République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTE des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire présenté par

Djaider Chaima

En vue de l'obtention du Diplôme de

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Titre

Distributions usuelles en statistique multidimensionnelle

Membres du Comité d'Examen

Pr.	Necir Abdelhakim	UMKB	Président
Pr.	Meraghni Djamel	UMKB	Encadreur
Dr.	Soltane Louiza	UMKB	Examinateur

Juin 2023

Dédicace

A mon très cher père Mohammed, à qui Dieu a confié prestige et dignité. Le meilleur des pères, dont je porte le nom avec orgueil et fierté. Que Dieu le protège et prolonge sa vie.

A mon ange de la vie, au sens de l'amour, de la tendresse et de la transcendance, au sourire de la vie et au secret de l'existence, ma très chère maman Noura.

Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

A mes soeurs Tasnime et Fatima, tout en leur souhaitant de réussir dans leur vie. Elles sont, après Dieu, mon soutien, ma force et mon refuge.

A chaque membre de ma famille.

Chaima Djaider

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Dieu Le Tout-Pluissant de m'avoir aidée dans la réalisation de cet humble travail.

J'ai l'immense honneur de remercier mon encadrant, le Pr Meraghni Djamel, pour ses précieux conseils et pour les efforts qu'il fournis pour moi durant la période de travail. Mille mercis à vous.

Un grand merci aux membres du jury de soutenance pour le temps consacré à mon mémoire ainsi qu'à mes très chers parents pour m'avoir soutenue et encouragée durant mes années d'études.

Je voudrais aussi tous ceux et toutes celles, parmi mes enseignants et le personnel administratif, m'ont donné des conseils et des orientations appréciables

Chaima Djaider

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Liste des figures **v**

Liste des tableaux **vi**

Abréviations et Notations **vii**

Introduction **1**

1 Distribution multinormale **2**

1.1 Vecteur aléatoire 2

1.2 Loi de probabilité 3

1.2.1 Fonction de répartition conjointe 3

1.2.2 Densité de probabilité conjointe 3

1.2.3 Densités marginales et conditionnelles 4

1.3 Indépendance 5

1.4 Vecteur moyen et Matrice de covariance 6

1.5 Vecteur aléatoire gaussien 8

1.5.1 Variable aléatoire gaussienne 8
1.5.2 Vecteur aléatoire normal 10
1.5.3 Propriétés 11
1.5.4 Lois conditionnelles 13
1.5.5 Théorème central-limite multivarié 13
1.5.6 Loi binormale 14

2 Lois de probabilité multidimensionnelles usuelles 16

2.1 Loi de Wishart 16
2.1.1 Matrice aléatiore de Wishart 16
2.1.2 Loi de Probabilité 18
2.1.3 Propriétés 20
2.2 Loi de Hotelling 21
2.2.1 T^2 de Hotelling 21
2.2.2 Lien avec la loi de Fisher 22
2.3 Loi de Wilks 23
2.3.1 Lambda de Wilks 23
2.3.2 Lien avec la loi de Fisher 24

Conclusion 26

Annexe A : Caractéristiques des distributions usuelles 28

Annexe B : Codes R 29

Table des figures

1.1 Densités de probabilité de la distribution univariée de Gauss pour différentes valeurs des paramètres . . . 9
1.2 Courbes de la loi standard de Gauss . . . 10
1.3 Cloche de Gauss en 3D . . . 14
1.4 Contours de densité constante . . . 15

2.1 Densités de probabilités des lois usuelles . . . 25

Liste des tableaux

2.1 Caractéristiques des distributions unidimensionnelles usuelles 28

2.2 Caractéristiques des distributions multidimensionnelles usuelles 28

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

Notation	**Significations**
c-à-d	c'est à dire
v.a	variable aléatoire
$E(X)$	espérance de la v.a X
$V(X)$	variance de la v.a X
$Cov(X,Y)$	covariance du couple (X,Y)
iid	indépendantes et identiquement distribuées
I_p	Matrice identique d'ordre p
A'	transposée de la matrice A
A^{-1}	inverse de la matrice A
$M > 0$	matrice définie positive
$\|M\|$	déterminant de la matrice M
ddl	degré de liberté
$\mathcal{B}(a,b)$	loi de beta parametre a et b

Introduction

Les distributions unidimensionnelles usuelles en statistique mathématique (**Gauss, Student, Pearson et Ficher)** sont largement connues et étudiées. Dans ce mémoire, on s'intéresse au cas où la dimension des données est supéreure à 1. En d'autres termes, ce travail est consacré aux définitions et propriétiés fondamentales des lois multivariées usuelles, à savoir les distributions de **Wishart, Hotelling et Wilks.** Ce mémoire se compose de deux chapitres :

- Chapitre 1 : **Distribution multinormale**.

  Dans ce chapitre, on rappelle les notions essentielles des vecteurs aléatoires à savoir : vecteur moyen, matrice de covariance, fonction de répartition, fonction caractéristique... On donne aussi les propriétès les plus importantes de la loi normale vectorielle (multivariée).

- Chapitre 2 : **Lois de probabilité multidimensionnelles usuelles**.

  Ce chapitre, constitue l'essentiel de mon mémoire. On y étudie trois des distributions statistiques mulivariées les plus importantes (Wishart, Hotelling et Wilks). On examine certaines de leurs propriétés caractéristiques : fonction de densité de probabilité, fonction de répartition, fonction caractéristique,...

Enfin, il est à noter que les résultas et représentations graphiques sont obtenus à l'aide des packages du logiciel de traitement et d'analyse statistique R. Les codes de programmation sont rassemblés en annexe.

Chapitre 1

Distribution multinormale

Dans ce chapitre, on présente les propriétés fondamentales des vecteurs aléatoires mutinormaux. On commence par quelques notions de base (loi de probabilité multivariée, fonction de densité, vecteur moyen, matrice de covariance, fonction caractéristique,...) sur les vecteurs aléatoires en général.

1.1 Vecteur aléatoire

Définition 1.1.1 *Soient $X_1, X_2, ..., X_p$ $(p \geq 1)$ des variables aléatoires (v.a) définies sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Le n-uplet $X = (X_1, X_2, ...X_p)'$ est appelé vecteur aléatoire réel sur $(\Omega, \mathcal{A})$..Ce vecteur prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^p$:*

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) = (X_1(\omega), ..., X_p(\omega))' \end{array}$$

On l'appelle aussi v.a multidimensionelle ou multivariée.

Remarque 1.1.1

1. *Les v.a $X_1, X_2, ..., X_p$ sont appelées composantes du vecteur X.*
2. *Dans le cas particulier $p = 2$ on parle de couple aléatiore.*

Selon la nature des composantes $X_1, X_2, ..., X_p$, on distingue deux types de vecteurs aléatoires : discret et continu.

Définition 1.1.2 *Le vecteur aléatoire X est dit discret si chacune de ses composnates est une v.a discrète. Dans le cas où ces composantes sont des v.a continues, on dira que X est un vecteur aléatoire continu.*

On note que, par la suite, on ne va s'interesser qu'aux vecteurs aléatoires continus.

1.2 Loi de probabilité

1.2.1 Fonction de répartition conjointe

La loi d'un vecteur aléatoire X est donné par sa fonction de répartition F définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$$F(x_1, ..., x_p) := P(X_1 \leq x_1, ..., X_p \leq x_p). \tag{1.1}$$

Elle possède des propriétés semblables à celles d'une.v.a (unidimensionnelle).

1.2.2 Densité de probabilité conjointe

La fonction de répartition F, définie par (1.1) , étant dérivable (presque partout) sur $\mathbb{R}^p$, on définit la densité de probabilité conjointe par

$$f(x_1, ..., x_p) := \frac{\partial^p F(x_1,..., x_p)}{\partial x_1....\partial x_p}.$$

Elle vérifie les deux assertions suivantes :

- f est positive.
- f est intégrable avec $\int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x_1, ..., x_p)dx_1...dx_p = 1.$

Remarque 1.2.1

1. *On exprime la fonction de répartition en termes de la densité de probabilité :*

$$F(x_1,...,x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_p} f(u_1,...,u_p)du_1...du_p.$$

2. *La loi de probabilité peut aussi être caractérisée par ce qu'on appelle la fonction caractéristique conjointe. C'est une fonction complexe, notée φ, définie par*

$$\varphi(u) := E[\exp\{iu'X\}] = E\left[\exp\{i\sum_{j=1}^{p} u_j X_j\}\right], \; u = (u_1,...,u_p)' \in \mathbb{R}^p, \tag{1.2}$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1.2.3 Densités marginales et conditionnelles

Soit X_k $(k = 1,...,p)$ une composante quelconque du vecteur aléatoire X. La fonction de répartition marginale de X_k est définie par

$$F_k(x_k) := P(X_k \leq x_k) = F(\infty,...,\infty,x_k,\infty,...,\infty),$$

et sa densité de probabilité marginale est

$$f_k(x_k) := \frac{\partial F_k(x_k)}{\partial x_k} = \int_{\mathbb{R}^{p-1}} f(x_1,...,x_p)dx_1...dx_{k-1}dx_{k+1}...dx_p.$$

Si on partage le vecteur X en deux blocs (sous vecteurs) $X^{(1)} := (X_1,...,X_q)'$ et $X^{(2)} := (X_{q+1},...,X_p)'$ de dimensions respectives q et $p-q$ telles que $1 \leq q \leq p-1$:

$$X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Alors, on définit la fonction de répartition et la densité de probabilité de $X^{(1)}$ par

$$F\left(x_1, ..., x_q\right) := P(X_1 \leq x_1, ..., X_q \leq x_q, X_{q+1} \leq \infty, ..., X_p \leq \infty),$$

et

$$f\left(x_1, ..., x_q\right) := \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_p) dx_{q+1} ... dx_p,$$

respectivement. Autrement dit, la densité conjointe des composantes $X_1, ..., X_q$ est obtenue en intégrant la densité du vecteur $(X_1, ..., X_p)$ par rapport aux coordonnées restantes.

Remarque 1.2.2 *Plus généralement, la densité d'un sous ensemble de composantes est obtenue en intégrant la densité conjointe f par rapport au sous ensemble complémentaire (voir [4], page 50).*

La densité conditionnelle du bloc $X^{(2)}$ sachant $X^{(1)}$ est définie, dans le cas où $f\left(x_1, ..., x_q\right)$ est non nulle, par

$$f_{X^{(2)}/X^{(1)}}(x_{q+1}, ..., x_p) = \frac{f(x_1, ..., x_p)}{f\left(x_1, ..., x_q\right)}.$$

1.3 Indépendance

Les composantes $X_1, ..., X_p$ du vecteur X sont dites indépendantes si et seulement si les densités conditionnelles sont égales aux densités marginales respectives :

$$f_{X_k/(X_1,...,X_{k-1},X_{k+1},...,X_p)}(x_k) = f_{X_k}\left(x_k\right), k = 1, ..., p.$$

Ceci est équivalent à dire que la densité conjointe est égale au produit des densités marginales :

$$f(x_1, ..., x_p) = f_{X_1}\left(x_1\right) ... f_{X_p}\left(x_p\right). \tag{1.4}$$

On en déduit les deux résultats suivants.

Proposition 1.3.1 *Si les v.a $X_1, ..., X_p$ sont indépendantes alors l'espérance de leur produit est égal au produit de leurs espérances :*

$$E\left[\prod_{i=1}^{p} X_i\right] = \prod_{i=1}^{p} E\left[X_i\right]. \tag{1.5}$$

Preuve. On a

$$E\left[\prod_{i=1}^{p} X_i\right] = \int_{\mathbb{R}^p} x_1...x_p f(x_1, ..., x_p) dx_1...dx_p.$$

Le résultat découle en utisant l'équation (1.4) . ∎

Proposition 1.3.2 *Les v.a $X_1, ..., X_p$ sont indépendantes si et seulement si*

$$\forall u \in \mathbb{R}^p,\ \varphi(u_1, ..., u_p) = \varphi_{X_1}(u_1)....\varphi_{X_p}(u_p),$$

où φ_{X_i} $(i = 1, ..., p)$ désigne la fonction caractéristique marginale.

Preuve. Voir [11], page 87. ∎

1.4 Vecteur moyen et Matrice de covariance

L'espérance du vecteur aléaoire X (ou vecteur moyen) est définie par

$$\mu = E(X) := (\mu_1, ..., \mu_p)',$$

où $\mu_k := E\left[X_k\right]$ désigne l'espérance de la composante X_k, $k = 1, ..., p$.

La matrice de covariance du vecteur aléaoire X est une matrice carrée d'ordre p, notée par Σ, de terme général

$$\sigma_{ij} := Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)],\ i, j = 1, ..., p.$$

La matrice de corrélation du vecteur aléaoire X est une matrice carrée d'ordre p, notée par R, de terme général

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j},\ i,j = 1,...,p.$$

- L'epérance d'un vecteur aléatoire possède des propriétés semblables à celles de l'espérance d'une v.a.
- Σ et R sont deux matrices symétriques définies positives $(\Sigma > 0$ et $R > 0)$.
- On a $\sigma_{ij} = E[X_i X_j] - E[X_i]\, E[X_j]$ et $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1,\ i,j = 1,...,p.$
- Le terme diagonal σ_{ii} de Σ n'est autre que la variance de la v.a X_i (on le note alors par σ_i^2) et celui de R est $\rho_{ii} = 1$.
- Les écritures matricielles de Σ et R sont

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & . & . & . & \sigma_{1p} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \sigma_{1p} & & & & \sigma_p^2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & \rho_{1p} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \rho_{1p} & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

- Si on désigne par D_σ et $D_{1/\sigma}$ les matrices diagonales des écarts types σ_i et leurs inverses $1/\sigma_i$ respectivement, alors on a

$$R = D_{1/\sigma} \Sigma D_{1/\alpha} \text{ et } \Sigma = D_\sigma R D_\sigma.$$

- **Transformation linéaire :** Soient A une matrice à r lignes et p colonnes et b un vecteur de $\mathbb{R}^r$. La transformation $Y = AX + b$ résulte en un vecteur aléatoire $r-$dimensionnel, d'espérance et de matrice de covariance

$$\mu_Y = A\mu_X + b \text{ et } \Sigma_Y = A\Sigma_X A'. \tag{1.7}$$

Proposition 1.4.1 *Si les v.a $X_1, ..., X_p$ sont indépendantes alors les deux matrices Σ et*

R sont diagonales. On dit alors que ces v.a sont non corrélées deux à deux.

Preuve. Il suffit d'appliquer le résultat (1.5) de la proposition 1.3.1. ■

Remarque 1.4.1 *La réciproque de la proposition 1.4.1 n'est pas vraie (tout comme celle de la proposition 1.3.1). En d'autres termes, deux v.a non corrélées ne sont pas nécessairement indépendantes.*

1.5 Vecteur aléatoire gaussien

La loi de Gauss, aussi connue sous le nom de loi normale, est de loin la loi de probabilité la plus populaire en statistique mathématique. Ceci est dû au fait qu'elle sert de modèle à beaucoup de phénomènes naturels. De plus, il y a le théorème central limite qui ramène, sous certaines conditions, des ditributions de probabilité quelconques ou même inconnues à cette loi.

1.5.1 Variable aléatoire gaussienne

Une v.a U est dite gaussienne ou normale, de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$, si sa densité de probabilité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_U(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

On écrit : $U \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Sa courbe, connue sous le nom de cloche de Gauss, est illustrée graphiquement par la figure 1.1.

- Les paramètres m et σ^2 représentent l'espérance et la variance de U respectivement.
- C'est une distribution symétrique d'aplatissement normal. Sa courbe, très célèbre, est connue sous le nom de cloche de Gauss.

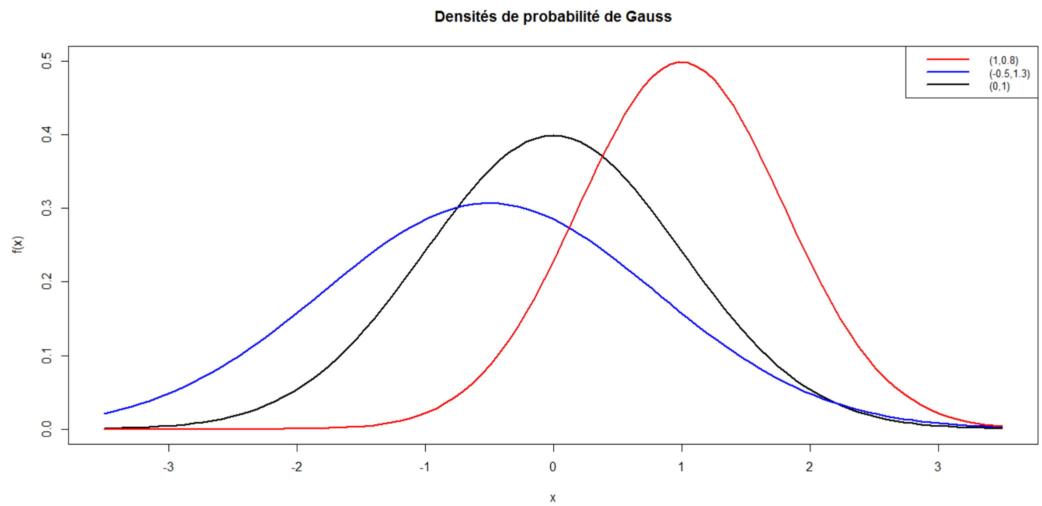

FIG. 1.1 – Densités de probabilité de la distribution univariée de Gauss pour différentes valeurs des paramètres

- Le changement de variable $Z = (U - m) / \sigma$ résulte en la v.a normale centrée réduite ou standard $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, de densité de probabilité définie par

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \ z \in \mathbb{R},$$

et représentée (avec sa fonction de répartition) graphiquement par la figure 1.2.

- Sa fonction de répartition est généralement notée par Φ :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2} dz.$$

Les valeurs de cette dernière sont obtenues par des logiciels ou sur des tables statistiques.

- La fonction caractéristique de la v.a U est définie par

$$\varphi_U(t) = \exp\left\{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}, \ t \in \mathbb{R}.$$

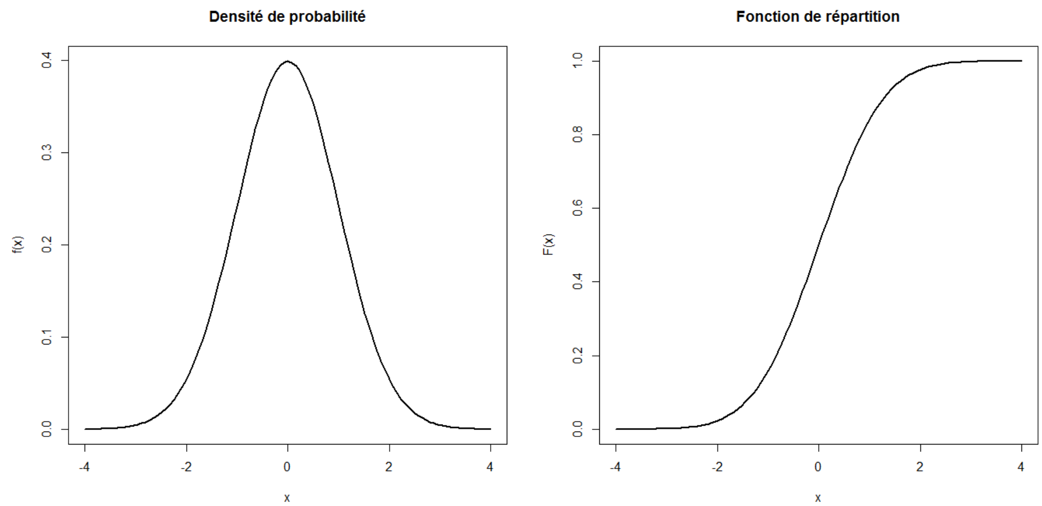

FIG. 1.2 – Courbes de la loi standard de Gauss

1.5.2 Vecteur aléatoire normal

C'est la généralisation d'une v.a gaussienne au cas multidimensionnel. Soit $X = (X_1, X_2, ...X_p)'$ un vecteur aléatoire réel.

Définition 1.5.1 *Le vecteur aléatoire de X est dit gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a gaussienne. Autrement dit, si $c = (c_1, ..., c_p)'$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ alors on a*

$$c^{'}X = c_1X_1 + ... + c_pX_p \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2).$$

Remarque 1.5.1 *On déduit de la définition 1.5.1 que si le vecteur X est gaussien alors toutes ses composantes sont des v.a gaussiennes. La réciproque n'est pas vraie, c'est à dire (c-à-d) si les composantes d'un vecteur sont toutes normales, cela n'implique pas nécessairement que le vecteur est normal.*

1.5.3 Propriétés

Densité de probabilité

Soit $\mu = (\mu_1, ..., \mu_p)'$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et Σ une matrice réelle symétrique définie positive $(\det \Sigma \neq 0)$ de la forme (1.6). La densité de probabilité du vecteur X est définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x-\mu)' \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\}.$$

On dit que X est de distribution multinormale de paramètres μ et Σ qui représentent le vecteur moyen et la matrice de covariance. On écrit $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$.

Remarque 1.5.2 *Le cas particulier où $\mu = 0$ et $\Sigma = I_p$ correspond au vecteur multinormal standard Z de densité*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z' z \right\}.$$

Le passage du cas général au cas standard se fait via le changement de variable

$$Z = \Sigma^{-1/2} (X - \mu),$$

où $\Sigma^{-1/2}$ est l'inverse de la matrice racine $\Sigma^{1/2}$. Pour des détails sur la définition de cette dernière se référer à [11], page 88.

De la définition 1.5.1 et le résutat (1.7), on a

$$X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma) \Longrightarrow c'X \sim \mathcal{N}_p(c'\mu, c'\Sigma c), \ c \in \mathbb{R}^p.$$

et en particulier

$$X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma) \Longrightarrow X_j \sim \mathcal{N}\left(\mu_j, \sigma_j^2\right), \ j = 1, ..., p.$$

Fonction caractéristique

Proposition 1.5.1 *La fonction caractéristique du vecteur $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ est égale à*

$$\varphi(a) = \exp\{ia'\mu - \frac{1}{2}a'\Sigma a\}, \ a \in \mathbb{R}^p, \tag{1.8}$$

où i est le nombre complexe dont le carré est égal à -1.

Remarque 1.5.3 *Dans le cas standard $X \sim \mathcal{N}_p(0, I_p)$, on a*

$$\varphi(a) = \exp\{-\frac{1}{2}a'a\}, \ a \in \mathbb{R}^p. \tag{1.9}$$

Preuve. La formule (1.8) se déduit de la formule (1.9) par un simple changement de variable. Pour la démonstration de cette dernière, voir [11], page 89. ■

Indépendance des composantes

La réciproque de la proposition 1.4.1 est vraie pour des v.a $X_1, ..., X_p$ représententant les composantes d'un vecteur aléatoire gaussien. On le résultat suivant.

Proposition 1.5.2 *Les composnates $X_1, ..., X_p$ du vecteur $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées (c-à-d Σ et/ou R sont diagonales).*

Preuve. L'implication directe est vraie pour un vecteur aléatoire quelconque (voir la propostion 1.4.1). Pour la réciproque, on a si la matrice Σ est diagonale alors

$$\begin{aligned} \varphi(a_1, ..., a_p) &= \exp\{i\sum_{j=1}^{p} a_j\mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} a_j^2\sigma_j^2\} = \exp\{\sum_{j=1}^{p}\left(ia_j\mu_j - \frac{1}{2}a_j^2\sigma_j^2\right)\} \\ &= \prod_{j=1}^{p}\exp\{ia_j\mu_j - \frac{1}{2}a_j^2\sigma_j^2\} = \prod_{j=1}^{p}\varphi_{X_j}(u_j). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la proposition 1.3.2, les v.a $X_1, ..., X_p$ sont indépendantes. ■

1.5.4 Lois conditionnelles

On partitionne le vecteur X en deux sous vecteurs $X^{(1)} := (X_1, ..., X_q)'$ et $X^{(2)} := (X_{q+1}, ..., X_p)'$, de dimensions respectives q et $p-q$ telles que $1 \leq q \leq p-1$, comme en (1.3). On décompose le vecteur moyen μ et la matrice de covariance Σ comme suit (voir [11], page 92) :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix} \text{ et } \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

On a $\mu^{(j)} = E\left(X^{(j)}\right)$ et $\Sigma_{jj} = Cov(X^{(j)})$, $j = 1, 2$. Sous la condition $\det(\Sigma_{22}) > 0$, la loi de probabilité conditionnelle de $X^{(1)}$ sachant $X^{(2)}$ est une loi gaussienne $q-$dimensionnelle d'espérance

$$E\left(X^{(1)}/X^{(2)} = x^{(2)}\right) = \mu^{(1)} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\left(x^{(2)} - \mu^{(2)}\right),$$

et de matrice de covariance

$$Cov\left(X^{(1)}/X^{(2)}\right) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}.$$

1.5.5 Théorème central-limite multivarié

C'est la généralisation du célèbre théorème central limite unidimensionnel. Soit $\left(X^{(1)}, ..., X^{(n)}\right)$ un échantillon, de taille $n \geq 1$, d'un vecteur aléatoire X de dimension $p \geq 2$. Ce théorème dit que, sous certaines conditions, la somme des vecteurs $X^{(1)}$, $X^{(2)}, ...$ et $X^{(n)}$ est asymptotiquement de distribution multinormale. Leur moyenne empirique l'est aussi.

On suppose que l'espérance de X vaut μ et que sa matrice de covariance est égale à Σ. On pose

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} \text{ et } \overline{X}_n := \frac{S_n}{n}.$$

Proposition 1.5.3 (Théorème Central Limite) *On les deux résultats équivalents suivants ([2]) :*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}_p(0, \Sigma) \text{ et/ou } \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}_p(0, I_p).$$

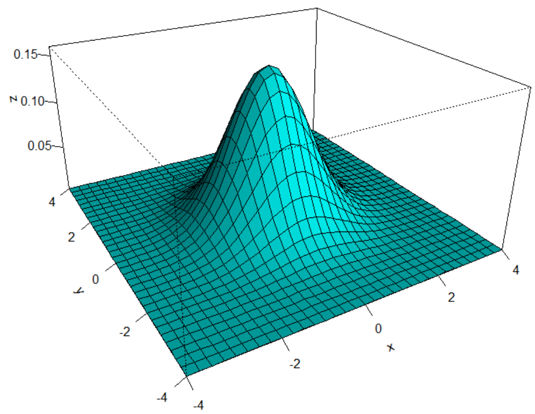

FIG. 1.3 – Cloche de Gauss en 3D

1.5.6 Loi binormale

Dans le cas particulier $p = 2$, le vecteur $X = (X_1, X_2)'$ est appelé couple aléatoire. En notant la corrélation ρ_{12} entre les deux composnates X_1 et X_2 par ρ, on peut écrire $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$. Ainsi la matrice de covariance s'écrit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Si X est gaussien, alors sa densité probabilité est définie par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + (\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}.$$

La courbe et les ellipses de probabilité correspondantes sont représentées par les figures 1.3 et 1.4 respectivement.

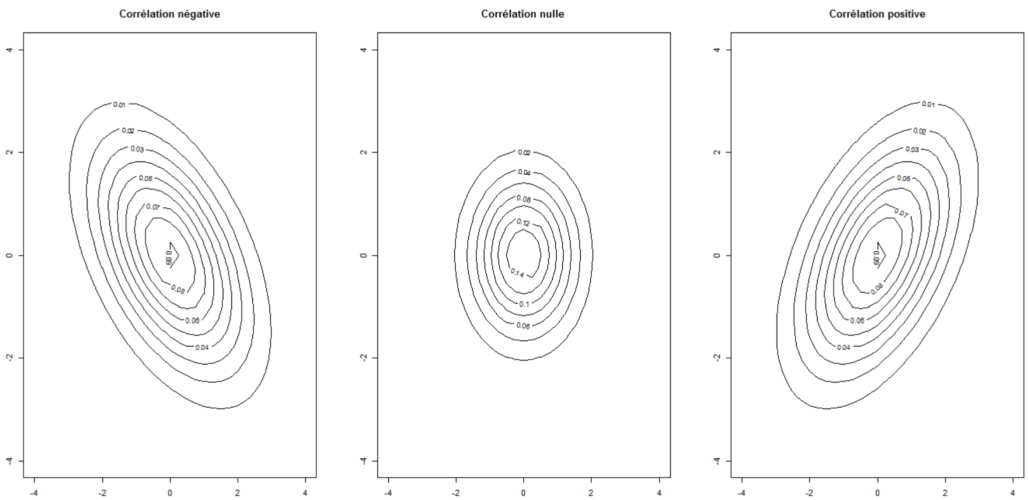

FIG. 1.4 – Contours de densité constante

La distribution de X_1 conditionné par X_2 est

$$(X_1/X_2 = x_2) \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \rho\sigma_1 (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 - \rho\sigma_1^2\sigma_2\right).$$

Remarque 1.5.4 *Si $\rho = 0$, la densité de probabilité conjointe est égale au produit des deux densités marginales et les distributions conditionnelle et marginale sont les mêmes. Ceci implique l'indépendance des deux composantes X_1 et X_2.*

Chapitre 2

Lois de probabilité multidimensionnelles usuelles

Les distributions de probabilité multidimensionnelles jouent un rôle important en analyse statistique multivariée (estimation et tests). Dans ce chapitre, on s'inspire des références [1], [6] (chapitre 5) et [11] (chapitre 6) pour introduire les définitions et propriétés essentielles de trois d'entre elles, à savoir les lois de Wishart, Hotelling et Wilks.

2.1 Loi de Wishart

2.1.1 Matrice aléatiore de Wishart

Soit $\left(X^{(1)}, ..., X^{(n)}\right)$ un échantillon, de taille $n \geq 1$, d'un vecteur aléatoire X, de dimension $p \geq 1$, gaussien (en pratique, on a $n \geq p$) :

$$X^{(i)} \sim \mathcal{N}_p(0, \Sigma),\ \ i = 1, ..., n.$$

Définition 2.1.1 *La matrice aléatoire définie par*

$$W := \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} X^{(i)\prime}, \tag{2.1}$$

est dite matrice de Wishart ou suit la loi de Wishart de paramètres n et Σ. On écrit

$$W \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma),$$

où n représente le degré de liberté de la distribution.

Remarque 2.1.1

1. *W est une matrice carrée symétrique définie positive d'ordre p.*
2. *Le cas particulier $p = 1$ (avec $\Sigma = 1 \in \mathbb{R}$) correspond à la distribution (unidimensionnelle) du khi-deux à n ddl (voir le tableau 2.1) :*

$$\mathcal{W}_1(n, \Sigma) = \chi_n^2.$$

3. *La forme (2.1) peut être vue comme la somme des carrés de n vecteurs iid issus de la loi normale multivariée. Pour cela, la loi de Wishart est décrite comme la généralisation de la loi de Pearson (khi-deux).*
4. *Si on désigne par U la matrice dont les lignes sont $X^{(1)}, ..., X^{(n)}$:*

$$U := \begin{pmatrix} X_1^{(1)} & \dots & X_p^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{(n)} & \dots & X_p^{(n)} \end{pmatrix},$$

alors W peut s'écrire comme le produit de deux matrices : $W = U'U$. La matrice U représente un échantillon de n observations (indépendantes) d'un vecteur multinormal de dimension p.

2.1.2 Loi de Probabilité

Densité de probabilité

La densité de probabilité d'une matrice $W \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$ est définie, sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre p, par

$$f(W) = \frac{\mid W \mid^{(n-p-1)/2} \exp\{-\frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}W)\}}{2^{np/2}\pi^{p(p-1)/4} \mid \Sigma \mid^{n/2} \prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{n-j+1}{2}\right)}. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.2 *La quantité*

$$\pi^{p(p-1)/4}\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a - \frac{j-1}{2}\right),$$

représente la valeur de la fonction Gamma multivariée au point $a \geq 0$, *qu'on note par* $\Gamma_p(a)$. *Elle est initialement définie par*

$$\Gamma_p(a) := \int_{A>0} \mid A \mid^{a-(p+1)/2} \exp\{-tr(A)\}dA. \tag{2.3}$$

Fonction caractéristique

Proposition 2.1.1 *La fonction caractéristique de* $W \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$ *est donnée par*

$$\varphi_W(Z) = \mid I_p - 2iZ\Sigma \mid^{-n/2}, \tag{2.4}$$

où Z *est une matrice carrée symétrique d'ordre* p.

Preuve. On a, par définition, $\varphi_W(Z) := E[\exp(tr(iZW))]$, c-à-d

$$\begin{aligned}
\varphi_W(Z) &= \int_{W>0} \exp(tr(iZW))f(W)dW \\
&= \int_{W>0} \exp(tr(iZW))\frac{\mid W \mid^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}W)\}}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{n}{2}}}dW \\
&= \frac{1}{\Gamma_p(\frac{n}{2})2^{\frac{np}{2}} \mid \Sigma \mid^{\frac{n}{2}}} \int_{W>0} \mid W \mid^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{tr(-\frac{1}{2}(I_p - 2iZ\Sigma)\Sigma^{-1}W)\}dW. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Dans la formule (2.3) , on fait le changement de variable $A = T^{\frac{1}{2}}WT^{\frac{1}{2}}$ dont le Jacobien est égal à $\mid T \mid^{(p+1)/2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\Gamma_p(a) &= \int_{W>0} \mid T^{\frac{1}{2}}WT^{\frac{1}{2}} \mid^{a-(p+1)/2} \exp\{tr(-T^{\frac{1}{2}}WT^{\frac{1}{2}})\} \mid T \mid^{(p+1)/2} dW \\
&= \int_{W>0} \mid W \mid^{a-(p+1)/2}\mid T \mid^{a}\mid T \mid^{-(p+1)/2} \exp\{tr(-WT)\} \mid T \mid^{(p+1)/2} dW \\
&= \int_{W>0} \mid W \mid^{a-(p+1)/2} \exp\{tr(-WT)\} \mid T \mid^{a} dW.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{W>0} \mid W \mid^{a-(p+1)/2} \exp\{tr(-WT)\}dW = \mid T \mid^{-a} \Gamma_p(a).$$

En prenant $T = (I_p - 2iZ\Sigma)\Sigma^{-1}/2$ et $a = n/2$, on a

$$\int_{W>0} \mid W \mid^{\frac{n}{2}-\frac{p+1}{2}} \exp\{tr(-\frac{1}{2}W\Sigma^{-1}(I_p - 2iZ\Sigma)\}dW = \mid \frac{1}{2}(I_p - 2iZ\Sigma)\Sigma^{-1} \mid^{-n/2} \Gamma_p(\frac{n}{2}). \qquad (2.6)$$

En remplaçant (2.6) dans (2.5) , on obtient le résultat (2.4) . ■

Espérance

Proposition 2.1.2 *L'espérance d'une matrice* $W \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$ *est*

$$E(W) = n\Sigma.$$

Preuve. D'après (2.1) , on a

$$W := \sum_{i=1}^{n} X^{(i)} X^{(i)\prime},$$

avec $X^{(i)} \sim N_p(0, \Sigma)$, pour $i = 1, ..., n$. Alors

$$E(W) = E(\sum_{i=1}^{n} X^{(i)} X^{(i)\prime}) = \sum_{i=1}^{n} E(X^{(i)} X^{(i)\prime}).$$

D'autre part, on a

$$E(X^{(i)} X^{(i)\prime}) - E(X^{(i)}) E(X^{(i)\prime}) = \Sigma,$$

avec $E(X^{(i)}) = 0$. D'où le résultat. ■

Remarque 2.1.3 *Comme indiqué dans [1], page 13, la structure de covariance de* $W \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$ *est définie par une matrice de blocs obtenus à partir des éléménts de la matrice* Σ *de covariance des vecteurs multinormaux* $X^{(i)}$, $i = 1, ..., n$.

2.1.3 Propriétés

Ci-dessous quelques propriétés de la distribution de Wishart. Les détails et vérifications se trouvent dans [7], pages 13-15. Soit $W \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$ alors :

1. Si c est un vecteur (non aléatoire) de $\mathbb{R}^p$ alors la v.a $c'Wc$ est de distribution du khi-deux à n degrés de liberté (ddl) :

$$c'Wc \sim \sigma_c^2 \chi_n^2, \text{ avec } \sigma_c^2 = c'\Sigma c.$$

2. Si C est une matrice de rang q, alors

$$CWC' \sim \mathcal{W}_q(n, C\Sigma C').$$

3. Le rapport des déterminants deux martrices W et Σ vérifie

$$\frac{\mid W \mid}{\mid \Sigma \mid} \sim \chi^2_n \chi^2_{n-1} \cdots \chi^2_{n-p+1},$$

où les p v.a du khi-deux sont indépendantes.

4. Pour tout vecteur $c \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\frac{c'\Sigma^{-1}c}{c'W^{-1}c} \sim \chi^2_{n-p+1}. \tag{2.7}$$

Ce reste résultat reste valable dans le cas où c est aléatoire (voir [5], page 313).

5. Si $W_1 \sim \mathcal{W}_p(n_1, \Sigma)$ et $W_2 \sim \mathcal{W}_p(n_2, \Sigma)$ et sont indépendants, alors

$$W_1 + W_2 \sim \mathcal{W}_p(n_1 + n_2, \Sigma).$$

2.2 Loi de Hotelling

2.2.1 $\mathbf{T}^2$ de Hotelling

La loi de Hotelling, connue sous le nom de loi du du T^2 de Hotelling, est la généralisation de celle de Student. Elle sert dans l'inférence statistique sur le vecteur moyen d'une distribution multivariée et la comparaison de deux moyennes vectorielles. Pour une description détaillée sur ce dernier sujet, on réfère le lecteur aux chapitres 5 et 6 du livre [8].

Définition 2.2.1 *Soient $X \sim N_p(0, \Sigma)$ et $W \sim W_p(n, \Sigma)$ indépendante de X. Alors la v.a $Y = nX'W^{-1}X$ suit la loi de Hotelling de paramètres p et n. On écrit*

$$Y := nX'W^{-1}X \sim T^2_{p,n}. \tag{2.8}$$

Remarque 2.2.1

1. *Le cas particulier* $p = 1$ *correspond au carré d'une v.a de Student à* n *ddl :* $T^2_{1,n} = t_n$ *(voir le tableau 2.1).*

2. *Plus généralement, si* $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ *et* $W \sim W_p(n, \Sigma)$ *sont indépendants, alors*

$$n (X - \mu)' W^{-1} (X - \mu) \sim T^2_{p,n}.$$

2.2.2 Lien avec la loi de Fisher

Proposition 2.2.1 *La loi de Hotelling s'identifie à celle de Fisher, selon la formule :*

$$T^2_{p,n} = \frac{np}{n-p+1} \mathcal{F}_{p,n-p+1}, \tag{2.9}$$

où $\mathcal{F}_{l,m}$ *représente la loi de Fisher à* l *et* m *ddl (voir le tableau 2.1).*

Preuve. On a

$$\frac{Y}{n} = X'W^{-1}X.$$

En multipliant et en divisant par la même quantité $X'\Sigma^{-1}X$, on obtient

$$\frac{Y}{n} = X'W^{-1}X \left(\frac{X'\Sigma^{-1}X}{X'\Sigma^{-1}X} \right) = X'\Sigma^{-1}X \left(\frac{X'W^{-1}X}{X'\Sigma^{-1}X} \right) = X'\Sigma^{-1}X \left(\frac{X'\Sigma^{-1}X}{X'W^{-1}X} \right)^{-1}.$$

Pour $\Sigma = I_p$, on a

$$\frac{Y}{n} = X'X \left(\frac{X'X}{X'W^{-1}X} \right)^{-1},$$

avec

$$X'X \sim \chi^2_p \text{ et } \frac{X'X}{X'W^{-1}X} \sim \chi^2_{n-p+1}.$$

En effet, la v.a $X'X$, qui est égale à la somme des carrés de p v.a $\mathcal{N}(0,1)$, est un χ^2_p et le deuxième résultat ci-dessus provient de (2.7). De plus, les deux v.a sont indépendantes, alors

$$\frac{Y}{n} = \frac{\chi_p^2}{\chi_{n-p+1}^2} = \frac{p}{n-p+1} \frac{\chi_p^2/p}{\chi_{n-p+1}^2/\left(n-p+1\right)} = \frac{p}{n-p+1}\mathcal{F}_{p,n-p+1}.$$

D'où le résultat (2.9) voulu. ■

Corollaire 2.2.1 *On a*

$$E(T_{p,n}^2) = \frac{np}{n-p-1}.$$

Preuve. En vertu de la linéarité de l'espérance, on a d'après (2.9)

$$E(T_{p,n}^2) = \frac{np}{n-p+1} E\left(\mathcal{F}_{p,n-p+1}\right).$$

La dernière ligne du tableau (2.1) implique le résultat. ■

2.3 Loi de Wilks

2.3.1 Lambda de Wilks

La v.a de Wilks, plus connue sous le nom de lambda de Wilks, est une variable unidimensionnelle. Sa loi joue un rôle imporatnt en analyse de variance multidimensionnelle (MANOVA) et en régression multiple mutivariée. Elle sert aussi dans les tests du rapport de vraisemblance. Elle concerne les rapports de variance généralisés qui sont des déterminants de matrices de Wishart. Pour plus de détails sur ses applications, se référer à [8], pages 217, 303 et 398.

Définition 2.3.1 *Soient $A \sim \mathcal{W}_p(n, \Sigma)$ et $B \sim \mathcal{W}_p(m, \Sigma)$, $n, m \geq p$, indépendantes avec $\mid A \mid \neq 0$. Alors le quotient*

$$\Lambda := \frac{\mid A \mid}{\mid A + B \mid} = \frac{1}{|A^{-1}B + I_p|}, \tag{2.10}$$

est une v.a de Wilks de paramètres p, n et m. On écrit $\Lambda \sim \Lambda(p, n, m)$.

Remarque 2.3.1

1. *La distribution* $\Lambda(p, n, m)$ *ne dépend pas de la matrice de covariance commune* Σ.

2. $0 < \Lambda < 1$ *(car* A *et* B *sont définies positives).*

3. *D'après les résultats d'algèbre linéaire (sur les valeurs propres), on peut écrire*

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{p} (1 - \lambda_i)^{-1},$$

   où les $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_p$ *sont les valeurs propres de* $A^{-1}B$.

4. *La loi de Wilks est la distribution du produit de de v.a de lois béta (voir la proposition 2.3.1).*

Proposition 2.3.1 *Si* $U_i \sim B((m + i - p)/2, p/2)$, $i = 1, ..., n$ *sont indépendantes, alors on a*

$$\prod_{i=1}^{n} U_i \sim \Lambda(p, n, m).$$

Preuve. Voir [9], page 82. ■

2.3.2 Lien avec la loi de Fisher

Selon [11], page 106, la distribution de Wilks est liée à la loi de Fisher dans des cas particuliers simples.

1. Pour $p = 1$, on a

$$\frac{1 - \Lambda(1, n, m)}{\Lambda(1, n, m)} = \frac{m}{n} \mathcal{F}_{m,n}.$$

2. Pour $m = 1$, on a

$$\frac{1 - \Lambda(p, n, 1)}{\Lambda(p, n, 1)} = \frac{p}{n - p + 1} \mathcal{F}_{p,n-p+1}.$$

3. Pour $p = 2$, on a

$$\frac{1 - \sqrt{\Lambda(2, n, m)}}{\sqrt{\Lambda(2, n, m)}} = \frac{m}{n - 1} \mathcal{F}_{2m,2(n-1)}.$$

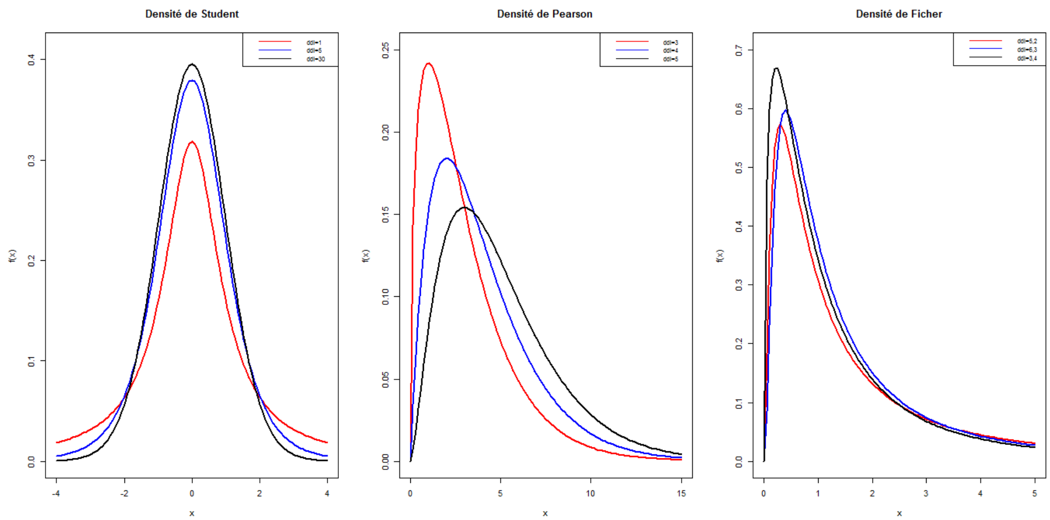

FIG. 2.1 – Densités de probabilités des lois usuelles

4. Pour $m = 2$, on a

$$\frac{1 - \sqrt{\Lambda(p,n,2)}}{\sqrt{\Lambda(p,n,2)}} = \frac{p}{n-p+1} \mathcal{F}_{2p,2(n-p+1)}.$$

Enfin, on note que les graphes des densités de probabilités de Student, Pearson et Fisher sont présentés dans la figure 2.1.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a passé en revue les principales définitions et propriétés des différentes distributions usuelles multivaraiés. Les applications de ces lois en statistique mathématique (estimationstatistique et tests d'hypothèses) sont importantes dans le cas des données multidimensionnelles. Elles méritent une description détaillée dans un travail futur.

Bibliographie

[1] Amaya, P.M. (2018) . La loi de Wishart. Mémoire de Maîtrise en mathématiques. Université du Québec à Montréal.

[2] Mselati, B. & Benaych-Georges, F. (2004). Introduction aux Probabilités et aux Statistiques.

[3] Bigot, J. (2014). Notes de cours de Probabilités.https ://www.math.u-bordeaux.fr/~jbigot/Site/Enseignement_files/cours_proba_ISAE.pdf

[4] Dauxois, J.Y. (2014) . Cours de probabilités. Université de Toulouse. https ://perso.math.univ-toulouse.fr/jydauxoi/files/2019/11/cours.pdf

[5] Eaton, M.L. (2007). Dans Multivariate Statistics.Institute of Mathematical Statistics : Beachwood, Ohio, USA.

[6] Härdle, W.K. & Simar, L. (2015) . Applied Multivariate Statistical Analysis. Springer.

[7] Helbling J.M. (2018). Statistique multivariée. Notes de cours. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

[8] Johnson, R. & Wichern, D. (2007) . Applied Multivariate Mtatistical Analysis. Pearson Prentice Hall.

[9] Mardia, K.V., Kent, J.T. & Bibby, J.M. (1979) . Multivariate Analysis. Associated Press.

[10] Rush, J.J.(2013). Vecteurs gaussiens.preparation à l'agrégation Bordeaux1.

[11] Saporta, G. (2011). Probabilités, Analyse des Données et Statistique. Technip, Paris.

Annexe A : Caractéristiques des distributions usuelles

Les principales caractéristiques des distributions (de probabilité) usuelles sont résumées dans les tableaux ci-dessous.

Distribution	**Notation**	**Paramètres**	**Espérance**	**Variance**
Gauss	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ, σ^2	μ	σ^2
Student	t_l	l	0	$l/(l-2)$, $l > 2$
Pearson	χ_l^2	l	l	$2l$
Fisher	$\mathcal{F}_{l,m}$	l, m	$\dfrac{m}{m-2}$, $m > 2$	$\dfrac{2m^2(l+m-2)}{l(m-2)^2(m-4)}$

TAB. 2.1 – Caractéristiques des distributions unidimensionnelles usuelles

Distribution	**Notation**	**Paramètres**	**Nature**
multinormale	$\mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$	μ, Σ	vecteur
Wichart	$W_p(n, \Sigma)$	n, Σ	matrice
Hotelling	$T_{p,n}^2$	p, n	variable
Wilks	Λ	p, m, n	variable

TAB. 2.2 – Caractéristiques des distributions multidimensionnelles usuelles

Annexe B : Codes R

C.1 : Code des courbes de la densité de Gauss

curve(dnorm(x,0,1),from=-4,to=4,lwd=2,ylab="$f(x)$",ylim=c(0,0.5),

main="Densités de probabilité de Gauss")

curve(dnorm(x,-0.5,1.3),col="blue",from=-4,to=4,add=T,lwd=2,lty=2)

curve(dnorm(x,1,0.8),col="red",from=-4,to=4,add=T,lwd=2,lty=4)

legend("topleft",col=c("black","blue","red"),lwd=1,lty=c(1,2,4),cex=0.8,

legend=c("$m = 0,\ \sigma^2 = 1$","$m = -0.5,\ \sigma^2 = 1.3$","$m = 1,\ \sigma^2 = 0.8$"))

C.2 : Code des courbes de la loi standard de Gauss

par(mfrow=c(1,2))

curve(dnorm(x,0,1),from=-4,to=4,,lwd=2,ylab="f(x)",main="Densité de probabilité")

curve(pnorm(x,0,1),from=-4,to=4,lwd=2,ylab="F(x)",main="Fonction de répartition")

C.3 : Code de la cloche de Gauss en 3D

library(mnormt)

x<-seq(-5,5,0.25)

y<-seq(-5,5,0.25)

mu<-c(0,0)

sigma<-matrix(c(2,-1,-1,2),nrow=2)

```
f<-function(x,y) dmnorm(cbind(x,y),mu,sigma)
z<-outer(x,y,f)
persp(x,y,z,theta=-30,phi = 25,shade=0.75,col="gold",
expand=0.5,r =2,ltheta=25,ticktype="detailed")
```

C.4 : Code des contours de densité constante

```
library(mnormt)
x<-seq(-5,5,0.25)
y<-seq(-5,5,0.25)
mu<-c(0,0)
sigma1<-matrix(c(2,-1,-1,2),nrow=2)
f1<-function(x,y)dmnorm(cbind(x,y),mu,sigma1)
z1<-outer(x,y,f1)
sigma2<-matrix(c(2,0,0,2),nrow=2)
f2<-function(x,y)dmnorm(cbind(x,y),mu,sigma2)
z2<-outer(x,y,f2)
sigma3<-matrix(c(2,1,1,2),nrow=2)
f3<-function(x,y)dmnorm(cbind(x,y),mu,sigma3)
z3<-outer(x,y,f3)
par(mfrow=c(1,3))
contour(x,y,z1)
contour(x,y,z2,main="Corrélation nulle")
contour(x,y,z3)
```

C.5 : Code des densités de Student, Pearson et Fisher

```
par(mfrow=c(1,2))
curve(dt(x,1),xlim=c(-4,4),ylim=c(0,0.4),col="red",lwd=2,ylab="f(x)",
```

```
main="Densité de Student")
curve(dt(x,5),xlim=c(-4,4),ylim=c(0,0.4),add=T,col="blue",lwd=2,ylab="f(x)",
main="Densité de Student")
curve(dt(x,30),xlim=c(-4,4),ylim=c(0,0.4),add=T,col="black",lwd=2,ylab="f(x)",
main="Densité de Student")
legend(1.5,0.42,col=c("red","blue","black"),lwd=1,
legend=c("(ddl=1)","(ddl=5)","(ddl=30)"),cex=0.8)
curve(dchisq(x,3),xlim=c(0,15),ylim=c(0,0.3),col="red",lwd=2,ylab="f(x)",
main="Densité de Pearson")
curve(dchisq(x,4),xlim=c(0,15),ylim=c(0,0.3),add=T,col="blue",lwd=2,ylab="f(x)",
main="Densité de Pearson")
curve(dchisq(x,5),xlim=c(0,15),ylim=c(0,0.3),,add=T,col="black",lwd=2,ylab="f(x)"
,main="Densité de Pearson")
legend(10.5,0.315,col=c("red","blue","black"),lwd=1,
legend=c("(ddl=3)","(ddl=4)","(ddl=5)"),cex=0.8)
```

الملخص

تمت في هذه المذكرة دراسة بعض المفاهيم والتعريفات والخصائص الأساسية لقوانين الاحتمال المتعددة الأبعاد لغوس، ويشارت، هوتلينغ وويلكس. تكمن أهمية هذه التوزيعات في كونها تلعب دورا مهما في التحليل الإحصائي للبيانات المتعددة الأبعاد كالتقدير الإحصائي واختبار الفرضيات.

الكلمات المفتاحية: الأشعة العشوائية، توزيع غوس المتعدد الأبعاد، توزيع ويشارت توزيع هوتلينغ، توزيع ويلكس.

Abstract

This dissertation discusses some of the fundamental concepts, definitions and properties of the multidimensional probability distributions of Gauss, Wishart, Hotelling and Wilks. The importance of these distributions lies in the great role which they play in the statistical analysis of multivariate data such as estimation and hypothesis testing.

Keywords: Gauss multivariate distribution; Hotelling's T2; Random vectors; Wilks' lambda; Wishart distribution.

Résumé

Ce mémoire traite les concepts, définitions et propriétés de base des distributions multidimensionnelles de probabilité de Gauss, Wishart, Hotelling et Wilks. L'importance de ces distributions réside dans le grand rôle qu'elles jouent dans l'analyse statistique des données multivariées telle l'estimation et les tests d'hypothèses.

Mots clés : Distribution de Wishart; Distribution multivariée de Gauss; Lambda de Wilks; T2 de de Hotelling; Vecteurs aléatoires.