République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : Probabilités

Par :

LAMRI AHLEM

Titre :

Résolution Numérique D'un Problème De Contrôle

Devant le Jury :

Mr.	**LAKHDARI IMAD EDDINE.**	**Dr.**	U. Biskra	**Président**
Mr.	**TAMER LAZHAR.**	**Dr.**	U. Biskra	**Encadreur**
Mme.	**GAT RAFIKA.**	**Dr.**	U. Biskra	**Examinateur**

Soutenu Publiquement le : 19/06/2022

Dédicace

★Je dédie ce modest travail à ★

★À la source de mon soutien et de ma patience★

★Ma mère et mon père★

★ À ma chère soeur et mes chers frères★

★À toutes mes chères professeurs qui ont contribué à★

★Ma réussite tout au long de mes études★

★ À tous ceux que j'aime★.

Remerciements

D'abord je tiens à remercier **Dieu** de m'avoir donné le courage, la force et la patience pour accomplir mon travail.

Mes remerciements à ma mère et mon père pour leur patience avec moi pour mon succès et mes rêves.

Je remercier mon encadreur de mon mémoire **"Dr.TAMER LAZHAR."** pour sa supervision de ce travail et aussi pour m'avoir conseillé et encadré mon travail.

Je tiens à remercier les membres du jury : **"Dr.LAKHDARI IMAD EDDINE."** et **"Dr.GAT RAFIKA."** pour avoir accepté d'étudier et d'évaluer ce travail.

Je remercier aussi tous mes professeurs, ma famille et mes amis.

Merci.

Notations et symboles

Les différences notations et symboles utilisés tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$v.a$	Variable aléatoire.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
Ω	Un ensemble fondamentale.
$\mathbb{P}$	Une mesure de probabilité sur Ω.
$\mathcal{F}$	La tribu sur Ω.
$B(\mathbb{R})$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	La filtration naturelle du mouvement brownien.
$\mathcal{F}_t^x$	Tribu engendrée par la famille $\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$.
$E[.]$	Espérance mathématique.
$E[./.]$	Espérance conditionnelle.
C^1, C^2	L'espace des fonctions continues intégrables.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P)$	Espace de probabilité filtré.

$i.e$	C'est-à-dire.
EDS	Équation différentielle stochastique.
$P.s$	Presque sûrement .
$B = (B_t)_{t \geq 0}$	Mouvement Brownien.
L^1	L'espace de fonctions intégrable.
1_A	Fonction indicatrice de A.
L^2	L'espace de foctions de carré intégrable.
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	La filtration naturelle du mouvement brownien.
$V(x, m)$	Fonction de coût.
u	Variable de contrôle.
U	Ensemble des valeurs compacts.
$u(\cdot)$	Contrôle admissible.
b	Drift ou la dérive.
σ	Terme de diffusion.

Table des matières

Introduction

Un grand nombre des problèmes économiques financière moderne impliquent la résolution des problèmes de contrôle stochastique à temps continu et à état continu. Comme les solutions explicites de ses problèmes sont extrêmement rares, plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour résoudre ces types de problèmes par exemple Kushner [8], [9] pour les processus de diffusions contrôlées, Song et Yin [13] pour les processus de diffusions de jeux différentiel, Barles et Souganidis [2]. Pour l'approximation des solutions des équations de HamiltonJacobi-Bellman par la méthode de différences finies et éléments finis. Dans notre mémoire on se concentre sur l'approximation par la méthode des chaînes de Markov. L'idée de base de cette méthode est d'approximé notre processus de diffusions par une chaîne de Markov contrôlée appropriée, dans laquelle le coût optimal est facilement calculés, puis on montre que nous pouvons approximer le coût optimal pour le problème initial par le coût optimal de cette chaîne contrôlée.

Notre mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente un rappel sur le calcul stochastique (définition de l'intégrale stochastique, formule d'Itô et quelques inégalités connues, etc...).

Dans le deuxième chapitre, on donne le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique progressive.

Dans le troisième chapitre, on se consacre à la résolution numérique d'un problème de contrôle stochastique par la méthode d'approximation des chaînes de Markov. Alors que le problèmes sous-jacents sont en temps continu, les méthodes numériques sont basées sur la construction de chaînes de Markov contrôlées en temps discret qui sont localement cohérentes de sorte que la moyenne et la covariance locales coïncident avec celles des systèmes stochastiques contrôlés en temps continu, dans la démonstration on utilise le concept des contrôles relaxés.

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique.

Le but de ce chapitre est donner les définitions et les notions de base pour le calcul stochastique, et donne les principaux résultates à utiliser dans les chapitres suivants, et pour plus de détails consulter les documents suivantes : [5] et [7] .

1.1 Processus stochastique

1.1.1 Tribu et Mesurabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition 1.1.1 ***(Définition d'une tribu)*** *Soit E un ensemble quelconque. Une tribu (ou σ- algèbre) sur E est une famille $\mathcal{F}$ de parties de E telle que :*

i) $E \in \mathcal{F}$;

ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$;

iii) *Si $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi* : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathcal{F}$.

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés parties mesurables. On dit que $(E, \mathcal{F})$ est un espace mesurable.

Énonçons quelques conséquences de la définition :

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$.
2. Si $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.
3. Puisqu'on peut toujours $A_n = \varnothing$ pour n assez grand, la propriété(iii) entraîne que $\mathcal{F}$ est stable par réunion finie (et de même par intersection finie).

Tribu boréliénne

Soit $(\Omega,\ \mathcal{F})$ un espace mesurable, et soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r).

Définition 1.1.2 *On dit que X une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ si : $(X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in B(\mathbb{R}))$,où :*

– $\mathcal{F}$ est un tribu de parties de Ω.

– Ω est une ensemble (univers des possibles).

– $B(\mathbb{R})$ est un tribu des boréliens.

Définition 1.1.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et (E, ε) deux espaces mesurables. Une application f de Ω dans E est dite $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \varepsilon$, où :*

$$f^{-1}(A) = \{w \in \Omega \backslash f(w) \in \Omega\}.$$

Définition 1.1.4 ***(tribu engendrée)****La tribu engendrée par une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est l'ensemble des parties de Ω qui s'écrivent $X^{-1}(A)$ où $A \in B(\mathbb{R})$.On note cette tribu $\sigma(X)$. La tribu $\sigma(X)$ est contenue dans $\mathcal{F}$. C'est la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.*

1.1.2 Filtration et Processus adapté

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité complet.

Définition 1.1.5 ***(processus stochastique)*** *Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et indexée par le temps t. Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.*

Pout $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.6 ***(Modification et indistinguable)*** *Étant donné un processus stochastique $Y = (Y_t)_{t\in T}$, on dit que Y est une modification de X si pour tout $t \in T$, on a :$X_t = Y_t$ p.s,i.e. $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$. On dit que Y est indistinguable de X si leurs trajectoires coïncident p.s. :$\mathbb{P}[X_t = Y_t \quad ,\forall t \in T] = 1$.*

Définition 1.1.7 ***(processus gaussien)*** *Un processus est dit gaussien si toutes ses lois fini-dimentielles $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ sont gaussiennes $(\forall n \in \mathbb{N} \ , \forall t_1, t_2, ..., t_n \in T)$.*

Autrement dit : $X = (X_t)_{t\in T}$ est gaussien si toute combinaison linéaire :

$a_1 X_{t_1} + a_2 X_{t_2} + ... + a_n X_{t_n}$ suit la loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ et $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$).

Définition 1.1.8 ***(processus de Markov)*** *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration canonique, on dit que le processus est de Markov si, pour tout n et pour toute fonction bornée F définie sur $\mathbb{R}^n$, pour tous $t_1 < t_2 < .... < t_n$*

$$E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n} / \mathcal{F}_s) = E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n} / X_s).$$

Ceci implique en particulier que pour toute fonction f borélienne bornée :

$$E(f(X_t)/\mathcal{F}_s) = E(f(X_t)/X_s) \quad ,\forall t > s.$$

Le processus est dit de Markov fort si la propriété précédente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finit T, S avec $T > S$.

Filtration

On s'intéressera aux phénomènes dépendant du temps, ce que l'on sait à la date t être collecté dans une tribu qui est information à la date t.

Définition 1.1.9 *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$, pour tout $t \leq s$.*

On demande souvent que les ensembles négligables soient contenus dans $\mathcal{F}_t$.

On parle d'hypothèses habituelles si :

- Les ensembles négligables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.
- La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.
- Une filtration G est dite plus grosse que F si $\mathcal{F}_t \subset G_t$, quelque soit t.

Processus adapté

Définition 1.1.10 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$, est dite adaptée (par rapport une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est ($\mathcal{F}_t$) mesurable pour tout t. On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω. Un processus est dit* ***càdlàg*** *(continu à droite, pourvues de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche même définition pour* ***càglàd.***

Définition 1.1.11 *Un processus X est dit adapté si pour $t \geq 0, X_t$ est $(\mathcal{F}_t)$ mesurable. Le processus est dit progressif si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(\omega, s) \rightarrow X_s(\omega)$ définie sur $\Omega \times [0, t]$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{F} \otimes B([0,\text{t}])$.*

Définition 1.1.12 *Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est dite prévisible (par rapport à $\mathcal{F}_t$) si l'application $(t, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $T \times \Omega$ muni de la tribu engendrée par les processus $\mathcal{F}_t$-adaptés et continus.*

Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire réelle (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et G une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.13 *L'espérance conditionnelle $E[X/G]$ de X quand G est l'unique variable aléatoire :*

1. G-mesurable.
2. $\forall A \in G$, on a : $\int_A X dP = \int_A E[X/G] dP$.

C'est aussi l'unique (à une égalité p.s.près) variable G-mesurable telle que :

$E\left[E(X|G)Y\right] = E(XY)$, pour tout variable Y , G-mesurable bornée.

Propriété 1.1.1 ***(propriété de espérance conditionnelle)***

1. **Linéarité :** Soit a et b deux constantes, alors :

   $E(aX + bY|G) = aE(X|G) + bE(Y|G)$.

2. **Croissance :** Soit X et Y deux v.a telles que $X \leq Y$, alors :

   $$E(X|G) \leq E(Y|G) .$$

3. **Espérance :** $E\left[E(X|G)\right] = E(X)$.
4. Si X est $G-$mesurable, alors : $E(X|G) = X$.

5. Si Y est $G-$mesurable, alors : $E(XY|G) = YE(X|G)$ pour tout v.a X.

6. Si X est indépendante de G, alors :$E(X|G) = E[X]$.

1.1.3 Temps d'arrêt et Martingales

Temps d'arrêt

On travaille sur un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On note : $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Définition 1.1.14 *Une v.a.$T : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt si $\forall t \geq 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On associée à un temps d'arrêt T les tribus suivantes :*

$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall\ t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\ \}$,

$\mathcal{F}_{T^+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall\ t \geq 0, A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\ \}$,

$\mathcal{F}_{T^-} = \sigma(A \cap \{T > t\}, t \geq 0, A \in \mathcal{F}_t\ \}$.

Propriété 1.1.2 *:*

1. On a toujours $\mathcal{F}_{T^-} \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T^+}$. Si la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite, on a : $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T^+}$.

2. Une v.a $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est un $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ - temps d'arrêt si et seulement si : $\forall t \geq 0, \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. Cela équivalente encore à dire que $T \wedge t$ est $(\mathcal{F}_t)$ - mesurable pout tout $t \geq 0$.

3. Si $T = t$ alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_{T^+} = \mathcal{F}_{t^+}$.

Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, L^1 est un espace intégrable et tous les processus sont à valeurs réelles.

Définition 1.1.15 ***(Martingale en temps continue)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté et tel que $X_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$ est appelé :*

– *Martingale si, pour tous $0 \leq s \leq t$, $E\left[X_t \,|\mathcal{F}_s\right] = X_s$.*

– *Sur-martingale si, pour tous $0 \leq s \leq t$, $E\left[X_t \,|\mathcal{F}_s\right] \leq X_s$.*

– *Sous-martingale si, pour tous $0 \leq s \leq t$, $E\left[X_t \,|\mathcal{F}_s\right] \geq X_s$.*

Remarque 1.1.1 *1. Si $I \subseteq N$, on dit que la martingale au temps discret.*

2. Si $I \subseteq \mathbb{R}_+$, on dit que la martingale au temps continue.

Théorème 1.1.1 ***(l'inégalité de Doob)****Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ une sous-martingale positive ou une martingale, càdlàg alors pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans T, on a :*

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |X_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{E\ |X_\tau|}{\lambda} \quad , \lambda > 0,$$

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |X_t|\right]^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\ \left[|X_\tau|^p\right] \quad ,\forall p > 1.$$

Définition 1.1.16 ***(Martingale locale)*** *Soit X un processus càdlàg adapté. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$ telle que : $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ p.s. et le processus arrêté X^{τ_n} est une martingale pour tout n.*

Définition 1.1.17 ***(semi-martingale)*** *Une semi-martingale est un processus càdlàg adapté X admettant une décomposition de la forme suivante : $X = X_0 + M + A$ où :*

– *M est une martingale locale càdlàg nulle en 0.*

– *A est un processus adapté et à variation finie et nul en 0.*

1.2 Mouvement brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique.

Définition 1.2.1 *(Mouvement brownien) Un processus* $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *à valeurs réelles est appelé un mouvement brownien si :*

1. $B_0 = 0$. $\mathbb{P}$-*p.s.*
2. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, *la variable aléatoire* $B_t - B_s$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_s$.
3. $\forall\ 0 \leq s \leq t$, $(B_t - B_s)$ *est de loi gaussienne centrée de variance* $t - s$.

Définition 1.2.2 *Un mouvement brownien* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est dit standard,ou processus de Wiener, s'il est issu de* 0, *c'est-à-dire si* $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-*p.s et si pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$, $E[B_t] = 0$ *et* $E[B_t^2] = t$.

Proposition 1.2.1 *Si* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est un mouvement brownien standard, alors pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$cov(B_t, B_s) = \inf(t,s) = s \wedge t.$$

Théorème 1.2.1 *Soit* $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un processus stochastique tel que : toutes les trajectoires sont continues et* $B_0 = 0$, *alors on dit que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Le processus B est un mouvement Brownien standard.
2. Le processus B est un processus gaussien avec espérance $m(t) = 0$, et de covariance : $cov(B_s, B_t) = s \wedge t = min(s,t)$.

Proposition 1.2.2 *Tout mouvement brownien est une martingale relativement à sa filtration, i.e : pour tout* $s < t$, $E(B_t \backslash \mathcal{F}_s) = B_s$.

Preuve. Si $s < t$, l'indépendance de $B_t - B_s$ et $\mathcal{F}_s$ implique que :

$$E(B_t - B_s \backslash \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) = 0.$$

puisque B est centré. D'où le résultat. ■

Définition 1.2.3 ***(chaîne de Makov)****Un processus $(X_n)_{n \in N}$ à valeurs dans E est une chaîne de Makov si pour tout entier $n \geq 1$ et pour tous éléments x_0, x_1, x_{n-1}, x, y de E. On a : $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n-1}, X_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$.*

La chaîne est dite homogène si le nombre $P(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$ ne dépend pas de n. La matrice $P = (P(x, y))_{(x,y) \in E \times E}$, indexée par $E \times E$, est alors appelée matrice de transition de la chaîne.Notons que la matrice P a des coefficients positifs ou nuls et vérifie $\sum_{y \in E} P(x, y) = 1$ pour tout $x \in E$, on dit que c'est une matrice stochastique.

1.3 Quelques inégalités

Proposition 1.3.1 ***(Inégalité de Jensen)*** *Si ϕ est une fonction convexe et X une v.a.r telle que $\phi(X)$ est intégrable , alors : $\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$.*

Proposition 1.3.2 ***(Inégalité de triangulaire)*** *On travaill sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors*

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Proposition 1.3.3 ***(Inégalité de Hölder)*** *Si : $1 < p < \infty$ et q est l'exposant conjugué de p, alors pour tous $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

Proposition 1.3.4 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soient* $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *, on a :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Théorème 1.3.1 ***(Inégalité de Cauchy-Shwartz)*** *Soit* L^2 *un espace des fonctions continues de carré intégrable sur* I *(*I *un intervalle réel quelconque) muni du produit scalaire)* $(f,\ g) \rightarrow \langle f \backslash\ g\rangle = \int_I fg$*, on obtient :*

$$\forall\ (f, g) \in L^2\ ,\ \left|\int_I fg\right| \leq \sqrt{\int_I f^2} \times \sqrt{\int_I g^2}.$$

Lemme 1.3.1 ***(lemme de fatou)****Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite croissante de variables aléatoires réelles positives et intégrables, telle que* $\liminf\limits_{n\rightarrow\infty} X_n$ *est une variable intégrable, alors :*

$$E\left[\liminf_{n\rightarrow\infty} X_n\right] \leq \liminf_{n\rightarrow\infty} E\left[X_n\right].$$

Théorème 1.3.2 ***(convergence monotone)*** *Soit* $\{X_n, n \geq 0\}$ *une suite croissante (ou décroissante) de variable aléatoire et soit* $X = \lim X_n$ *p.s. Suppose que* X *est intégrable alors :* $E\left[X\right] = \lim\limits_{n\rightarrow\infty} E\left[X_n\right].$

Propriété 1.3.1 ***(convergence dominée)****Soit* $\{X_n, n \geq 0\}$ *une suite croissante de variables aléatoires convergent p.s. vers* X*. Supposons qu'il existe une variable aléatoire* Y *intégrable telle que :* $|X_n| \leq Y$ *alors :*

$$X \text{ est intégrable et } E\left[|X_n - Y|\right] \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Propriété 1.3.2 *(convergence faible)Soient E un espace vectoriel normé de norme $\|\cdot\|$ et E' son dual, et soit $\{x_n, n \geq 0\}$ une suite d'éléments de E, on dit que x_n converge faiblement vers $x \in E$,et on note $x_n \to x$, si $\forall\ f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$.*

1.4 Calcul d'Itô

1.4.1 Intégrale stochastique

Soit B un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et C^1, C^2 sont deux espaces des fonctions continus intégrables.

Nous définissons maintenant la v.a :$\int_0^T X_s dB(s)$ quand $\{X(s),\ s \geq 0\}$ est un processus stochastique. Le caractère aleatoire de X nécessité une condition supplémentaire par rapport au cas de l'intégrale de wiener, et notons $\{\mathcal{F}_t^B\ , t \geq 0\}$ la filtration naturelle du mouvement brownien B.

Définition 1.4.1 *On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un bon processus s'il est $(\mathcal{F}_t^B)$- adapté càglad, et si : $E\left[\int_0^T X_s^2 ds\right] < +\infty$, pour tout $t > 0$.*

1.4.2 Processus d'Itô

Définition 1.4.2 *On dit que processus d'Itô tout processus X_t de la forme suivante :*

$$\forall 0 \leq t \leq T \ \ ; \ X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \ \ ; \ \ \mathbb{P} - p.s$$

Où :X_0 est $\mathcal{F}_0$ $-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions : $\int_0^t |b_s| ds < \infty$ et $\int_0^t |\sigma_s| ds < \infty$, le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion, et on utilise la notation suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= b_t \, dt \; + \; \sigma_t \, dB_t \quad , \\ X_0 &= x \; , \quad \forall \; 0 \leq t \end{cases}$$

1.4.3 Formule d'Itô

Soit le processus d'Itô : $\forall \; 0 \leq t \leq T$, $X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (suffisamment régulière). Le but de la formule d'Itô est donner une formule de changement de variable pour le processus $f(X_t)$ qui serais un processus d'Itô.

Théorème 1.4.1 ***(Premiére formule d'Itô)****Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^2$, est dérivée bornées, et soit le processus d'Itô :*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \; X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Alors la premiére formule d'Itô s'écrit sous la forme :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \; \sigma_s^2 \; ds.$$

et sous la forme condensée :

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \; \sigma_t^2 \; dt.$$

Théorème 1.4.2 ***(Deuxième formule d'Itô)****Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t et de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à x à derivées bornées et $(t, x) \to f(t, x)$, on va écrire la déuxieme formule d'Itô par suit :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s) \; dX_s + \int_0^t f_t^{'}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}''(s, X_s) \sigma_s^2 \; ds.$$

Proposition 1.4.1 ***(intégration par parties)****Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors :*

$$X_t\ Y_t\ =\ X_0\ Y_0\ + \int_0^t X_s\ dY_s\ + \int_0^t Y_s dX_s\ + \int_0^t d\langle X, Y\ \rangle_s\ .$$

et soit la notation : $d(XY\ )_t = X_t\ dY_t + Y_t\ dX_t + d\langle X, Y\ \rangle_t\ .$

Preuve. Voir que [12]. ■

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques.

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques ». Dans ce chapitre, nous aurons présenté la signification d'une équation différentielle stochastique et est ce que la solution exsite et si elle existe, est-elle unique ?

2.1 Équation différentielle stochastique

Définition 2.1.1 *Une équation différentielle stochastique **(EDS)** est une équation de la forme :*

$$X_t = x \ + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{2.1}$$

ou sous forme condensée :

$$\begin{cases} dX_t & = b(t, X_t) \ dt \ + \ \sigma(t, \ X_t)dB_t \ \ , \forall t \in T \\ X_0 & = \ x \ , \end{cases} \tag{2.2}$$

où :

1. $(B_t)_{t\,\geq\,0}$ est un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^m$ défini sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, $x \in \mathbb{R}^n$ (condition initiale), le processus X ici est inconnu.
2. Les deux fonctions $b : [0; T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (la dérive) et $\sigma : [0; T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ (le coefficient de diffusion) sont mesurables et bornés, tels que : $T > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$. Nous allons préciser les notions d'existence et d'unicité des solutions d'une(**EDS).**

2.2 Solution forte et solution faible

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré , $(B_t)_{t\,\geq\,0}$ est un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^m$, L^2 est l'ensemble des variables aléatoires intégrables.

Définition 2.2.1 ***(solution forte)****On dit que le processus* $X = (X_t)$ *représente une solution forte de l'(****EDS)*** *2.2 si :*

1. *X est un processus continu et progressivement mesurable.*
2. *P. p.s* $\int_0^T \left\{|b(s, X_s)| + \|\sigma(s, X_s)\|^2 ds\right\} < +\infty$, *où* $\|\sigma\| = trace\ (\sigma\sigma^*)$ *où :* σ^* *désigne le transposé de* σ,
3. *P. p.s on a :* $X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad ,0 \leq t \leq T.$

Définition 2.2.2 ***(solution faible)*** *On dit que l'équation2.2 admet une solution faible si on peut trouver un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, *et pour tout mouvement brownien* $(B_t)_{t\,\geq\,0}$, *s'il existe un processus continue* $X = \{X_t\ ,\ T \geq t \geq 0\}$ *tel que les propriétés 1),2),3) soient vérifiées.*

2.3 Existence et l'unicité des solutions

Définition 2.3.1 ***(Unicité forte)****On dit que l'équation 2.2 admet une solution forte unique si pour chaque deux solutions fortes $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ et*

$Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$, on a : $\mathbb{P}\left\{ \sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t| < 0\right\} = 0$

C'est-à-dire : $\mathbb{P}\{ X_t = Y_t \ ;\forall t \in [0,T]\} = 1$.

Définition 2.3.2 ***(Existence et Unicité faible)****Pour l'équation 2.2 on dit qu'il y a :*

- *Existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de 2.2 c'est-à-dire un triplet $\{X, B, (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P},)\}$ où B est un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien et pour lequel X est solution satisfaisant 2.1.*
- *Existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de 2.2 ont même loi.*

Théorème 2.3.1 *Étant donné un horizon finit $T > 0$, considérons l'**EDS** suivante sur $[0,T]$:*

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)\ dt\ +\ \sigma(t,\ X_t)dB_t \quad ,\forall t \in T \\ X_0 &= x\ , \end{cases}$$

Supposons les coefficients b et σ localement bornés en temps et lipschitziens en espace, i.e. pour tout $t \in [0,T]$,

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K\, |x - y|^2 . \tag{2.3}$$

Alors on a le résultat suivant :

i) ***Existence*** *: il existe une solution X sur $[0,T]$ continue et adaptée, qui de plus est bornée dans L^2 :*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[X_t^2] < \infty$$

ii) ***Unicité*** *: Si X et Y sont deux telles solutions de cette EDS (avec le même mouvement brownien et le même point initial), alors elles sont égales p.s., i.e.*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \quad ; \forall t \in [0, T]) = 1.$$

où b et σ peuvent être supposées localement Lipschitziennes en espace et satisfaisant une condition de croissance linéaire.

Pour attaquer la preuve du théorème, rappelons tout d'abord le lemme de Grnowall.

Théorème 2.3.2 ***(Yamada- Watanabe)*** *Supposons que 2.2 admette une solution faible et que toutes ces solutions soient indistinguables, alors 2.2 admet une unique solution forte.*

Le théorème suivant est l'analogue du théorème de Cauchy-lipschitz pour les **EDS**. Il fournit les conditions standard d'existence et d'unicité de solution forte.

Lemme 2.3.1 ***(Gronwall)*** *Soit $T > 0$ et $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction positive mesurable bornée sur $[0, T]$. On suppose qu'il existe des constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ tels que pour tout $t \in [0, T]$, on a :*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds \tag{2.4}$$

Alors, on a : $g\ (t) \leq a\ e^{(bt)}$ pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve. **(Gronwall)** En itérant la condition 2.4 sur g, on a pour tout $n \geq 1$:

$$g(t) \leq a + a(bt) + a\frac{(bt)^2}{2} + ... + \frac{(bt)^n}{n_!} + b^{n+1} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 ... \int_0^{s_n} g(s_{n+1}) ds_{n+1}$$

Ainsi, g étant majorée par une constante A, on obtient que le reste intégral dans le terme de droite soit majoré par $A(bt)^{n+1}/(n+1)!$ et il tend vers 0, quand $n \longrightarrow +\infty$. ∎

À présent, nous sommes en mesure de démontrer le théorème d'existence et d'unicité.

Preuve. **(Théorème d'existence et d'unicité)**

i) Unicité : Soient X et Y deux solutions de l'**EDS** ci-dessus. Alors pour tout $t \in [0,T]$,

$$X_t - Y_t = \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds \ + \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s.$$

Notons que les fonctions σ et b étant Lipschitziennes et les processus X et Y bornés dans L^2 sur $[0,T]$, l'intégrale stochastique est bien définie. Ainsi en utilisant successivement les inégalités $(a+c)^2 \leq 2(a^2+c^2)$ et de Cauchy-Schwartz, l'isométrie d'Itô et enfin l'inégalité 2.3 , on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left[(X_t - Y_t)^2\right] & \leq 2E\left[\left(\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds\right)^2\right] \\
& +2E\left[\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dBs\right)^2\right] \\
& \leq 2tE\left[\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))^2 ds\right] \\
& +2E\left[\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dBs\right)^2\right] \\
& \leq 2K \ \max\{T,1\} \ \int_0^t E\left[(X_s - Y_s)^2\right] ds.
\end{aligned}$$

D'où par le lemme de Gronwall appliqué avec $a = 0$, on obtient que $\mathbb{P}(X_t = Y_t$ $\forall t \in [0,T] \cap \mathbb{Q}) = 1$, on obtient le résultat est compté en utilisant la continuité de ces deux processus.

ii) Existence :

Afin de démontrer l'existence d'une solution à l'**EDS**, nous allons utiliser une méthode qui est classique en théorie des équations différentielles ordinaires, l'itération de Picard. Ainsi, soit $X^{(0)} = x_0$ et définissons par récurrence la suite de processus $(X^{(n)})_{n \geq 0}$ par :

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)} \ )dB_s, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.5}$$

Comme d'habitude, pour montrer que cette suite de processus converge vers une limite qui satisfait l'énoncé du théorème, on va montrer que p.s elle est de Cauchy pour la norme uniforme sur $[0, T]$.Tout d'abord, remarquons que l'itération donnée ci-dessus est bien définie. En effet, si $X^{(n)}$ est un processus continu, adapté et borné dans L^2 sur $[0, T]$, l'inégalité 2.3 ainsi que le fait que σ et b soient localement bornés en temps nous donne facilement que $\sigma(\cdot, X^{(n)})$ et $b(\cdot, X^{(n)})$ sont bornés dans L^2 sur $[0, T]$ (et donc comme ils sont continus et adaptés, ils appartiennent à l'espace $\mathcal{H}^2(0,T) = \left\{X : (0,T) \to \mathbb{R}^d,\ E\int_0^T |X_s|^2\, ds < \infty\right\}$). Ainsi, on obtient que $X^{(n+1)}$ est un processus continu, adapté et borné dans L^2 sur $[0, T]$. Et comme $X^{(0)} = x_0$ est trivialement continu, adapté et borné dans L^2 sur $[0, T]$, tous les processus $X^{(n)}$ le sont.

À présent, par la même méthode que celle utilisée pour l'unicité, où cette fois l'inégalité de Doob L^2 est invoquée pour contrôler le supermum, il n'est pas difficile de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, T]$,

$$g_n(t) \leq C \int_0^t g_{n-1}(s) ds,$$

où $C = 8K \max\{T, 1\}$ et

$$g_n(t) = E\left[\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right|^2\right].$$

Ainsi, comme g_0 est majorée par une constante M sur $[0, T]$, alors en itérant l'inégalité ci-dessus comme dans la preuve du lemme de Gronwall, on obtient la borne

$$0 \leq g_n(T) \leq \frac{M(CT)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En sommant sur n et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient

$$E\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} \left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right|\right] \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{g_n(T)} < \infty,$$

donc que p.s.,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} \left|X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}\right| < \infty.$$

Il en résulte que la suite de processus $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy p.s. pour la norme uniforme sur $[0,T]$, elle converge alors p.s. uniformément sur $[0,T]$ vers un processus adapté X continue sur $[0,T]$, satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_t = X_t^{(n)} + \sum_{k\geq n} \left(X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\right), \quad t \in [0,T].$$

En particulier, on a par l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{cases} \left\|\sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_t^{(n)}|\right\|_{L^2} & \leq \sum\limits_{k\geq n} \sqrt{g_n(T)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \\ \left\|\sup_{s\in[0,T]} |X_t|\right\|_{L^2} & \leq |x_0| + \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{g_n(T)} < \infty, \end{cases}$$

et donc X est borné dans L^2 sur $[0,T]$.

Maintenant, il reste à montrer que X vérifie bien l'**EDS** donnée ci-dessus. Notons que par ce qui précède et l'inégalité 2.3 , on a que $b(\cdot, X)$ et $\sigma(\cdot, X) \in \mathcal{H}^2(B,T)$ et de plus,

$$\begin{cases} \left\|b(\cdot, X) - b(\cdot, X^{(n)})\right\|_{\mathcal{H}^2(0,T)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0; \\ \left\|\sigma(\cdot, X) - \sigma(\cdot, X^{(n)})\right\|_{\mathcal{H}^2(0,T)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Ainsi, par l'isométrie d'Itô, on obtient pour tout $t \in [0,T]$:

$$E\left[\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^{(n)}))dBs\right)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La convergence dans L^2 entraînant la convergence p.s. d'une sous suite, alors pour tout $t \in [0,T]$, on a p.s.,

$$\begin{cases} \int_0^t b(s, X_s^{(n_k)})ds & \underset{k\to\infty}{\to} \int_0^t b(s,X_s)ds\,; \\ \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n_k)})dBs & \underset{k\to\infty}{\to} \int_0^t \sigma(s,X_s)dBs\ , \end{cases}$$

d'où en remplaçant n par n_k dans l'identité 2.5 et en passant à la limite p.s. lorsque $k \to \infty$, on obtient pour tout $t \in [0,T]$, on a p.s.,

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s\ )dB_s\ .$$

Enfin, en prenant $t \in [0,T] \cap \mathbb{Q}$ on peut intervertir avec le "p.s." et les deux membres de cette égalité étant continus sur $[0,T]$, on obtient le résultat désiré, à savoir

$$\mathbb{P}\left(X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s\ )dB_s \quad \forall t \in [0,T] \right) = 1.$$

La démonstration est achevée.

■

2.4 Quelques propriétés

2.4.1 Propriété de Markov

Propriété 2.4.1 ***(propriété de markov)****On note $(X_s^{t,x}\ ,\ s \geq t)$ la solution de 2.1 partant de x à l'instant t, et soit :*

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x})du + dBu.$$

*Sous les conditions du théorème (**2.3.1**), on peut montrer que :* $X_s^{0,x} = X_s^{t,X_t^{0,x}}$ *,*$s \geq t$*. Ce qui montre que la solution de 2.1 est un processus de Markov pa rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$ *:*

$$E(f(X_s)/\mathcal{F}_t) = E(f(X_s)/X_t) = \Phi(s,t,X_t).$$

Où $\Phi(s,t,x) = E(f(X_s^{t,x}))$ *,* $s \geq t$*. Ce résultat est extrêmement important et permet de calcul facilement des espérances conditionnelles. En particulier si :*

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(X_u^{t,x})du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x})dBu.$$

On obtient un processus de Markov homogène :

$$E(f(X_s)/\mathcal{F}_t) = E(f(X_s)/X_t) = \Phi(s,t,X_t) = \Psi(s-t,X_t).$$

où : $\Phi(s,t,x) = E(f(X_s^{t,x})) = E(f(X_{s-t}^{0,x})$ *et* $\Psi(u,x) = E(f(X_u^{0,x}))$*.*

2.4.2 Théorème de comparaison

Théorème 2.4.1 ***(Théorème de comparaison)****Soit :*

$$dX_i(t) = b_i(X_i(t))dt + \sigma_i(X_i(t))dW_t \ , i = 1,2$$

où : b_i *est Lipschitz et* $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq k\,|x-y|$*.*

Supposons que $X_1(0) \geq X_2(0)$ et $b_1(x) \geq b_2(x)$, alors $X_1(t) \geq X_2(t)$.

Preuve. Voir [11]. ■

2.4.3 Martingale exponentielle

Proposition 2.4.1 *Soit θ est un bon processus local et Z_0 est une constante. La solution de : $dZ_t = \theta_t Z_t dB_t$ est : $Z_t = Z_0 \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 d_s]$.*

Si de plus $E(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 d_s]) < \infty$, le processus $(Z_t, t \leq T)$ est une martingale d'espérance Z_0 .

Preuve. Voir le [5] . ■

Lemme 2.4.1 *Soit f telle que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq C\,|x-y|$ et $\sup|f(s,0)| \leq C$. Alors : $\int_0^t f(s,B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s,B_s)^2 d_s$ est une martingale.*

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques contrôlées.

Dans ce chapitre, on va utiliser l'approximation par une chaine de markov [8],[9] pour résolu un problème de contrôle. Le processus stochastiques contrôlé est un processus de diffusion.

3.1 Approximation par une chaine de Markov

Formulation du problème : On considère un problème du contrôle dont le système contrôlé et la fonction de coût associée sont donnés par 3.1 et 3.2

$$dx = b(x,u)dt + \sigma(x)dw \qquad , x \in \mathbb{R}^r \tag{3.1}$$

$$V(x,m) = E_x^m \int_0^\tau e^{-\beta t} k(x(t),u(t))dt + E_x^m e^{-\beta\tau} g(x(\tau)) \ , \beta > 0, \tag{3.2}$$

$$\tau = \begin{cases} \inf(t : x(t) \notin G^0\} & \text{si } x(t) \notin G^0 \text{ ,pour } t < \infty, \\ \infty \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

E_x^m désigne l'espérance sous $x(0) = x$, et u la variable de contrôle qui prend leur valeurs dans un compact U et G^0 un compact de $\mathbb{R}^r$. Un contrôle $u(\cdot) = m$ est admissible s'il est $U-$mésurable. On définit :

$$V(x) = \inf_{m \text{ admissible}} V(x, m) \tag{3.3}$$

Pour la suite on suppose que les hypothèses (**H1**) et (**H2**) sont vérifiées.

(H1) $b(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continument Lipschitz, et uniformément en u, et : $a(\cdot) = \sigma(\cdot)\sigma'(\cdot)$.

(H2) $k(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont continues et bornées et G est un ensemble compact.

L'approximation par une chaine de Markov

Soit $\left\{\xi_n^h, n \geq 0\right\}$ une chaine de Markov contrôlée de probabilités de transition $P^h(x, y \backslash u)$, $h > 0,\ u \in U$ et un espace d'état discret $\mathbb{R}_h^r \in \mathbb{R}^r$. Soit u_n^h le contrôle utilisé à étape n et on suppose qu'un interval d'interpolation (continu en x, u) $\triangle t^h(x, u)$ soit donné.

Définissons : $\triangle t_n^h = \triangle t^h(\xi_n^h \ , u_n^h)$ et posons $G_h = \mathbb{R}_h^r \cap G^0$, l'espace d'état effectif de $\left\{\xi_n^h\right\}$ jusqu'à la sortie de G^0. $\delta\xi_n^h = \xi_{n+1}^h - \xi_n^h$. Pour tout $a > 0$ et $\xi_n^h = x$:

$$\begin{aligned} & E_n^h \delta\xi_n^h = \Delta t^h(x, u) b(x, u) + O(h^\alpha \Delta t^h(x, u)), \\ & E_n^h[\delta\xi_n^h - E_n^h\delta\xi_n^h][\delta\xi_n^h - E_n^h\delta\xi_n^h]' = a(x)\Delta t^h(x, u) + O(h^\alpha \Delta t^h(x, u)), \\ & \left|\xi_{n+1}^h - \xi_n^h\right| = O(h). \end{aligned} \tag{3.4}$$

On définit $\xi^h(\cdot)$ et $u^h(\cdot)$ par :

$$\xi^h(t) \equiv \xi_n^h \text{ et } u^h(t) = u_n^h \ \text{ sur } [t_n^h \ , t_{n+1}^h), t_n^h = \sum_{i=0}^{n-1} \triangle t_i^h. \tag{3.5}$$

Définition 3.1.1 *Un contrôle m^h pour $\{\xi_n^h\}$ est dite admissible, si les u_n^h associés sont* *des variables aléatoires à valeurs U et avec les $\{u_n^h\}$ utilisé, le processus est toujours une chaîne de Markov, c'est dire :*

$$P\{\xi_{n+1}^h = y/\xi_i^h \ ,u_i^h \ \ i \leq n\} = p^h(\xi_n^h \ ,y/u_n^h). \tag{3.6}$$

Soit $E_x^{m^h}$ l'espérance sous la condition initiale x et la politique m^h. On définit la fonction de coût :

$$V^h(x,m^h) = E_x^{m^h} \sum_{i\ =0}^{N_h\ -1} e^{-\beta t_n^h} k(\xi_n^h \ ,u_n^h) \triangle t_n^h + E_x^{m^h} e^{-\beta t_{N_h}^h} g(\xi_{N_h}^h). \tag{3.7}$$

Où :$N_h = \min\{n, \xi_n^h \notin G_h\}$, (ou :$N_h = \infty$,si non), soit $\tau_h = t_{N_h}^h$ l'espace de temps de $\xi^h(\cdot)$ de G^0, alors 3.7 peut écrire sous la forme suivante :

$$V^h(x,m^h) = E_x^{m^h} \int_0^{\tau_h} e^{-\beta s} k(\xi^h(s) \ ,u^h(s))ds + E_x^{m^h} e^{-\beta \tau_h} g(\xi^h(\tau_h)). \tag{3.8}$$

On définit :

$$V^h(x) = \inf_{m^h \ adm} V^h(x,m^h). \tag{3.9}$$

Les conditions 3.4 sont des conditions de "cohérence locale"entre $x(\cdot)$ et $\xi^h(\cdot)$. Il s'avérera que c'est la qualité essentielle que nous exigeons de la chaîne, quelle que soit la manière dont elle est obtenue .Cette cohérence et la similarité entre 3.2 et 3.8 suggèrent que les valeurs optimales $V^h(x)$ et $V(x)$ seront également proches pour un petit h, et il en résultera être le cas.

L'équation de la programmation dynamique pour 3.7 est :

$$\begin{aligned} V^h(x) \quad &= \min_{u\in U} \left[\textstyle\sum_y e^{-\beta \Delta t^h(x,u)} p^h(x,y/u) V^h(y) + \Delta t^h(x,u) k(x,u) \right], \quad x \in G_h, \\ &= g(x), \quad x \notin G_h \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Convergence de $\{V^h(\cdot)\}$

Sous certaines conditions toute sous-suite de $\{\xi^h(\cdot)\}$ à une sous-suite qui converge vers une diffusion contrôlée avec un contrôle admissible $\widetilde{m}$ au sens d'une convergence faible et $V^h(\cdot)$ converge vers le coût $V(x, \widetilde{m})$ pour cette diffusion. Le contrôle limite pourrait être un contrôle relaxé. Clairement, $V(x, \widetilde{m}) \geq V(x)$, puisque $\widetilde{m}$ n'est pas meilleur que le contrôle optimal. Alors : $\lim_h V^h(x) \geq V(x)$. Pour obtenir $V^h(x) \to V(x)$, nous avons besoin d'une inégalité inverse. Pour obtenir cela, étant donné un $\delta > 0$, alors il existe un contrôle $\delta-$optimal m^δ pour $x(\cdot)$ tel que$V^h(x, m^{h,\delta}) \to V(x, m^\delta)$. Ces estimations et $V^h(x) \leq V^h(x, m^{h,\delta})$ (du fait de l'optimalité de $V^h(x)$) donne le résultat souhaité.

3.2 Contrôle relaxé

Nous définissons ici une classe des contrôles admissible qui seront utilisés pour simplifier l'analyse de convergence.

Cas déterministe

Définition 3.2.1 *Tout fonction mesurable $u(\cdot)$ à valeurs dans U est dit contrôle ordinaire pour 3.11 :*

$$\dot{x} = b(x, u). \tag{3.11}$$

Soit $m(\cdot)$ une application à valeurs mesure sur les ensembles boréliens de $U \times [0, +\infty[$ telle que :

$$m(U \times [0, t]) = t, \quad \text{pour } t \geq 0, \tag{3.12}$$

et on note parfois $m(B \times [0, t]) \equiv m(B, t)$. Sous 3.12, il existe une mesure $m_t(\cdot)$ sur les ensembles boréliens $\mathcal{U}$ de U tels que pour Borel B, $m_.(B)$ est une application mesurable et $m(dc\ dt) = m_t(dc)dt$.On dit que $m(\cdot)$ est un contrôle relaxé admissible pour 3.11 et on *réécrit 3.11 comme :*

$$\dot{x} = \int b(x, c)m_t(dc). \tag{3.13}$$

Tout contrôle ordinaire $u(\cdot)$ a une représentation sous forme de contrôle relaxé où $m_t(dc) = \delta_{u(t)}(c)dc$. Il existe un lemme qui assure que pour tout $m(\cdot)$ relaxé et $x(\cdot)$ associé, il existe une suite de contrôles ordinaires admissibles $u^\delta(\cdot)$, qui prennent un nombre fini de valeurs, et les solutions associées $x^\delta(\cdot)$ à 3.11, telles que $x^\delta(\cdot) \to x(\cdot)$, uniformément sur chaque intervalle $[0T]$, et $m^\delta(\cdot) \to m(\cdot)$ (topologie faible), où $m^\delta(\cdot)$ est le contrôle relaxé qui équivaut à $u^\delta(\cdot)$.

Cas stochastique

Soit $\mathcal{F}_t \times B_t$ la $\sigma-$ algèbre contenant les ensemble de produits, où B_t est l'algèbre de Borel sur $[0, t]$. Si $u(\cdot)$ une application mesurable de $(\Omega \times [0, t], \mathcal{F}_t \times B_t)$ à valeur dans U, on dit qu'il s'agit d'un contrôle ordinaire admissible pour **l'EDS** :

$$dx = b(x, u)dt + \sigma(x)dw. \tag{3.14}$$

Soit $m(\cdot)$ une variable aléatoire à valeur mesure (sur les ensembles boréliens de $U \times [0, \infty)$) tel que pour tout t et pour tout Borel B

$$m(U, t) = t, \tag{3.15}$$

$$m(B, t) \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}. \tag{3.16}$$

Les conditions 3.15et 3.16 implique l'existence d'une mesure $m_t(\cdot)$ $\mathcal{F}_t-$adaptée telle que $m(dc\ dt) = m_t(dc)$. On dit que $m(\cdot)$ est un contrôle admissible relaxé pour 3.13 , et pour tout contrôle relaxé 3.14 est réécrit comme :

$$dx = dt \int b(x, c)m_t(dc) + \sigma(x)dw. \tag{3.17}$$

Théorème 3.2.1 *Supposons que* (**H1**) *est vérifier, et soit* $m(\cdot)$ *un contrôle admissible. Alors 3.17 admet une solution (au sens forte). Aussi la loi de probabilité de* $(x(\cdot), w(\cdot))$ *est déterminée par celle de* $(m(\cdot), w(\cdot))$*. Pour tout* $T < \infty, \delta > 0$*, il existe un contrôle admissible ordinaire* $u^\delta(\cdot)$*, qui est constant par morceaux et ne prend qu'un nombre fini de valeurs tel que si* $x^\delta(\cdot)$ *et* $x^\delta(\cdot)$*, respectivement, correspondent à* $u^\delta(\cdot)$ *et* $m(\cdot)$ *et pour toute fonction continue bornée* $f(\cdot)$ *à valeurs réelles on a :*

$$\begin{gathered} P\left\{\sup_{t\leq T}\left|x^\delta(t)-x(t)\right|>\delta\right\}\xrightarrow{\delta}0, \\ E\left|\int_0^T f(s,u^\delta(s))ds-\int_0^T\int f(s,c)m_s(dc)ds\right|\to 0 \end{gathered} \tag{3.18}$$

Pour $m(\cdot)$ *un contrôle admissible relaxé,* $V(x,m)$ *de 3.2 s'écrit*

$$V(x,m)=E_x^m\int_0^\tau\int e^{-\beta t}k(x(t),c)m_t(dc)dt+E_x^m e^{-\beta\tau}g(x(\tau)). \tag{3.19}$$

Contrôles pour $\{\xi_n^h\}$

La suite u_n^h qui à valeur dans U_n^h est dite un contrôle admissible ordinaire si 3.6 est vérifiée. S'il existe une fonction borélienne $u_n(\cdot)$ telle que $u_n^h=u_n(\xi_n^h)$, alors on dit qu'il s'agit d'un contrôle admissible ordinaire de type feed-back. Une suite $m_n^h(\cdot)$ de variables aléatoires à valeur mesure (sur les ensembles boréliens de U) est un contrôle relaxé admissible si $m_n^h(U)\equiv 1$ et

$$P\{\xi_{n+1}^h=y\backslash\xi_i^h\ ,m_i^h\ ,i\leq n\}=\int P^h(\xi_n^h\ ,y\backslash c)m_n^h(dc).$$

On définit $m^h(\cdot)$ par son dérivé $m_t^h(\cdot)$: $m_t^h(\cdot)=m_n^h(\cdot)$ sur $[t_n^h,t_{n+1}^h)$, et écrire $m^h(dc\ dt)=m_t^h(dc)dt$. Nous réécrivons 3.8 en terme de contrôles relaxés :

$$V^h(x,m^h)=E_x^{m^h}\int_0^{\tau_h}\int e^{-\beta s}k(\xi^h(s),c)m_s^h(dc)ds+E_x^{m^h}e^{-\beta\tau}g(\xi^h(\tau_h)). \tag{3.20}$$

Pour tout contrôle ordinaire$\{ u_n^h\}$, nous définissons l'équivalent du contrôle relaxé par $m_n^h(dc) = \delta_{u_n^h}(c)dc$.

3.3 Convergence faible

Dans cette section on introduit quelque notions sur la théorie de convergence faible, ces résultats sont appliqués pour caractériser les limites des processus interpolés $\{\xi^h(\cdot), m^h(\cdot)\}$, lorsque $h \to 0$. Soient $\{X_n\}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique S, et ses probabilités induites$\{P_n\}$ et P sur la $\sigma-$algèbre de S .

Définition 3.3.1 *On dit que $\{X_n\}$ ou $(\{P_n\})$ converge faiblement vers X ou (P) si pour tout fonction continue bornée $f(\cdot)$:*

$$Ef(X_n) \to Ef(X)$$

et on écrire :$X_n \implies X$ (ou $P_n \implies P$).

Théorème 3.3.1 *Si $X_n \implies X$ et supposons que $f(\cdot)$ est mesurable et bornée et, d'ensemble de discontinuité D. Si $P\{Df\} = 0$ (où P est la mesure induite par X), alors $Ef(X_n) \to Ef(X)$ et $f(X_n) \implies f(X)$.*

Définition 3.3.2 *La suite $\{X_n\}$ (ou $\{P_n\}$) est dite tendu (relativement compacte), si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_\varepsilon \subset S$ tel que :*

$$\inf_n P\{X_n \in K_\varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Théorème 3.3.2 *Si $\{X_n\}$, est tendu dans $(S, \mathcal{C})$. Alors pour tout sous -suite, il existe une autre sous-séquence $\{X_{n'_i}\}$ et un X tel que $X_{n'_i} \implies X$.*

Théorème 3.3.3 *(Représentation de Skorokhod) Soit (S,d) un espace métrique complet et séparable et soit $X_n \Longrightarrow X$ sur S. Alors il existe un espace de probabilité $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\mathbb{P}})$ et une suite des variables aléatoires $\widetilde{X}_n,\widetilde{X}$ définies sur cet espave et à valeurs dans S tq : $\widetilde{X}_n \to \widetilde{X}$, telles que pour tout Borelien A défini de S :*

$$\widetilde{P}\{\widetilde{X}_n \in A\} = P\{X_n \in A\} \quad ,\widetilde{P}\{\widetilde{X} \in A\} = P\{X \in A\}$$

et $d(\widetilde{X}_n,\widetilde{X}) \to 0$ avec probabilité 1.

Soit $M(T), T < \infty$, l'ensemble des mesures $m(\cdot)$ sur les ensemble boréliens de $U \times [0,T]$ qui vérifient $m(U\times[0,t]) \equiv m(U,t) = t$, pour tous T avec une topologie faible. Sur $M(\infty)$ on utilise la topologie la plus forte qui coincide avec celle de chaque $M(T)$ sur $[0,T]$

Soit $D^k[0,\infty)$ l'espace des fonctions continues à droite et à de limite à gauche sur $[0,\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ muni de la topologie de Skorokhod.

Les processus et les variables aléatoires que nous interèsse dans notre mémoire sont $\{\xi^h(\cdot)\}$ de trajectoire dans $D^r[0,\infty)$, $\{m^h(\cdot)\}$ de valeurs dans $M(\infty)$, et des temps d'arrêts $\{\tau_h\}$ de valeurs dans l'espace compact $[0,\infty] = \overline{R}$. Pour les processus $\{Y^n(\cdot)\}$ de trajectoire dans $D^k[0,\infty)$, un critère de tension est donnée par le théorème suivant. Soit $\mathcal{F}_t^n$la $\sigma-$algèbre engendrée par $\{Y^n(s), s \leq t\}$.

Théorème 3.3.4 *Supposons que pour tout $T < \infty$,*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_n P\{\sup_{t\leq T} |Y^n(t)| \geq N\} = 0. \tag{3.21}$$

Pour tout $T < \infty$:

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_n} \sup_{\tau\leq T} E\min\{1, \left|Y^n(\tau+\delta) - Y^n(\tau)\backslash^{\beta}\right|\} = 0, \tag{3.22}$$

Pour certains $\beta > 0$, où τ est un $\mathcal{F}_t^n$ temps d'arrêt. Alors$\{Y^n(\cdot)\}$ est tendu dans $D^k[0,\infty)$.

Sous 3.22,3.21 nous avons

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n P\{|Y^n(t)|\geq N\}=0 \quad pour\ tout\ t. \tag{3.23}$$

Tension de $\{\xi^h(\cdot), \mathbf{m}^h(\cdot)\}$

Soit E_n^h et E_t^h l'espérance conditionelle par rapport aux $\sigma-$algèbres engendrées par $\{\xi_i^h, m_i^h$ $,i \leq n\}$ et $\{\xi^h(s), m^h(s)\ ,s\leq t\}$ respectivement .

Théorème 3.3.5 *Supposons que* (**H1**) *et 3.4, sont vérifions et soient $m^h(\cdot)$ un contrôle admissible relaxé et u_n^h une suite de contrôles ordinaires admissible pour $\{\xi_n^h\}$. Alors $\{\xi^h(\cdot), m^h(\cdot)\}$ est tendu dans $D^r[0,\infty)\times M(\infty)$.*

Preuve. On montre 3.23 pour $Y^n(\cdot)$ remplacé par $\xi^h(\cdot)$, pour une constante K :

$$\begin{aligned} E\left|\xi^h(t)-x\right|^2 &= E\left|\sum_{t_n^h\leq t}\delta\xi_n^h - E_n^h\delta\xi_n^h + E_n^h\delta\xi_n^h\right|^2 \\ &\leq KE\left[\sum_{t_n^h\leq t}(\Delta t_n^h)\right]^2 + KE\sum_{t_n^h\leq t}(\Delta t_n^h), \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ce qui donne 3.23, comme $M(\infty)$ est compact alors $\{m^h(\cdot)\}$ est toujours tendu ■

Convergence faible de $\{\xi^h(\cdot), \mathbf{m}^h(\cdot), \tau_h\}$

Par le critère de tension démontrée dans le théorème **3.3.5**, chaque sous-suite de $\{\xi^h(\cdot)\}$ a elle-même une sous-suite qui converge faiblement. Le théorème suivant montre que les limites sont en fait des processus de diffusion contrôlés. Ce fait joue un rôle important dans les preuves que $V^h(x) \to V(x)$. Soit $\phi_j(\cdot)$ des fonctions continues et bornées sur $U\times[0,\infty)$, et soit $(m,\phi)_t=\int_0^t\int\phi(s,c)m(dc\, ds)$. Définissons $\mathcal{L}^c$, le générateur différentiel de 3.1 avec $u=c$, pour tout fonction $f(\cdot)$ à valeurs réelles continues et à support compact et des dérivées secondes partielles continues :

$$\mathcal{L}^c f(x) = f'(x)b(x,c) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{x_i x_j}(x) a_{ij}(x).$$

La technique utilisée dans le théorème suivant est largement utilisée pour caractériser les limites des suites faiblement convergentes comme solutions à un probléme de martingale approprié.

Théorème 3.3.6 *Supposons que 3.4 et* (**H1**) *sont vérifions et soit* τ_h *des* $\mathcal{F}_t^h$ *temps-d'arrêt. Soit* $m^h(\cdot)$ *la représentation de contrôle relaxé admissible de la suite interpolée (intervalles* Δt_n^h*) des contrôles admissibles ordinaires* $\{u_n^h\}$*. Supposons que* $\{\xi^h(\cdot), m^h(\cdot), \tau_h\}$ *converge faiblement vers* $\{x(\cdot), m(\cdot), \tau\}$*. Alors il existe une filtration* $\mathcal{F}_t$*, et un processus de wiener* $w(\cdot)$*, tel que* τ *est un* $\mathcal{F}_t-$*temps -d'arrêt,* $m(\cdot)$ *est admissible (i.e ,*$(m(\cdot), w(\cdot))$ *est une paire admissible), et*

$$dx = \int b(x,\alpha) m_t(d\alpha) dt + \sigma(x) dw. \tag{3.25}$$

Preuve. Soient p, q, t_i $, i \leq q$ $, t$ et s arbitaires, mais avec $t_i \leq t \leq t+s$, tel que $P\{\tau = t\} = 0$. On cherche a montré que pour tout fonction réelle régulière arbitaires $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ de support compact ,

$$\begin{array}{l} Eh(x(t_i), \tau I_{\{\tau \leq t\}}, (\phi_j, m)_{t_i}, i \leq q, j \leq p). \\ \left[f(x(t+s)) - f(x(t)) - \int_t^{t+s} \int \mathcal{L}^c f(x(v)) m(dc\ dv) \right] = 0. \end{array} \tag{3.26}$$

Supposons que 3.26 soit vérifié. ■

Soit $\mathcal{F}_t$ la $\sigma-$algèbre minimale, qui mesure $\{x(s), m_s(\cdot), \tau I_{\{\tau \leq s\}}, s \leq t\}$. Alors le caractère arbitaire de $h(\cdot), t_i$ $, \phi_j(\cdot)$, et 3.26 implique que :

$$E_{\mathcal{F}_t}\left[f(x(t+s)) - f(x(t)) - \int_t^{t+s} \int \mathcal{L}^c f(x(v)) m(dc\ dv) \right] = 0.$$

donc

$$f(x(t)) - \int_0^t \int \mathcal{L}^c f(x(s)) m_s(dc)ds \equiv M_f(t).$$

est une $\mathcal{F}_t-$martingale pour tout $f(\cdot)$ de type choisi. Mais ceci implique qu'il existe un processus $w(\cdot)$, $\mathcal{F}_t-$Wiener tel que 3.25 soit vérifiée, alors Il suffit donc d'établir 3.26. Nous utilisons maintenant la représentation de Skorokhod (Théorème **3.3.3**) pour que toutes les convergences faibles deviennent avec probabilité un **p.s** convergences dans les topologies de $D^r[0,\infty)$, $M(\infty)$ ou $\overline{R}$, selon le cas.

Notons que si $y_n(\cdot) \rightarrow y(\cdot)$ dans la topologie de Skorokhod, et $y(\cdot)$ est continue, alors la convergence est uniforme sur des intervalles de temps bornés.

Nous prouvons maintenant 3.26 dans le cas scalaire uniquement, pour des raisons de commodité de notation. Par 3.4 :

$$E_n^h f(\xi_{n+1}^h) - f(\xi_n^h) = \int f_x(\xi_n^h) b(\xi_n^h, c) m_n^h(dc) \Delta t_n^h + \frac{1}{2} f_{xx}(\xi_n^h) \sigma^2(\xi_n^h) \Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h).$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} E_t^h f(\xi^h(t+s)) - f(\xi^h(t)) &= E_t^h \int_t^{t+s} \int f_x(\xi^h(v)) b(\xi^h(v), c) m^h(dc\ dv) \\ &+ \tfrac{1}{2} E_t^h \int_t^{t+s} f_{xx}(\xi^h(v)) \sigma^2(\xi^h(v)) dv + \delta^h(t, t+s) \\ &= E_t^h \int_t^{t+s} \mathcal{L}^c f(\xi^h(v)) m^h(dc\ dv) + \delta^h(t, t+s), \end{aligned} \tag{3.27}$$

Où δ^h est borné et tend vers zéro lorsque :$h \rightarrow 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} & Eh(\xi^h(t_i), \tau_h I_{\{\tau_h \leq t\}}, (\phi_j, m^h)_{t_i}, i \leq q, j \leq p) \quad . \\ & \left[f(\xi^h(t+s) - f(\xi^h(t)) - \int_t^{t+s} \int \mathcal{L}^c f(\xi^h(v)) m^h(dc\ dv) \right] \xrightarrow{h} 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Enfin,3.26 découle de 3.28 et de la convergence faible.

Représentation de $\{\xi_n^h\}$ sous terme d'une martingale

Nous obtenons maintenant une représentation pour $\{\xi_n^h\}$ qui sera très utile pour obtenir notre résultat.

Soit $\{u_n^h\}$ la suite de contrôle et définissant $\beta_n^h = (\xi_{n+1}^h - \xi_n^h) - E_n^h(\xi_{n+1}^h - \xi_n^h)$, on a :

$$\xi_{n+1}^h = \xi_n^h + b(\xi_n^h, u_n^h)\Delta t_n^h + \beta_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h), \tag{3.29}$$

où $cov_n^h \beta_n^h = a(\xi_n^h)\Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h)$, d'après 3.4 .

Nous représentation maintenant $\{\beta_n^h\}$ en termes de "bruit blanc". Pour comprendre le schéma, supposons d'abord que $\sigma(x)$ ait un inverse uniformement borné $\sigma^{-1}(x)$, et définissons $\delta W_n^h = \sigma^{-1}(\xi_n^h)\ \beta_n^h$. Alors ($cov_n^h$ désigne la covariance conditionnelle, analogue à E_n^h) :

$$\begin{aligned} cov_n^h \delta W_n^h \quad &= I\Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h), \qquad \left|\delta W_n^h\right| \xrightarrow{h} 0, \\ E_n^h \beta_n^h (\delta W_n^h)' \quad &= \delta(\xi_n^h)\Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Définissons $W^h(\cdot)$ par :

$$W^h(t) = \sum_{t_{n+1}^h \leq t} \delta W_{n-1}^h \quad , W_n^h = \sum_0^{n-1} \delta W_i^h$$

Nous pouvons maintenant écrire 3.29 en termes d'une suite de "bruit blanc" $\{\delta W_n^h\}$.

Pour simplifier la notation, nous traiterons que le cas où $\sigma(\cdot)$ est une matrice carrée $(r \times r)$, et non le cas général. Soit $a(\xi_n^h) = P_n^h (D_n^h)^2 P_n^h\prime$, où D_n^h est la diagonale $\{d_{n_1}^h, ..., d_{n_r}^h\}$ et P_n^h est une matrice orthogonale, toutes deux aléatoires. Pour $\alpha \in (0,1)$, on définit :

$$I_n^h = diag\left\{ d_{n_1}^h I_{\left\{d_{n_1}^h > h^\alpha\right\}}, ...\right\}.$$

Soit $\Psi(\cdot)$ un processus de Wiener satandard à valeurs R^r indépendant de $\{\xi_n^h, u_n^h\}$, et posons $\delta\Psi_n^h = \Psi(t_{n+1}^h) - \Psi(t_n^h)$. Étendre la définition de E_n^h et cov_n^h afin qu'ils incluent le conditionnement sur $\delta\Psi_i^h$,$i \leq n$. Définissons (D^{-1} désigne le pseudo-inverse) :

$$\delta W_n^h = (D_n^h)^{-1}\mathbb{I}_n^h(P_n^h)'\beta_n^h + (I - \mathbb{I}_n^h)\delta\Psi_n^h. \tag{3.31}$$

Ensuite, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} cov_n^h \delta W_n^h &= I\Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h), \\ E_n^h \beta_n^h (\delta W_n^h)' &= \sigma(\xi_n^h)\Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h), \\ \beta_n^h &= \sigma(\xi_n^h)\delta W_n^h + \varepsilon_n^h\ , \end{aligned} \tag{3.32}$$

où l'interpolation continue $\varepsilon^h(\cdot)$ de $\{\varepsilon_n^h\}$ converge faiblement vers le processus "zéro". En effet $E_n^h\varepsilon_n^h = 0$ et $cov_n^h\varepsilon_n^h = O(h^\alpha)\Delta t_n^h$, et $\sup_{n,\omega}\varepsilon_n^h \to 0$ si $h \to 0$. On écrit 3.29 comme :

$$\xi_{n+1}^h = \xi_n^h + b(\xi_n^h, u_n^h)\Delta t_n^h + \sigma(\xi_n^h)\delta W_n^h + \varepsilon_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h). \tag{3.33}$$

Soit $m^h(\cdot)$ la représentation de contrôle relaxé de l'interpolation continue des paramètres de $\{u_n^h\}$, avec l'interval d'interpolation $\{\Delta t_n^h\}$. Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.3.7 *Supposons que 3.4 et* **(H1)** *sont vérifions . Alors* $\{\xi^h(\cdot), W^h(\cdot), \varepsilon^h(\cdot), m^h(\cdot)\}$ *sont tendus dans* $D^{3r}[0,\infty) \times M(\infty)$*. Si la limite d'une sous-suite convergente est notée par* $(x(\cdot), w(\cdot), \varepsilon(\cdot), m(\cdot))$ *alors* $\varepsilon(\cdot) \equiv 0$ *et le reste vérifié 3.17, où* $m(\cdot)$ *est un contrôle relaxé admissible (la filtration* $\mathcal{F}_t$ *est celle déterminée par la processus limites).*

Remarque sur la preuve. La preuve est très similaire à celle du théorème 3.3.6.$\{W^h(\cdot)\}$ est tendu dans $D^r[0,\infty)$. Le fai que $\varepsilon^h(\cdot) \implies$ processus nul découle de ses propriétés locales. Ensuite,dans les arguments de $h(\cdot)$ du théorème 3.3.6. Remplacer $\xi^h(u)$ par $(\xi^h(u), W^h(u))$ chaque fois qu'il apparaît. Soit $f(\cdot)$ dépendant de ξ et w et notons que (notation de cas vectoriel) :

$$\begin{aligned} E_n^h f(\xi_{n+1}^h, W_{n+1}^h) - f(\xi_n^h, W_n^h) &= f'_x(\xi_n^h, W_n^h) b(\xi_n^h, u_n^h)\Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h) \\ &+ \tfrac{1}{2}\Delta t_n^h [\textstyle\sum_{i,j} f_{x_i x_j}(\xi_n^h, W_n^h) a_{ij}(\xi_n^h) \\ &+ \textstyle\sum_i f_{w_i w_i}(\xi_n^h, W_n^h) + \sum_{i,j} f_{w_i w_j}(\xi_n^h, W_n^h)\sigma_{ij}(\xi_n^h)]. \end{aligned}$$

Substituer ensuite dans la forme vectorielle de 3.27et 3.28 et prendre les limites faibles. En prenant la limite, $\mathcal{L}^c$ sera remplacé par l'opérateur du couple $(x(\cdot), w(\cdot))$ satisfaisant 3.17 sous $m(\cdot)$.

3.4 Le problème actulisé déterministe

Afin d'illustrer l'idée de cette méthode d'approximation, nous traitons maintenant le cas déterministe actulisé où le système et le coût sont :

$$\dot{x} = \int b(x,c) m_t(dc), \tag{3.34}$$

$$V(x,m) = \int_0^\infty c^{-\beta t} k(x(t), c) m_t(dc) dt, \tag{3.35}$$

et $b(\cdot)$ et $k(\cdot)$ sont bornés et continus, avec $b(\cdot, c)$ Lipschitz continus en x, uniformement en c. Soit $\Delta t^h(x,c)$ continu et satisfasse $k_2 h \geq \Delta t^h(x,c), k_2 \geq 0$, et $\Delta t^h(x,c) \xrightarrow{h} 0$. L'équation de la programmation dynamique pour le problème discrèt approximé est 3.36 :

$$V^h(x) = \min_{c \in U} \left[e^{-\beta \Delta t^h(x,c)} V^h(x + b(x,c)\Delta t^h(x,c)) + \Delta t^h(x,c) k(x,c) \right]. \tag{3.36}$$

Supposons maintenant que nous approchons $V^h(\cdot)$ par une fonction linéaire par morceaux. Avec l'utilisation de la valeur de contrôle c au noeude x, nous utilisons $z(x,c)$ pour désigner la point canonique $x + b(x,c)\Delta t^h(x,c)$ accessible depuis x dans le temps $\Delta t^h(x,c)$. Par exemple, z^1 ou z^2, où $c = c_1$,ou c_2, respectivement. Soit $Y^h(x,c)$ les angles du triangle dans lequel $z(x,c)$ se trouve, par exemple, $Y^h(x,c_2)=\{x,y_1,y_2\}$. Pour $y\in Y^h(x,c)$, soit $p^h(x,y/c)$ désignent les poids qui donnent $z(x,c)$ (par exemple, les poids qui donnent z^2 comme une combinaison convexe de (x,y_1,y_2)). Clairement $p^h(x,y/c)\geq 0$ et $\sum_{y\in Y^h(x,c)} p^h(x,y/c)=1$. Soit $\{\xi_n^h\}$ la chaîne de Markov contrôlée dont la fonction de transition est $p^h(x,y/c), y\in Y^h(x,c)$. Avec l'approximation "linéaire par morceaux"de $V^h(\cdot)$ utilisée, nous pouvons réécrire 3.36 comme (pour x un sommet d'un triangle) :

$$V^h(x)=\min_{c\in U}\left[e^{-\beta\Delta t^h(x,c)}\sum_{y\in Y^h(x,c)} p^h(x,y/c)V^h(y)+\Delta t^h(x,c)k(x,c)\right]. \tag{3.37}$$

Il est claire que 3.37 représente une approximation par éléments finis. En calculant les"statistiqus"locales de $\{\xi_n^h\}$, nous avons (où $E_{n,c}^h$ dénote l'espérance donnée $\xi_i^h,u_i^h,i\leq n$,et $u_n^h=c$) :

$$\begin{aligned} &E_{n,c}^h\xi_{n+1}^h-\xi_n^h=b(\xi_n^h,c)\Delta t^h(x,c)=O(h), \\ &cov_{n,c}^h(\xi_{n+1}^h-\xi_n^h)=O(h^2). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Soit $u^h(x)$ minimiser dans 3.37, et soit $u_n^h=u^h(\xi_n^h),\Delta t_n^h=\Delta t^h(\xi_n^h,u_n^h)$. Notons $m^h(\cdot)$ la représentation de contrôle relaxé de l'interpolation continue des paramètres(intervalles Δt_n^h de $\{u_n^h\}$. Alors $\{\xi^h(\cdot),m^h(\cdot)\}$ est serré, et si $(x(\cdot),\tilde{m}(\cdot))$ est la limite de toute sous-suite faiblement convergente, alors :

$$\dot{x}=\int b(x,c)\tilde{m}_t(dc).$$

Aussi, si $\xi_0^h=x$, alors pour cette sous-suite(indexée par h_n) :

$$V^{h_n}(x)\to\int_0^\infty e^{-\beta t}\int k(x(t),c)\tilde{m}_t(dc)dt=V(x,\tilde{m}).$$

L'interpolation probabiliste n'est qu'un dispositif utilisé pour étudier l'approximation par éléments finis de ce problème originellement déterministe.

Clairement $V(x,\tilde{m}) \geq V(x) = \inf_{m \text{ adm}} V(x,m)$.

Ensuite, nous voulons montrer que $V(x,\tilde{m}) = V(x)$. Soit $\bar{m}(\cdot)$ le contrôle relaxé optimal admissible (déterministe) pour 3.34 ,3.35. Pour tout $\delta > 0$ et $T_\delta < \infty$, où $T_\delta \to \infty$ comme $\delta \to 0$, il existe un $\Delta > 0$ et un contrôle ordinaire(déterministe) admissible $\bar{u}^\delta(\cdot)$, qui est constant sur les intervalles $[i\Delta, i\Delta + \Delta), i = 0, 1, \ldots$,et est tel que pour $\bar{x}^\delta(\cdot)$ et $\bar{x}(\cdot)$ correspondant respectivement à $\bar{u}^\delta(\cdot)$ et $\bar{m}(\cdot)$,on a :

$$\sup_{t \leq T_\delta} \left|\bar{x}^\delta(t) - \bar{x}(t)\right| < \delta, \qquad (\bar{x}^\delta(\cdot), \bar{m}^\delta(\cdot)) \xrightarrow{\delta} (\bar{x}(\cdot), \bar{m}(\cdot)).$$

Nous notons $\bar{m}^\delta(\cdot)$ la représentation de contrôle relaxé de $\bar{u}^\delta(\cdot)$.

Ainsi, pour obtenir $V(x,\tilde{m}) = V(x)$, il suffit de montrer que :

$V(x,\tilde{m}) \leq V(x,\bar{m}^\delta) = V(x,\bar{u}^\delta)$, pour chaque $\delta > 0$. Nous appliquons maintenant $\bar{u}^\delta(\cdot)$ à $\{\xi_n^h\}$, comme suit. Définissez une suite de contrôle $\{\bar{u}_n^h\}$ pour la chaîne de Markov contrôlée $\{\xi_n^h\}$ de la manière suivante. Soit h suffisamment petit pour que $\Delta \gg \inf_{x,c} \Delta t^h(x,c)$.

Définir une suite $\{\bar{u}_n^h\}$ récursivement par $\bar{u}_n^h = \bar{u}^\delta(0)$ pour n tel que $t_n^h < \Delta$.

Utiliser $\bar{u}_n^h = \bar{u}^\delta(i\Delta)$ pour tout n tel que $t_n^h \in [i\Delta, i\Delta + \Delta)$.

Soit $\{\bar{\xi}_n^h\}$ la chaîne de Markov (au lieu de $\{\xi_n^h\}$), d'interpolation $\bar{\xi}^h(\cdot)$, et soit $\bar{u}^{\delta,h}(\cdot)$l'interpolation continue des paramètres(intervalles Δt_n^h) de $\{\bar{u}_n^h\}$.

Alors $\{\bar{\xi}^h(\cdot),\ \bar{u}^{\delta,h}(\cdot)\} \implies (\bar{x}^\delta(\cdot), \bar{u}^\delta(\cdot))$. Aussi $V^h(x,,\bar{u}^{\delta,h}) \to V(x,,\bar{u}^\delta)$.

Puisque, par optimalité de $m^h(\cdot), V^h(x,,\bar{u}^{\delta,h}) \geq V^h(x,m^h) = V^h(x) \to V(x,\tilde{m})$, nous concluons que $V^h(x) \to V(x)$, comme souhaité.

Une méthode par éléments finis pour le problème déterministe. Le schéma de ces articles est essentiellement celui donné ci-dessus, et l'approche probabiliste donne une preuve de convergence sensiblement plus simple. Pour le problème stochastique, une forme de méthode des éléments finis.

3.5 Convergence de la méthode numérique du problème de coût actualisé

Dans cette section, ont montre la convergence $V^h(x) \to V(x)$ pour le système 3.1 ou (sous la forme de contrôle relaxé) 3.17 et la fonction de coût 3.2, avec une chaîne d'approximation satisfaisant 3.4. L'arrêt ou l'ensemble de frontières G est utilisé car, pour les méthode numérique pratique, l'espace d'etat doit être borné. L'existence de la frontière pose certains problèmes pour la convergence et ceux-ci sont discutés ci-dessous, ainsi que les conditions **(D1)**,**(D2)**, qui garantissent la convergence.

L'équation de la programmation dynamique pour $V^h(x)$ est :

$$\begin{aligned} V^h(x) = & \min_{c \in U} \left[e^{-\beta \Delta t(x,c)} \sum_y p^h(x, y/c) V^h(y) + \Delta t^h(x,c) k(x,c) \right], \quad x \in G_h, \\ & = g(x), \qquad x \notin G_h. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Soit $\bar{u}^h(\cdot)$ le contrôle qui minimise 3.39 et définissons $\bar{u}_n^h = \bar{u}^h(\xi_n^h)$. Soit m_n^h et $m^h(\cdot)$ les représentations du contrôle relaxé :c'est-à-dire que $m_n^h(dc)$ est la mesure concentrée au point $\bar{u}^h(\xi_n^h)$ et $m_t^h = m_n^h$ sur $[t_n^h, t_{n+1}^h)$. Soit N_h et τ_h les premiers instants de sortie de $\{\xi_n^h\}$ et $\xi^h(\cdot)$, respectivement de G_h.

Discussion de $\tau = \lim \tau_h$ Soit $(x(\cdot), m(\cdot), w(\cdot), \tau)$ la limite faible d'une sous-suite convergente,également indexée par h. Alors $(x(\cdot), m(\cdot), w(\cdot))$ satisfait 3.17, où $(m(\cdot), w(\cdot))$ est un couple admissible, et $\tau \mathbb{I}_{\{\tau \leq \cdot\}}$ est non anticipatif par rapport à $w(\cdot)$. Nous avons toujours :

$$E_x^{m^h} \int_0^{\tau_h} \int e^{-\beta t} k(\xi^h(t), c) m_t^h(dc) dt \to E_x^m \int_0^{\tau} \int e^{-\beta t} k(x(t), c) m_t(dc) dt, \tag{3.40}$$

$$E_x^{m^h} e^{-\beta \tau_h} g(\xi^h(\tau_h)) \to E_x^m e^{-\beta \tau} g(x(\tau)). \tag{3.41}$$

Notez que :$V(x,m) \geq V(x)$. On utilise les deux conditions suivantes concernant le bord

∂G :

(D1) L'ensemble compact G est l'adhérence de son intérieur et ∂G est morceaux cntinuellement différentiable.

(D2) $\hat{\tau}(\cdot)$est continue(dans la topologie décrite au dernier paragraphe) **p.s** par rapport aux mesures induites par les processus limites $x(\cdot)$, sous tout contrôles admissibles.

Le théorème de convergence

Théorème 3.5.1 *Supposons que 3.4,*(**H1**),(**H2**)*,**(D1)**,**(D2)**, sont vérifions.*
Alors $V^h(x) \to V(x)$.

Preuve. Dans la preuve, des entités telles que $(\xi^h(\cdot), W^h(\cdot), m^h(\cdot), \tau^h)$ ou $(x(\cdot), w(\cdot), m(\cdot), \tau)$ qui sont regroupés sont liés via les équations dynamiques, et les contrôles seront admissibles.

Soit h un indice d'une sous-suite faiblement convergente avec :

$\{\xi^h(\cdot), W^h(\cdot), m^h(\cdot), \tau_h\} \implies (x(\cdot), w(\cdot), m(\cdot), \tau)$, où $m^h(\cdot)$ est optimal pour $\xi^h(\cdot)$. Alors

$$V^h(x) = V^h\left(x, m^h\right) \to V(x, m)$$

Ainsi, nous n'avons qu'à prouver que pour cette sous-suite faiblement convergente :

$$\overline{\lim_n} V^h(x) \leq V(x). \tag{3.42}$$

Soit $\bar{m}(\cdot)$ un admissible par rapport à $w(\cdot)$ et tel que $\bar{x}(\cdot)$ et $\bar{\tau}$ sont la solution et le temps d'arrêt associés et $V(x, \bar{m}) = V(x)$. Nous devons approximer $\bar{m}(\cdot)$ de manière à pouvoir l'appliquer à $\{\xi_n^h\}$. Notons d'abord le fait suivant. ■

Soit $\tilde{m}^\delta(\cdot)$ un contrôle admissible par rapport à $w(\cdot)$, et soit $\tilde{x}^\delta(\cdot)$ et $\tilde{\tau}^\delta$ la solution et le temps d'arrêt associés. Alors si $(\tilde{m}^\delta(\cdot), w(\cdot)) \implies (\tilde{m}(\cdot), w(\cdot))$.

On ont aussi, $(\tilde{m}^{\delta}(\cdot), w(\cdot), \tilde{x}^{\delta}(\cdot), \tilde{\tau}^{\delta}) \implies (\tilde{m}(\cdot), w(\cdot), \tilde{x}(\cdot), \tilde{\tau})$, où 3.17 vaut pour la limite, et $\tilde{\tau}$ est le temps d'arrêt associé. Aussi $V(x, \tilde{m}^{\delta}) \to V(x, \tilde{m})$. Nous utiliserons ce fait pour aider à approximer la politique $\bar{m}(\cdot)$ afin qu'elle puisse être appliquée à $\xi^h(\cdot)$.Ensuite, étant donné $\rho > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on peut approximer $\bar{m}(\cdot)$ par un contrôle admissible ordinaire $\bar{u}^{\rho}(\cdot)$ avec les propriétés suivantes.

Propriété 3.5.1 **(a)** *$\bar{u}^{\rho}(\cdot)$ ne prend que un nombre fini de valeurs (notées U_p).*

(b) *il est constant sur les intervalles $[i\delta, i\delta + \delta), i = 0, 1, ...$*

(c) *en notant $\bar{m}^{\rho}(\cdot)$ la représenation de contrôle relaxé de $\bar{u}^{\rho}(\cdot)$ on a:*

$$(\bar{m}^{\rho}(\cdot), \bar{x}^{\rho}(\cdot)w(\cdot), \bar{\tau}^{\rho}) \implies (\bar{m}(\cdot), \bar{x}(\cdot)w(\cdot), \bar{\tau}) \quad comme \ \rho \to 0.$$

où $\bar{x}^{\rho}(\cdot)$ et $\bar{\tau}^{\rho}$ correspond à $(\bar{m}^{\delta}(\cdot), w(\cdot))$.

(d) *$V(x, \bar{m}^{\rho}) \leq V(x) + \rho$. Notons que, sous **(D2)** et la convergence faible, les temps de sortie de $\bar{x}^{\rho}(\cdot)$ sur ∂G convergent vers ceux de $\bar{x}(\cdot)$ lorsque $\rho \to 0$.*

Nous nous préparons maintenant à choisir un contrôle plus approprié avec les propriétés (**a**) (**d**), en remplaçant éventuellement ρ par 3ρ dans (**d**). Pour chaque $\rho > 0$ et δ du dernière paragraphe, considérons un problème d'optimisation pour 3.17 ,3.2, mais où les contrôles doivent être constants sur les intervalles $[p\delta, p\delta + \delta), p = 0, 1, ...$,et prennent des valeurs sur U_{ρ}. C'est-à-dire qu'une seul valeur en U est utilisée sur chaque $[p\delta, p\delta + \delta)$. L'optimisation n'est pas sur les contrôles relaxés. Cela correspond au contrôle du processus de Markov à paramètres discrets obtenu en échantillonnant $x(.)$ aux instants $p\delta, p = 0, 1, ...$,(Le contrôle optimal pour ce problème "échantillonné" est un contrôle de feedback ordinaire). Soit $\hat{u}^{\rho}(\cdot)$ désigne le contrôle optimal et $\hat{m}^{\rho}(\cdot)$ sa représenation de contrôle relâxé, et soit $\hat{x}^{\rho}(\cdot)$ le processus de solution associé. Puisque $\hat{m}^{\rho}(\cdot)$ est optimal dans la classe de contrôle choisie, on doit avoir

$$V(x, \hat{m}^{\rho}) \leq V(x) + \rho. \tag{3.43}$$

Nous approximons ensuite $\hat{u}^\rho(\cdot)$ par une fonction convenable de $w(\cdot)$.

Notons que pour chaque entier p donné, il existe une fonction mesurable $F_p^\rho(\cdot)$ telle que $\hat{u}^\rho(t) = F_p^\rho(w(s), s \leq p\delta)$ sur $[p\delta, p\delta + \delta)$. Nous approximons ensuite $F_p^\rho(\cdot)$ par une fonction qui ne dépend que des échantillons de $w(\cdot)$ à un nombre fini d'instants. Soit $\theta < \delta$ tel que δ/θ soit un entier. Il existe des fonctions mesurables à valeurs U_ρ $F_p^{\rho,\theta}(\cdot)$ (de $w(i\theta), i\theta \leq p\delta$) telles que pour chaque δ, p,

$$F_p^{\rho,\theta}(w(i\theta), i\theta \leq p\delta) \equiv u_p^{\rho,\theta} \to \hat{u}^\rho(p\delta)$$

P.s lorsque $\theta \to 0$.Soit $m^{\rho,\theta}(\cdot)$ dénotant la représentation de contrôle relaxé du contrôle ordinaire $u^{\rho,\theta}(\cdot)$, qui prend des valeurs sur $[p\delta, p\delta + \delta)$, et soit $x^{\rho\theta}(\cdot)$ et dénotons la solution associée et le temps d'arrêt. Alors, pour θ assez petit, on a

$$V(x, m^{\rho,\theta}) \leq V(x, \hat{m}^\rho) + \rho. \tag{3.44}$$

En fait, nous pouvons sélectionner $F_p^{\rho,\theta}(\cdot)$ de telle sorte qu'il existe un nombre fini d'hyper-rectangles disjoints (ouverts, fermés ou partiellement ouverts) qui couvrent la rang de ses arguments de sorte que $F_p^{\rho,\theta}(\cdot)$ soit constant sur chaque hyper-rectangle. Supposons cette forme, et notons que la probabilité que les valeurs de la variable aléatoire $\{w(i\theta), i\theta \leq p\delta\}$ est nulle sur tout borné ou tout hyper-rectangle. Nous adaptons maintenant $F_p^{\rho,\theta}(\cdot)$ de sorte qu'il puisse être appliqué à $\{\xi_n^h\}$. Pour tout n tel que $p\delta \leq t_n^h < p\delta + \delta$, utilisez le contrôle $F_p^{\rho,\theta}(W^h(i\theta)\ ,i\theta \leq p\delta) \equiv \tilde{u}_n^h$.

Soit $\tilde{m}^h(\cdot)$ la représentation de contrôle relaxé de l'interpolation continue des paramètres de $\{\tilde{u}_n^h\}$ (intervalles d'interpolation $\Delta t_n^h = \Delta t^h(\xi_n^h, \tilde{u}_n^h)$). Alors :

$$\begin{aligned}&(\xi^h(\cdot), \tilde{m}^h(\cdot), W^h(\cdot), \tau_h, F_p^{\rho,\theta}(W^h(i\theta), i\theta \leq p\delta), p = 0, 1...)\\ &\Longrightarrow\ (x^{\rho\theta}(\cdot), m^{\rho,\theta}(\cdot), w(\cdot), \tau^{\rho\theta}, F_p^{\rho,\theta}(w(i\theta), i\theta \leq p\delta), p = 0, 1...).\end{aligned}$$

Par l'optimalité de $V^h(x)$ et la convergence faible ci-dessus,

$$V^h(x) \leq V(x, \tilde{m}^h) \to V(x, m^{\rho,\theta}).$$

Les inégalités ci-dessus et la convergence donnent $\overline{\lim}_h V^h(x) \leq V(x) + 2\rho$ pour la sous-suite choisie. Puisque ρ est arbitraire et toute sous-suite de $\{\xi^h(\cdot), W^h(\cdot), m^h(\cdot), \tau_h\}$ a une sous-suite qui convergence faiblement, 3.42 est vérifiée.

3.6 Variance et dérive contrôlées

Si $\sigma(x)$ est remplacé par le $\sigma(x,c)$ contrôlé dans 3.1 ou 3.17 , alors l'opérateur de la diffusion contrôlée est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^m f(x) &= \int f_x'(x) b(x,c) m_t(dc) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int f_{x_i x_j}(x) a_{ij}(x,c) m_t(dc) \\ &= \int \mathcal{L}^c f(x) m_t(dc). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Supposons pour l'instant que $U = \{c_1, c_2, ..., c_N\}$, un ensemble fini de points, alors il existe $p_i(t) \geq 0, \sum_i p_i(t) = 1$,tel que $\int a(x,c)m_t(dc) = \sum_1^N a(x,c_i)p_i(t)$. Nous pouvons alors représenter un processus $x(\cdot)$ avec l'opérateur 3.45 comme suit. Soit $(w_1(\cdot), ..., w_N(\cdot))$ un processus de Wiener à valeurs vectorielles standards mutuellement indépendants et pour tout $B \in U$ On défine

$$M(B \times [0,t]) = \sum_i \int_0^t (p_i(s))^{1/2} dw_i(s) I_{\{c_i \in B\}} \equiv M(B,t).$$

Alors, le processus $x(\cdot)$ défini par :

$$dx = \sum_{i=1}^N b(x,c_i)p_i(t)dt + \int \sigma(x,c) \; M \; (dc \; dt) \tag{3.46}$$

possède l'opérateur différentiel 3.45. Le processus $M(\cdot)$ peut être vu comme une martingale à valeur de mesure, et de tels processus fournissent une base très utile pour la représentation et l'étude des processus avec des opérateurs 3.45. Nous discutons maintenant 3.46 dans un cadre un peu plus général. Pour plus de commodité dans la notation, nous écrivons $M(B \times [0,t]) = M(B,t)$.

Mesures martingales

Soit $\mathcal{F}_t$ une filtration sur un espace de probabilités, et soit $\mathcal{U}$ les ensembles boréliens de U. Soit $M(\cdot)$ une fonction aléatoire à valeurs réelles sur $\Omega \times [0,\infty) \times \mathcal{U}$. On dit que $M(\cdot)$ est un $\mathcal{F}_t-$martingale à valeur de mesure ou une mesure de $\mathcal{F}_t-$martingale avec des valeurs $M(B,t)$ si $M(B,\cdot)$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale pour chaque $B \in \mathcal{U}$ et pour chaque t : $\sup\limits_{B\in\mathcal{U}} EM^2(B,t) < \infty, M(A \cup B, t) = M(A,t) + M(B,t)$ p.s pour tous A,$B \in u$ disjoints et $EM^2(B_n,t) \to 0$ si $B_n \to \varnothing$. Sous **(D3)** ci-dessous, $\sup\limits_{B\in\mathcal{U}} EM^2(B,t) \leq EM^2(U,t)$. $M(\cdot)$ est dit continu (respectivement carré intégrable) si chaque $M(B,\cdot)$ l'est . On dit que $M(\cdot)$ est orthogonale si $M(A,\cdot)$ et $M(B,\cdot)$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale dès que $A \cap B = \varnothing$. Si $M(\cdot)$ et $N(\cdot)$ sont des mesures de $\mathcal{F}_t-$martingale et $M(A,\cdot)N(B,\cdot)$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale pour tout Borel A, B, alors $M(\cdot)$ et $N(\cdot)$ sont dites fortement orthogonal.

Soit $M(\cdot) = (M_1(\cdot), M_2(\cdot), ..., M_d(\cdot))'$, une martingale à valeurs vectorielles.Nous avons donc supposons ensuite

(D3) $M(\cdot) = (M_1(\cdot), M_2(\cdot), ..., M_d(\cdot))'$ est de carré intégrable et continu, chaque composante est orthogonale et les paires sont fortement orthogonales.

D'après **(D3),** il existe des processus aléatoires à valeurs de mesure (les valeurs sont des mesures sur les sous-ensembles boréliens de $U \times [0,\infty)$) $m_i(\cdot)$ tels que les processus de variation quadratique satisfont, pour chaque t et $B \in \mathcal{U}$,

$$\langle M_i(B,\cdot), M_j(A,\cdot)\rangle(t) = \delta_{ij} m_i(A \cap B, t)$$

où l'on note $m_i(A,t)$ pour $m_i(A\times[0,t])$, la mesure de $A\times[0,t]$. Nous supposons désormais que (ce sera le cas dans notre application, de toute façon)

(D4) Les m_i , ne dépendent pas de i (nous l'appelons $m(\cdot)$) et $m(U,t)=t$, pour tout t.

Sous **(D3)** et **(D4),** pour chaque Borel B, on a un processus "dérivé" prévisible $m_.(B)$ tel que $m_t(\cdot)$ est une mesure aléatoire sur $\mathcal{U}$ et $m(dc\ dt)=m_t(dc)dt$.

Intégrales stochastiques

L'intégrale stochastique par rapport à une mesure de martingale à valeurs réelles $M(\cdot)$ est définie essentiellement comme pour les martingales à valeurs réelles. Soit $\mathcal{P}$ la $\sigma-$algèbre des ensembles prévisibles dans $\Omega\times[0,\infty)$, et $\mathcal{P}\times\mathcal{U}$ la $\sigma-$algèbre sur les ensembles produits. Pour $f(\cdot)$ étant $\mathcal{P}\times\mathcal{U}$ mesurable, définir

$$\begin{aligned} \|f\|_{T,m} &= \left[E\int\int_0^T f^2(c,t)m(dc\ dt)\right]^{\frac{1}{2}} \\ L_m^2 &= \{f : \|f\|_{T,m}<\infty\} \end{aligned} \qquad \text{pour tout } T<\infty.$$

Pour un $f(\cdot)\in L_m^2$ borné prenant des valeurs constantes $f_i(c)$ sur les intervalles $[0,t_1]$, $(t_i,t_{i+1}]$, $i>0$, où $t_{i+1}>t_i$, on définit l'intégrale stochastique

$$\psi(t)=\int\int_0^t f(c,s)M(dc)ds\equiv\sum_i\int f_i(c)\left[M(dc,t_{i+1}\wedge t)-M(dc,t_i\wedge t)\right].$$

Notons que $E\left|\psi(T)\right|^2=\|f\|_m^2$

Le problème des martingales

Soient $b(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ borné et continu et définissons $a=\sigma\sigma'$. Soit $x(\cdot)$ un processus continu et $m(\cdot)$ une mesure vérifiant **(D4)** et tels que pour tout fonction bornée et régulier $f(\cdot)$,

$$f(x(t))-f(x(0))-\int\int_0^t \mathcal{L}^c f(x)m_s(dc)ds=Q_f(t).$$

est une $\mathcal{F}_t-$martingale, où $\mathcal{F}_t-$mesure au moins $\{x(s), m_s(\cdot), s \leq t\}$. On dit alors que $(x(\cdot), m(\cdot))$ résout le problème de martingale pour l'opérateur $\mathcal{L}^c$. Aussi il existe une martingale $M(\cdot)$ de variation quadratique $m(\cdot)I$ et vérifiant **(D3), (D4),** et telle que

$$dx = \int b(x,c)m_t(dc)dt + \int \sigma(x,c)\ M\ (dc\ dt) \tag{3.47}$$

Supposons que

(D5) $b(\cdot), \sigma(\cdot)$ sont continues, $b(\cdot,c), \sigma(\cdot,c)$ sont continument Lipschitz et uniformément bornées. en c.

Supposons **(D5)**. Étant donné $(M(\cdot), m(\cdot))$ satisfaisant **(D3), (D4),** avec $\langle M(\cdot)\rangle = m(\cdot)I$, il existe une unique solution au sens fort de 3.47 (qui peut être construit par la technique classique "d'itération de Picard"). Il existe aussi une unique solution de sens faible dans le sens où si $(M'(\cdot), m'(\cdot))$ et $(M(\cdot), m(\cdot))$ satisfont **(D3), (D4),** et ont la même loi de probabilité,alors la solution triple $(x'(\cdot), M'(\cdot), m'(\cdot))$, $(x(\cdot)M(\cdot), m(\cdot))$ ont aussi la même loi de probabilité. Si $a(x,c)$ est uniformément (dans $x \in G, c \in U$) définie positive, alors **(D2)** est vérifiée sous la "condition de cône" décrite ci-dessous.

Contrôle relaxé admissible

Le système 3.47 représente notre système de contrôle. Ce sera la représentation des limites de $\{\xi^h(\cdot)\}$ lorsque la variance est également contrôlée. Nous disons que $(M(\cdot), m(\cdot))$ est un contrôle relaxé admissible pour 3.47 si **(D3)** et **(D4)** sont vérifiés et $\langle M(\cdot)\rangle = m(\cdot)I$. Nous continuons à écrire le coût 3.19 sous la forme $V(x,m)$, même si sa valeur dépend de la distribution conjointe de $m(\cdot)$ et $M(\cdot)$.

Approximation de $(x(\cdot)M(\cdot), m(\cdot))$

Sous **(D3)- (D5)**, un tel triplet peut être approximée par un triplet satisfaisant :

$$x^{\delta}(t) = x + \int_0^t \int b(x^{\delta}(s), c) m_s^{\delta}(dc) ds + \int_0^t \int \sigma(x^{\delta}(s), c) M^{\delta}(dc\ ds), \tag{3.48}$$

où $M^{\delta}(\cdot)$ est représentable en termes d'un nombre fini de processus de Wiener. Pour obtenir l'approximation, soit $\delta > 0$ et soit $\{C_i^{\delta},\ i \leq k_{\delta}\}$ une partition finie de U telle que les diamètres de $C_i^{\delta} \to 0$ lorsque $\delta \to 0$. Soit $c_i^{\delta} \in C_i^{\delta}$. Alors $\{M(C_i^{\delta}, \cdot), i \leq k_{\delta}\}$ sont des martingales continues orthogonales avec $\langle M(C_i^{\delta}, \cdot)\rangle = m(C_i^{\delta}, \cdot)$. Il existe des processus de Wiener $w_i^{\delta}(\cdot)$, $i \leq k_{\delta}$ $\mathcal{F}_t-$standard indépendants les uns des autres tels que

$$M(C_i^{\delta}, t) = \int_0^t [m_s(C_i^{\delta})]^{\frac{1}{2}} dw_i^{\delta}(s).$$

Soient $M^{\delta}(\cdot)$ et $m^{\delta}(\cdot)$ les restrictions des mesures $M(\cdot)$ et $m(\cdot)$, respectivement, aux ensembles $\{C_i^{\delta}\ ,\ i \leq k_{\delta}\}$. Définissons $b_{\delta}(x, c) = b(x, c_i^{\delta})$ et $\sigma_{\delta}(x, c) = \sigma(x, c_i^{\delta})$, pour $c \in C_i^{\delta}$, et définissons $x^{\delta}(\cdot)$ par

$$\begin{aligned} x^{\delta}(t) &= x + \textstyle\int_0^t \int b_{\delta}(x^{\delta}(s), c) m_s^{\delta}(dc) ds + \int_0^t \int \sigma_{\delta}(x^{\delta}(s), c) M^{\delta}(dc\ ds) \\ &= x + \textstyle\int_0^t \sum\limits_i b(x^{\delta}(s), c_i^{\delta}) m_s(C_i^{\delta}) ds + \int_0^t \sum \sigma(x^{\delta}(s), c_i^{\delta}) [m_s(C_i^{\delta})]^{\frac{1}{2}} dw_i^{\delta}(s). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Le $(x^{\delta}(\cdot), M^{\delta}(\cdot), m^{\delta}(\cdot))$ dans 3.49 est l'approximation qu'on cherche, comme on montre dans le théorème suivant.

Théorème 3.6.1 *Supposons* ***(D3)- (D5)*** *sont vérifiés, et définissons* $x^{\delta}(\cdot)$ *par* 3.49*. Alors* $(x^{\delta}(\cdot), M^{\delta}(\cdot), m^{\delta}(\cdot)) \implies (x(\cdot), M(\cdot), m(\cdot))$*. Aussi* $V(x, m^{\delta}) \to V(x, m)$*, sous* ***(D2)****. On peut supposer que le* $m^{\delta}(\cdot)$ *est constant sur les intervalles* $[p\delta, p\delta + \delta)$*.*

Preuve. Par construction, $(M^{\delta}(\cdot), m^{\delta}(\cdot)) \implies (M(\cdot), m(\cdot))$.Nous illustrons la preuve de la convergence $x^\delta(\cdot) \implies x(\cdot)$ uniquement pour le cas scalaire. Nous avons

$$\begin{aligned} x(t)-x^\delta(t) &= \int_0^t \int \left[b_\delta(x(s),c)-b_\delta(x^\delta(s),c)\right] m_s(dc)ds \\ &+ \int_0^t \int [\sigma_\delta(x(s),c)-\sigma_\delta(x^\delta(s)(s),c)]M(dc\ ds) \\ &+ \int_0^t \int \left[b(x(s),c)-b_\delta(x(s),c)\right] m_s(dc)ds \\ &+ \int_0^t \int [\sigma(x(s),c)-\sigma_\delta(x(s)(s),c)]M(dc\ ds). \end{aligned}$$

Maintenant, utilisons les faits que $|b(x,c)-b_\delta(x,c)|+|\sigma(x,c)-\sigma_\delta(x,c)|$ sont bornés et converge vers le zéro lorsque $\delta \to 0$ pour chaque (x,c), avec la condition de Lipschitz et le fait que $m_s(U)=1$ et les propriétés des martingales, pour obtenir il existe un $K<\infty$ tel que

$$\sup_{t \leq \frac{T}{\delta}} (E\left|x(t)\right|^2 + E\left|x^\delta(t)\right|^2) < \infty,$$

$$\begin{aligned} E\left|x(s)-x^\delta(s)\right|^2 &\leq KE\int_0^t \left|x(s)-x^\delta(s)\right|^2 ds + e^\delta(t), \\ E\sup_{t\leq T}\left|x(s)-x^\delta(s)\right|^2 &\leq K\int_0^t E\left|x(s)-x^\delta(s)\right|^2 ds + \tilde{e}^\delta(t), \end{aligned}$$

où $e^\delta(\cdot)$ et $\tilde{e}^\delta(\cdot) \to 0$ si $\delta \to 0$ sur chaque interval borné. Ainsi $E\max_{s\leq T}\left|x(s)-x^\delta(s)\right|^2 \to 0$ si $\delta \to 0$. Pour obtenir la denière phrase du théorème, nous appliquons le théorème **3.2.1** au système 3.49. ■

La limite des coûts $V^h(x)$

Les probabilités de transition pour la chaîne approchée peuvent être calculées, simplement en tenant compte de la dépendance de contrôle de $a(x,c)$. Définissons $V^h(x)$ par 3.39 à nouveau. Passons maintenant à la caractérisation des limites.

Théorème 3.6.2 *Supposons 3.4* (**H2**) *et* (**D5**). *sont vérifiés. Alors* $\{\xi^h(\cdot), m^h(\cdot)\}$ *sont tendus. Si* $(x(\cdot), m(\cdot))$ *est la limite d'une sous-suite faiblement convergente, alors* $(x(\cdot), m(\cdot))$ *résout le problème de martingale pour l'opérateur* $\mathcal{L}^c$. *Il existe une mesure de martingale* $M(\cdot)$ *telle que* $(M(\cdot), m(\cdot))$ *satisfont* (**D3**), (**D4**) *et 3.47 sont vérifiées. Sous la condition* *supplémentaire* (**D2**) *ou la règle d'arrêt aléatoire* , $V^h(x) \to V(x,m) \geq V(x)$.

Remarque sur la preuve. La preuve de tension est la même qu'au théorème 3.3.5 ou 3.3.6. L'existence de $M(.)$ a été commentée ci-dessus, pour obtenir la convergence des temps d'arrêt. Nous ne commentons plus loin que l'identification de l'opérateur limite. L'idée est de montrer 3.26 mais avec la définition d'inclure la $\mathcal{L}^c$ dépendance de $\sigma(x,c)$. Mais cela découle de la preuve du théorème 3.3.6, une fois que nous notons que toutes les expressions restent les mêmes avec la dépendance de contrôle ajoutée-à condition que nous écrivons (nous faisons ici le cas scalaire, comme dans le théorème 3.3.6, pour simplifier la notation)

$$\begin{aligned} E_n^h, f(\xi_{n+1}^h) - f(\xi_n^h) \quad &= \int f_x(\xi_n^h) b(\xi_n^h, c) m_n^h(dc) \Delta t_n^h \\ &+ \tfrac{1}{2} f_{xx}(\xi_n^h) \int \sigma^2(\xi_n^h, c) m_n^h(dc) \Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h) \\ &= \int \mathcal{L}^c f(\xi_n^h) m_n^h(dc) \Delta t_n^h + O(h^\alpha \Delta t_n^h). \end{aligned}$$

La convergence des coûts

Par le théorème 3.6.1, on peut approximer tout paire admissible $(M(\cdot), m(\cdot))$ par un paire $(\tilde{M}(\cdot), \tilde{m}(\cdot))$, où $\tilde{m}(\cdot)$ est constante par morceaux et prend un nombre fini de valeurs et où $\tilde{M}(\cdot)$ est représenté en termes d'un nombre fini de processus de Wiener. Ainsi, pour prouver que $V^h(x) \to V(x)$, il suffit de montrer que pour tout telle paire

$$\overline{\lim_h} V^h(x) \leq V(x, \tilde{m}). \tag{3.50}$$

Théorème 3.6.3 *Sous les conditions du théorème 3.6.2*, $V^h(x) \to V(x)$.

Preuve. Par la discussion au-dessus du théorème, on peut supposer que $(\tilde{M}(\cdot), \tilde{m}(\cdot))$ utilisé et prend la forme suivante. Les $\tilde{m}_t(\cdot)$ sont $\mathcal{F}_t-$adaptées et constantes par morceaux, et sont concentrées sur les points $c_1, ..., c_q$, pour tout t. Elles sont concentrées sur une valeur de c_i sur chaque intervalle $[p\delta, p\delta + \delta)$. Les $w_i(\cdot)$, $i \leq q$, sont des processus $\mathcal{F}_t-$Wiener indépendants les uns des autres, donc $\tilde{m}(\cdot)$ correspond à un contrôle ordinaire $\tilde{u}(\cdot)$, où $\tilde{u}(\cdot)$

est constant sur les intervalles $[p\delta, p\delta + \delta)$ et prend des valeurs dans l'ensemble $(c_1, ..., c_q)$. Le modèle

$$\begin{aligned} dx &= b(x, \tilde{u})dt + \sum_i \sigma(x, c_i) I_{\{\tilde{u}=c_i\}} dw_i \\ &= \sum_i b(x, c_i)\tilde{m}_t(c_i)dt + \sum_i \sigma(x, c_i)\tilde{m}_t^{\frac{1}{2}}(c_i)dw_i, \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\tilde{m}_t(c_i) = I_{\{\tilde{u}(t)=c_i\}}.$$

est analogue à ce qui a été fait dans le théorème 3.3.7, il suffit de considérer $\tilde{u}(\cdot)$, qui sont donnés par les fonctions $F_p^{\rho,\theta}$ introduites plus bas 3.44 dans ce théorème. Ici, les arguments de ces fonctions sont les échantillons de tous les processus de Wiener $w_1(\cdot), ., W_q(\cdot)$. Nous construisons maintenant les analogues appropriés du $W^h(\cdot)$ et 3.3.7. Comme dans le théorème 3.3.7, par commodité nous supposons que σ est une matrice $r \times r$. Soit $\tilde{u}_n^h$ le contrôle admissible ordinaire à utiliser pour la chaîne d'approximation $\{\xi_n^h\}$. ■

Soit $\psi_i(\cdot)$,$i \leq q$, des processus de Wiener standard à valeurs dans $\mathbb{R}^r$ indépendants les uns des autres, qui sont également indépendants de $\{\xi_n^h, \tilde{u}_n^h\}$, et définissent $\delta\psi_{i,n}^h = \psi_i(t_{n+1}^h) - \psi_i(t_n^h)$. Soient $\tilde{m}_n^h$ et $\tilde{m}^h(\cdot)$ la représentation de contrôle relâxé de $\tilde{u}_n^h$ et, respectivement, l'interpolation des paramètres continus avec la dérivée définie sur $[t_n^h, t_{n+1}^h)$ par $\tilde{m}_t^h = \tilde{m}_n^h$. Rappelons la définition de δW_n^h . Définissons les variables aléatoires

$$\delta W_{i,n}^h = \delta W_n^h I_{\left\{\tilde{u}_n^h=c_i\right\}} + \delta\psi_{i,n}^h I_{\left\{\tilde{u}_n^h\neq c_i\right\}}, \tag{3.52}$$

et définissons : $W_i^h(t) = \sum\limits_{t_{n+1}^h \leq t} \delta W_{i,n}^h$.Alors on peut écrire (où le processus $\sum\limits_{t_n^h \leq t} \varepsilon_n^h = \varepsilon^h(t)$ tend aiblement vers un processus zéro si $h \to 0$) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^h &= \xi_n^h + b(\xi_n^h, \tilde{u}_n^h)\Delta t_n^h + \sum_i \sigma(\xi_n^h, \tilde{u}_n^h) I_{\left\{\tilde{u}_n^h = c_i\right\}} \delta W_{i,n}^h + \varepsilon_n^h \\ &= \xi_n^h + \sum_i b(\xi_n^h, c_i)\tilde{m}_n^h(c_i)\Delta t_n^h + \sum_i \sigma(\xi_n^h, c) \left|\tilde{m}_n^h(c_i)\right|^{\frac{1}{2}} \delta W_{i,n}^h + \varepsilon_n^h \, , \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\tilde{m}_n^h(c_i) = I_{\left\{\tilde{u}_n^h = c_i\right\}}. \tag{3.1}$$

Nous continuons à suivre la procédure du théorème 3.3.7. Pour n tel que $t_n^h < \delta$,utiliser le contrôle. Pour $p = 1, 2, ...$ et n tel que $t_n^h \in [p\delta, p\delta + \delta)$, utiliser le contrôle défini par $\tilde{u}_n^h = F_p^{\rho,\theta}(W_i^h(j\theta),\, j \leq p\delta/\theta \;,\, i \leq q)$. Comme dans le théorème 3.3.7, cela donne

$$(\xi^h(\cdot), W_i^h(\cdot), i \leq q,\;\; \tilde{m}^h(\cdot),\;\; \tilde{\tau}_h) \implies (\tilde{x}(\cdot), w_i(\cdot), i \leq q,\;\; \tilde{m}(\cdot),\;\; \tilde{\tau}),$$

où la limite satisfait 3.51, $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\tau}^h$ sont les temps d'espace de sortie G. Ainsi, puisque $V^h(x)$ est le coût infimum, on a

$$V^h(x) \leq V^h(x, \tilde{m}^h) \to V^h(x, \tilde{m}) \tag{3.54}$$

Bibliographie

[1] Breton, J. C. (2006). Processus gaussiens. Université de La Rochelle (version de décembre 2006).

[2] Barles, G., Souganidis, P.E., 1991. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. Asymptote. Anal. 4, 271–283

[3] Gallardo, L. (2008). Mouvement brownien et calcul d'Itô : cours et exercices corrigés. Hermann.

[4] JOULIN, A. Cours de CALCUL STOCHASTIQUE.

[5] Jeanblanc, M. (2002). Cours de calcul stochastique. DESS IM EVRY. Option finance.

[6] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[7] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of evry.

[8] Kushner, H. J. (1990). Numerical methods for stochastic control problems in continuous time. SIAM Journal on Control and Optimization, 28(5), 999-1048.

[9] Kushner, H.J., 2002. Numerical approximations for stochastic differential games. SIAM J. Control Optim. 41, 457–486.

[10] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[11] Revuz, D., & Yor, M. (2013). Continuous martingales and Brownian motion (Vol. 293). Springer Science & Business Media.

[12] Romuald, E. L. I. E., & KHARROUBI, I. (2006). Calcul Stochastique Appliquéa la Finance.

[13] Song, Q.S., Yin, G., Zhang, Z., 2008. Numerical solutions for stochastic differential games with regime switching. IEEE Trans. Autom. Control 53, 509–521.

ملخص

في هذه المذكرة نحن مهتمون بالدراسة العددية لمشكلة التحكم الأمثل من خلال التقريب بسلسلة ماركوف. أولاً ، نذكر ببعض المفاهيم الأساسية في حساب التفاضل والتكامل العشوائي ، ثم نعطي نظرية الوجود ووحدانية الحل لمعادلة تفاضلية عشوائية ، وأخيرًا نقوم بالتقريب من خلال نموذج لسلسلة ماركوف ، ثم نقوم بحل هذه المشكلة التقريبية. تعتمد طريقة البرهان على نظرية التقارب الضعيف لسلسلة من المتتاليات الاحتمالية أو المتغيرات العشوائية.

Résumé

Dans ce mémoire on s’intéresse à la résolution numérique d’un problème de contrôle optimal par une approximation consistante d’une chaine de Markov. Premièrement nous rappelons quelques notions de base sur le calcul stochastique, ensuite on donne le théorème d’existence et l’unicité de la solution d’une équation différentielle stochastique, enfin on approxime notre problème de contrôle par un modèle d'une chaîne de Markov, puis on résolu ce problème approximé. La méthode de la démonstration est basée sur la théorie des convergences faible d'une suite de mesures de probabilité ou des processus aléatoires.

Abstract

In this memory we are interested to the numerical resolution of an optimal control problem by a consistent approximation of a Markov chain. First we recall some basic notions on stochastic calculus, then we give the theorem of existence and uniqueness of the solution of a stochastic differential equation, finally we approximate our control problem by a model of a Markov chain, then we solve this approximate problem. The method of the demonstration is based on the theory of weak convergences of a sequence of probability measures or random processes.