République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Analyse**

Par : SEKKAL SALAH

Titre :

Equations Intégrales Linéaires De Fredholm De Seconde Espèce Et Méthodes De Résolution

Devant le Jury :

Président	DAKHIA GHANIA	U.Biskra
Encadreur	CHEMCHAM MADANI	U.Biskra
Examinateur	SOUKEUR ABDESSALAM	U.Biskra

Soutenu Publiquement le 18/06/2023

Dédicace

Je souhaite dédier humblement ce travail à :

- mes parents,
- mes frères,
- mes sœurs,
- toute ma famille,
- tous mes amis et compagnons.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers tous les étudiants et étudiantes de ma promotion.

Enfin, je dédie ce mémoire à tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

Avant tout, je tiens à exprimer ma gratitude envers **Allah**, le Tout-Puissant, pour avoir illuminé notre vie, renforcé notre courage et notre détermination pour mener à bien ce travail.

Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance à notre encadreur de mémoire, Mr.**"CHEMCHAM MADANI"**, qui nous a proposé le sujet de ce mémoire. Je le remercie pour ses précieux conseils et ses encouragements.

J'adresse également mes remerciements au président **"DAKHIA GHANIA"** pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce mémoire, ainsi qu'à Mr.**"SOUKEUR ABDESSALAM"** d'avoir accepté de faire partie du jury. Merci pour leurs remarques et toutes leurs idées.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers toutes les personnes qui nous ont aidés à réaliser ce travail.

Notations et symboles

$\mathcal{L}(E, F)$	:	L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F.
T	:	Opérateur intégral linéaire.
$\varphi(x)$	:	La fonction inconnue dans l'équation intégrale.
$K(x, t)$	:	Noyau de l'équation intégrale, (fonction donnée).
λ	:	Un paramètre constant (paramètre numérique).
$f(x)$	:	Terme libre dans l'équation intégrale, (fonction donnée).
$\mu(x)$	:	Fonctions donnée.
PVB	:	Problème aux limites (Problème aux bord).
PVI	:	Problème de cauchy (ou problème à valeur initiale).
EDO	:	Equations différentielles ordinaires.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$L^2([a, b])$	:	L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$.
$\mathcal{C}$([a,b])	:	L'ensemble de toutes les fonctions continues sur $[a, b]$.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

En mathématique, l'équation intégrale est une variété des équations fonctionnelles, dans laquelle l'inconnu généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, ou ce dernier figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégrale et sera déterminé. Cette définition générale tient compte de beaucoup de formes naturellement issues de la modélisation des différents problèmes de la mécanique et de la physique mathématique ou par remaniement des problèmes aux limites **(PVB)** et ceux de cauchy **(PVI).** En effet, la plus part des modèles construit à partir des problèmes physiques d'ingénierie et de la biologie, sont mieux traités lorsqu'ils sont présentés sous la forme d'équations intégrales.

Aujourd'hui, les équations intégrales de Fredholm (qui ont été introduites par le mathématicien suédois **Ivar Fredholm** (1866-1927) en 1900), attire l'attention de nombreux chercheurs en raison d'un large éventail d'applications dans plusieurs domaines scientifiques comme la physique, la finance et la biologie...etc. Aussi, on distingue parmi les équations intégrales de Fredholm, les équations linéaires de seconde espèce. Ces équations sont l'une des plus importantes dans divers domaines scientifiques. Où il est important de trouver des solutions à ces équations.

Dans ce mémoire on étudie le sujet **"Equations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce"** et **"Méthodes de Résolution".** Aussi, l'objectif de ce travail est de fournir des solutions pour ces équations par la méthode d'Adomian (qui ont été introduites par le mathématicien américain **George Adomian** (1922-1996) en 1981). En outre, on propose systématiquement des exemples dans le but de faciliter la compréhension et l'assimilation de la méthode exposée.

Suivant ces axes normaux, notre travail est divisé en deux chapitres :

Dans le premièr chapitre, on va donner quelques définitions et propositions sur les opérateurs linéaires bornés, puis on étudie les types et la forme générale des équations intégrales linéaires. De plus, on explique la relation entre les équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce et les équations différentielles ordinaires (EDO). Au final, on présente deux théorèmes d'existence et d'unicité de la solution à ces équations dans deux espaces, Hilbert et Banach en utilisant le théorème du point fixe de Banach, car ces notions sont nécessaires à l'étude du deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, il existe plusieurs méthodes pour obtenir la solution des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce, et nous allons présenter la méthode de décomposition d'Adomian. Grâce à celle-ci, deux methodes plus simples ont été introduite : la Méthode de décomposition modifiée, et le phénomène des termes bruit

De nombreux exemples sont donnés dans chaque méthode pour permettre au lecteur de vérifier ses connaissances sur les équations intégrales.

Le mémoire se termine par une conclusion et des références bibliographiques.

Chapitre 1

Equations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce

1.1 Les équations intégrales linéaires

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1 ***(Opérateur linéaire)*** *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur T* ***défini*** *sur E dans F (i.e $Tx \in F, \forall x \in E$) et dite* ***linéaire*** *s'il vérifie les conditions suivantes, pour tout x et y dans E et pour tout scalaires α et β, on a*

- $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$

Définition 1.1.2 ***(Opérateur linéaire borné)*** *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est dit* ***borné*** *s'il existe une constante $M \geqslant 0$, telle que*

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E, \qquad \forall x \in E.$$

Proposition 1.1.1 *Le plus petit de nombres M vérifiant l'inégalité précédente s'appelle **norme** de l'opérateur T et se note $\|T\|$, on a*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Preuve. Pour la preuve voir [4]. ■

Proposition 1.1.2 *L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F muni de cette norme est noté par $\mathcal{L}(E,F)$. Si $E = F$, il est noté simplement par $\mathcal{L}(E)$.*

• Opérateur intégral linéaire

Définition 1.1.3 ***(Opérateur intégral linéaire)*** *Un opérateur intégral linéaire T est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante*

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt,$$

la fonction K est appelée noyau de l'opérateur T.

Remarque 1.1.1 *1) L'opérateur T est appelé opérateur intégral à noyau.*

2) Si K est une fonction continue sur $[a,b]\times[a,b]$, l'opérateur T est appelé opérateur intégral à noyau continue K.

Exemple 1.1.1 *L'opérateur T défini par*

$$\begin{aligned} T\varphi : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto T\varphi(x) = \int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt, \end{aligned}$$

est un opérateur intégral linéaire à noyau $K(x,t) = e^{x-t}$.

1.1.2 Equations intégrales linéaires et classification

On dit qu'une équation est une **équation intégrale linéaire** si elle s'écrit sous la forme suivante

$$\mu(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{1.1}$$

Où

1) $\varphi(x)$ est la fonction **inconnue**.
2) Les fonctions $\mu(x)$, $f(x)$ et $K(x,t)$ sont données à l'avance.
3) $K(x,t)$ est une fonction de deux variables réelles x et t, dans l'intervalle $[a,b]$, appelée le **noyau** de l'équation intégrale (1.1).
4) λ est un **paramètre** constant (paramètre numérique).
5) $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les **bornes** de l'intégration.(Il convient de noter que les bornes de l'intégration penvent être à la fois variables, constantes ou mixtes).
6) Si $f(x) = 0$, l'équation (1.1) est dite **homogène**.
7) Si $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont constantes (par exemple $\alpha(x) = 0$ et $\beta(x) = 1$), alors on dit que l'équation (1.1) est une équation intégrale linéaire de **Fredholm**.
8) Si $\alpha(x)$ est un constante et si $\beta(x) = x$, alors on dit que l'équation (1.1) est une équation intégrale linéaire de **Volterra**.
9) Si $\mu(x) = 0$, l'équation (1.2) est dite de **première espèce**
10) Si $\mu(x) = 1$, l'équation (1.1) est dite de **seconde espèce**.

1.1.3 Equation intégrale linéaire de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \qquad a \leq x \leq b. \tag{1.2}$$

Où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $K(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle (a,b) et λ un facteur numérique.

On appelle $K(x,t)$ le noyau de l'équation (1.2). Supposons que le noyau $K(x,t)$ est défini et continu sur $[a,b] \times [a,b]$, ou bien présente des discontinuités telles que

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt < +\infty.$$

Si $f(x) = 0$, l'équation (1.2) est dite homogène, alors l'équation (1.2) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0,$$

(dans le cas contraire, l'équation (1.2) est dite non homogène).

Une équation intégrale de la forme

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt,$$

s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de **première espèce**. Où la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration.

Exemple 1.1.2 *On présente dans les exemples suivants quelques types d'équations intégrales linéaires*

a) $\varphi(x) - \int_{-1}^{2} e^{x^2-t^2}\varphi(t)dt = 0,$

(équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce homogène).

b) $e^x + 2\int_0^1 \varphi(t)dt = 0,$

(équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce non homogène).

c) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x xt\varphi(t)dt,$

(équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce non homogène).

• Solution d'une équation intégrale

On appelle solution d'une équation intégrale une fonction $\varphi(x)$ qui, dès qu'elle est portée dans cette équation la change en identité (en x).

Exemple 1.1.3 *Montrer que la fonction $\varphi(x) = x^2 + x^3$, est solution de l' équation intégrale linéaire de Fredholm suivante.*

$$\varphi(x) = (x^3 - x) + \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(xt^2 + x^2t)\varphi(t)dt, \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{1.3}$$

Réponse : *En remplaçant la fonction $\varphi(x) = x^2 + x^3$ dans (1.3), on obtient*

$$\begin{aligned} x^2 + x^3 &= (x^3 - x) + \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(xt^2 + x^2t)(t^2 + t^3)dt \\ &= (x^3 - x) + \frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}\left(x + x^2\right)\right) \\ &= x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Donc, la fonction $\varphi(x) = x^2 + x^3$ satisfait l'équation (1.3).

1.2 Noyaux particuliers

1) On dit que le noyau $K(x, y)$ d'une équation intégrale, est **séparable** ou (**dégénéré**) si

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t),$$

où $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\alpha_i(x)$ sont linéairement indépendants,

par exemple les noyaux $x - t$, xt, $x^2 - t^2$, et $xt^2 + tx^2$, sont séparables.

2) Si $K(x, t) \in L^2([a, b] \times [a, b])$, i.e

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt < +\infty,$$

alors ce type de noyau est de **carré sommables** sur $[a, b] \times [a, b]$**.**

3) **i)** Si $\Bbbk = \mathbb{C}$, (i.e $K(x, t)$ est une fonction à valeurs complexes), et si

$$K(x,t) = \overline{K(t,x)},$$

alors il est dit **hermtien**.

ii) Si $\Bbbk = \mathbb{R}$, (i.e $K(x, t)$ est une fonction à valeurs réelles), et si

$$K(x,t) = K(t,x),$$

alors il est dit **symétrique**. Une équation intégrale à noyau symétrique est dite aussi symétrique.

Par exemple, $\forall (x, t) \in [a, b] \times [a, b]$, $K_1(x, t) = i(x - t)$ (hermtien), $K_2(x, t) = x + t$ (symétrique).

1.3 Liaison entre les équations différentielles et les équations intégrales de Fredholm

1.3.1 Conversion de problème aux limites en équation intégrale de Fredholm

On considère le problème aux limites (PVB) suivant

$$y''(x) + a(x)y(x) = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{1.4}$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = c_0, \qquad y(1) = c_1, \quad \text{où} \;\; c_0, c_1 \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

On pose

$$y''(x) = \varphi(x), \tag{1.6}$$

d'où, vu les conditions (1.5), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x y''(t)dt &= \int_0^x \varphi(t)dt, \\ y'(x) &= \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0). \end{aligned}$$

En intégrant les deux membres, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^x y'(t)dt &= \int_0^x \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^x y'(0)dt, \\ y(x) &= y(0) + xy'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Nous avons utilisé la formule suivante (formule de cauchy pour l'intégrale itérée)

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx ... \int_{x_0}^{x} f(x)dx}_{n \text{ intégrals}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

L'équation (1.7) est équivalente à

$$y(x) = c_0 + xy'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{1.8}$$

pour $x = 1$ avec $y(1) = c_1$, on obtient

$$y'(0) = (c_1 - c_0) - \int_0^1 (1-t)\varphi(t)dt. \tag{1.9}$$

En remplaçant (1.9) dans l'équation (1.8) et après simplification, on trouve

$$y(x) = c_0 + x(c_1 - c_0) - \int_0^1 x(1-t)\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \tag{1.10}$$

en remplaçant (1.10) et (1.6) dans (1.4), on a

$$\varphi(x)+c_0 a(x)+xa(x)(c_1-c_0)-a(x)x\int_0^1 (1-t)\varphi(t)dt+a(x)\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = F(x).$$

On peut utiliser la relation de chasles, On obtient

$$\begin{aligned}\varphi(x) = F(x) - c_0 a(x) - xa(x)(c_1 - c_0) - a(x)\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt \\ + a(x)x\left[\int_0^x (1-t)\varphi(t)dt + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt\right].\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x t(1-x)a(x)\varphi(t)dt + \int_x^1 x(1-t)a(x)\varphi(t)dt.$$

Finalement

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt,$$

où

$$\begin{cases} f(x) = F(x) - c_0 a(x) - x a(x)(c_1 - c_0), \\ K(x,t) = \begin{cases} t(1-x)a(x), & si \;\; 0 \leq t \leq x \\ x(1-t)a(x), & si \;\; x \leq t \leq 1 \end{cases} \end{cases} \tag{1.11}$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale linéaire de Fredholm seconde espèce.

Exemple 1.3.1 *Former l'équation intégrale correspondant à l'équation différentielle*

$$y''(x) + 9y(x) = \cos(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et aux conditions $y(0) = y(1) = 0$

On peut remarquer, $c_0 = c_1 = 0$, $a(x) = 9$ (constante) et $F(x) = \cos(x)$.

comme $c_0 = c_1 = 0$, et $a(x) = 9$, alors en remplaçant dans l'équation (1.11), on trouve

$$\varphi(x) = \cos(x) + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt,$$

avec

$$K(x,t) = \begin{cases} 9t(1-x), & si \;\; 0 \leq t \leq x \\ 9x(1-t), & si \;\; x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1.3.2 Conversion de l'équation intégrale de Fredholm en problème aux limites

Nous pouvons convertir aussi les équations intégrales de Fredholm en un problème aux limites,en utilisant la règle de Leibnitz

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \beta'(x)f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)f(x,\alpha(x)) + \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dx.$$

On considère l'équation intégrale de Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{1.12}$$

où $f(x)$ une fonction donnée, et le noyau $K(x,t)$ donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x)a(x), & si \;\; 0 \leq t \leq x \\ x(1-t)a(x), & si \;\; x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

pour simplifier, on pose $a(x) = \lambda$ où λ est une constante, donc l'équation (1.12) s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x t(1-x)\varphi(t)dt + \lambda \int_x^1 x(1-t)\varphi(t)dt, \tag{1.13}$$

qui est équivalente à

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(1-x) \int_0^x t\varphi(t)dt + \lambda x \int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt, \tag{1.14}$$

en dérivant les deux membres par rapport à x et en utilisant la rèle de Leibnitz, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x) - \lambda x(1-x)\varphi(x) - \lambda\int_0^x t\varphi(t)dt + \lambda x(1-x)\varphi(x) + \lambda\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt \\ &= f'(x) - \lambda\int_0^x t\varphi(t)dt + \lambda\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

Pour se débarrasser ldu signe intégral, on dérive encore une fois par rapport à x et en utilisant la régle de Leibnitz, on trouve

$$\varphi''(x) = f''(x) - \lambda x\varphi(x) - \lambda(1-x)\varphi(x),$$

ce qui donne l'équation différentielle ordinnaire (EDO)

$$\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = f''(x).$$

On peut obtenir les conditions aux limites en remplaçant x par 0 et par 1 dans l'équation (1.14)

$$\varphi(0) = f(0), \quad \varphi(1) = f(1).$$

Ainsi, le système

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = f''(x) \\ \varphi(0) = f(0), \quad \varphi(1) = f(1). \end{cases}$$

est un problème aux limites équivalent à l'équation de Fredholm (1.12).

Exemple 1.3.2 *Convertir l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt,$$

où le noyau $k(x,t)$ donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} 9t(1-x), & si \;\; 0 \leq t \leq x \\ 9x(1-t), & si \;\; x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

à un problème aux limites équivalent.

L'équation intégrale de Fredholm, s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) = e^x + 9(1-x)\int_0^x t\varphi(t)dt + 9x\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt. \tag{1.15}$$

En dérivant des deux membres deux fois par rapport à x et en utilisant la régle de Leibnitz, on trouve

$$\varphi'(x) = e^x - 9\int_0^x t\varphi(t)dt + 9\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt,$$
$$\varphi''(x) = e^x - 9\varphi(t).$$

Ceci donne (EDO)

$$\varphi''(x) + 9\varphi(t) = e^x.$$

On peut obtenir les conditions aux limites en remplaçant x par 0 et par 1 dans l'équation (1.15)

$$\varphi(0) = f(0) = 1, \;\; \varphi(1) = f(1) = e.$$

Finalement, on trouve

$$\begin{cases} \varphi''(x) + 9\varphi(t) = e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi(0) = 1, \;\; \varphi(1) = e \end{cases}$$

qui est un problème aux limites équivalent à l'équation de Fredholm.

1.4 Théorèmes d'existence et d'unicité

• **Rappel**

Définition 1.4.1 ***(Opérateur contractant)*** *Soit T un opérateur borné sur l'espace de banach $(E, \|\bullet\|_E)$, on dit que T est un opérateur **contractant** s'il existe une constante positive $0 < M < 1$,telle que*

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_E \leq M\|\varphi_1 - \varphi_2\|_E,$$

pour tout φ_1, φ_2 dans E.

Le résultat suivant est appelé théorème de l'application contractante :

Théorème 1.4.1 ***(du point fixe de Banach)*** *Soit T un opérateur contractant sur E. Alors l'équation*

$$T\varphi = \varphi,$$

*admet une **solution unique** dans E. une telle solution est un **point fixe** de l'opérateur T.*

Preuve. Pour la preuve voir [5]. ■

• L'équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \qquad a \leq x \leq b \tag{1.16}$$

où φ la fonction inconue, K et f des fonctions données, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle (a, b) et λ un paramètre réel.

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant

1.4.1 Théorème d'existence et d'unicité dans l'espace de Hilbert $(\mathbf{L}^2([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \| \bullet \|_2)$

Théorème 1.4.2 ***(d'existence et d'unicité)*** *On considère l'équation intégrale (1.16) où $f \in L^2([a, b])$, $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$ et le paramétre λ vérifiant la condition*

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \tag{1.17}$$

où

$$B = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors l'équation intégrale (1.16) admet une solution unique $\varphi \in L^2([a, b])$.

Preuve. Soient $f \in L^2([a, b])$ et $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$, supposons que la condition (1.17) est satisfaite.

On considère l'opérateur T défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

• **Première étape**, on montre que l'opérateur T est bien défini sur $L^2([a, b])$.

En effet soit $\varphi \in L^2([a,b])$,

$$\int_a^b |T\varphi(x)|^2\, dx = \int_a^b |f(x)|^2\, dx + 2\lambda \int_a^b f(x) \left(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \right) dx$$
$$+ \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \right)^2 dx.$$

En appliquant le théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \left(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \right) dx &= \int_a^b \int_a^b f(x)K(x,t)\varphi(t)dxdt \\ &\leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2\, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_2 \|f\|_2 \\ &= \|K\|_2 \|\varphi\|_2 \|f\|_2 < +\infty.\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \right)^2 dx &\leq \int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt \|\varphi\|_2^2 \\ &= \|K\|_2^2 \|\varphi\|_2^2 < +\infty.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned}\int_a^b |T\varphi(x)|^2\, dx &\leq \|f\|_2^2 + 2\lambda \|K\|_2 \|\varphi\|_2 \|f\|_2 + \lambda^2 \|K\|_2^2 \|\varphi\|_2^2 \\ &= (\|f\|_2 + \lambda \|K\|_2 \|\varphi\|_2)^2 < +\infty.\end{aligned}$$

Ou encore

$$T\varphi \in L^2([a,b]), \qquad \forall \varphi \in L^2[a,b].$$

Ce qui montre que l'opérateur T est bien défini sur $L^2([a,b])$.

• **Deuxième étape**, montrons que l'opérateur T est contractant.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2([a,b])$, en utilisant le théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_2 &= \left(\int_a^b \left(\left(T\varphi_1 - T\varphi_2\right)(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&= |\lambda| \left[\int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)\left[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right] dt\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&= |\lambda| \, B\|\varphi_1 - \varphi_2\|_2,
\end{aligned}$$

où

$$B = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose $M = |\lambda| \, B$, d'après la condition (1.17), on a bien que $M \in]0,1[$, (i.e $|\lambda| \, B < 1$) et ceci implique que

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_2 \leq M\|\varphi_1 - \varphi_2\|_2, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in L^2([a,b]),$$

autrement dit, l'opérateur T est contractant. Ainsi, en vertu du théorème du point fixe $\varphi \in L^2([a,b])$ est un point fixe de T, c'est-à-dire $T\varphi = \varphi$, Ou encore

$$T\varphi(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Finalement, l'équation (1.16) admet une unique solution $\varphi \in L^2([a,b])$, pour tout $f(x)$ dans $L^2([a,b])$. ∎

1.4.2 Théorème d'existence et d'unicité dans l'espace de Banach $(C([\mathbf{a},\mathbf{b}], \|\bullet\|_{\mathcal{C}})$

Théorème 1.4.3 ***(d'existence et d'unicité)*** *On considère l'équation intégrale (1.16) où $f \in \mathcal{C}\,([a,b])$, $K \in \mathcal{C}([a,b]\times[a,b])$ et le paramétre λ vérifiant la condition*

$$|\lambda| < \frac{1}{N(b-a)}, \tag{1.18}$$

où $N = \max\limits_{x,t\in[a,b]}(|K(x,t)|)$. Alors l'équation intégrale (1.16) admet une solution unique $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$.

Preuve. Soient $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $K \in \mathcal{C}([a,b]\times[a,b])$, supposons que la condition (1.18) est satisfaite.

On considère l'opérateur T défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, \quad a \le x \le b.$$

• **D'abord,** on montre que l'opérateur T est bien défini sur $\mathcal{C}([a,b])$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$,

$$\begin{aligned}
\|T\varphi\|_{\mathcal{C}} &= \max_{x\in[a,b]}\left|f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt\right|, \\
&\le \|f\|_{\mathcal{C}} + |\lambda|\max_{x\in[a,b]}\int_a^b |K(x,t)|\,|\varphi(t)|\,dt, \\
&\le \|f\|_{\mathcal{C}} + |\lambda|\,N\int_a^b \max_{t\in[a,b]}|\varphi(t)|\,dt, \\
&= \|f\|_{\mathcal{C}} + |\lambda|\,(b-a)N\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < +\infty,
\end{aligned}$$

où $N = \max\limits_{x,t\in[a,b]}(|K(x,t)|)$.

Ce qui montre que l'opérateur T est bien défini sur $\mathcal{C}([a,b])$, ou encore

$$T\varphi \in \mathcal{C}([a,b]), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}([a,b]).$$

• **Deuxième étape**, montrons que l'opérateur T est contractant. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}([a,b])$, on a

$$\begin{aligned}\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_{\mathcal{C}} &= \max_{x\in[a,b]} \left|(T\varphi_1 - T\varphi_2)(x)\right|, \\ &= |\lambda| \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^b K(x,t)(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))dt\right|,\end{aligned}$$

pour $(\varphi_1 - \varphi_2) \in \mathcal{C}([a,b])$ et $K \in \mathcal{C}([a,b]\times[a,b])$, on obtient

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_{\mathcal{C}} \le |\lambda|\, N(b-a)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}},$$

où $N = \max\limits_{x,t\in[a,b]} (|K(x,t)|)$. On pose $M = |\lambda|\, N(b-a)$, d'aprés la condition (1.18), on a bien que $M \in]0,1[$, et ceci implique que

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_{\mathcal{C}} \le M\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{C}}, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}([a,b]),$$

autrement dit, l'opérateur T est contractant. Ainsi, en vertu du théorème du point fixe $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$ est un point fixe de T, c'est à-dire $T\varphi = \varphi$, ou encore

$$T\varphi(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Finalement, l'équation(1.16) admet une unique solution $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$. ■

Chapitre 2

Méthode de décomposition d'Adomian

2.1 Méthode de décomposition d'Adomian

La méthode décompositionnelle d'Adomian est une méthode analytique qui permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équations intégrales, algébriques, différentielles, intégro-différentielles et aux dérivées partielles (EDP).

La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires. La méthode d'Adomian est basée sur la décomposition de la fonction inconnue sous forme d'une série qui convergera vers une solution exacte si une telle solution existe, dont les termes sont définis de manière récurrente.

Donc la méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous la forme suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n(x), \tag{2.1}$$

avec $\varphi_0(x)$ choisi comme terme égale au terme figurant à l'extérieure du signe intégral.

Prenons

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

on remplaçant (2.1) dans l'équation de Fredholm (1.16), on obtient

$$\sum_{n\geq 0}\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\sum_{n\geq 0}\varphi_n(t)dt, \tag{2.2}$$

pour pouvoir constriure la série $\sum_{n\geq 0}\varphi_n(x)$, dont les éléments sont calculés récursivement.

L'équation (2.2) est équivalente à

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt \\ + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt + \cdots\end{aligned}$$

Les termes de la série $\sum_{n\geq 0}\varphi_n(x)$ peuvent être identifiés par les formules

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_1(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt, \\ \varphi_2(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt, \\ \vdots &= \vdots\end{aligned} \tag{2.3}$$

et ainsi de suite. Le schéma discuté ci-dessus pour la détermination des composants $\varphi_i(x)$, $i \geq 0$, de la solution $\varphi(x)$ de l'équation (1.16) peut être écrit dans une relation de récurrence par :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x), \\ \varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

La solution $\varphi(x)$ de l'équation (1.16) est facilement déterminée sous forme de série à l'aide de (2.1). Tel que discuté avant, la série obtenue pour $\varphi(x)$ fournit souvent la solution exacte sous forme compacte.

Les exemples ci-dessous seront discutés pour expliquer ce qui précède.

Exemple 2.1.1 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = e^x - x + \int_0^1 xt\varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{2.4}$$

Par la méthode de décomposition d'Adomian, on cherche la solution sous la forme d'une série

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n(x). \tag{2.5}$$

On remplaçant (2.5) dans l'équation de Fredholm (2.4), on trouve

$$\sum_{n\geq 0} \varphi_n(x) = e^x - x + x\int_0^1 t\sum_{n\geq 0}\varphi_n(t)dt,$$

ceci est équivalent à

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots = e^x - x + x\int_0^1 t\varphi_0(t)dt + x\int_0^1 t\varphi_1(t)dt \\ + x\int_0^1 t\varphi_2(t)dt + \cdots$$

Donc, la relation de récurrence est donnée par

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = e^x - x, \\ \varphi_{n+1}(x) = x \int_0^1 t\varphi_n(t)dt, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= e^x - x, \\ \varphi_1(x) &= x \int_0^1 t\varphi_0(t)dt = x \int_0^1 t(e^t - t)dt = \frac{2}{3}x, \\ \varphi_2(x) &= x \int_0^1 t\varphi_1(t)dt = x \int_0^1 \frac{2}{3}t^2 dt = \frac{2}{9}x, \\ \varphi_3(x) &= x \int_0^1 t\varphi_2(t)dt = x \int_0^1 \frac{2}{9}t^2 dt = \frac{2}{27}x, \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Par conséquent, la solution de l'équation (2.4) *sous la forme de série est donnée par*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n \geq 0} \varphi_n(x) \\ &= \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots \right), \end{aligned}$$

ceci est équivalent à

$$\varphi(x) = e^x - x + \frac{2}{3}x \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right).$$

On remarque que $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *est une série géométrique de raison* $q = \frac{1}{3}$.

Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= e^x - x + \frac{2}{3}x\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = e^x - x + \frac{2}{3}x\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= e^x.\end{aligned}$$

Finalement, la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = e^x,$$

qui satisfait l'équation (2.4).

Exemple 2.1.2 *On considère l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = \sin(x) - x + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)dt, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \tag{2.6}$$

Appliquons la technique de la méthode de décomposition d'Adomian comme nous l'avons déja vu, on a

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x) = \sin(x) - x,\\ \varphi_{n+1}(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt, \quad n \ge 0.\end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \sin(x) - x,\\
\varphi_1(x) &= x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_0(t)dt = \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)x,\\
\varphi_2(x) &= x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(t)dt = \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^4}{64}\right)x,\\
\varphi_3(x) &= x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(t)dt = \left(\frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi^6}{512}\right)x,\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. La solution qui satisfait l'équation (2.6) *sous la forme de série est donnée par*

$$\varphi(x) = \sin(x) - x + \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)x + \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^4}{64}\right)x + \left(\frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi^6}{512}\right)x + \cdots .$$

Finalement, on obtient

$$\varphi(x) = \sin(x),$$

et qui satisfait l'équation (2.6)

2.1.1 Méthode de décomposition modifiée

La méthode standard de décomposition d'Adomian introduit la relation de récurrence

$$\begin{cases}
\varphi_0(x) = f(x),\\
\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt, \quad n \geq 0.
\end{cases} \tag{2.7}$$

La Méthode de décomposition modifiée présente une légère variation de la relation de récurrence (2.7), pour déterminer les termes de $\varphi(x)$ de manière plus facile et plus rapide.

Dans de nombreux cas, la fonction $f(x)$ peut être définie comme la somme de deux fonctions partielles, à savoir $f_1(x)$ et $f_2(x)$, e.i

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x). \tag{2.8}$$

Si la fonction $f(x)$ est une fonction polynômiale de deux termes au plus, les composantes $\varphi_n(t)$ sont faciles à calculer. Dans le cas où la fonction $f(x)$ est une fonction polynômiale de plus de deux termes, trigonométrique, hyperbolique...etc, le calcule de $\varphi_n(t)$ sera plus difficile.

Compte tenu de (2.8) nous introduisons un changement qualitatif dans la relation de récurrence (2.7). La méthode de décomposition modifiée identifie le termes $\varphi_0(x)$ par une partie de $f(x)$ à savoir $f_1(x)$ ou $f_2(x)$. Pour atteinde notre objctif, nous décomposons la fonction $f(x)$ en deux parties telles que $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$, où $f_1(x)$ se compose d'un seul terme, ou si nécessaire de plus de termes dans moins d'autres cas, et $f_2(x)$ comprend les autres termes de $f(x)$.

On remplaçant (2.1) et (2.8) dans (1.16), nous obtenons

$$\sum_{n\geq 0}\varphi_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\sum_{n\geq 0}\varphi_n(t)dt,$$

ceci est équivalent à

$$\begin{aligned}\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots = f_1(x)+f_2(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt \\ +\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt \\ +\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_3(t)dt+\cdots\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Par conséquent, les composants $\varphi_i(x), i \geq 0$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ peuvent être complètement déterminés dans une relation de récurrence modifiée si nous assignons $f_1(x)$ seulement au composant ,$\varphi_0(x)$ alors que le composant $f_2(x)$ sera ajouté à la formule du composant $\varphi_1(x)$ donné précédemment dans (2.1).

Finalement, la relation de récurrence modifiée est donnée par

$$\varphi_0(x) = f_1(x), \tag{2.9}$$

$$\varphi_1(x) = f_2(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt, \tag{2.10}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt, \quad n \geq 1.$$

Dans la plupart des problèmes, nous devons utiliser (2.9) et (2.10) seulement.

A des fins d'illustration, nous étudions les exemples suivants.

Remarque 2.1.1 *(importante)*

Le choix des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est important pour trouver la solution rapidement et facilement.

Exemple 2.1.3 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante en utilisant la méthode de décomposition modifiée*

$$\varphi(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}(17 + 3e^4) + \int_0^1 t\varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{2.11}$$

ceci qui s'écrit aussi

$$\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x) + \int_0^1 t\varphi(t)dt$$

où

$$f_1(x) = 3x + e^{4x}, \quad \textit{et} \quad f_2(x) = -\frac{1}{16}(17 + 3e^4).$$

Nous avons utilusé la relation de récurrence modifiée, on obtient

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f_1(x) = 3x + e^{4x}, \\ \varphi_1(x) = -\frac{1}{16}(17 + 3e^4) + \int_0^1 t\varphi_0(t)dt = 0, \\ \varphi_{n+1}(x) = \int_0^1 t\varphi_n(t)dt = 0, \qquad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

On remarque que $\forall i \geq 1$, $\varphi_i(x) = 0$*.*

Alors, la solution qui satisfait l'équation (2.11) est donnée par

$$\varphi(x) = f_1(x) = 3x + e^{4x}.$$

Exemple 2.1.4 *On considére l'équation intégrale de Fredholm*

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2\sinh(\frac{\pi}{4}) + \int_{-1}^1 e^{\arg\tan(t)}\varphi(t)dt, \qquad -1 \leq x \leq 1. \tag{2.12}$$

Appliquons la technique de la méthode décomposition modifiée comme nous l'avons *déja vu,*

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f_1(x) = \frac{1}{1+x^2},\\ \varphi_1(x) &= -2\sinh(\frac{\pi}{4}) + \int_{-1}^{1} e^{\arg\tan(t)}\varphi_0(t)dt = 0,\\ \varphi_{n+1}(x) &= \int_{-1}^{1} e^{\arg\tan(t)}\varphi_n(t)dt = 0, \quad \forall n \geq 1.\end{aligned}$$

On remarque que $\forall i \geq 1$, $\varphi_i(x) = 0$.*Finalement la solution qui satisfait l'équation* (2.12) *est donnée par*

$$\varphi(x) = f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2.1.2 Le phénomène des termes bruit

On a démontré précédemment que la méthode de décomposition modifiée constitue un outil fiable pour accélérer les calculs. Toutefois, il est essentiel de sélectionner judicieusement $f_1(x)$ et $f_2(x)$ afin d'utiliser cette technique avec succès.

Une nouvelle solution a été mise au point pour accélérer la convergence de la méthode de décomposition d'Adomian.

En exploitant le phénomène des termes bruit, il devient possible d'appliquer cette méthode à toutes les équations différentielles et intégrales. Lorsque des termes bruit sont présents entre les composantes $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$, ils permettent d'obtenir la solution exacte en effectuant uniquement les deux premières itérations.

Dans les paragraphes suivants, nous présenterons les concepts clés des termes bruit :

1) Les termes bruit se réfèrent aux termes identiques, mais avec des signes opposés, qui se trouvent à la fois dans les composants $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$. Il

est également possible que d'autres termes bruit apparaissent entre d'autres composants. Il convient de noter que ces termes identiques avec des signes opposés peuvent être présents dans certaines équations, mais peuvent ne pas apparaître dans d'autres équations.

2) En éliminant les termes bruit entre $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$, même si $\varphi_1(x)$ contient d'autres termes, les termes non annulés restants de $\varphi_0(x)$ peuvent fournir la solution exacte de l'équation intégrale. Cependant, la simple présence de termes bruit entre $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ ne garantit pas toujours l'obtention de la solution exacte en les annulant. Il est donc nécessaire de démontrer que les termes restants satisfont l'équation intégrale donnée. D'autre part, si les termes non annulés de $\varphi_0(x)$ ne satisfont pas l'équation intégrale donnée, ou si aucun terme bruit n'apparaît entre $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$, il est nécessaire de déterminer davantage de composants de $\varphi(x)$ pour obtenir la solution sous forme de série, comme expliqué précédemment.

3) Une démonstration formelle a établi que les termes bruit se manifestent dans des cas spécifiques d'équations différentielles et intégrales non homogènes, tandis que les équations homogènes ne présentent pas de termes bruit.

4) Une démonstration formelle a prouvé que l'apparition des termes bruit est régie par une condition nécessaire. Il en ressort que le composant $\varphi_0(x)$ doit contenir la solution exacte $\varphi(x)$, parmi d'autres termes. De plus, il a été prouvé que la condition d'inhomogénéité de l'équation ne garantit pas toujours l'apparition des termes bruit.

Voici un résumé utile sur le phénomène des termes bruit :

a) Les termes bruit sont caractérisés par des termes identiques, mais de signes opposés, qui peuvent apparaître non seulement entre les composants $\varphi_0(x)$

et $\varphi_1(x)$, mais également parmi les autres composants.

b) Les termes bruit sont présents uniquement dans certains types d'équations non homogènes, tandis qu'ils n'apparaissent pas dans le cas des équations homogènes.

c) L'apparition des termes bruit est possible lorsque la solution exacte de l'équation est incluse dans le composant $\varphi_0(x)$.

d) Il est impératif et crucial de vérifier si les termes non annulés restants satisfont l'équation intégrale.

Exemple 2.1.5 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante en utilisant le phénomène des termes bruit*

$$\varphi(x) = x\sin(x) - x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \tag{2.13}$$

D'aprées la relation de récurrence de la méthode décomposition, on a

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = x\sin(x) - x, \\ \varphi_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\varphi_0(t)dt = x - \frac{\pi^2}{8}x. \end{cases}$$

Les termes bruit $\pm x$ *apparaissent en* $\varphi_0(x)$ *et* $\varphi_1(x)$*.Annuler ce terme du composant zéro* $\varphi_0(x)$*, donne la solution exacte*

$$\varphi(x) = x\sin(x),$$

qui satisfait l'équation (2.13). Il est à noter que les autres termes de $\varphi_1(x)$ *disparaissent dans la limite avec d'autres termes des autres composants.*

Exemple 2.1.6 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante en* *utilisant le phénomène des termes bruit*

$$\varphi(x) = \sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{2}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \tag{2.14}$$

Nous établissons la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{2}x, \\ \varphi_{n+1}(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi_n(t)dt, \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{2}x, \\ \varphi_1(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi_0(t)dt = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi^4}{48}x. \end{aligned}$$

Les termes bruit $\pm\frac{\pi}{2}x$ *apparaissent en* $\varphi_0(x)$ *et* $\varphi_1(x)$*. Annuler ce terme du composant zéro* $\varphi_0(x)$*, donne la solution exacte*

$$\varphi(x) = \sin(x) + \cos(x),$$

qui satisfait l'équation (2.14)*. Il est à noter que les autres termes de* $\varphi_1(x)$ *disparaissent dans la limite avec d'autres termes des autres composants.*

Exemple 2.1.7 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante en utilisant le phénomène des termes bruit*

$$\varphi(x) = x^2 + x\cos(x) + \frac{\pi^3}{3}x - 2x - \int_0^{\pi} x\varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{2.15}$$

D'aprées la relation de récurrence de la méthode décomposition, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= x^2 + x\cos(x) + \frac{\pi^3}{3}x - 2x, \\
\varphi_1(x) &= -x\int_0^{\pi} \varphi_0(t)dt = -x\left(-2 - \pi^2 + \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^5}{6}\right).
\end{aligned}$$

Les termes bruit $\pm\frac{\pi^3}{3}x$, $\mp 2x$ *apparaissent en* $\varphi_0(x)$ *et* $\varphi_1(x)$. *Annuler ce terme du composant zéro* $\varphi_0(x)$, *donne la solution exacte*

$$\varphi(x) = x^2 + x\cos(x),$$

qui satisfait l'équation (2.15). *(Il est nécessaire et essentiel de vérifier que les termes non annulés restants satisfont à l'équation intégrale).*

Conclusion

Nous voici parvenus au terme de notre travail. L'objectif essentiel de ce travail consiste à résoudre analytiquement une **équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce**, il existe plusieurs méthodes analytiques pour résoudre ces équations. Nous avons présenté la méthode de **décomposition d'Adomian** qui est donnée par un algorithme permettant de calculer exactement et rapidement la solution de ce type de problèmes. Cette méthode peut être étendue et appliquée aux problèmes fonctionnels, linéaires ou non linéaires de différents types.

Enfin, nous avons présenté deux méthodes, la méthode de **décomposition modifiée** et la méthode du **phénomène des termes bruit**, un avantage considérable de ces deux méthodes est que les solutions sont trouvées facilement et rapidement.

Dans le cas général on ne sait pas résoudre spécifiquement l'équation, nous espérons que les étudiants des années prochaines exposeront quelques méthodes numériques.

Bibliographie

[1] A-M. Wazwaz. (2011). Linear and nonlinear integral equations. Saint Xavier University. USA.

[2] A-M. Wazwaz. (2015). A first course in integral equations. Saint Xavier University. USA.

[3] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko. Equations intégrales promlémes et exercices. Mir Moscou.

[4] Brezis H. Analyse fonctionnelle : Théorie et applicationns. Masson, Paris 1992.

[5] A.Rahmoum (2008). Equations intégrales linéaires et non-linéaires. Cours de Master II, Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj : https ://fmi.univ-bba.dz/wp-content/uploads/2018/11/Cours-M2-AMA-Equat-integ.pdf

ملخص:

في هذه العمل، قمنا بدراسة المعادلات التكاملية الخطية لفريدهولم، التي تلعب دورًا مهماً في البحث النظري والتطبيقي. كان هدفنا فهم طُرق حل المعادلات التكاملية الخطية لفريدهولم من النوع الثاني، خاصة باستخدام المنهج التحليلي. بدأنا بتقديم بعض النظريات المتعلقة بوجود و وحدانية الحلول لهذه المعادلات التكاملية. ثم، تطرقنا إلى طريقة تحليل (تفريق) أدوميان، بالإضافة إلى طريقة التحليل المعدلة. وأخيرًا، استكشفنا استخدام مفهوم ظاهرة حدود ضجيج (الحدود المتكررة) لهذه المعادلات.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية الخطية، المعادلات تكاملية الخطية لفردهولم من النوع الثاني، الوجود، الوحدانية، طريقة تحليل (تفريق) أدوميان، طريقة التحليل المُعدلة، ظاهرة حدود ضجيج.

Résumé :

Dans ce travail, nous avons examiné les équations intégrales linéaires de Fredholm, qui jouent un rôle crucial dans la recherche théorique et appliquée. Notre objectif était de comprendre les méthodes de résolution des équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce, en particulier en utilisant des approches analytiques. Nous avons commencé par présenter quelques théorèmes concernant l'existence et l'unicité des solutions pour ces équations intégrales. Ensuite, nous avons abordé la méthode de décomposition d'Adomian, ainsi que la méthode de décomposition modifiée. Enfin, nous avons exploré l'utilisation du concept le phénomène des termes bruit dans ces équations.

Mots clés : Les équations intégrales linéaires, équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce, existence , unicité, méthode de décomposition d'Adomian, méthode de décomposition modifiée, le phénomène des termes bruit.

Abstract:

Linear Fredholm integral equations play an important role in several theoretical and applied research areas. In this dissertation, we have attempted to study the methods of solving second-kind linear Fredholm integral equations, specifically focusing on analytical methods. Firstly, we have presented some theorems concerning the existence and uniqueness of solutions for second-kind Fredholm integral equations. Next, we introduce the Adomian decomposition method, as well as the modified decomposition method. Finally, we utilize the noise terms phenomenon.

Key words : Linear integral equations, Fredholm linear integral equations of the second kind, existence, uniqueness, Adomian decomposition method, modified decomposition method, the noise terms phenomenon.