons $Y - K \leq \bar{Y}$. Donc $Y - K = \ddot{Y}$ est la plus petite $f-$sur solution avec condition terminale $\xi - K_T$ qui domine $L - K$. A l'aide de la **proposition 3.3.3** suivante, on peut obtenir que pour tout $L^* \in S_{\mathcal{F}}^2$ tel que $Y \geq L^* \geq L$, on ait $Y - K \geq L^* - K \geq L - K$, alors :

$$\int_0^T \left(Y_{t-} - L_{t-}^*\right)^+ dA_t = \int_0^T \left((Y_{t-} - K_{t-}) - \left(L_{t-}^* - K_{t-}\right)\right)^+ dA_t = 0.$$

■

Enfin nous prouvons que si Y est la plus petite $f-$sur solution qui domine L, alors Y satisfait la condition de Skorokhod, qui a été utilisée dans la preuve ci-dessus. D'après Peng et Xu [11], nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.3.2 *Soit $Y \in S_{\mathcal{F}}^2, Y_T = \xi \in L^2, L \in L_{\mathcal{F}}^2$, les deux propriétés suivants sont équivalents :*

i) *Y est la plus petite g-sur solution qui domine L.*

ii) *Pour tout $L^* \in S_{\mathcal{F}}^2, Y_t \geq L_t^* \geq L_t$, $\mathbb{P} - p.s$, Y est la plus petite g-sur solution qui domine L^*.*

Considérons maintenant les conditions suivante :

a) *$L \in S_{\mathcal{F}}^2$ est un processus donné,*

b) $f_0(t) = 0$,

c) $\hat{Y} \in S^2_{\mathcal{F}}$ *est une* f_0-*sur solution qui domine* L *de condition terminale* ξ,

c'est à dire :

$$\hat{Y}_t = \xi + A_T - A_t - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \hat{Y}_t \geq L_t, \quad \forall t \in [0,T] \quad p.s. \tag{3.24}$$

Où (Z, A) *est la composition correspondante de* $\hat{Y}$*. D'après Peng et Xu [11], nous savons que si* $\hat{Y}$ *est la plus petite* f_0-*sur solution qui domine* L *avec la condition terminale* ξ*, alors pour chaque temps d'arrêt* $\tau \leq T$*, nous avons* $\hat{Y}_{\tau-} = \hat{Y}_\tau \vee L_{\tau-}$*, ensuite nous avons :*

$$\sum_{0\leq t\leq T} \left(\hat{Y}_{t-} - L_{t-}\right)(A_t - A_{t-}) = 0, \quad p.s. \tag{3.25}$$

Proposition 3.3.3 *On affirme que les deux propriétés suivant sont équivalents :*

1. Y *est la plus petite* $f-$*sur solution qui domine* L *de condition terminale* ξ.
2. $\hat{Y}$ *est la plus petite* f_0-*sur solution qui domine* $\hat{L}$ *avec condition terminale* $\hat{\xi}$*, où pour chaque* $t \in [0,T]$:

$$\hat{f}(t) := f(t, Y_t, Z_t), \quad \hat{Y}_t := Y_t + \int_0^t \hat{f}(s)ds, \quad \hat{L} := L_t + \int_0^t \hat{f}(s)\,ds, \quad \hat{\xi} := \xi + \int_0^T \hat{f}(s)ds.$$

Preuve. On considère l' EDSR pénalisé suivant :

$$\tilde{Y}^m_t = \xi + \int_t^T \hat{f}(s)ds + m\int_t^T \left(L_s - \tilde{Y}^m_s\right)^+ ds - \int_t^T \tilde{Z}^m_s dW_s. \tag{3.26}$$

En comparons avec l' EDSR pénalisé :

$$\hat{Y}^m_t = \xi + \int_t^T \hat{f}(s)ds + m\int_t^T \left(L_s + \int_0^t f(s)\,ds - \hat{Y}^m_s\right)^+ ds - \int_t^T \tilde{Z}^m_s dW_s. \tag{3.27}$$

On sait qu'il suffit de prouver $\hat{Y}_t^m \to \hat{Y}$, alors on a $\hat{Y}_t^m \to Y$.

Supposons que$\left\{\left(\widetilde{Y}^m, \widetilde{Z}^m\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ converge vers $\left(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right)$,alors $\widetilde{Y}$ est la plus petite $\hat{f}-$sur solution qui domine L avec la condition terminale ξ. Prouvons ensuite que $\left(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right) = (Y, Z)$. Appliquons la formule d'Itô à $\mid Y_t^m - \widetilde{Y}_t^m \mid^2$, on a :

$$E \mid Y_t^m - \widetilde{Y}_t^m \mid^2 + E\int_t^T \mid Z_s^m - \widetilde{Z}_s^m \mid^2 ds = 2E\int_t^T \left(Y_s^m - \widetilde{Y}_s^m\right)\left(f_m\left(s, Y_s^m, Z_s^m\right) - \hat{f}(s)\right) ds$$
$$+ \quad 2mE\int_t^T \left(Y_s^m - \widetilde{Y}_s^m\right)\left(\left(L_s - Y_s^m\right)^+ - \left(L_s - \widetilde{Y}_s^m\right)^+\right) ds.$$

Il est facile de vérifier que

$$\left(Y_s^m - \widetilde{Y}_s^m\right)\left(\left(L_s - Y_s^m\right)^+ - \left(L_s - \widetilde{Y}_s^m\right)^+\right) \leq 0.$$

Ensuite nous avons :

$$E \mid Y_t^m - \widetilde{Y}_t^m \mid^2 + E\int_t^T \mid Z_s^m - \widetilde{Z}_s^m \mid^2 ds \leq 2E\int_t^T \left(Y_s^m - \widetilde{Y}_s^m\right)\left(f_m\left(s, Y_s^m, Z_s^m\right) - \hat{f}(s)\right) ds$$
$$\leq 2E\int_t^T \left(\mid Y_s^m - Y_s \mid + \mid \widetilde{Y}_s^m - \widetilde{Y}_s \mid\right) \mid f_m\left(s, Y_s^m, Z_s^m\right) - \hat{f}(s) \mid ds$$
$$+ 2E\int_t^T \left(Y_s - \widetilde{Y}_s\right)\left(f_m\left(s, Y_s^m, Z_s^m\right) - \hat{f}(s)\right) ds.$$

On sait que

$$\mid Y^m - Y \mid + \mid \widetilde{Y}^m - \widetilde{Y} \mid \to 0,$$

dans $L^2_{\mathcal{F}}$, et

$$\mid f_m\left(s, Y_s^m, Z_s^m\right) - \hat{f}(s) \mid,$$

est uniformément borné dans $L^2_{\mathcal{F}}$. De plus de la convergence forte de $\{Y^m\}_{m=1}^{\infty}$ vers Y et de la convergence faible de $\{Z^m\}_{m=1}^{\infty}$ vers Z dans $L^2_{\mathcal{F}}$, on sait que $\{f_m\left(., Y^m, Z^m\right)\}_{m=1}^{\infty}$ converge faiblement vers $\hat{f}(.)$. Ainsi, le côté droite de l'inégalité ci-dessus converge vers zéro, il s'ensuit que $\widetilde{Y} \equiv Y$ et $\widetilde{Z} \equiv Z$.

En suivant **le théorème 4.1** $d) \Rightarrow e)$ de Peng et Xu [11], on peut déduire directement que $\hat{Y}$ défini dans la **proposition 3.3.2,** (2) vérifie la condition suivante : pour tout $\hat{L}^* \in S^2_{\mathcal{F}}$, tel que $\hat{Y} \leq \hat{L}^* \leq \hat{L}, \quad P - p.s,$

$$\int_t^T \left(\hat{Y}_{t-} - \hat{L}^*_{t-} \right) dA_t = 0, \quad p.s \tag{3.28}$$

Ainsi, nous obtenons la condition de Skorokhod de $\hat{Y}$ qui est notre résultat souhaité.

■

Bibliographie

[1] El Karoui, N. & Kapoudjian, C. & Pardoux, E. & Peng, S. & Quenez, M.C.,1997. Reflected solution of Backward SDE and Related Obstacle Problems for PDEs. Ann.Probab. 25(2), 702-737.

[2] El Karoui, N. & Peng, S. & Quenez, M. C., 1997. Backward Stochastic Differential Equations in Finance. Math. Finance. 7, 1-71

[3] Hamadène, S. , 2002.Reflected BSDEs with Discontinuous Barrier and Application. Stochastics Rep. 74(3-4), 571-596.

[4] Lepeltier J. P & San Martin J. , 1997. Backward Stochastic Differential Equations with Continuous generator.Stochastic & Probability Letters. 32, 423-425.

[5] Lepeltier, J. P & San, Martin J. , 2000. backward SDEs with two Barriers and Continuous Coefficient :An Existence Result. J. Appl. Prob. 41, 162-175.

[6] Lepeltier, J. P. & Xu, M. , 2005. Penalization Method for Reflected Bckward Stochastic Differential Equations with One R.C.L.L. Barrier. Statistics & Probability Letters. 75, 58-66.

[7] Lin, Q. & Peng, S. , 2000. Smallest g-Supersolution for BSDE with Continuous Drift Coefficients. Chin. Ann. of Math. 3, 359-366.

[8] Philippe B. , Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades, Mars 2001.

[9] Pardoux, E. & Peng, S. , 1990. Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation. System Control Lett. 14, 55-61.

[10] Peng, S. , 1999. Monotonic Limit Theorem of BSDE and Non linear Decomposition Theorem of Doob-Meyer's Type. Probab.Theory Related Fields.

[11] Peng, S. & Xu, M. , 2005. The Smallest g-Supermartingale and Reflected BSDE with Single and Double L^2 obstacles, Ann. I. H. Poincaré- PR 41, 605-630.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions des équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies à deux barrières avec un coefficient de croissance linéaire continu. Ce type d'équations est utilisé dans la modélisation financière et l'étude des phénomènes impliquant des barrières.

L'objectif principal de cette thèse est de prouver qu'il existe au moins une solution à ces équations par la méthode de pénalisation.

Mot-clés : Equation différentielle stochastique rétrograde(EDSR), barrière réfléchie, méthode de pénalisation.

Abstract

In this work, we study double barrier reflected backward stochastic differential equations with a continuous linear growth coefficient. This type of equations is used in financial modeling and the study of phenomena involving barriers.

The main objective of this thesis is to prove that there exists at least one solution to these equations by the penalization method.

Key-words :Stochastic backward differential equation(SBDE), reflected barrier, penalization method.

الملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية ذات حاجزين مع معامل النمو المستمر.يستخدم هذا النوع من المعادلات في النمذجة المالية و دراسة الظواهر التي تنطوي على حواجز.

إن الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو إثبات وجود حل واحد على الأقل لهذه المعادلات بطريقة التجزئة.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية (م ت ع ت)، الحاجز المنعكس، طريقة التجزئة.