République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Probabilités**

Par : HATTAB NAFISSA

Titre :

Existence Et Unicité D'équations Stochastique Rétrogrades Quadratiques

Devant le Jury :

Président	HAFAYED MOKHTAR	U. Biskra.
Encadreur	ABBA ABDELMAJID	U. Biskra.
Examinateur	GAT RAFIKA	U. Biskra.

Soutenu Publiquement le 18/06/2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

machère mère, que Dieu la guérisse et prolonge sa vie

l'âme de mon père, que Dieu lui fasse miséricorde et le

place dans ses paradis, mes sœurs, mes frères

mes chères amies de la promotion sans exception.

tout ceux qui ont contribué de près ou de loin à rendre ce travail possible

pour tous, je dis merci.

$\mathcal{R}$emerciements

Je tiens à remercier tout d'abord DIEU le tout puissant de m'avoir donné la force, la volonté, le courage et la ptience pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur "**ABBA ABDELMAJID**" d'avoir accepté de diriger ce projet et pour la confiance qu'il nous accordées, ses encouragements, et ses précieux conseils.

Je remercie trés sincèrement le membre de jury, président "**HAFAYED MOKHTAR**".et examinateur "**GAT RAFIKA**" d'avoir bien accepté d'examiner mon mémoire. Je tiens à remercier tous les enseignants de notre département de mathématiques, qui m'ont aide dans notre parcours d'étude, tout au long de ces années.

Enfin, je tiens à remercier aussi tous les personnes qui nous ont encourages pendant la réalisation de ce travail, famille, collègue, amis, sans exception.

Table des matières

Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\mathbb{R}^m$	:	Espace réel euclidien de dimension m.
$\mathbb{R}^{m\times d}$	:	Ensemble des matrices réelles mxd.
$E\left[X\right]$	:	L'espérance de la variable aléatoire X par rapport à une probabilité $\mathbb{P}$
z^*	:	Désigne la transposée du vecteur z.
$trace(zz^*)$	:	Désigne la trace la matrice carrée zz^*
$\Vert\bullet\Vert$	:	Désigne la norme.
$\vert\bullet\vert$	:	Désigne la valeur absolu.
Les inégalités BDG	:	Les inégalités Burkholder-Davis-Gundy.
$\mathbb{P}{-}p.s$	:	Est la notation presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
EDS	:	L'équation différentielle stochastique.
$EDSRs$	:	Les équation différentielle stochastique rétrograde.
B_t	:	Le mouvement brownien.
∇_ρ	:	Le gradient de la fonction $\mathbb{P}$.

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs en abrégé), également connues sous le nom de Backward Stochastic Differential Equations (BSDE en anglais), ont été introduites pour la première fois (sous forme linéaire) en 1973, par J.M.Bismut dans le cadre du contrôle stochastique optimal et du principe du maximum de Pontryagin. Cependant, c'est E. Pardoux et S. Peng en 1990 que la théorie des EDSRs s'est développée, avec l'établissement du premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas non Iinéaire. Depuis lors, des efforts ont été déployés pour affaiblir les hypothèses lipschitziennes. Cette évolution est principalement du aux nombreuses applications que les EDSRs ont trouvées dans divers domaines de mathématiques tels que le contrôle optimal les EDP's, la théorie des jeux différentielles et la finance.

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades sont des équations de la forme :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \quad t \in [0, T], \\ Y_T = \zeta. \end{cases}$$

la fonction s'appelle le générateur de l'EDSR et la ζ condition terminale.

Le processus de résolution de cette équation consiste à trouver un couple $(Y_t, Z_t)_{o<t<T}$ de processus adapté à la filtration donnée, et qui vérifie l'equation precident. Basé sur le travail de E. Pardoux et S. Peng, de nombreux articles ont été publiés

qui avaient pour objectif d'affaiblir l'hypothèse de régularité du générateur par rapport à (Y, Z).

En 1997, J.P.Lepeltier et J.San Martin ont étudié des EDSRs dont le générateur f est simplement continu, à croissance linéaire en (Y, Z). En 1991. S. Peng a étudié des EDSRs dont le générateur f est quadratique en y i.e : il affaiblit la condition de lipschitz de f dans la variable y et la remplacer par une condition de quadratique on appelle l'EDSR dans ce cas EDSR quadratique Rappelons que ce type d'hypothèse est apparu pour traiter le cas des EDSR avec temps terminal aléatoire c'est à dire des EDSR pour lesquelles on impose la condition $Y_T = \zeta$ où T est un temps d'arrêt.

Notre travail est structuré en trois chapitres :

Le premier chapitre présente des généralités sur le calcul stochastique (processus stochastique mouvement Brownien, intégrale stochastique, formule d'Itô...etc). Le deuxième chapitre est dédié à l'étude d'existence et d'unicité d'une solution de l'EDSR a coefficient Lipshtizien, ce résultat est dù à S.Peng.

Le dernier chapitre est dédié à l'étude d'existence et d'unicité d'une solution de l'EDSR dans les conditions quadratique en y, ce résultat est dù à S. Peng.

Chapitre 1

calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *(**Processus stochastique**) Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeur dans un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est indéxée par le temps t. Le paramètre du temps t variant dans I.*

1. Si t fixe : X_t est un v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
2. Si ω fixe : X_t appelé la trajectoire de $(X_t)_{t \in T}$ associée à ω.

Remarque 1.1.1

1. *Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus a temp discret.*
2. *Si $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus a temp continue.*

Définition 1.1.2 *(**filtration**) Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$ dans T*

1. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.

2. On dit que la filtration est naturelle (ou canonique) de processus X si

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ 0 \leq s \leq t), \qquad t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algébre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

Définition 1.1.3 *On dit qu'une filtration $\mathcal{F}= (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite si :*

$$\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s\geq t}\mathcal{F}s = \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.4 ***(processus adapté)*** *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Définition 1.1.5 ***(processus a trajectoire continue)*** *Un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega)\ \textit{est continue}\}) = 1.$$

Définition 1.1.6 ***(processus progressivement mesurable)*** *Un processus $(X_t)_{t\in I}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$ l'application $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ estmesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.7 ***(processus càdlàg)*** *Un processus X est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et prouvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.8 ***(mouvement Brownien)*** *On appelle $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifier :*

(i) Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

(ii) Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.

(iii) Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$.

Définition 1.1.9 ***(mouvement Brownien standard)*** *Soit B un processus stochastique, on dit que B est un mouvement Brownien standard si :*

$$B_0 = 0, \quad \mathbb{P} - p.s, \qquad \mathbb{E}[B_t] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}[B_t^2] = t.$$

Dans ce cas la loi de B_t est une loi normale.

Proposition 1.1.2 *Soit B un mouvement Brownien Standard :*

1. *Pour tout $t \geq 0, X_t = tB_{\frac{1}{t}}$, alors (X_t) est un MB.*
2. *Soit c réel positive $(c > 0)$,on a $Z_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$, donc (Z_t) est un mouvement Brownien.*
3. *Pour tout $s > 0, \{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq s)$.*

Théorème 1.1.1 *Un processus B est un mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance :*

$$cov(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t B_s) = s \wedge t = \min(t, s).$$

Proposition 1.1.3 *Soit B un MB alors presque sûrement on a :*

- *B n'est pas différentiable en aucun point t.*
- *B n'est pas à variation finie en aucun point t.*

Définition 1.1.10 ***(temp d'arrêt)*** *Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est un temp d'arrêt (par rapport a la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ si pour $t \in T$:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega \ / \ \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.11 *(**martingale**) Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est dit martingale si :*

1. *pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t-$adapté ;*
2. *pour tout $t \geq 0$, M_t est intégrable, i.e. $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;*
3. *pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$*

On définit de manière similaire sur-martingale si (3) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s, , \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Et sous-martingale si (3) est remplacé par

$$\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Proposition 1.1.4 *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien* *(i)* $B_t^2 - t$ *est une martingale.*

(ii) *Pour tout* $\sigma \in \mathbb{R}, \exp(\sigma B_t - \sigma^2 \frac{t}{2})$ *est une martingale.*

Remarque 1.1.3 *Le mouvement Brownien standard* $(B_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$.

Théorème 1.1.2 ***(de représentation martingale)*** *Soit* B_t *un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}{=}\ (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$,*et* M_t *une martingale* $\mathcal{F}_t$*-adapté. Alors, il existe un processus adapté* Z_s *tel que :*

$$M_t = M(0) + \int_0^t Z(s) dB_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Définition 1.1.12 ***(martingale local)*** *Soit* $(M_t)_{t \geq 0}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$*-adapté à trajectoire continue à droite. On dit que* $(M_t)_{t \geq 0}$ *est une martingale local s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt* $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = \infty, \quad \mathbb{P}{-}p.s.$ *et pour tout* n, $M^{\tau_n} 1_{\tau_n > 0}$ *est une martingale.*

Définition 1.1.13 ***(variation finie, borneé et quadratique)*** *Soit* $[0, T]$ *un intervalle et* $\pi_n = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n = T$, *une subdivision de* $[0, T]$ *de pas*

$$\|\pi_n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| t_i^n - t_{i-1}^n \right|.$$

On appelle variation infinitésimal d'ordre p *d'un processus* X *indexé par* $[0, T]$ *associé a* π_n *:*

$$V_T^p(\pi_n) = \sum_{i=1}^n \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p.$$

Si $V_T^p(\pi_n)$ *admet une limite dans (en un certain sens) lorsque* $\|\pi_n\|_\infty \to_{n \to \infty} 0$ *et la limite ne dépond pas de la subdivision choisie, on appelle* $V_T^p = \lim_{\|\pi_n\|_\infty \to 0} V_T^p(\pi_n)$ *variation d'ordre* p.

a) *Si $p = 1$, la limite V_T^1 est appelée variation totale de X*

- *Si $\forall T$, V_T^1 est fini on dit que X est à variation finie.*
- *Si $\forall T$, V_T^1 est borné on dit que X est à variation finie.*

b) *Si $p = 2$, la limite est appelée variation quadratique de X.*

1.2 Calcul d'Itô

1.2.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie de façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $B : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $\phi : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô $\displaystyle\int_0^T \phi_s dB_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$.

l'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_s dB_s$ pour des processus ϕ

1. Cas étagé

On dit ϕ est un processus étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i est

$\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables de carré intégrables $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit :

$$\int_0^{\infty} \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

On sais que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \phi_s dB_s\right] = 0 \text{ et } Var\left[\int_0^{\infty} \phi_s dB_s\right] = \left[\int_0^{\infty} \phi_s^2 ds\right].$$

Alors :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}).$$

2. Cas général

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite).

Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2) ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^{\infty} \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \phi_s dB_s\right] = 0.$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dB_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (B_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0$ car $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ sont à acroissement indépendantes.

Pour montrer que

$$var[I_t(\phi)] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
var[I_t(\phi)] &= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2) - \mathbb{E}(I_t(\phi))^2, \\
&= \mathbb{E}(I_t(\phi)^2), \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \phi_s^2 dB_s\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} -_{t_i})\right)^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 \mathbb{E}\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right], \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 (t_{i+1} - t_i), \\
&= \int_0^{\infty} \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.2.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a quelque propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

1. Additivité : pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t \phi_v dW_v = \int_s^u \phi_v dW_v + \int_u^t \phi_v dW_v.$$

2. Linéairité :

$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \phi_s^1 dB_s + b\int_0^t \phi_s^2 dB_s.$$

3. Propriétés de martingale : pour tout processue ϕ les processus :

$$t \rightarrow I_t(\phi), \quad \text{et} \quad t \rightarrow I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s ds,$$

sont des $(\mathcal{F}_t^B)$ -martingale continues.

$$\mathbb{E}[(I_t(\phi) - I_s(\phi))^2 \mid \mathcal{F}_s^B] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du / \mathcal{F}_s^B\right].$$

4. Si $(x_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}(\int_0^T |x_s|^2\, ds) < +\infty$, on a l'inégalité :
$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |x_s|^2\, dB_s\right|^2\right] \leq 4\left(\int_0^T |x_s|^2\, ds\right),$$
5. Isométrie :
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.1 ***(processus d'Itô)*** *Un processus d'Itô est un processus de la forme*
$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P} - p.s,$$
avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s|\, ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \|\theta_s\|^2\, ds < +\infty,$$

où le coefficient φ est le drifte ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion.

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dB_s.$$

1.2.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 *(**première formule d'Itô**) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)ds,$$

***Théorème 1.2.2** (**deuxième formule d'Itô**) Soit f une fonction de C^2, on a alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\theta_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds.$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Remarque 1.2.1 *La formule dItô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (i.e $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $B\left(t\right)$ sont des matrices)*

$$\begin{aligned} f\left(t, X_t\right) &= f\left(0, X_0\right) + \textstyle\int_0^t f_s\left(s, X_s\right)\varphi_s ds + \int_0^t f_x\left(s, X_s\right)\varphi_s ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\theta\left(s\right)^T f\left(s, X\left(s\right)\right)\theta\left(s\right)\right] + \textstyle\int_0^t f_x\left(s, X_s\right)\theta_s dB_s \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *(**formule d'intégration par parties**) Si X et Y sont des processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t\,.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques Rétrogrades a coefficient Lipshtizien

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé), et de préciser la terminologie employée dans ce contexte. Nous montrerons le résultat classique d'existence et d'unicité des solutions pour les ESDR a coefficient Lipshtizien.

2.1 Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet de mouvement Brownien B un $d-$dimensionnel sur cet espace. On note $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien. On travaillera avec deux espaces de processus :

– On notera tout d'abord S_2^k l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$,et $\mathcal{F}_t^B$-adapté tel que :

$$\|Y\|_{S_2^k} = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y|^2\right] < \infty.$$

Et $S_c^k(\mathbb{R}^k)$ le sous espace formé par les processus continus.

Et ensuite $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, et $\mathcal{F}_t^B$-adapté tel que :

$$\|Z\|_{S_2^{k\times d}} = \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2 ds\right] < \infty.$$

Les espaces $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}_c^2$ et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment.

Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)\times$ $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(Y,Z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,Y,Z)_{0\leq t\leq T}\}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable pa rapport à $\mathcal{F}_t$ et à valeur dans $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t, 0\leq t\leq T \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

où, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR (2.1) et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR $(2,1)$.

Définition 2.1.1 *Une solution de l'EDSR* $(2,1)$ *est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$.

2. $\mathbb{P}-p.s$
$$\left\{ \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)|ds - \int_0^T |Z_s|^2 ds \right\} < \infty;$$

3. $\mathbb{P}-p.s$, *on a*
$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T.$$

Remarque 2.1.1 *On cherche un couple de processus* (Y, Z) *tel que :*

– (Y, Z) *est* $\mathcal{F}_t^B$*-adapté.*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2 ds\right] < \infty.$$

–
$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, B, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s. \tag{EDSR(f,ξ)}$$

Exemple 2.1.1 *(EDO)*

$$\begin{cases} dY_t = f(Y_t)dt \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Supposon $f(Y) = 0$. *La solution de l'équation* (EDO) *est* $Y_t = \xi, \forall t \leq T$, *mais* Y_t *n'est pas* $\mathcal{F}_t^B$*-mesurable où* ξ *est seulement* $\mathcal{F}_T^B$*-mesurable . La solution de EDRS* $(0, \xi)$ *tel que* $f = 0$. *La meilleurs approximation dans* $L^2(\mathcal{F}_t^B)$ *de* ξ *est* $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right]$ *que est* $\mathcal{F}_t^B$*-martingale. D'aprés le théorème de réprésentation des martingales Brownien on obtient :*

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] = \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

$\forall Z$ *est* $\mathcal{F}_t^B$ *prévisible et* $\mathbb{E}\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right] < \infty$,

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] = \mathbb{E}\left[\xi\right] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

On pose $t = T$:

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_T^B\right] - \mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] = \int_t^T Z_s dB_s,$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right] = \xi - \int_t^T Z_s dB_s,$$

c'est-à-dire :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s,$$

donc $\mathbb{E}\left[\xi|\mathcal{F}_t^B\right]$ *est une solution de l'EDRS* $(0, \xi)$.

2.2 Théorème d'existence et d'unicité des EDSR a coefficient Lipshtizien

Théorème 2.2.1 *Sous les données précedentes $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T^B)$, on suppose de plus que :*

$\mathbf{H}_1$ *f est k-uniforme Lipshtizien par rapport Y et Z, c'est-à-dire :*

$\exists k > 0, \forall (Y, Z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, $\forall (\acute{Y}, \acute{Z}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$:

$$|f(t, B, Y, Z) - f(t, B, \acute{Y}, \acute{Z})| \leq k(|Y - \acute{Y}| + |Z - \acute{Z}|).$$

$\mathbf{H}_2$

$$|f(t, B, Y, Z)| \leq h_t(B) + \lambda(|Y| + |Z|),$$

où $h_t(\omega) \geq 0, \forall t, B$ et $\mathbb{E}(\int_0^T h_s^2 ds) < \infty$

$\mathbf{H}_3$

$$\mathbb{E}\left[|\xi| + |\int_0^T f(t, B, 0, 0)|^2 ds\right] < \infty.$$

Alors l'EDRS (f, ξ) possède une solution.

Preuve.

Etape1 : On suppose que $f(t, B, Y, Z) = f(t, B)$, ce qui implique l'EDSR suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, B)ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

Le processus $M_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(s, B)ds|\mathcal{F}_t^B\right]$ est une martingale. D'aprés le théorème de réprésentation des martingales Brownien on obtient :

$\forall (Z_t)$ $\mathcal{F}_t^B$ previsible processus tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^t |Z_s|^2 ds\right] < \infty$.

Et

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s,$$

donc

$$M_T - M_t = \int_t^T Z_s dB_s,$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(s,B)ds|\mathcal{F}_T^B\right] - \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(s,B)ds|\mathcal{F}_t^B\right] \\
&= \xi + \int_0^T f(s,B)ds - \left(\mathbb{E}\left[\int_0^t f(s,B)ds|\mathcal{F}_t^B\right] - \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,B)ds|\mathcal{F}_t^B\right]\right) \\
&= \xi + \int_0^T f(s,B)ds - \int_0^t f(s,B)ds - \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,B)ds|\mathcal{F}_t^B\right] \\
&= \xi + \int_t^T f(s,B)ds - \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,B)ds|\mathcal{F}_t^B\right].
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s,B)ds|\mathcal{F}_t^B\right] = \xi + \int_t^T f(s,B)ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

c'est-à-dire :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,B)ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

■

Etape2 : $f(t,B,Y,Z)$ est vérifie (H_1,H_2,H_3).

Lemme 2.2.1 *On suppose que (H_2) est vérifiée, soit (Y,Z) une solution de l'EDRS (f,ξ), on suppose de plus que $Z \in M_2^{k\times d}$, $(\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2 ds\right] < \infty)$. Alors $Y \in S_2^k$.*

Preuve. On a

$$Y_t = Y_0 + \int_0^T f(s,B,Y_s,Z_s)ds - \int_0^t Z_s dB_s,$$

car (Y_s, Z_s) verifié l'EDRS (f, ξ). On obtient :

$$\begin{aligned}
|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^T |f(s, B, Y_s, Z_s)|\, ds + \left| \int_0^t Z_s dB_s \right| \\
&\leq |Y_0| + \int_0^T |f(s, B, Y_s, Z_s)|\, ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right| .
\end{aligned}$$

D'après (H_2) on obtient :

$$\begin{aligned}
|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^T (h_t(B) + \lambda |Y_s| + \lambda |Z_s|)\, ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right| \\
&\leq |Y_0| + \int_0^T (h_t(B) + \lambda |Z_s|)\, ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right| + \int_0^T \lambda |Y_s| ds.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall et l'inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy on obtient :

$$|Y_t| \leq \eta_T \times \exp(\lambda t),$$

où

$$\eta_T = |Y_0| + \int_0^T (h_t(B) + \lambda |Z_s|)\, ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right| ,$$

donc

$$\sup_{t \leq T} |Y_t|^2 \leq \eta_T^2 \times \exp(2 \times \lambda t),$$

passant a l'esperance, on trouve :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} |Y_t|^2 \right] \leq \exp(2 \times \lambda t) \times \mathbb{E} \left[\eta_T^2 \right] < \infty.$$

Alors $Y \in S_2^k$. ■

Lemme 2.2.2 *Soit $(Y,Z) \in S_2^k \times M_2^{k\times d}$ c'est-à-dire*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|Y_t|^2\right] < \infty \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right] < \infty.$$

Alors la martingale locale $M_t = \int_0^t Y_s Z_s dB_s$ est une martingale uniformement dans L^1 c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|M_t|^2\right] < \infty.$$

Preuve. Ona :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dB_s\right|\right] &\leq C_P \mathbb{E}\left[\left\langle \int_0^t Y_s Z_s dB_s \right\rangle_T^{\frac{1}{2}}\right] = C_P \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left(\int_0^t |Y_s|^2 |Z_s|^2 d_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C_P \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \sup_{t\leq T}|Y_s|^2 |Z_s|^2 d_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C_P \mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\leq T}|Y_s|^2 \int_0^t |Z_s|^2 d_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C_P \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|Y_s|^2 + \int_0^t |Z_s|^2 d_s\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

(Car $a.b \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \leq (a^2+b^2), (Y,Z) \in S_2^k \times M_2^{k\times d}$) ■

2.2.1 Démonstration du théorème d'existence par le théorème du point fixe

Sous les condition (H_1, H_2, H_3), soit $(U,V) \in \mathcal{B}^2 = S_2^k \times M_2^{k\times d}$, alors l'EDRS (f,U,V) suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,U,V)ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

possède une seule solution $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$, ceci définit une application :

$$\psi : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$$

$$(U,V) \mapsto \psi(U,V) = (Y,Z).$$

Solution de l'EDRS (f,U,V).

Remarque 2.2.1

$$\|Y,Z\|^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\int_0^t |Z_s|^2 dB_s\right] \sim \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)|Y_t|^2 + \int_0^t \exp(\alpha t)|Z_s|^2 ds\right].$$

Soit (U,V,Y,Z) *et* $(\acute{U},\acute{V},\acute{Y},\acute{Z})$ *tel que :*

$$(Y,Z) = \psi(Y,Z), \quad (\acute{Y},\acute{Z}) = \psi(\acute{Y},\acute{Z}).$$

On pose

$$\bar{U} = U - \acute{U}, \quad \bar{V} = V - \acute{V}, \quad \bar{Y} = Y - \acute{Y}, \quad \bar{Z} = Z - \acute{Z}.$$

On applique la formule d'**Itô** à la fonction :

$$H(t,Y) = \exp(\alpha t)|Y|^2 \in C^{1,2}.$$

Ce qui nous donne :

$$\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}_s|^2 ds = \int_t^T \exp(\alpha s)\left(-\alpha|\bar{Y}_s|^2 + 2\bar{Y}_s(f(U,V) - f(\acute{U},\acute{V}))ds\right)$$
$$- \int_t^T 2\exp(\alpha s)\bar{Y}_s\bar{Z}_s dB_s).$$

D'après la condition de Lipschitz on obtient :

$$\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2+\int_t^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}_s|^2 ds \leq \int_t^T \exp(\alpha s)\left(-\alpha|\bar{Y}_s|^2+2\bar{Y}_s L(\bar{U}-\bar{V})ds\right)$$
$$-\int_t^T 2\exp(\alpha s)\bar{Y}_s\bar{Z}_s dB_s),$$

$\forall\varepsilon>0$, on a :

$$2ab=2a\sqrt{2}\times\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\leq\varepsilon a^2+\frac{b^2}{2},$$

alors

$$\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2+\int_t^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}_s|^2 ds$$
$$\leq\int_t^T \exp(\alpha s)\left(-\alpha|\bar{Y}_s|^2+2\frac{L^2}{\varepsilon}|\bar{Y}_s|^2 ds\right)+R_\varepsilon-\int_t^T 2\exp(\alpha s)\bar{Y}_s\bar{Z}_s dB_s),$$

où

$$R_\varepsilon=\int_0^T \varepsilon\exp(\alpha s)(\left|\bar{U}_0\right|^2-\left|\bar{V}_0\right|^2)ds.$$

On pose $\varepsilon=\frac{2L^2}{\alpha}$

$$\exp(\alpha s)|\bar{Y}_t|^2+\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}|^2 ds\leq R_\varepsilon-\int_t^T 2\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s||\bar{Z}_s|dB_s, \qquad (2.2)$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}|^2 ds\right]\leq\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right],\forall t\in T,$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha t)|\bar{Z}|^2 ds\right]\leq\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \qquad (2.3)$$

Par aillieurs, implique :

$$\sup_{t\leq T}\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2 \leq R_\varepsilon + \sup_{t\leq T}\left|\int_t^T 2\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s||\bar{Z}_s|dB_s\right|,$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T 2\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s||\bar{Z}_s|dB_s\right|\right],$$

alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\left\langle\int_t^T 2\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s||\bar{Z}_s|dB_s\right\rangle_T^{\frac{1}{2}}\right].$$

Car ($\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T} M_t\right] \leq \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_T^{\frac{1}{2}}\right]$) aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\exp(\alpha t)|\bar{Y}_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\int_t^T 4\exp(2\alpha s)|\bar{Y}_s|^2|\bar{Z}_s|^2 d_s\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2 C^2\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha\frac{s}{2})|\bar{Y}_s|(C^2\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \exp(\alpha s)|\bar{Z}_s|^2 ds\right],
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] = \frac{2+C^2}{2}\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right],$$

ce qui nous donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)|\bar{Y}_s|^2\right]\leq(2+C^2)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.4}$$

D'après (2.3) et (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\psi(\bar{U},\bar{V})\right\|_{2,\alpha} &= \left\|(\bar{Y},\bar{Z})\right\|_{2,\alpha}\leq(3+C^2)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]\\
&\leq(3+C^2)\mathbb{E}\left[\int_0^T\varepsilon\exp(\alpha s)(\left|\bar{U}_s\right|^2+\left|\bar{V}_s\right|^2)ds\right]\\
&\leq(3+C^2)\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)(\left|\bar{U}_s\right|^2+\left|\bar{V}_s\right|^2)ds\right]\\
&\leq(3+C^2)\varepsilon\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)\left|\bar{U}_s\right|^2ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)\left|\bar{V}_s\right|^2ds\right]\right)\\
&\leq(3+C^2)\varepsilon\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T\sup_{s\leq T}\exp(\alpha s)\left|\bar{U}_s\right|^2ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)\left|\bar{V}_s\right|^2ds\right]\right)\\
&\leq(3+C^2)\varepsilon\left(\int_0^T ds\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha t)\left|\bar{U}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)\left|\bar{V}_s\right|^2ds\right]\right).
\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon=2(T+1)(3+C^2)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\psi(\bar{U},\bar{V})\right\|_{2,\alpha} &= \left\|(\bar{Y},\bar{Z})\right\|_{2,\alpha}\\
&\leq(T+1)(3+C^2)\varepsilon\left(\int_0^T ds\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq T}\exp(\alpha t)\left|\bar{U}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)\left|\bar{V}_s\right|^2ds\right]\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left\|\psi(\bar{U},\bar{V})\right\|_{2,\alpha}\leq\frac{1}{2}\left\|(\bar{U},\bar{V})\right\|_{2,\alpha}.$$

Donc l'aplication ψ est contractante de $(\mathcal{B}^2,\|\bullet\|_{2,\alpha})$ dans $(\mathcal{B}^2,\|\bullet\|_{2,\alpha})$. Elle possède donc un point fixe. C-à-dire

$$\exists!(Y,Z) \in \mathcal{B}^2 \text{ tel que } (Y,Z) = \psi(Y,Z).$$

Donc

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

Chapitre 3

Equation différentielle stochastique rétrograde quadratique

3.1 L'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR dans les conditions quadratique en y

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, 0 \leq t \leq T \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans ce chapitre nous allons établir un résultat d'existence et d'unicité pour les EDSRs lorsqu'on affaiblit la condition de lipschitz de f dans la variable y pour la remplacer par une condition de quadratique.

On considère les hypothèses suivantes :

Il existe des constantes $K \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $C \geq 0$ et un processus progressivement mesurable $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ positif tels que, $\mathbb{P}.p.s.$

(H_1) condition de lipschitz en Z :

$$\forall (t,y), \forall (z,z'), \quad |f(t,y,z)-f(t,y,z')| \leq K\|z-z'\|,$$

(H_2) croissance linéaire en (y,z) :

$$\forall (t,y,z), \quad |f(t,y,z)| \leq f_t + C\,|y| + K\|z\|,$$

(H_3) quadratique en y : pour tout t,z,

$$\forall (y,y'), \quad (y-y').\left(f(t,y,z)-f(t,y',z)\right) \leq \mu\,|y-y'|^2\,,$$

(H_4) continuité en y : pour tout (t,y), $y \longrightarrow f(t,y,z)$ est continue,

(H_5) ζ est $\mathcal{F}_T$-mesurable et

$$\mathbb{E}\left[|\zeta| + \int_0^T f_t^2 dt\right] < \infty.$$

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses (H_1, H_2, H_3, H_4 et H_5) l'EDSR (3.1) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

La condition de lipschitz par rapport à la variable y peut être remplacée par une condition de quadratique, ce qui est sujet de travail publié par S.PENG, ensuite par R.DARLING et E.PARDOUX. Cette hypothèse de quadratique est trés employée, il permet de manipuler les EDSRS avec un temps finale aléatoire et d'autre part d'affaiblir l'hypothèse de croissance sur f par rapport à Y.

Remarque 3.1.1 *On note les hypothèse précédentes par $\mathcal{H}$.*

Remarque 3.1.2 *Si f est K lipschitz en Y alors elle est quadratique avec $K = \mu$, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.*

3.2 Estimation à priori

Avant d'annoncer le théorème d'existence et d'unicité des solutions de l'EDSR

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Lorsque (ζ, f) vérifie les hypothèses $\mathcal{H}$, on va donner quelques estimation à priori concernant les solution des EDSRs qu'on va utiliser pour la démonstration de ce théorème.

Remarquons ensuite que sous les hypothèses $\mathcal{H}$, si (Y, Z) est solution de l'EDSR (3.2) alors Y appartient à S^2 dès que Z appartient à $\mathcal{M}^2$.

Proposition 3.2.1 *Soit $\zeta \in L^2(F_T)$ supposons qu'il existe des constantes μ, K et un processus $(f_t)_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^+)$ tels que, $\mathbb{P} - p.s.$*

$$\forall (t, y, z), \quad y.f(t, y, z) \leq |y|\, f_t + \mu\, |y|^2 + K\, |y|\, \|z\|, \tag{3.3}$$

Soit $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ solution de l'EDSR (3.2). Alors, il existe une constante universelle C_u telle que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\,|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t}\|Z_t\|^2 dt\right] \leq C_u \mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\,|\zeta|^2 + \left(\int_0^T e^{\frac{\alpha t}{2}} f_t dt\right)^2\right],$$

avec $\alpha = 2(\mu + K^2)$. *De plus, on a pour tout* $t \in [0,T]$, *notons* $\gamma = 1 + 2\mu + K^2$,

$$|Y_t|^2 \leq \mathbb{E}\left[e^{\gamma(T-t)} |\zeta|^2 + \int_t^T e^{\gamma(r-t)} f_r^2 dr \,|\mathcal{F}_t \right].$$

Remarque 3.2.1 *Si* f *vérifier les hypothèses* $\mathcal{H}$ *on peut prendre* $f_t = |f(t,0,0)|$. *On peut également noter, pour le second point, que dès que* ζ *et* f_t *sont bornés par une constante* M,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \leq M^2 C(\gamma, T).$$

On peut prendre $C(\gamma, T) = (1+T)e^{\gamma + T}$ et si $\gamma \geq 1$, $C(\gamma, T) = 2e^{\gamma T}$ convient aussi.

Preuve. On applique la formule d'Ito à $e^{\alpha t} |Y_t|^2$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ pour obtenir :

$$e^{\alpha t} |Y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|Z_r\|^2 dr = e^{\alpha T} |\zeta|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \left(-\alpha |Y_r|^2 + 2Y_r.f(r, U_r, V_r) \right) dr$$
$$- \int_t^T e^{\alpha r} Y_r.Z_r dB_r.$$

D'aprés l'hypothèse (3.3) et l'égalité $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}$ on obtient si $\epsilon = 1$:

$$\forall (t,y,z), \quad 2y.f(t,y,z) \leq (1 + 2\mu + K^2) |y|^2 + f_t^2 + \|z\|^2,$$

$\alpha = \gamma = 1 + 2\mu + K^2$, on trouve donc

$$e^{\alpha t} |Y_t|^2 \leq e^{\gamma T} |\zeta|^2 + \int_t^T e^{\gamma r} f_r^2 dr - 2 \int_t^T e^{\gamma r} Y_r.Z_r dB_r.$$

On va conditionner par rapport à $\mathcal{F}_t$, pour obtenir la seconde partie de la proposition. Revenant à l'hypothèses (3.3) et utilisant l'inéglité $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}$ on obtient si $\epsilon = 2$:

$$2y.f(t,y,z) \leq 2(\mu + K^2)|y|^2 + 2|y|^2 f_t^2 + \frac{\|z\|^2}{2},$$

on prend $\alpha = 2(\mu + K^2)$ ce qui implique,

$$e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr \leq e^{\alpha T}|\zeta|^2 + 2\int_t^T e^{\alpha r}|Y_r|.f_r dr - 2\int_t^T e^{\alpha r} Y_r.Z_r dB_r. \quad (3.4)$$

Prenant l'espérance, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}|\zeta|^2 + 2\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| f_r dr\right]. \quad (3.5)$$

Revenant à l'inégalité (3.4), les inégalités BDG fournissent avec C universelle,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|Y_t|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}|\zeta|^2 + 2\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| f_r dr\right] + C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\right] \\ &\leq 2(1+C^2)\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}|\zeta|^2 + 2\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| f_r dr\right] \quad (3.6)\end{aligned}$$

(3.5)+ (3.6) donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\right] \leq 2(2+C^2)\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}|\zeta|^2 + 2\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| f_r dr\right].$$

Pour finir la preuve de la proposition, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}4(2+C^2)\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r|.f_r dr\right] &\leq 4(2+C^2)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}|Y_t|^2 \int_0^T e^{\frac{\alpha r}{2}} f_r dr\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|Y_t|^2\right] + 8(2+C^2)^2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{\frac{\alpha r}{2}} f_r dr\right)^2\right].\end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\right] \leq C_u \mathbb{E}\left[e^{\alpha T}|\zeta|^2 + \left(\int_0^T e^{\frac{\alpha r}{2}} f_r dr\right)^2\right],$$

avec $C_u = 16(2 + C^2)^2$. ■

La proposition précédente possède le corollaire important suivant.

Corollaire 3.2.1 *Soient (ζ, f) et (ζ', f') vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}$ avec des constantes (μ, K, C), (μ', K', C');*

soient (Y, Z) et (Y', Z') des solution des EDSRs associées telles que Z, Z' appartient à $\mathcal{M}^2$. Il existe une constante universelle C_u, telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t}\|\delta Z_t\|^2 dt\right] \leq C_u \mathbb{E}\left[e^{\alpha T}|\delta\zeta|^2 + \left(\int_0^T e^{\frac{\alpha r}{2}} |\delta f(t, Y'_t, Z'_t)| dt\right)^2\right],$$

avec $a = 2(\mu + K^2)$ et les notations classiques $\delta Y = Y - Y'$, $\delta Z = Z - Z'$, $\delta\zeta = \zeta - \zeta'$ de même que $\delta f(t, y, z) = f(t, y, z) - f'(t, y, z)$.

Preuve. Remarquons que sous les hypothèses $\mathcal{H}$ dès que $Z \in \mathcal{M}^2$, (Y, Z) solution de l'EDSR de paramètres ζ et $f \in \mathcal{B}^2$. Notons que $(\delta Y, \delta Z)$ est solution de l'EDSR de paramètres $\delta\zeta$ et

$$g(t, y, z) = f(t, y + Y'_t, z + Z'_t) - f'(t, Y'_t, Z'_t),$$

et on écrit

$$y.g(t,y,z) = y.(f(t,y+Y'_t,z+Z'_t) - f'(t,Y'_t,z+Z'_t)) + y.(f(t,Y'_t,z+Z'_t) \\ - f(t,Y'_t,Z'_t)) + y.(f(t,Y'_t,Z'_t) - f'(t,Y'_t,Z'_t)),$$

on a

$$y.(f(t,y+Y'_t,z+Z'_t) - f'(t,Y'_t,z+Z'_t)) \leq \mu \left|y\right|^2, \quad \text{(d'aprés la quadratique)},$$

$$y.(f(t,Y'_t,z+Z'_t) - f(t,Y'_t,Z'_t)) \leq K\left|y\right| \|Z\|, \quad \text{(comme } f \text{ est lipschitz)},$$

$$y.(f(t,Y'_t,Z'_t) - f'(t,Y'_t,Z'_t)) \leq \left|y\right| \left|\delta f(t,Y'_t,Z'_t)\right|.$$

Alors

$$y.g(t,y,z) \leq \mu\left|y\right|^2 + K\left|y\right| \|Z\| + \left|y\right| \left|\delta f(t,Y'_t,Z'_t)\right|.$$

Il suffit d'appliquer la proposition précédente pour conclure le résultat. ■

Lemme 3.2.1 *Sous les hypothèses $\mathcal{H}$,et ζ et $\sup\limits_t(h_t)$ sont bornés par un réel M où $h_t = f_t + K\|V_t\|$ et $V \in \mathcal{M}^2$ l'EDSR*

$$Y_t = \zeta + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad \forall t \in [0,T],$$

possède une solution unique telle que $Z \in \mathcal{M}^2$.

Preuve. Notant $h(t,y) = f(t,y,V_t)$, soit $V \in \mathcal{M}^2$. Notre objectif est de construire une solution pour l'EDSR suivante :

$$Y_t = \zeta + \int_t^T h(r,Y_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.7}$$

Il est facile de montrer que h vérifie les hypothèses $\mathcal{H}$,

• $|h(t,y)| \leq h_t + C\,|y|$, où $h_t = f_t + K\|V_t\|$ appartient à $\mathcal{M}^2$ (croissance linéaire en (y,z)),

• $y \longrightarrow h(t,y)$ est continue,

• ζ est de carré intégrable.

On suppose que $\mu = 0$, puisque (Y,Z) est solution de l'EDSR (3.7) si et seulement si $(Y_t', Z_t') = (e^{\mu t}Y_t', e^{\mu T}Z_t')$ est solution de l'EDSR de paramètres (ζ', h') où $\zeta' = e^{\mu T}\zeta$ et $h'(t,y) = (t, e^{-\mu t}y) - \mu r$. Or (ζ', h') vérifier les hypothèses $\mathcal{H}$ avec $\mu' = 0$, $h_t' = e^{\mu t}h_t$ et $C''' = C + |\mu|$.

L'EDSR de paramètres (ζ', h') est obtenue à partir de la formule d'Ito appliquée à $e^{\mu t}Yt$.

Considérant maintenant la fonction $\rho : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$, de classe C^∞ dont le support est la boule unité telle que $\int\limits_{\mathbb{R}^k} \rho(u)du = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n(u) = n^k\rho(nu)$.

Soit d'autre part $\theta_n : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,1]$, C^∞ telle que

$$\theta = \begin{cases} 1 & si \;\; |y| < n \\ 0 & si \;\; |y| \geq n+1 \end{cases}$$

On définit enfin, pour $n \geq 1$,

$$h_n(t,y) = \rho_n * \theta_n h(t,.)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \rho_n(y-u)\theta_n(u)h(t,u)du = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \rho_n(u)\theta_n(y-u)h(t,y-u)du.$$

On remarque que $y \longrightarrow h_n(t,y)$ est de classe C^∞ à support compact et $h_n(t,y) = 0$

si $|y| \geq n+1$ (pour tout (t,ω)). D'aprés l'hypothèse de croissance de h, on a

$$\begin{aligned} h_n(t,y) &\leq \int_{\mathbb{R}^k} \rho_n(u)\,|h(t,y-u)|\,du \leq \int_{\mathbb{R}m} \rho_n(u)\,(h_t + C\,|y| + C\,|u|)\,du \\ &\leq (M + C\,|y|) \int_{\mathbb{R}^m} \rho_n(u) C\,|u|\,du, \end{aligned}$$

et comme le support de ρ est la boule unité et
$(\int_{\mathbb{R}^m} \rho_n(u)du = \int_{\mathbb{R}^m} n^k \rho(nu)du$, on pose $nu = u'$, donc $du = \frac{du'}{n^k}$ ce qui implique que $\int_{\mathbb{R}^m} \rho_n(u)du = \int_{\mathbb{R}^m} \rho(u')du' = 1)$, on obtient

$$|h_n(t,y)| \leq (M + C) + C\,|y|\,. \tag{3.8}$$

Alors $h_n(t,0)$ est un processus borné par $M + C$.

D'autre part on a $\nabla h_n(t,y) = 0$, si $|y| \geq n+2$, et pour $|y| \leq n+2$

$$\begin{aligned} \|\nabla h_n(t,y)\| &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^m} \nabla \rho_n(u) \otimes \theta_n(y-u) h(t,y-u)du \right\| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \rho_n(u)|\,(h_t + C\,|y| + C\,|u|)du, \end{aligned}$$

comme le support de ρ est inclus dans la boule unité et

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \rho_n(u)|\,du = \int_{\mathbb{R}^m} \left|\nabla n^k \rho(nu)\right| du = n \int_{\mathbb{R}^m} n^k\,|\nabla \rho(nu)|\,du,$$

on pose $nu = u'$ donc $du = \frac{du'}{n^k}$ ce qui implique que $\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \rho_n(u)|\,du = \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla \rho(u')|\,du'$, on a

$$\|\nabla h_n(t,y)\| \leq n((M+C)+C\,|y|)\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\nabla\rho(u')|\,du' \leq ((M+C)+C\,|y|)n^2,$$

donc

$$\sup_y \|\nabla h_n(t,y)\| \leq C'n^2.$$

h_n, est dérivable est ces dérivés sont bornée donc elle est lipschitz en y. Alors d'aprés le Théorème (2.1.1) l'EDSR,

$$Y_t^n = \zeta + \int_t^T h_n(r,|Y_r^n|)ds - \int_t^T Z_r^n dB_r, \quad t \in [0,T],$$

à une solution unique (Y^n, Z^n) dans $\mathcal{B}$, on a

$$y.h_n(t,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \rho_n(u)\theta_n(y-u)y.h(t,y-u)du,$$

et $y.h(t,y-u) = y.(h(t,y-u) - h(t,-u)) + y.h(t,-u) \leq 0 + (M + C\,|u|)\,|y|\,.$ (D'aprés la quadratique en y), alors

$$y.h_n(t,y) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^m} \rho_n(u)\left[(M+C\,|u|)\,|y|\right]du,$$

comme le support de ρ est inlus dans la boule unité, on obtient

$$\begin{aligned} y.h_n(t,y) &\leq \left[(M+C)\,|y|\right]\int\limits_{\mathbb{R}^m} \rho_n(u)du \\ &\leq (M+C)\,|y|\,. \end{aligned}$$

De plus $h_n(t,0) \leq (M+C)$, alors la remarque (2.2.1), conduit à

$$\sup_n \big(\sup_t |Y_t^n|^2\big) \leq 2(M+C)^2 \exp\{T\} \text{ où } \gamma = 1, \tag{3.9}$$

si $y \leq n-1$, on a

$$h_n(t,y) \leq \int\limits_{|u|\leq 1} \rho_n(u) h(t, y-u) du,$$

puisque

On remarque que h_n n'est pas quadratique dans tout l'espace mais elle est quadratique dansla boule de centre 0 et de rayon $(n-1)$. On veut maintenant montrer que la suite (Y_n, Z_n) converge dans $\mathcal{B}^2$, et pour cela on prend $m \geq n \geq 1+a$ où $a = \sqrt{2}(M+C)\exp\{T/2\}$.

La formule d'Ito appliqué à $|\delta Y_t|^2$ donne $\delta Y = Y^m - Y^n$, $\delta Z = Z^m - Z^n$,

$$|\delta Y_t|^2 + \int_t^T \|\delta Z_r\|^2 dr = 2\int_t^T \delta Y_r.\{h_m(r, Y_r^m) - h_n(r, Y_r^n)\}dr - 2\int_t^T \delta Y_r.\delta Z_r dB_r.$$

On ne peut pas appliquer directement les estimations à priori car les fonctions h_m et h_n ne sont pas globalement quadratique. Toute fois, h_m est quadratique dans la boule de rayon $(m-1)$,

comme $(m-1)$ a, Y_r^m et Y_r^n appartiennent à cette boule car on a d'après l'estimation (3.9)

$$|Y_t^n| \leq \sqrt{2}(M+C)\exp\{T/2\} \leq m-1.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\delta Y_r.\{h_m(r, Y_r^m) - h_n(r, Y_r^n)\} &\leq \delta Y_r.\{h_m(r, Y_r^m) - h_m(r, Y_r^n)\} + \delta Y_r.\{h_m(r, Y_r^n) - h_n(r, Y_r^n)\} \\ &\leq 0 + 2a \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)|.\end{aligned}$$

Il vient alors

$$|\delta Y_t|^2 + \int_t^T \|\delta Z_r\|^2 dr \leq 4a \int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)|\, dr - 2\int_t^T \delta Y_r.\delta Z_r dB_r. \tag{3.10}$$

Prenant l'espérance, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\delta Z_r\|^2 dr\right] \leq 4a\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)|\, dr\right]. \tag{3.11}$$

$\mathbb{E}\left[\int_0^T \delta Y_r.\delta Z_r dB_r\right] = 0$, puisque $\int_0^T \delta Y_r.\delta Z_r dB_r$ est une martingle.

Revenant à l'inégalité (3.10), pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \|\delta Z_r\|^2 dr\right] \leq 4a\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)|\, dr\right] \\ + 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^T \delta Y_r \delta Z_r dB_r\right|\right].\end{aligned}$$

D'aprés les inégalités BDG et l'inégalité $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^2\right] \leq 4a\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)|\, dr\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \delta\, |y_t|\right] \\ + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\delta z_r\|^2 dr\right],\end{aligned}$$

ce qui implique,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^2\right] \leq 4a(2 + C^2)\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)|\, dr\right]. \tag{3.12}$$

(3.11) + (3.12), donne

$$\mathbb{E}\left[|\delta Y_t|^2 + \int_0^T \|\delta Z_r\|^2 dr\right] \leq c\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)|\, dr\right],$$

avec $c = 4a(2 + C^2)$.

$h_n(t,.)$ converge vers $h(t,.)$ par construction, et comme la fonction $y \longrightarrow h(t,y)$ est continue, alors $h_n(t,.)$ converge vers $h(t,.)$ uniformément sur les compacts $\lambda \otimes \mathbb{P}-$presque partout.

De plus, d'aprés la majoration (3.8), on a

$$\sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)| \leq 2(M + C + Ca).$$

On applique donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h_n(r,y)|\, dr\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \int_0^T \sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h(r,y) + h(r,y) - h_n(r,y)|\, dr\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \int_0^T \left(\sup_{|y|\leq a} |h_m(r,y) - h(r,y)| + \sup_{|y|\leq a} |h(r,y) - h_n(r,y)|\right) dr\right] = 0
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \|Y^m - Y^n\|^2_{\mathcal{S}^2} = 0 \ \text{ et } \lim_{n,m\longrightarrow\infty} \|Z^m - Z^n\|^2_{\mathcal{M}^2} = 0.$$

Alors la suite (Y^n, Z^n) est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$. Soit (Y, Z) la limite de cette suite. On va passer à la limite terme à terme dans l'EDSR dirigée par h_n pour montrer que (Y, Z) est bien solution de l'EDSR (3.7).

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{E}\left[|Y_t^n-Y_t|^2\right]\leq\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\sup\limits_t|Y_t^n-Y_t|^2\right]=0$, d'aprés l'inégalité de Doob on trouve

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T(Z_r^n-Z_r)dB_r\right|\right]\leq 4\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^T\|(Z_r^n-Z_r)\|\,dr\right]=0.$

Alors on déduit que Y_t^n converge vers Y_t et $\int_0^T Z_r^n dB_r$ converge vers $\int_0^T Z_r dB_r$, dans L^2.

Il reste a montrer que $\int_t^T h_n(r,Y_r^n)dr \longrightarrow \int_t^T h(r,Y_r)dr$, on a d'aprés l'inégalité de Hölder

$\mathbb{E}\left[\sup\limits_t\left|\int_t^T h_n(r,Y_r^n)-h(r,Y_r)\right|^2 dr\right]$

$=\mathbb{E}\left[\sup\limits_t\left|\int_t^T h_n(r,Y_r^n)-h(r,Y_r^n)+h(r,Y_r^n)-h(r,Y_r)\right|^2 dr\right]$

$\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_t^T|h_n(r,Y_r^n)-h(r,Y_r^n)|^2\,dr\right]+2T\mathbb{E}\left[\int_t^T|h_n(r,Y_r^n)-h(r,Y_r)|^2\,dr\right]$

les deux termes tendent vers 0 car :

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}|h_n(r,Y_r^n)-h(r,Y_r^n)|\;\leq\;\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sup\limits_{|y|\leq a}|h_n(r,Y_r^n)-h(r,y)|\;=\;0$, et comme la fonction $h(t,.)$ est continue $h(t,Y_t^n)\longrightarrow h(t,Y_t)$. Dans chacun des cas les dominations sont immédiates. ■

Conclusion

Ce mémoire se concentre sur l'étude d'existence et d'unicité de solution pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratique. Cette étude est trés importante pour traiter le cas des EDSR avec temps terminal aléatoire. Trois axes de recherche ont été développés. Le premier axe explore en détail les définitions et les propriétés et tous les résultats connus concernant le calcul stochastique. Le deuxième axe présente les résultat d'existence et d'unicité établis par S. Peng pour les EDSR avec des coefficients lipschitziens. Dans le dernier chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité d'une solution de l'EDSR dans des conditions quadratiques en y, ce résultat est dû à S. Peng.

En résumé, ce mémoire explore différentes facettes de l'existence et de l'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratiques, en mettant en évidence les contributions de S. Peng dans ce domaine de recherche.

Bibliographie

Bibliographie

[1] Briand, Ph. (2001) : Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.

[2] Jeanblanc, M., Simon, T. (2005) : Elément de Calcul Stochastique. Université d'Evry Val d'Essonne, France.

[3] Alaya, M. (2010) : Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades et Mathématiques Financieres. Mémoire se magister. Université de Gabès.

[4] Romeili, N. (2012) : Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades à Coefficients non lipschitzien.Mémoire se magister. Université de Biskra.

[5] Jeanblanc, M. (2006) : Cours de calcul stochastique. Cours de master.

ملخص:

في هذا العمل، قمنا بدراسة وجود و وحدانية حلول المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة التربيعية، وهي مفاهيم في مجال الرياضيات التطبيقية ونظرية الاحتمالات. تلعب هذه المعادلات دورًا مهماً في نمذجة وتحليل الظواهر العشوائية المختلفة وتُستخدم لمعالجة حالة المعادلات التفاضلية العشوائية (EDSR) مع الزمن النهائي العشوائي. هدفنا فهم طرق حل هذه المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة التربيعية. بدأنا بتقديم تفصيلي للحسابات العشوائية. ثم، تمت مناقشة نتيجة وجود وحدانية تم تأسيسها بواسطة S.Peng من أجل المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة ذات معاملات ليبشيتز، بالإضافة إلى دراسة وجود وحدانية حلول المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة (l'EDSR) ضمن شروط تربيعية في المتغير y.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية العشوائية، المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة التربيعية، الوجود، الوحدانية، المعادلات التفاضلية المتأخرة العشوائية ذات معاملات ليبشيتز، المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة ضمن شروط تربيعية في المتغير y.

Résumé :

Dans ce travail, nous avons examiné l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastique rétrogrades quadratique, qui sont des Conceptors dans le domaine des mathématiques appliquées et de la théorie des probabilités. Ces équations jouent un rôle rute dans la modélisation et lanalyse de nombreux phénomènes aléatoires et jouent un role pour traiter le cas des EDSR avec temps terminal aléatoire. Notre objectif était de comprendre les méthodes équations différentielles stochastiques rétrogrades quadratique de résolution de ces équations. Nous avons commencé par présenter en détail les calculs stochastiques. Ensuite, le résultat d'existence et d'unicité établis par S. Peng pour les EDSR avec des coefficients lipschitziens, ainsi l'étude d'existence et d'unicité d'une solution de l'EDSR dans des conditions quadratiques en y.

Mots clés : l'équations différentielles stochastique, l'équations différentielles stochastique rétrogrades quadratique, existence, unicité, l'équations différentielles stochastique rétrogrades avec des coefficients lipschitziens, l'équations différentielles stochastique rétrogrades dans des conditions quadratiques en y.

Abstract:

In this work, we examined the existence and uniqueness of solutions for quadratic backward stochastic differential equations (BSDEs), which are concepts in the field of applied mathematics and probability theory. These equations play a crucial role in the modeling and analysis of various random phenomena and are particularly relevant for dealing with BSDEs with random terminal time. Our objective was to understand the methods of solving these quadratic backward stochastic differential equations. We began by providing a detailed presentation of stochastic calculus. Then, we discussed the existence and uniqueness result established by S. Peng for BSDEs with Lipschitz coefficients, as well as the study of existence and uniqueness of a solution to the BSDE under quadratic conditions in the variable y.

Key words : stochastic differential equations, quadratic backward stochastic differential equations, existence, uniqueness, backward stochastic differential equations with Lipschitz coefficients, stochastic differential equations under quadratic conditions in the variable y.