République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

Bouzidi Saida

Titre :

Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades et application au contrôle optimal

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	Jaber Ibtisam	UMKB	Président
Pr.	Chaouchkhouane Nassima	UMKB	Encadreur
Dr.	Korichi Fatiha	UMKB	Examinatrice

Juin 2023

Dédicace

Dieu soit loué et cela suffit et prières soient sur Habib Moustapha et sa famille, mais après :

Dieu soit loué, que nous a peris d'apprécier cette étape de notre cheminement académique avec ce mémoire fruit d'efforts et de réussitec par sa grâce

Dédie à deux parents généreux que Dieu les préserve et les perpétue comme une lumière sur mon chemin.

À mon mari et à la famille de mon mari

À tout les familles généreuses qui m'ont soutenu et qui sont toujours frères et sœurs.

Aux frères et sœurs de mon mari.

À mes camarades collégiens qui ont partagé avec moi des souvenirs inoubliables que Dieu leus accorde le succès dans leur Vie

À chaque département de mathématiques et tous les élèves de ma promotion 2023.

REMERCIEMENTS

Nous remercions Dieu tout-puissant qui nous a inspiré avec patience et persévérance et nous a donné force et détermination pour poursuivre mon parcours académique et nous a aidés a mener à bien ce mémoire da fin d'études.

Je suis particulièrement reconnaissante à mon encadreur, **Dr Chaouchkhouane Nassima** m'a remis le pied à l'étrier de la recherche.

Un grand merci également pour les membres du jury **Pr Jaber Ibtisam** et **Dr Korichi Fatiha** qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je suis très honorée de la présence ma famille plus particulièrement à mon père et ma mère, ils ont toujours supportés et encouragés dans mon projet, aussi ils ont ma donne l'énergie nécessaire pour porter ce projet à bien.

Finalement, je remercie à tous mes collègues et amies pour leur encouragement et leur aide. Merci aussi au Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie "département de mathématiques" de l'Université Mohamed Khider Biskra.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (**EDSPR** en abrégé), ont été introduites par Bismut en 1973 [8], dans le but de résoudre un problème de théorie du contrôle. A l'époque, il s'agissait de résoudre un système découplé, ne comprenant qu'une équation différentielle stochastique progressive classique et une équation différentielle stochastique linéaire rétrograde. Dans les années 90, c'est le début de l'étude des équations différentielles stochastiques progressiles rétrogrades Couplées, nous citons le travail de Antonelli en 1993 [7], qui prouve l'existence et l'unicité locale d'un famille d'$EDSPR$ couplées. Dans cette thèse, nous présentons une méthode probabiliste pour traites une grande classe de **EDSPR** défini par :

$$\begin{aligned} dx_t &= b(t, x_t, y_t, z_t)dt + \sigma(t, x_t, y_t, z_t)dB_t \\ -dy_t &= f(t, x_t, y_t, z_t)dt - z_t dB_t \\ x_0 &= a,\ y_T = \Phi(x_T), \end{aligned}$$

où les cofficints f, b, δ, sont G-montons, c'est à dire qu'il existe une matrice de taille $n \times m$ non dégénérée, telle que pour chaque $(w; t)$ fix, la fonction

$$A(x, y, z) \equiv \begin{pmatrix} -G^T f \\ Gb \\ G\delta \end{pmatrix} (x, y, z) : \mathbb{R}^{n+m+m\times d} \to \mathbb{R}^{n+m+m\times d} \text{ est montone en}(x, y, z).$$

Dans ce cas, pour obtenir une estimation a priori de la différence de deux solutions $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$, la bonne méthode n'est pas d'appliquer la formule d'Itô a $|\hat{x}_t|^2$ et $|\hat{Y}_t|^2$ mais à $\langle G\hat{x}_t,\hat{y}_t\rangle$, et par suite, on va obtenir le théorème d'existence et d'unicité sous les hypothèses $G-$ monoton de A et ϕ.

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique (filtration, processus, stochastique, mouvement brownien, processus d'Itô......), et puis l'existence et l'unicité des équations différentielles stochastiques (**EDS**) .

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le premier résultat d'existence et d'unicité de la solation d'une équation déffirentielle stochastique rétrograde (**EDSR**).

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution pour les équations differentielles stochastiques progressives rétrogrades (**EDSPR**). Enfin de ce chapitre nous donnons quelques exemples d'application au contrôle optimal.

Chapitre 1

Généralités et rappelles

L'objectif de ce chapitre est de présenter les définitions et les notions de base concernant le calcul stochastique.

1.1 Calcul stochastique

Définition 1.1.1 (variable aléatoire) *Toute application mesurable X d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans un espace $(\mathbb{E}, \xi)$ définit une variable aléatoire. X vérifie donc la propriété de mesurabilité.*

$$\forall \beta \in \xi, \ X^{-1}(\beta) \in \mathcal{F}$$

Définition 1.1.2 (processus aléatoire) *un processus aléatoire **(ou fonction aléatoire)** discret (**resp continue**) est une famille de variable aléatoire $(X(t))_{t\in\mathbb{N}}(respX(t)_{t\in\mathbb{R}}))$. Et on représente le processus stochastique comme un application.*

$$X(\cdot,\cdot) : T \times \Omega \to \mathbf{E},$$

$$(t,\omega) \to X(t,\omega).$$

– L'application $X(t,\cdot) : \Omega \to \mathbf{E}$ est une variable aléatoire.

– L'application $X(\cdot,\omega) : T \to \mathbf{E}$ est une trajectoire.

Définition 1.1.3 (Mesurable) *Un processus $X(t)$ est dit mesurable si lapplication $(t,\omega) \to X(t,\omega)$ de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega,\ \beta(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \to (\mathbb{E}, \xi)$ est mesurable.*

Définition 1.1.4 (Filtration) *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire tel que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $s \leq t$.*

Définition 1.1.5 (Processus adapté) *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ Si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.1.6 (progressivement mesurable) *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\beta([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\beta(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.1.7 (Modification d'un processus) *Soient X et Y deux processus, on dit que X est une modification de Y si pour tout $t \geq 0$. les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}-p.s$:*

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$$

Remarque 1.1.1 Définition 1.1.8 (Indistinguable) *On dit que X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P}-p.s$ les trajectoires de X et Y sont les měme , c'est -à-dire :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = 1$$

1.1.1 Mouvement brownien.

Définition 1.1.9 (Mouvement brownien) *On appelle mouvement brownien standard tout processus stochastique B_t à valeurs réelles tel que :*

1. $\mathbb{P} - p.s.$ $t \longrightarrow B_t(\omega)$ est continue.
2. Pour $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $(t-s)$.
3. $B_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$

Pour tout $t > 0$, la variables aléatoire B_t suit la loi gaussienne centrée de variance t donc de densité $(2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-x^2/(2t)\}$.

Proposition 1.1.1 *Soit B un* ***MB*** *standard.*

1. pour tout $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t\geq 0}$est **MB** indépendant de $\sigma\{B_u, u \leq s\}$.
2. $-B$ est aussi un **MB** .
3. pour tout $\mathbf{c} > \mathbf{0}$, $\{cB_{t/c^2}\}_{t\geq 0}$ est un **MB** .
4. le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{1/t}$ est un **MB** .

1.1.2 Martingales.

Définition 1.1.10 (Martingale , sous-martingale et sur-martingale) *Un processus $(X)_{t\geq 0}$ est dit martingale sous-martingale et sur-martingale si :*

1. Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable.
2. Pour tout $t \geq 0$ X_t est intégrable **i.e.**$\mathbb{E}(\mid X_t \mid) < \infty$.
3. Pour $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t) = X_s,\ \mathbb{P} - p.s \text{ (si martingale),}$$
$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t) > X_s, \mathbb{P} - p.s \text{ (si sous-martingale),}$$
$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t) < X_s, \mathbb{P} - p.s \text{ (si sur-martingale).}$$

Remarque 1.1.2 *Si B_t est un **MB**, alors $\{B_{t^2} - t\}_{t\geq 0}$ et $\{exp(\sigma B_t - \sigma^2 t \diagup 2)\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.*

1.2 Intégrale stochastique

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et B un mouvement brownien sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ la filtration naturelle du MB.

L'intégrale stochastique (ou l'intégrale d'itô) est une intégrale de la forme suivante :

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

où $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique.

1.2.1 propritétés de l'intégrale stochastique

1. $\theta \to \int_\theta^t \theta_s dB_s$ est linéaire,
2. $\theta \to \int_\theta^t \theta_s dB_s$ est continue $p.s$,
3. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}$-adapté,
4. $\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ et var $(\int_0^t \theta_s dB_s) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right]$,
5. propriété d'isométrie :

$$\mathbb{E}\left[(\int_0^t \theta_s dB_s)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s ds\right].$$

6. De maniére plus générale, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u dB_u | \mathcal{F}_s\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[(\int_s^t \theta_u dB_u)^2 | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s du | \mathcal{F}_s\right].$$

7. On a méme le résultat plus général :

$$\mathbb{E}\left[(\int_s^t \theta_u dB_u)(\int_s^t \phi_u dB_u) | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^{t\hat{}u} \theta_u \phi_u du | \mathcal{F}_s\right].$$

8. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}-$martingale.

9. Le processus $((\int_s^t \theta_u dB_u)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}-$martingal.

10. La variation quadratique de l'integral stochastique est donné par :

$$\langle \int_0^t \theta_s dB_s \rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

11. La covariance quadrtique entre 2 integrale stochastique est donné par :

$$\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^t \phi_s dB_s \rangle = \int_s^{t\hat{}u} \theta_u \phi_u ds.$$

1.2.2 Calcule d'Itô

Dans tout ce paragraphe, on se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ une filtration qui vérifie les conditions habituelles et B un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-$MB$ (on peut prendre $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$).

Les martingales seront toujours cadlàg.

1.2.3 Processus d'Itô

Définition 1.2.1 (Processus d'Itô) *Un processus d'Itô est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \parallel \theta_s \parallel dB_s < +\infty,$$

où le coefficient φ est le drifte ou la dérivée et θ est le cofficient de diffusion.

On note de manière infinitésimale : $dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dB_s$.

1.2.4 Formule d'Itô

Théorème 1.2.1 (*1er formule d'Itô*) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, ds.$$

Théorème 1.2.2 (*2$^{\text{éme}}$ formule d'Itô*) *Soit f une fonction de C^2, on a alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, \varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s)\, \theta_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \theta_s^2 ds.$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X\rangle_t.$$

Remarque 1.2.1 *La formule d'Itô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (i.e $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $B(t)$ sont des matrices)*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s)\, \varphi_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\, \varphi_s dX_s \\ + \frac{1}{2} tr[\theta(s)^t + f(s, X(s))\, \theta(s)] + \int_0^t f_x(s, X_s)\, \theta_s dB_s \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties) *Si X et Y sont des procesus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t,$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.3 Résultats utiles

Théorème 1.3.1 (théorème de représentation des martingales browniennes) *Soit B_t un mouvement Brownier sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, $\mathbb{P})$, et M_t une martingale $\mathcal{F}_t$ -adapté. Alors, il existe un processus adapté $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T Z_s^2 ds\right) < \infty,$$

et, pour tout $t \in [0,T]$:

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s,\ \mathbb{P} - p.s.$$

Théorème 1.3.2 (Théoréme du point fixe de Picard) *Soit (E.d) un espace métrique complet et $\Psi : E \to E$ une fonction contractante c'est à dire il existe $K \in [0,1]$ tel que :*

$$d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq Kd(x,y), \forall x, y \in E.$$

Alors il existe un unique point $\alpha \in E$ tel que $\Psi(\alpha) = \alpha$.

Théorème 1.3.3 (Inégalité de Burkholder-Davis -gundy BDG) *Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_p telles que, pour tout martingale locale continue $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ et tout $T > 0$, on ait*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Lemme 1.3.1 (Lemme de Gronwall) *Soit $T \geq 0$ et f une fonction posifive me-*

surable bornée telle que :

$$f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)ds,\ \forall t \leq T,$$

où a et b sont des constantes positives. Alors

$$f(t) \leq ae^{bt},\ \forall t \leq T.$$

1.4 Equations différentilles stochastiques

Cette section introduit les équations différentilles stochastiques dirigéees par un mouvement brwnien. Ces équations permettent de tenir compte d'un bruit aléatoire dans l'évolution d'un phénomène. En particulier, elles fournissent des modèles en physique, biologie, économie et finance.

1.4.1 Définitions et notations

Définition 1.4.1 *Une équation différentille stochastique (EDS) est de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.1}$$

où :

- $b : [0, T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$**(la dérive)** et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times d}$(**le coefficient de diffusion**) sont deux fonction mesurables bornées où :$T > 0$ et $k, d \in \mathbb{N}$
- $x \in \mathbb{R}^k$ une condition initiale (**carré intégrable et indépendante du** MB B).

Cette équation est constituée par :

1. Un espace de probabilité filtré complet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ où la filtration est

définie pour tout t positif par :

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\sigma(x, B_r; r < t) \cup N\}.$$

2. Un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Mouvement Brownien B à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
3. Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ continue $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$adapté tel que les intégrales :

$$\int_0^t b(s, X_s)ds \text{ et } \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

sont bien définies de plus l'égalité :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds \; + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \,\forall t \in [0, T] \tag{1.2}$$

soit satisfaite $\forall t \in [0, T]$ $\mathbb{P} - p.s.$

Définition 1.4.2 ***(solution forte).*** *Un processus continu X est dit solution forte de l'EDS (1.1) si :*

- X est progressivement mesurable.
- $\mathbb{P} - p.s$ $\int_0^t \{\mid b(s, , X_s) \mid + \parallel \sigma(s, X_s) \parallel^2\}ds < \infty$, où$\parallel \sigma \parallel = trace(\sigma\sigma^t)$, telle que $\sigma\sigma^t$ la matrice de diffusion.
- $\mathbb{P} - p.s$ on a : $X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$, $\forall t \in [0, T]$.

1.4.2 Existence et unicité des solutions

Pour assurer l'existence et l'unicite d'une solution on a besoin de deux types de condtions pour les fonction b et σ.

Notation :

i) $\mathbf{S}^2(\mathbb{R}^k)$: Espace de Banach constitué des processus X progressivement mesurable, tel que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^2\right] < \infty \text{ et } \parallel X \parallel = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ii) $\mathbf{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$: Sous espace de S^2 formé des processus X continus.

Théorème 1.4.1 (Existente et unicité) *Soient b et σ deux fonctions boréliennes. Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$:*

– Condition de lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$\mid b(t,x) - b(t,y) \mid + \parallel \sigma(t,x) - b(t,y) \parallel \leq K \mid x - y \mid .$$

– Croissance linéaire :

$$\mid b(t,x) \mid + \parallel \sigma(t,x) \parallel < k(1 + |x|).$$

– La condition initiale x est de carré intégrable i.e $E[\mid x \mid^2] < \infty$.

Alors l'EDS (1.1) posséde une unique solution appartient à S^2 et donc à S_c^2.

Chapitre 2

Equations différentilles stochastiques rétrogrades

Dans ce chpitre, nous introduisons la notion des équations différentielles stochastiques rétrogrades que l'on notera EDSR. Nous étudions des résultats d'existence et d'unicité de la solution dans le cas lipschitzienne, ce résultat est introduits par pardoux et peng en 1990 [9].

2.1 Introduction

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité $T \geq 0, B = (B_t)_{t\geq 0} \geq$ un mouvement brownier de $\mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle et $\xi \in \mathcal{F}_T$.Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t),\ t \in [0, T],\ Y_T = \xi,$$

en imposant que la solution au moment t ne dépende que du passsé c-à-d que le processus Y soit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons pour commencer le cas où $f \equiv 0$.On est tenté de donner comme solution $Y_t = \xi$ qui n'est pas adaptée que si ξ n'est pas déterministe.La meilleur approximation- disons dans L^2- adaptée est la martingale $Y_T = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$.Si on travaille avec la filtration naturelle d'un MB, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

on pose $t = T$, d'ou

$$\begin{aligned} Y_T &= \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T Z_s dB_s \\ &= \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dB_s + \int_t^T Z_s dB_s \\ &= Y_t + \int_t^T Z_s dB_s \end{aligned}$$

On a alores :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s, \text{ ie } -dY_t = -Z_t dB_t, \quad t \in [0,T] \quad Y_T = \xi \ .$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde varaible apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z, l'équation devient donc :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \qquad \text{avec,} \quad Y_T = \xi$$

Notation :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et B un MB d-dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB B.

- $S^2(\mathbb{R}^k)$ désigne l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\| Y \|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $S_c^2(\mathbb{R}^k)$le sous-espace formé par les processus continus.

- $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'espace vectoriel formé par les processus Z, progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\| Z \|_{\mathcal{M}^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \| Z_t \|^2 \, dt\right] < \infty,$$

ou si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\| z \|^2 = trace(zz^*)$.

- $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désignent l'ensemble des classes d'équivalence de$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.
- B^2 : Espace de banach $S_c^2(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, muni de la norm :

$$\| (Y, Z) \|_{B^2} = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T \| Z_t \|^2 \, dt\right],$$

- $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est appelé le générateur, telle que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ le processus $\{f(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. avec f s'applle le générateur de l'$EDSR$.
- ξ un v.a de carré intégrable $\mathcal{F}_T$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$(condition terminale)

Soit l'$EDSR$:

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \; 0 \leq t \leq T, \; Y_T = \xi,$$

ou sous la forme intégral :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

Définition 2.1.1 *Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$

,

2. $\mathbb{P} - p.s$ $\boxed{\int_0^T \{\mid f(s, Y_s, Z_s) \mid + \parallel Z_s \parallel^2\} ds < \infty,}$

3. $\mathbb{P} - p.s.$ on a :

$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$

Proposition 2.1.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ *positif, appartenant à* $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ *et une constantes positives* λ *telles que :*

$$\forall\left(t, y, z\right) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \quad \mid f\left(t, y, z\right) \mid \leq f_t + \lambda(\mid y \mid + \parallel z \parallel).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR (2.1) telle que* $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *alors* Y *appartient à* S_c^2.

Preuve. On a pour tout $t \in [0, T]$:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_0^t Z_s dB_s,$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur f :

$$\begin{aligned} &\mid Y_t \mid \leq \mid Y_0 \mid + \int_0^t \mid f\left(s, Y_s, Z_s\right) \mid ds - \left|\int_0^t Z_s dB_s\right| \\ &\leq \mid Y_0 \mid + \int_0^t (f_s + \lambda \parallel Z_s \parallel) ds + \sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t Z_s dB_s\right| + \lambda \int_0^t \mid Y_s \mid ds. \end{aligned}$$

Posons

$$\varsigma = \mid Y_0 \mid + \int_0^T (f_s + \lambda \parallel Z_s \parallel) ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_s dB_s \right|.$$

Par hypothése, Z appartient $\mathcal{M}^2$ et donc via l'inegalité de Doob, le troisiéme terme est de carré intégrable, il en est de méme pour$(f_t)_{0 \leq t \leq T}$ et Y_0 est une constont, donc de carré intégrable, il s'en suit que ς est une v.a de carré intégrable, comme Y est un processus continus qui vérifie :

$$\mid Y_t \mid \leq \varsigma + \lambda \int_0^t \mid Y_s \mid ds.$$

Par le lemme de Gronwall, on aura :

$$\mid Y_t \mid \leq \varsigma \exp(\lambda t)$$

et donc :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mid Y_t \mid \leq \varsigma \exp(\lambda T)$$

comme ς est de carré integrable, alors Y appartient à S_c^2. ■

2.2 Existence et unicité

Dans ce paragraphe, nous énonçons à présent le résultat de **E.Pardoux** et **S.Peng**, pour les $EDSR$ dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler

Hypothèses (L1)

Il existe $\lambda \geq 0$ telle que $\mathbb{P} - p.s.$

H1 Condition de Lipschitz en (y, z) **:**

pour tout $t, y, y^{`}, z, z^{`}$:

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda(|y-y'| + ||z-z'||)$$

H2 Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds\right] < \infty$$

Nous commencons par un cas trés simple où f ne dépend ni de y ni de z i.e on se donne ξ de carré intégrable et un processus $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'$EDSR$:

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Y_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *Soit $\xi \in L^2$, $\mathcal{F}_T$-mesurable et $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$. l'$EDSR$ (2.2) posséde une unique solution (Y,Z) tq : $Z \in \mathcal{M}^2$.*

Preuve. Soit (Y,Z) un solution de(2.2) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$.En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$ on a :

$$\begin{aligned}
Y_t &= \mathbb{E}\left(Y_t \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s dB_s\right)
\end{aligned}$$

pisque $\int_t^T Z_s dB_s$ est une martingale alors $\mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s dB_s\right) = 0.$

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

Y est donc définie de cette formule et il reste à trouver Z. Comme $F = (F_t\ )_{0 \leq t \leq T}$ est de carré intégrable $(\int_0^t \mathcal{F}_s ds)_{0 \leq t \leq T}$est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ car il est progressivement mesurable. On a alors :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds \\ &= M_t - \int_0^t F_s ds. \end{aligned}$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus $Z \in \mathcal{M}^2$ tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s,$$

et donc :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainis construit est une solution de l'$EDSR$ étudiée puisque comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - (M_0 + \int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T F_s ds) \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

On obtient :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

Par conséquent, l'unicité existe pour les solutions qui vérifient $Z \in \mathcal{M}^2$. ■

Maintenant on va montrer le théorème de **Pardoux** et **Peng**.

Théorème 2.2.1 (Pardoux- Peng) *D'après les hypothèses ($H1$ et $H2$) l'EDSR* (2.1) *possède une unique solution* (Y, Z) *tq* $Z \in \mathcal{M}^2$ *:*

Preuve. On utilise un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'$EDSR$ (2.1) si et seulement si (Y, Z) est un point fixe de ψ. Pour (U, V) de $\mathcal{B}^2$ on définit $(Y, Z) = \psi(U, V)$ comme une solution de l'$EDSR$:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, U_s, V_s\right) ds - \int_t^T Z_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière l'**EDSR** possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$.en effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s)$.ce processus appartient à $\mathcal{M}^2$ puisque f étant Lipschitz :

$$\mid F_s \mid \leq \mid f(s, 0, 0) \mid + \lambda \mid U_s \mid + \lambda \parallel V_s \parallel,$$

Et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. par suite, nous pouvons appliquer le lemme(2.2.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$. $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$, l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la proposition(2.1.1), Y appartient à S_c^2. l'application de ψ dans $\mathcal{B}^2$ lui-même est donc bien définie.

Soient (U, V) et $(U`, V`)$ deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et $(Y, Z) = \psi(U, V), (Y`, Z`) = \psi(U`, V`)$.On note que : $z = Z - Z`$ et $y = Y - Y'$. on a $y_T = 0$ et :

$$dy_t = \{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\}dt + z_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2) &= \alpha e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 dt + 2e^{\alpha t} y_t \cdot \{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t)\} \, dt \\ &-2e^{\alpha t} y_t \cdot z_t dB_t + e^{\alpha t} \parallel z_t \parallel^2 dt. \end{aligned}$$

et par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds &= \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha \mid y_s \mid^2 - 2y_s \cdot \{f(s, U_s, V_s) - f(s, U'_s, V'_s)\})ds \\ &+ \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s \cdot z_s dB_s, \end{aligned}$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha \mid y_s \mid^2 + 2\lambda \mid y_s \mid \mid u_s \mid + 2\lambda \mid y_s \mid \parallel v_s \parallel)ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s \cdot z_s dB_s. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha + 2\lambda^2 / \varepsilon) \mid y_s \mid^2 ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s \cdot z_s dB_s + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha s}(\mid u_s \mid^2 + \parallel v_s \parallel^2) ds, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$, on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T e^{\alpha s}(\mid u_s \mid^2 + \parallel v_s \parallel^2)ds$,

$$\forall t \in [0, T], \, e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds \leq R_\varepsilon - 2 \int_t^T e^{\alpha s} y_s \cdot z_s dB_s. \tag{2.3}$$

La martingale locale $\{\int_0^T e^{\alpha s} y_s \cdot z_s dB_s\}_{t \in [0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à S_c^2 et Z, Z'appartienent à $\mathcal{M}^2$. En prenant l'espérance, il vient que pour $t = 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité de (2.3), les inégalités **Burkholder-Davis-Gundy** fournissent,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + (-2C)\mathbb{E}\left[(\int_0^T e^{2\alpha s} \mid y_s \mid^2 \parallel z_s \parallel^2 ds)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[(\sup_{t0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 (C^2 \int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds))^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t0\leq t\leq T} e^{\alpha t/2} \mid y_t \mid (C^2 \int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Puis, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds\right].$$

Prenant en considération l'inégalité (2.4), on obtient finalement :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds\right] \leq (3 + C^2)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right],$$

et par suit, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel z_s \parallel^2 ds\right] \leq$$
$$\varepsilon(3 + C^2)(1 \vee T)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid u_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel v_s \parallel^2 ds\right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon(3 + C^2)(1 \vee T) = \frac{1}{2}$, de sorte que l'application ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans si on lui-même si on le munit de la norme qui on fait un espace de Banach, cette dernier norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$. ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'$EDSR$ (2.1) dans $\mathcal{B}^2$.

■

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades

Dans ce chapitre, nous étudions le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades couplées dans le cas où les cofficients sont monotones , ce résultat est introduits par **Shige Peng** et **Zhen Wu** en 1999 [6].

3.1 Définitions

Soient$(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension d dans cet espace. On note par $\mathcal{F}_t$ la filtration naturelle de ce mouvement brownien. Dans cette section, nous considérons l'équation différentielle stochastique progressive rétrograde couplées (**EDSPR**) suivantes :

$$
\begin{cases}
dx_t = b(t, x_t, y_t, z_t)dt + \sigma(t, x_t, y_t, z_t)dB_t, \\
-dy_t = f(t, x_t, y_t, z_t)dt - z_t dB_t, \\
x_0 = a, \;\; y_T = \Phi(x_T),
\end{cases} \tag{3.1}
$$

où :$b : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^{n\times d}$, $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^m$, et $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

On nous donne une matrice G de rang $m \times n$ complet. Nous utilisons les notations :

$$
u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \;\; A = (t,u) = \begin{pmatrix} -G^T f \\ Gb \\ G\sigma \end{pmatrix} (t,u)\,,
$$

où $G_\sigma = (G_{\sigma 1} ... G_{\sigma d})$. Nous utilisons le produit interne habituel et la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{m\times d}$.

Théorème 3.1.1 *Un triple de processus* $(X, Y, Z) : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ *est appelé une solution adaptée d'****EDSPR*** *(3.1) si* $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}^2\left(0, T; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}\right)$ *et il satisfait l'****EDSPR*** *(3.1) .*

Nous supposons que :

$$
\begin{cases}
(i)\; A(t,u) \text{ est uniformément Lipschitz par rapport à } u; \\
(ii) \text{ pour chaque } u, \;\; \text{A}(.,u) \text{ est dans } \mathcal{M}^2(0,T), \\
(iii)\; \Phi(x) \text{ est uniformément Lipschitz par rapport à } x \in \mathbb{R}^n, \\
(iv) \text{ pour tout } x,\, \Phi(x) \text{ est dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}).
\end{cases} \tag{3.2}
$$

Les conditions de monotonies suivantes sont les hypothèses principales :

$$\begin{aligned}
&\langle A(t,u) - A(t,\bar{u}),\ u-\bar{u}\rangle \leq -\beta_1|G\hat{x}|^2 - \beta_2|G^T\hat{y}|^2,\\
&\langle \Phi(x) - \Phi(\bar{x}),\ G(x-\bar{x})\rangle \geq 0\\
&\forall u=(x,y,z),\ \bar{u}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z}),\ \hat{x}=x-\bar{x},\ \hat{y}=y-\bar{y},\ \hat{z}=z-\bar{z},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

où β_1 et β_2 sont des constantes non négatives avec $\beta_1+\beta_2>0$. De plus, nous avons $\beta_1>0$ (*rés.*, $\beta_2>0$) lorsque $m>n$ (*rés.*, $n>m$).

Le premier résultat de cette section est le théorème d'unicité suivant :

Théorème 3.1.2 *Sous les hypothèses* (3.2) *et* (3.3)*. Alors l'**EDSPR*** (3.1) *a au plus une solution adaptée.*

Preuve. Soit $u_s=(x_s,y_s,z_s)$ et $u_s^{\backprime}=(x_s^{\backprime},y_s^{\backprime},z_s^{\backprime})$ deux solutions de (3.1). Nous avons défini : $\hat{u}=(x-x^{\backprime},y-y^{\backprime},z-z^{\backprime})=(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ on applique la formule d'Itô à $\langle G\hat{x}_s,\hat{y}_s\rangle$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\langle \Phi(x_T)-\Phi(x_T^{\backprime}),G\hat{x}_T\rangle - \mathbb{E}\langle \hat{y}_t,G\hat{x}_t\rangle &= \mathbb{E}\int_t^T \langle A(s,u_s)-A(s,u_s^{\backprime}),\hat{u}_s\rangle ds\\
&\leq -\beta_1\mathbb{E}\int_t^T\langle G\hat{x}_s,G\hat{x}_s\rangle ds - \beta_2\mathbb{E}\int_t^T\langle G^T\hat{y}_s,G^T\hat{y}_s\rangle ds.
\end{aligned}$$

Ceci avec la monotonie de ϕ et A, implique :

$$\beta_1\mathbb{E}\int_0^T\langle G\hat{x}_s,G\hat{x}_s\rangle ds + \beta_2\mathbb{E}\int_0^T\langle G^T\hat{y}_s,G^T\hat{y}_s\rangle ds \leq 0.$$

Nous traitons d'abord le cas où $m>n$. Dans ce cas $\beta_1>0$, puis $\langle G\hat{x}_s,G\hat{x}_s\rangle\equiv 0$. Nous avons $\hat{x}_s\equiv 0$. Ainsi $x_s\equiv x_s^{\backprime}$. En particulier, $\Phi(x_T)\equiv\Phi(x_T^{\backprime})$. d'après l'unicité de **EDSR**, il s'ensuit que $y_s\equiv y_s^{\backprime}$ et $z_s\equiv z_s^{\backprime}$. Nous discutons maintenant du deuxième cas où $m<n$. Dans ce cas $\beta_2>0$, alors $\langle G^T\hat{x}_s,G^T\hat{x}_s\rangle\equiv 0$. Nous avons $y_s\equiv \grave{y}_s$. Nous appliquons la formule d'Itô à $|\hat{y}_s|^2\equiv 0$. Il s'ensuit que $\int_0^T|z_s-z_s^{\backprime}|^2ds=0$. Ainsi $z_s\equiv z_s^{\backprime}$. Enfin, d'après l'unicité de l' **EDS**, il s'ensuit que $x_s\equiv x_s^{\backprime}$. De manière similaire aux deux cas ci-dessus, le résultat peut être obtenu facilement dans le cas $m = n$. ■

Nous donnons maintenant un résultat d'existence de **EDSPR** (3.1) pour un cas particulier où Φ ne dépend pas de x, c'est-à-dire $\Phi(x) \equiv \xi$.

Théorème 3.1.3 *Nous supposons que $y_T = \xi$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et (3.2), (3.3) sont vérifiant alors : il existe un unique triple $u_s = (x_s, y_s, z_s)$, $s \in [0, T]$ satisfaisant les équations (3.1).*

- L'unicité est une conséquence immédiate du théorème (3.1.2) .
- Pour la preuve de l'existence. Nous avons d'abord besoin des deux lemmes suivants.Considérons la famille suivante de **EDSPR** paramétrée par $\alpha \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} dx_t^\alpha &= \left[(1-\alpha)\beta_2(-G^T y_t^\alpha) + \alpha b(t, u_t^\alpha) + \phi_t\right] dt \\ &\quad + \left[(1-\alpha)\beta_2(-G^T z_t^\alpha) + \alpha\sigma(t, u_t^\alpha) + \psi_t\right] dB_t, \\ -dy_t^\alpha &= [(1-\alpha)\beta_1 G x_t^\alpha + \alpha f(t, u_t^\alpha) + \gamma_t]dt - z_t^\alpha dB_t, \\ x_0^\alpha &= a,\ y_T^\alpha = \xi, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où ϕ, ψ et γ sont des processus donnés en $\mathcal{M}^2(0, T)$ avec des valeurs en $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d}$ et $\mathbb{R}^m$, resp. Clairement, lorsque $\alpha = 1$ l'existence de la solution de(3.4) implique celle de (3.1) pour $y_T \equiv \xi$. Le lemme suivant donne une estimation a priori de "l'intervalle d'existence"de (3.4) par rapport à $\alpha \in [0, 1]$.

Lemme 3.1.1 *Nous supposons (3.2) et (3.3) sont satisfant. Alors il existe une constante positive δ_0 tel que si, a priori, pour un $\alpha_0 \in [0, 1)$ il existe une solution $(x^{\alpha_0}, y^{\alpha_0}, z^{\alpha_0})$ de (3.4), alors pour chaque $\delta \in [0, \delta_0]$ il existe une solution $(x^{\alpha_0+\delta}, y^{\alpha_0+\delta}, z^{\alpha_0+\delta})$ de (3.4) pour $\alpha = \alpha_0 + \delta$*

Preuve. Puisque pour chaque $\phi \in \mathcal{M}^2(0, T; \mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathcal{M}^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, $\psi \in \mathcal{M}^2(0, T; \mathbb{R}^{n\times d})$,

$\alpha \in [0,1)$ il existe une unique solution de (3.4), donc, pour chaque triple

$$u_s = (x_s, y_s, z_s) \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^{n+m+m\times d})$$

il existe un triple unique $U_s = (X_s, Y_s, Z_s) \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^{n+m+m\times d})$ satisfaisant l' **EDSPR** suivante :

$$\begin{aligned}
dX_t &= [(1-\alpha_0)\beta_2(-G^T Y_t) + \alpha_0 b(t,U_t) + \delta(\beta_2 G^T y_t + b(t,u_t)) + \phi_t]dt \\
&\quad + \left[(1-\alpha_0)\beta_2(-G^T Z_t) + \alpha_0\sigma(t,U_t) + \delta(\beta_2 G^T z_t + \sigma(t,u_t)) + \psi_t\right] dB_t, \\
-dY_t &= [(1-\alpha)\beta_1 G X_t + \alpha_0 f(t,U_t) + \delta(-\beta_1 G x_t + f(t,u_t)) + \gamma_t]dt - Z_t dB_t, \\
X_0 &= a,\ Y_T = \xi.
\end{aligned}$$

Nous allons prouver que la application définie par :

$$I_{\alpha_0+\delta}(u) = U : \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^{n+m+m\times d}) \to \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^{n+m+m\times d}),$$

est une contraction. Soient $u' = (x', y', z') \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^{n+m+m\times d})$ et soient $U' = (X', Y', Z') = I_{\alpha_0+\delta}(u')$. Nous avons défini : $\hat{u} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x - x', y - y', z - z')$, $\hat{U} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) = (x - x', y - y', z - z')$. On applique la formule d'Itô à $\langle G\hat{x}_{s,}\hat{y}_s\rangle$, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\int_0^T \langle \alpha_0(A(s,U_s) - A(s,U'_s)), \hat{U}_s\rangle ds \\
&\quad - (1-\alpha_0)\mathbb{E}\int_0^T (\beta_1\langle G\hat{X}_s, G\hat{X}_s\rangle ds + \beta_2\langle G^T\hat{Y}_s, G^T\hat{Y}_s\rangle + \beta_2\langle G^T\hat{Z}_s, G^T\hat{Z}_s\rangle)ds \\
&\quad + \delta\mathbb{E}\int_0^T (\beta_1\langle G\hat{X}_s, G\hat{x}_s\rangle + \beta_2\langle G^T\hat{Y}_s, G^T\hat{y}_s\rangle + \beta_2\langle G^T\hat{Z}_s, G^T\hat{z}_s\rangle \\
&\quad + \langle \hat{X}, -G^T\bar{f}_s\rangle + \langle G^T\hat{Y}_s, \bar{b}_s\rangle + \langle \hat{Z}_s, G\bar{\sigma}_s\rangle)ds,
\end{aligned}$$

où

$$\bar{f}_s = f(s,u_s) - f(s,u^{`}_s),\ \bar{b}_s = b(s,u_s) - b(s,u^{`}_s),\ \bar{\sigma}_s = \sigma(s,u_s) - \sigma(s,u^{`}_s).$$

À partir de (3.2) et, (3.3) nous pouvons obtenir :

$$\mathbb{E}\int_0^T (\beta_1\langle G\hat{X}_s, G\hat{X}_s\rangle ds + \beta_2\langle G^T\hat{Y}_s, G^T\hat{Y}_s\rangle)ds \leq \delta C_1 \mathbb{E}\int_0^T (|\hat{u}_s|^2 + |\hat{U}_s|^2)ds.$$

D'autre part, puisque X et $X^{`}$ sont des solutions de **EDS**, en appliquant la technique habituelle, les estimations de la différence $\hat{X} = X - X^{`}$ sont obtenues par

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq s\leq T}\mathbb{E}|\hat{X}_s|^2 &\leq C_1\delta\mathbb{E}\int_0^T |\hat{u}_s|^2 ds + C_1\mathbb{E}\int_0^T (|\hat{Y}_s|^2 + |\hat{Z}_s|^2)ds,\\
\mathbb{E}\int_0^T |\hat{X}_s|^2 ds &\leq C_1 T\delta\mathbb{E}\int_0^T |\hat{u}_s|^2 ds + C_1 T\mathbb{E}\int_0^T (|\hat{Y}_s|^2 + |\hat{Z}_s|^2)ds.
\end{aligned}$$

De même, pour la différence des solutions $(\hat{Y},\hat{Z}) = (Y - \grave{Y}, Z - \grave{Z})$, on applique la technique habituelle à la **EDSR** :

$$\mathbb{E}\int_0^T (|\hat{Y}_s|^2 + |\hat{Z}_s|^2)ds \leq C_1\delta\mathbb{E}\int_0^T |\hat{u}_s|^2 ds + C_1\mathbb{E}\int_0^T |\hat{X}_s|^2 ds.$$

Ici, la constante C_1 dépend des constantes de Lipschitz ainsi que de G, β_1, β_2, et T. En utilisant la formule d'Itô à $|\hat{Y}_s|^2$ à la **EDSR** une fois de plus, il donne

$$\begin{aligned}
&|\hat{Y}_0|^2 + \mathbb{E}\int_0^T |\hat{Z}_s|^2 ds\\
&= \mathbb{E}\int_0^T 2\hat{Y}_s[\alpha_0(f(s,U_s) - f(s,U^{`}_s)) + (1-\alpha_0)\beta_1 G\hat{X}_s + \delta\bar{f}_s - \delta\beta_1 G\hat{x}_s]ds\\
&\leq \frac{1}{4}\mathbb{E}\int_0^T |\hat{Z}_s|^2 ds + \frac{1}{4L}\mathbb{E}\int_0^T |\hat{X}_s|^2 ds + C_2\mathbb{E}\int_0^T |\hat{Y}_s|^2 ds + C_2\delta\mathbb{E}\int_0^T |\hat{u}_s|^2 ds.
\end{aligned}$$

Ici $L = max(C_1, T, 1)$, C_2 est une constante suffisamment grande qui dépend de L, G, β_1, et les constantes de Lipschitz. En combinant les cinq estimations ci-dessus, il est clair que, chaque fois que $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ et / ou $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ est vrai, nous avons toujours

$$\mathbb{E}\int_0^T |\hat{U}_s|^2 ds \leq C\delta\mathbb{E}\int_0^T |\hat{u}_s|^2 ds,$$

où la constante C ne dépend que de C_1, C_2, L et T. Nous choisissons maintenant $\delta_0 = \frac{1}{2C}$ Il est clair que, pour chaque δ fixe tq $\delta \in [0, \delta_0]$, l'application $I_{\alpha_0+\delta}$ est une contraction tq :

$$\mathbb{E}\int_0^T |\hat{U}_s|^2 ds \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T |\hat{u}_s|^2 ds.$$

Il s'ensuit immédiatement que cette fonction admet un unique point fixe $U^{\alpha_0+\delta} = \left(X^{\alpha_0+\delta}, Y^{\alpha_0+\delta}, Z^{\alpha_0+\delta}\right)$ qui est la solution de (3.4) pour $\alpha = \alpha_0 + \delta$. La preuve est compléter. ■

il reste à preuver que si $\alpha = 0$, (3.4), i.e

$$\begin{aligned} dx_t^0 &= [-\beta_2 G^T y_t^0 + \phi_t]dt + [-\beta_2 G^T z_t^0 + \psi_t]dB_t, \\ -dy_t^0 &= [\beta_1 G x_t^0 + \gamma_t]dt - z_t^0 dB_t, \\ x_0^0 &= a, \ y_T^0 = \xi, \end{aligned}$$

a une unique solution.

Nous traiterons une situation plus générale qui peut être également utilisée dans la preuve de théorème (3.1.4)

Lemme 3.1.2 *L'équation suivante admet une unique solution :*

$$\begin{aligned} dx_t &= [-\beta_2 G^T y_t + \phi_t]dt + [-\beta_2 G^T z_t + \psi_t]dB_t, \\ -dy_t &= [\beta_1 G x_t + \gamma_t]dt - z_t dB_t, \\ x_0 &= a, \ y_T = \lambda G x_T + \xi, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où λ est une constante non négative.

Preuve. On observe que la matrice G est de rang complet. La preuve de l'existence pour (3.5) sera divisé en deux cas : $n \leq m$ et $n > m$. Pour le premier cas, la matrice $G^T G$ est strictement positive. Nous avons défini :

$$\begin{pmatrix} x^{\backprime} \\ y^{\backprime} \\ z^{\backprime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ G^T y \\ G^T z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y^{\backprime\backprime} \\ z^{\backprime\backprime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_m - G(G^T G)^{-1} G^T) y \\ (I_m - G(G^T G)^{-1} G^T) z \end{pmatrix}.$$

En multipliant G^T à des deux côtés d' **EDSR** pour (y, z) ,donne :

$$\begin{aligned} dx^{\backprime}_t &= [-\beta_2 y^{\backprime}_t + \phi_t]dt + [-\beta_2 z^{\backprime}_t + \psi_t]dB_t, \\ -dy^{\backprime}_t &= [\beta_1 G^T G x^{\backprime}_t + G^T \gamma_t]dt - z^{\backprime}_t dB_t, \\ x^{\backprime}_0 &= a, \ y^{\backprime}_T = \lambda G^T G x^{\backprime}_T + G^T \xi. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En multipliant $\left(I_m - G(G^T G)^{-1} G^T\right)$ à des deux côtés de la même équation donne :

$$\begin{aligned} -dy^{\backprime\backprime}_t &= (I_m - G(G^T G)^{-1} G^T)\gamma_t dt - z^{\backprime\backprime}_t dB_t, \\ y^{\backprime\backprime}_T &= (I_m - G(G^T G)^{-1} G^T)\xi. \end{aligned}$$

De toute évidence, la paire $(y^{\backprime\backprime}, z^{\backprime\backprime})$ est déterminée d'une manière unique. L'unicité de $(x^{\backprime}, y^{\backprime}, z^{\backprime})$ découle du théorème (3.1.2). Afin de résoudre (3.6), nous introduisons l'équation différentielle ordinaire symétrique à valeurs matricielles $n \times n$ suivante, connue sous le nom d'équation matricielle de Riccati :

$$\begin{aligned} -K^{\backprime}(t) &= -\beta_2 K^2 + \beta_1 G^T G, \ t \in [0, T], \\ K(T) &= \lambda G^T G. \end{aligned}$$

Il est bien connu que cette équation admet une unique solution non négative $K(.) \in C^1([0, T]; S^n)$, où S^n représente l'espace de toutes les matrices $n \times \ n$ symétriques.

Nous considérons ensuite la solution $(p, q) \in \mathcal{M}^2(0, T; \mathbb{R}^{n+n\times d})$ d' **EDSR** linéaire simple suivant :

$$
\begin{aligned}
-dp_t &= [-\beta_2 K(t)p_t + K(t)\phi_t + G^T\gamma_t]dt + [K(t)\psi_t - (I_n + \beta_2 K(t)q_t]dB_t,\ t \in [0, T], \\
p_T &= G^T\xi.
\end{aligned}
$$

Nous supposone maintenant x'_t est la solution l' **EDSR** suivante :

$$
\begin{aligned}
dx'_t &= [-\beta_2(K(t)x'_t + p_t) + \phi_t]dt + [\psi_t - \beta_2 q_t]dB_t,\ t \in [0, T], \\
x'_0 &= a.
\end{aligned}
$$

Ensuite, il est facile de vérifier que $(x'_t, y'_t, z'_t) = (x'_t, K(t)x'_t + p_t, q_t]$ est la solution de (3.6). Une fois que (x', y', z') et (x'', y'') sont résolus, alors le triple (x, y, z) est obtenu d'une manière unique par

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ G(G^TG)^{-1}y' + y'' \\ G(G^TG)^{-1}z' + z'' \end{pmatrix}.
$$

La preuve pour le cas $n > m$ est analogue au cas contraire ci-dessus. Nous observons que dans ce cas la matrice G^TG est de rang complet. Nous avons défini :

$$
\begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gx \\ (I_n - G^T(GG^T)^{-1}G)x \\ y \\ z \end{pmatrix}.
$$

x''est la unique solution l' **EDS** linéaire suivante :

$$
\begin{aligned}
dx''_t &= (I_n - G^T(GG^T)^{-1}G)\phi_t dt + (I_n - G^T(GG^T)^{-1}G)\psi_t dB_t,\\
x''_0 &= (I_n - G^T(GG^T)^{-1}G)a.
\end{aligned}
$$

Alore le triple (x', y', z') résoudue l' **EDSR**

$$
\begin{aligned}
dx'_t &= [-\beta_2 GG^T y'_t + G\phi_t]dt + [G\psi_t - \beta_2 GG^T z'_t]dB_t,\\
-dy'_t &= [-\beta_1 x'_t + \gamma_t]dt - z'_t dB_t, \qquad (3.7)\\
x'_0 &= Ga,\ \ y'_T = \lambda x'_T + \xi.
\end{aligned}
$$

Pour résoudre cette équation, nous introduisons a la solution $K(.) \in ([0,T]; S^m)$ de l'équation de Riccati à valeurs matricielles symétrique $m \times m$

$$
\begin{aligned}
-K(t) &= \beta_1 I_m - \beta_2 KGG^T K,\ \ t \in [0,T],\\
K(T) &= \lambda I_m.
\end{aligned}
$$

Nous considérons ensuite la unique solution $(p,q) \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^{m+m\times d})$ de l' **EDSR** linéaire suivante :

$$
\begin{aligned}
-dp_t &= (-\beta_2 K(t)GG^T)p_t + K(t)G\phi_t + \gamma_t)dt + (K(t)G\psi_t - (I_m + \beta_2 K(t)GG^T)q_t)dB_t,\ \ t \in [0,T],\\
p_T &= \xi.
\end{aligned}
$$

Nous supposons maintenant x'_t est la solution de l' **EDS**

$$
\begin{aligned}
dx'_t &= [-\beta_2 GG^T(k(t)x'_t + p_t) + G\phi_t]dt + [G\psi_t - \beta_2 GG^T q_t]dB_t,\ \ t \in [0,T]\\
x'_0 &= Ga.
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que $(x'_t, y'_t, z'_t) = (x'_t, K(t)x'_t + p_t, q_t]$ est la solution de (3.7). Lorsque

$(x^{`}, x^{``}, y^{`}, z^{`})$ sont résolus, par la définition, le triple (x, y, z) est obtenu d'une manière unique par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^T(GG^T)^{-1}x^{`} + x^{``} \\ y^{`} \\ z^{`} \end{pmatrix}$$

La preuve est complète. ■

Nous procédons maintenant à ce qui suit.

Preuve de l'existence du théorème (3.1.3). Par le *lemme* (3.1.2), lorsque $\lambda = 0$ dans (3.5), (3.4) pour $\alpha_0 = 0$ elle a une unique solution .

Alors il s'ensuit du lemme (3.1.1). qu'il existe une constante positive $\delta_0 = \delta_0(C_1, C_2, L, T)$ telle que pour chaque $\delta \in [0, \delta_0]$, (3.4) pour $\alpha = \alpha_0 + \delta$ admet une unique solution .

Puisque δ_0 ne dépend que de (C_1, C_2, L, T), nous pouvons répéter ce processus pour N fois avec $1 \leq N\delta_0 < 1 + \delta_0$. Il s'ensuit alors que, en particulier, (3.4) pour $\alpha = 1$ avec $\phi_s \equiv 0$,$\gamma_s \equiv 0$, et $\psi_s \equiv 0$ a une solution unique. La preuve est complète.

Maintenant, nous pouvons considérer l' **EDSPR** (3.1) pour $y_T = \Phi(x_T)$. En fait, l'hypothèse(3.2) doit être renforcée comme suit :

$$\begin{aligned}
&\langle A(t,u) - A(t,\bar{u}), u - \bar{u}\rangle \leq -\beta_1 \mid G\hat{x} \mid^2 -\beta_2(\mid G^T\hat{y} \mid^2 - \mid G^T\hat{z} \mid^2), \\
&\langle \Phi(x) - \Phi(\bar{x}),\ G(x - \bar{x}) \geq \mu_1 \mid G\hat{x} \mid^2 \\
&\forall u = (x, y, z),\ \bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \hat{x} = x - \bar{x},\ \hat{y} = y - \bar{y},\ \hat{z} = z - \bar{z},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

où β_1, β_2 et μ_1 sont des constantes non négatives avec $\beta_1 + \beta_2 > 0$, $\mu_1 + \beta_2 > 0$. De plus on a $\beta_1 > 0$, $\mu_1 > 0$ $(resp., \beta_2 > 0)$ lorsque $m > n$ $(rés., m > n)$.

Nous avons le résultat principal de cette section suivant.

Théorème 3.1.4 *Nous suposons* (3.2) *et* (3.8) *sont satisfant. alors, il existe un unique solution adapté* (X, Y, Z) *de l'**EDSPR*** (3.1).

En fait, la méthode pour prouver l'existence est similaire au théorème (3.1.3). Nous considérons maintenant l' equation suivante (3.9) pour chaque $\alpha \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} dx_t^\alpha &= [(1-\alpha)\beta_2(-G^T y_t^\alpha) + \alpha b(t,u_t^\alpha) + \phi_t]dt \\ &\quad + [(1-\alpha)\beta_2(-G^T z_t^\alpha) + \alpha\sigma(t,u_t^\alpha) + \psi_t]dB_t, \\ -dy_t^\alpha &= [(1-\alpha)\beta_1 G x_t^\alpha + \alpha f(t,u_t^\alpha) + \gamma_t]dt - z_t^\alpha dB_t, \\ x_0^\alpha &= a,\ y_T^\alpha = \alpha\Phi(x_T^\alpha) + (1-\alpha)Gx_T^\alpha + \xi, \end{aligned} \tag{3.9}$$

où ϕ, ψ et γ sont des processus donnés en $\mathcal{M}^2(0,T)$ avec des valeurs en $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d}$ et $\mathbb{R}^m$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_r \mathbb{P})$. Il est clair que l'existence de (3.9) pour $\alpha = 1$ implique l'existence de (3.1).

Afin d'obtenir cette conclusion, nous avons besoin également du lemme suivant :

Lemme 3.1.3 *Nous supposons (3.2) et (3.8) sont vérifiant. Alors il existe une constante positive δ_0 tel que apriori si pour un $\alpha_0 \in [0,1)$ il existe un triple de solution $(X^{\alpha_0}, Y^{\alpha_0}, Z^{\alpha_0})$ de (3.9) , alors pour chaque $\delta \in [0,\delta_0]$ il existe une solution $(X^{\alpha_{0+\delta}}, Y^{\alpha_{0+\delta}}, Z^{\alpha_{0+\delta}})$ (3.9) pour $\alpha = \alpha_0 + \delta$.*

Preuve. Puisque pour chaque $\phi \in \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^m)$, $\psi \in \mathbb{M}^2(0,T,\mathbb{R}^{n\times d})$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_r, \mathbb{P})$, $\alpha_0 \in [0,1)$ il existe une unique solution de (3.9), donc, pour chaque $x_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et un triple $u_s = (x_s, y_s, z_z) \in \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^{n+m+m\times d})$ il existe un unique triple $U_s = (X_s, Y_s, Z_z) \in \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^{n+m+m\times d})$ satisfaisant l' **ED-**

SPR

$$
\begin{aligned}
dX_t &= [(1-\alpha_0)\beta_2(-G^T Y_t) + \alpha_0 b(t,U_t) + \delta(\beta_2 G^T y_t + b(t,u_t)) + \phi_t]dt \\
&\quad + [(1-\alpha_0)\beta_2(-G^T Z_t) + \alpha_0\sigma(t,U_t) + \delta(\beta_2 G^T z_t + \sigma(t,u_t)) + \psi_t]dB_t, \\
-dY_t &= [(1-\alpha_0)\beta_1 G X_t) + \alpha_0 f(t,U_t) + \delta(-\beta_1 G x_t + f(t,u_t) + \gamma_t]dt - Z_t dB_t, \\
X_0 &= a,\ Y_T = \alpha_0\Phi(X_T) + (1-\alpha_0)GX_T + \delta(\Phi(x_t) - Gx_T) + \xi.
\end{aligned}
$$

Nous allons maintenant prouver que, si δ est suffisamment petit, l'application définie par :

$$
\begin{gathered}
I_{\alpha_{0\delta}}(u \times x_T) = U \times X_T : \\
\mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^{n+m+m\times d}) \times L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P},\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^{n+m+m\times d}) L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P},\mathbb{R}^n)
\end{gathered}
$$

est une contraction. ■

On pose $\grave{u} = ds(x`, y`, z`) \in \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^{n+m+m\times d})$ et laissez $I_{\alpha_{0\delta}}(u` \times x`_T) = U` \times X`_T$. Nous avons défini

$$
\hat{u} = (\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = (x - x`, y - y`, z - z`), \hat{U} = (\hat{X},\hat{Y},\hat{Z}) = (x - x`, y - y`, z - z`)
$$

En applique la formule d'Itô à $\langle G\hat{X}_s, \hat{Y}_s\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\alpha_0\mathbb{E}\langle \Phi(X_T) - \Phi(X_T^{`}), G\hat{X}_T\rangle + (1-\alpha_0)\mathbb{E}\langle G\hat{X}_T, G\hat{X}_T\rangle \\
&+ \delta\mathbb{E}\langle \Phi(x_T) - \Phi(x_T^{`}) - G\hat{x}_T, G\hat{x}_T\rangle \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \langle \alpha_0(A(s,U_s) - A(s,U_s^{`}), \hat{U}_s\rangle ds \\
&- (1-\alpha_0)\mathbb{E}\int_0^T (\beta_1\langle G\hat{X}_s, G\hat{X}_s\rangle + \beta_2\langle G^T\hat{Y}_s, G^T\hat{Y}_s\rangle + \beta_2\langle G^T\hat{Z}_s, G^T\hat{Z}_s\rangle)ds \\
&+ \delta\mathbb{E}\int_0^T (\beta_1\langle G\hat{X}_s, G\hat{x}_s\rangle + \beta_2\langle G^T\hat{Y}_s, G^T\hat{y}_s\rangle + \beta_2\langle G^T\hat{Z}_s, G^T\hat{z}_s\rangle \\
&+ \langle \hat{X}_s - G^T\bar{f}_s\rangle + \langle G^T\hat{Y}_s, G^T\bar{b}_s\rangle + \langle \hat{Z}_s, G\bar{\sigma}_s\rangle)ds,
\end{aligned}$$

Où

$$\bar{f}_s = f(s,u_s) - f(s,u_s^{`}),\ \bar{b}_s = b(s,u_s) - b(s,u_s^{`}),\ \bar{\sigma}_s = \sigma(s,u_s) + \sigma(s,u_s^{`}).$$

A partir de (3.2) et (3.8), nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
(\alpha_0\mu_1 + (1-\alpha_0))\mathbb{E} \mid G\hat{X}_T \mid^2 + \beta_1\mathbb{E}\int_0^T \mid G\hat{X}_s \mid^2 ds + \beta_2\mathbb{E}\int_0^T (\mid G^T\hat{Y}_s \mid^2 + \mid G^T\hat{Z}_s \mid^2)ds \\
\leq \delta K_1\mathbb{E}\int_0^T (\mid \hat{u}_s \mid^2 + \mid \hat{U}_s \mid^2)ds + \delta K_1\mathbb{E} \mid \hat{X}_T \mid^2 + \delta K_1\mathbb{E} \mid \hat{x}_T \mid^2 .
\end{aligned}$$

En appliquant la même technique que le lemme (3.1.1), nous avons les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq s\leq T}\mathbb{E} \mid \hat{X}_s \mid^2 \leq K_1\delta\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{u}_s \mid^2 ds + K_1\mathbb{E}\int_0^T (\mid \hat{Y}_s \mid^2 + \mid \hat{Z}_s \mid^2)ds, \\
&\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{X}_T \mid^2 \leq K_1T\delta\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{u}_s \mid^2 ds + K_1T\mathbb{E}\int_0^T (\mid \hat{Y}_s \mid^2 + \mid \hat{Z}_s \mid^2)ds, \\
&\mathbb{E}\int_0^T (\mid \hat{Y}_s \mid^2 + \mid \hat{Z}_s \mid^2)ds \leq K_1\delta\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{u}_s \mid^2 ds + K_1\delta\mathbb{E} \mid \hat{x}_T \mid^2 \\
&+ K_1\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{X}_s \mid^2 ds + K_1\mathbb{E} \mid \hat{X}_T \mid^2 .
\end{aligned}$$

Ici, la constante K_1 dépend des constantes de Lipschitz G, β_1, β_2 et T. Si $\mu \geq 0$, alors $\alpha_0\mu_1 + (1-\alpha_0) \geq \mu$, $\mu = \min(1, \mu_1) > 0$. En combinant les quatre estimations ci-dessus, il est clair que, $\forall \beta_1 \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$ ou $\beta_1 \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, nous avons toujours

$$\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{U} \mid^2 ds + \mathbb{E} \mid \hat{X}_T \mid^2 \leq K\delta \left(\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{u}_s \mid^2 ds + \mathbb{E} \mid \hat{x}_T \mid^2 \right).$$

Ici, la constante K ne dépend que de β_1, β_2, μ, K_1 et T. Nous choisissons maintenant $\delta_0 = \frac{1}{2K}$. Il est clair que, pour chaque $\delta \in [0, \delta_0]$ fixe, l'application $I_{\alpha_0+\delta}$ est une contraction.

$$\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{U} \mid^2 ds + \mathbb{E} \mid \hat{X}_T \mid^2 \leq \frac{1}{2} \left(\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{u}_s \mid^2 ds + \mathbb{E} \mid \hat{x}_T \mid^2 \right).$$

Il s'ensuit que cette application admet une unique point fixe $U^{\alpha_0+\delta} = (X^{\alpha_0+\delta}, Y^{\alpha_0+\delta}, Z^{\alpha_0+\delta})$ qui est la solution de (3.9) pour $\alpha = \alpha_0 + \delta$. La preuve est complète.

Nous donnons maintenant la preuve du théorème (3.1.4).

Preuve. du théorème (3.1.4). L'unicité est évidente à partir du théorème (3.1.2). Par le lemme (3.1.2), lorsque $\lambda = 1$, $\xi = 0$ dans (3.5), (3.9) pour $\alpha = 0$ il une solution unique. Il résulte alors du lemme (3.1.3) qu'il existe une constante positive δ_0 dépendant des Constantes de Lipschitz, β_1, β_2, μ_1 et T telles que, pour chaque $\delta \in [0, \delta_0]$, (3.9) pour $\alpha = \alpha_0 + \delta$ a une unique solution. Nous pouvons répéter ce processus pour N fois avec $1 \leq N.\delta_0 < 1 + \delta_0$.Il s'ensuit alors que, en particulier, **EDSPR** (3.9) pour $\alpha = 1$ avec $\xi \equiv 0$ il a un unique solution. La preuve est complète.

■

3.2 Applications des EDSPR aux contrôles optimaux stochastiques.

Exemple 3.2.1 *(**système stochastique de Hamilton**).Soit $n = m$, et soit $h(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour la simplification de la notation, nous supposons que $d = 1$. Nous considérons le"**Hamiltonien généralisé** " suivant :*

$$H(x, y, z) : \mathbb{R}^{n+n+n} \to \mathbb{R}.$$

Nous supposons que H et h sont deux fois continuellement différentiables telle que les dérivés seconde sont bornées. Nous considérons les **EDSPR** suivants :

$$\begin{aligned} dx_t &= H_y(x_t, y_t, z_t)dt + H_z(x_t, y_t, z_t)dB_t, \qquad (3.10) \\ -dy_t &= H_x(x_t, y_t, z_t)dt - z_t dB_t, \\ x_0 &= a,\ y_T = h_x(x_T), \end{aligned}$$

où $(H_x\ H_y\ H_z)$ $(resp.,\ h_x)$ représente le gradient de H $(resp., h)$. C'est clair que les équations hamiltoniennes stochastiques sont un cas particulier de **EDSPR** (3.1) avec

$$f = H_x,\ b = H_y,\ \sigma = H_z,$$

D'après les conditions de monotonies, c'est-à-dire (3.8), correspondent, pour ce cas particulier, à la non-négativité de la matrice h_{xx}et :

$$\begin{pmatrix} -H_{xx} & -H_{xy} & -H_{xz} \\ H_{yx} & H_{yy} & H_{yz} \\ H_{zx} & H_{zy} & H_{zz} \end{pmatrix} (x, y, z) \leq - \begin{pmatrix} \beta_1 I_n & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 I_n & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 I_n \end{pmatrix}$$

où $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 > 0$.

Un problème d'optimisation classique d'un système de contrôle stochastique est formulé comme suit :

$$\begin{aligned} dx_t &= g(x_t, \upsilon_t)dt + \mu(x_t, \upsilon_t)dB_t, \\ x_0 &= a, \end{aligned}$$

où υ_t, $s \in [0, T]$, est un processus de contrôle admissible, c'est-à-dire, est un processus de carré intégrable adapté à $\mathcal{F}_t$, prenant des valeurs dans un sous-ensemble donné U de $\mathbb{R}^k$. Ici, g et μ sont donnés des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ avec des valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Le problème de contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût

$$j(\upsilon(.)) = \mathbb{E}\left\{ \int_0^T L(x_t, \upsilon_t)dt + h(x_T) \right\}$$

sur l'ensemble des contrôles admissibles. L'une des deux méthodes importantes de résolution de ce problème d'optimisation est dit le principe du maximum stochastique qui peut être considéré comme une généralisation naturelle du principe maximum bien connu de Pontryagin à des situations d'incertitude. Ce principe est dit que, sous certaines hypothèses raisonnables imposées aux coefficients g, μ, L, h si $\upsilon(.)$ est un contrôle optimal admissible, et si la trajectoire correspondant à $\upsilon(.)$ est $x(.)$, alors, nécessairement, il existe une paire de processus de carré intégrables adaptés (y, z) prenant des valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ telles que le triple des processus $(x(.), y(.), z(.))$

satisfait le système Hamiltonien stochastique (3.10), où l'Hamiltonien H est défini par

$$H(x,y,z)=\inf_{\upsilon\in U}\left\{\langle y,g(x,\upsilon)\rangle+\langle z,\mu(x,\upsilon)\rangle+L(x,\upsilon)\right\}.$$

Un coproduit de ce principe du maximum stochastique est qu'il nous donne un exemple de l'existence de la solution à **EDSPR**, mais l'un des inconvénients de telles méthodes est que la vérification des conditions d'existence d'un contrôle optimal est un problème très difficile. Un autre inconvénient est que cette approche ne nous fournit aucune information sur l'unicité de la solution de (3.10).

Exemple 3.2.2 *Nous supposons que dans l'exemple ci-dessus g et μ sont des fonctions linéaires*

$$g(x,\upsilon)=Ax+B\upsilon,\ \ \mu(x,\upsilon)=Cx+D\upsilon,$$

où A et C sont des matrices $n\times n$, B et D sont des matrices $n\times k$. Nous supposons également qu'il n'y a pas de contrainte imposée aux processus de contrôle $U=\mathbb{R}^k$. $L(x,\upsilon)$, $h(x)$ sont deux fois continuellement différentiables par rapport à (x,υ) et x ; $L_x(x,\upsilon)$ sont bornés par $C(1+\mid x\mid+\mid \upsilon\mid)$.

Dans ce cas, si nous supposons que :

$$\begin{cases} (i)\ k\times k\ \text{matrice}\ L_{\upsilon\upsilon}(x,\upsilon)\geq\beta I_k,\ \ \beta>0,\\ (ii)\ n\times n\ \ \text{matrice}\ L_{xx}(x,\upsilon)-L_{x\upsilon}(x,\upsilon)L_{\upsilon\upsilon}^{-1}L_{\upsilon x}(x,\upsilon)n'est\ pas\ négative,\\ (iii)\ n\times n\ \ \text{matrice}\ h_{xx}(x)n'est\ pas\ négative,\end{cases}\tag{3.11}$$

et, si $u(.)$ est un contrôle optimal admissible, la trajectoire correspondent à $u(.)$ est $x(.)$, alors l'Hamiltonien H est défini par

$$H(x,y,z)=\inf_{\upsilon\in U}\left\{\langle y,Ax,B\upsilon\rangle+\langle z,Cx+D\upsilon\rangle+L(x,\upsilon)\right\}.$$

Nous avons, nécessairement

$$L_{\upsilon}(x_t, u_t) + B^T y_t + D^T z_t = 0, \tag{3.12}$$

et (x, y, z) *satisfont aux* ***EDSPR*** *suivantes :*

$$\begin{aligned} dx_t &= (Ax_t + B\upsilon_t)dt + (Cx_t + D\upsilon_t)dB_t, \\ -dy_t &= (A^T y_t + C^T z_t + L_x(x_t, \upsilon_t))dt - z_t dB_t, \\ x_0 &= a,\ y_T = h_x(x_T). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Si le processus de contrôle optimal $u(.)$ *n'existe pas, la solution de* (3.13) *n'existe pas. Dans la théorie du contrôle optimal, nous pouvons prouver que le* $u(.)$ *existe et il est unique. Alors il existe une solution à la* ***EDSPR*** (3.13)*. C'est une méthode indirecte et nous ne pouvons pas savoir si c'est unique. Maintenant, nous étudions directement* ***EDSPR*** (3.13)*. Il est clair que sous l''hypothèse*(3.8)*, le théorème* (3.1.4) *ne peut pas être appliqué pour obtenir l'existence et l'unicité de* (3.13)*.Heureusement, pour le cas particulier comme le formulaire suivant, nous avons un meilleur résultat.*

Nous considérons le type de ***EDSPR*** *suivant :*

$$\begin{aligned} dx_t &= b(t, x_t, By_t, Cz_t)dt + \sigma(t, x_t, By_t, Cz_t)dB_t, \\ -dy_t &= f(t, x_t, y_t, z_t)dt - z_t dB_t, \\ x_0 &= a,\ y_T = \Phi(x_T). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ici B *est une matrice de* $k \times n$*,* C *a est une matrice de* $k \times n$*,* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n+n+n}$*, et* *b, f, σ ont dimensions appropriées. Nous utilisons les notations*

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ A(t,u) = \begin{pmatrix} -f \\ b \\ \sigma \end{pmatrix}(t,u)$$

et imposer les conditions de monotonies suivantes :

$$\begin{aligned} &\langle A(t,u) - A(t,\bar{u}), u - \bar{u}\rangle \leq -\nu_1|\hat{x}|^2 - \nu_2|B\hat{y} + C\hat{z}|^2, \\ &\langle \Phi(x) - \Phi(\bar{x}),\ (x - \bar{x})\rangle \geq 0 \\ &\forall \hat{u} = (u - \bar{u}) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ici $\nu_1 \geq 0$, $\nu_1 > 0$. Nous supposons également que

$$\begin{cases} (i)\ A(t,u)\ est\ uniformément\ Lipschitz\ par\ rapport\ à\ u; \\ (ii)\ pour\ chaque\ u;\ A(.,u)\ est\ dans\ \mathcal{M}^2(0,T); \\ (iii)\ \Phi(x)\ est\ uniformément\ Lipschitz\ par\ rapport\ à\ x \in \mathbb{R}^n; \\ (iv)\ pour\ chaque\ x,\ \Phi(x)\ est\ dans\ L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}); \\ (v)\ \forall x, \mid l(t,x,By,Cz) - l(t,x,B\bar{y},C\bar{z}) \mid \leq K(\mid B\hat{y}, C\hat{z} \mid),\ K > 0,\ l = b,\ \sigma. \end{cases} \tag{3.16}$$

Ensuite, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses (3.15) et (3.16) . Alors il existe une unique solution $u_s = (x_s, y_s, z_s)$ satisfaisant à l'"**EDSPR** (3.14).*

Preuve. Nous prouvons d'abord l'unicité pour **l'EDSPR** (3.14). Soit $u_s = (x_s, y_s, z_s)$ et $u_s^` = (x_s^`, y_s^`, z_s^`)$ soit deux solutions de (3.14). Nous définissons

$$\hat{u} = (x - x^`, y - y^`, z - z^`) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}).$$

On applique la formule d'Itô à$\langle \hat{x}_s, \hat{y}_s \rangle$:

$$\mathbb{E}\langle \Phi(x_T) - \Phi(x^{`}_T), \hat{x}_T \rangle - \mathbb{E}\langle \hat{y}_t, \hat{x}_t \rangle = \mathbb{E}\int_t^T \langle A(s, u_s) - A(s, u^{`}_s), \hat{u}_s \rangle ds.$$

Ceci avec la monotonie de Φ et A implique :

$$\nu_2 \mathbb{E}\int_0^T \mid B\hat{y}_s + C\hat{z}_s \mid^2 ds \leq 0.$$

$B\hat{y}_s + C\hat{z}_s \equiv 0$. d'après (3.16) (v) et un résultat classique pour l'unicité de l' **EDS**, nous avons $\hat{x}_s \equiv 0$. Ainsi $x_s \equiv x^{`}_s$. En particulier, $\Phi(x_T) \equiv \Phi(x^{`}_T)$. Ainsi de la unicité de **EDSR** il s'ensuit que $y_s \equiv y^{`}_s$ et $z_s \equiv z^{`}_s$. La méthode pour prouver l'existence est similaire aux théorèmes (3.1.3) et (3.1.4). Nous considérons le **EDSPR** suivante :

$$\begin{aligned} dx_t^\alpha &= [(1-\alpha)(-B^T B y_t^\alpha - B^T C z_t^\alpha) + \alpha b(t, x_t^\alpha, B y_t^\alpha, C z_t^\alpha) + \phi_t]dt \\ &+ [\alpha\sigma(t, x_t^\alpha, B y_t^\alpha, C z_t^\alpha) + (1-\alpha)(-C^T C z_t^\alpha - C^T B y_t^\alpha) + \psi_t]dB_t, \\ -dy_t^\alpha &= [(1-\alpha)x_t^\alpha + \alpha f(t, x_t^\alpha, y_t^\alpha, z_t^\alpha) + \gamma_t] - z_t^\alpha dB_t, \\ & x_0^\alpha = a,\ y_T^\alpha = \alpha\Phi(x_T^\alpha) + \xi, \end{aligned} \tag{3.17}$$

où ϕ, ψ et γ sont des processus donnés en $\mathcal{M}^2(0,T)$ avec des valeurs en R^n, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, R^n)$. Il est clair que l'existence de (3.17) pour $\alpha = 1$ implique notre conclusion.Si $\alpha = 0$, nous peut obtenir le résultat d'existence et d'unicité en utilisant directement le théorème (3.1.3). Donc nous avons seulement besoin de considérer

$$\begin{aligned} dX_t &= [(1-\alpha)(-B^T B Y_t - B^T C Z_t) + \alpha_0 b(t, X_t, BY_t, CZ_t)]dt \\ &+ [\delta(B^T B y_t - B^T C z_t) + b(t, x_t, By_t, Cz_t)) + \phi_t]dt \\ &+ [\alpha_0\sigma(t, X_t, BY_t, CZ_t) + (1-\alpha_0)(-C^T C Z_t - C^T B Y_t)]dB_t \\ &+ [\delta(\sigma(t, x_t, By_t, Cz_t) + C^T C z_t - C^T B y_t) + \psi_t]dB_t, \\ -dy_t &= [(1-\alpha_0)X_t + \alpha_0 f(t, U_t) - \delta(x_t - f(t, u_t)) + \gamma_t]dt - Z_t dB_t, \\ & X_0 = a,\ y_T = \alpha_0\Phi(X_t) + \delta\Phi(x_T) + \xi, \end{aligned}$$

et prouver que l'application définie par :$I_{\alpha_0+\delta}(u\times x_T)U\times X_T : \mathcal{M}^2(0,T,R^{n+n+n\times d})\times L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P},R^n)\rightarrow \mathcal{M}^2(0,T,R^{n+n+n\times d})\times L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P},R^n)$ est une contraction.

Pour la différence $(\hat{X},\hat{Y})=(X-X^`,Y-Y^`)$, en utilisant une technique similaire à celle des *Lemmes* (3.1.1) et (3.1.3) à $\langle \hat{X},\hat{Y}\rangle$, nous avons

$$\begin{aligned}\nu_2\alpha_0\mathbb{E}\int_0^T(\mid B\hat{Y}_s+C\hat{Z}_s\mid^2)ds+(1-\alpha_0)\mathbb{E}\int_0^T(\mid B\hat{Y}_s+C\hat{Z}_s\mid^2)ds\\ \leq \delta C_1\mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{u}_s\mid^2 ds+\delta C_1\mathbb{E}\mid \hat{x}_T\mid^2+\delta C_1\mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{U}_s\mid^2 ds+\delta C_1\mathbb{E}\mid \hat{X}_T\mid^2,\end{aligned}$$

où $\hat{U}$ et $\hat{u}$ sont définis de la même manière que dans le *lemme* (3.1.1). Ici, C_1 dépend des constantes de Lipschitz de b, σ, f et Φ, $\nu_2\alpha_0+(1-\alpha_0)\geq L_1, L_1=\min(1,\nu_2)>0$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T(\mid B\hat{Y}_s+C\hat{Z}_s\mid^2)ds\\ \leq \delta C_2\mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{u}_s\mid^2 ds+\delta C_2\mathbb{E}\mid \hat{x}_T\mid^2+\delta C_2\mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{U}_s\mid^2 ds+\delta C_2\mathbb{E}\mid \hat{X}_T\mid^2\end{aligned}$$

Ici $C_2=\frac{C_1}{L_1}$. En appliquant la technique habituelle au $\hat{X}_t=X_t-X^`_t$, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq s\leq T}\mathbb{E}\mid \hat{X}_s\mid^2\leq C_3\delta\mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{u}_s\mid^2 ds+C_3\mathbb{E}\int_0^T(\mid B\hat{Y}_s+C\hat{Z}_s\mid^2)ds,\\ \mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{X}_s\mid^2 ds\leq C_3T\delta\mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{u}_s\mid^2 ds+C_3T\mathbb{E}\int_0^T(\mid B\hat{Y}_s+C\hat{Z}_s\mid^2)ds.\end{aligned}$$

De même, pour la différence des solutions $(\hat{Y},\hat{Z})=(Y-Y^`,Z-Z^`)$, en appliquant la technique habituelle à la **EDSR**, nous avons

$$\mathbb{E}\int_0^T(\mid \hat{Y}_s\mid^2+\mid \hat{Z}_s\mid^2)ds\leq C_3\delta\mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{u}_s\mid^2 ds+C_3\mathbb{E}\int_0^T\mid \hat{X}_s\mid^2 ds+C_3\mathbb{E}\mid \hat{X}_T\mid^2.$$

Ici, la constante $C3$ dépend des constantes de Lipschitz, K,B,C et T. En combinant les quatre estimations ci-dessus, il est clair que nous avons toujours

$$\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{U}_s \mid^2 ds + \mathbb{E} \mid \hat{X}_T \mid^2 \leq L\delta \left(\mathbb{E}\int_0^T \mid \hat{u}_s \mid^2 ds + \mathbb{E} \mid \hat{x}_T \mid^2 \right),$$

où la constante L dépend de C_1, C_2, C_3 et T. Nous pouvons donc choisir $\delta_0 = \frac{1}{2L}$. Puis pour chaque $\delta \in [0, \delta_0]$, l'application $I_{\alpha_0+\delta}$ est contractante. L'autre partie est la même chose que dans le théorème (3.1.3) ou (3.1.4) ; nous l'omettons.Maintenant, nous pouvons considérer à nouveau la **EDSPR** (3.13).

En remarquant (3.12), nous pouvons obtenir

$$L_{\nu\nu}(x_t, u_t)u_y = -B^T, \ L_{\nu\nu}(x_t, u_t)u_y = -D^T, \ L_{\nu x}(x_t, u_t)u_y + L_{\nu\nu}(x_t, u_t)u_y = 0$$

En combinant (3.11), nous pouvons facilement vérifier (3.13), satisfaisant les hypothèses (3.15) et (3.16). Ensuite, en appliquant *le théorème* (3.2.1), alors il existe une unique solution . ■

Bibliographie

[1] Aase,K,Oksendal ,B,Privault ,N ,., & Uboe, J. (2000). whithhe noise generalizationsof the Clark-haussmann-Oconethzorem with application to mathematical finance. Finance and Stochastics, 4(4), 465-496.

[2] khalfala,N.(2019). cours de mouvement brownier et calcule stacstique. Université de biskra

[3] Labed, B. (2019). cours de mouvement brownier et calcul stochastique. Université de biskra

[4] Jenblanc, M. (2006). cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes.University of Évry.

[5] Brind, P.(2001). Equations différentielle stochastiques rétrogrades. Mars (2001)

[6] Shige Peng and Zhen Wu. Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control. Siam,J.(1999). control optim vol. 37, N. 3, pp. 825-843.

[7] F. Antonelli. Backward-forward stochastic differential equations. Ann. Appl. Probab., 3(3) : 777–793, 1993.

[8] J. M. Bismut. Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. Mem. Amer. Math. Soc. 176, Providence, Rhode Island, 1973.

[9] É. Pardoux and S. Peng,. Adapted solution of a backward stochastic differential equation.Systems Control Lett. 14 (1990), no. 1, 55–61.

[10] É. Pardoux and S. Peng,. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. Stochastic partial differential equations and their applications, volume 176 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci., pages 200–217. Springer, Berlin, 1992

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

EDS	Equations différentielles stochastiques
$EDSR$	Equations différentielles stochastiques rétrogrades
$DSPR$	Equations différentielles stochastiques progressives rétrogrades
MG	Martingale.
MB	.Mouvement Brownien.
$i.e$	C'est-à-dire.
$v.a$	Variable aléatoire.
$\mathbb{P}-p.s$	Presque sûrement puor la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\boldsymbol{L}^1$	Espace des processus intégrables.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel enclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{k\times d}$	Ensemble des matrices réelles $k \times d$.
$resp$	Respectivement
$\mid . \mid$	Désigne la valeur absolu
$\Vert . \Vert$	Désigne la norme
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ***	Espace de probabilité filtré

Résumé

Ce travail de mémoire porte sur les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPR en abrégé). Ce mémoire d'équations est utilisé en mathématiques financières et en contrôle optimal stochastique. L'objectif principal de cette thèse est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution des EDSPR couplée sous les conditions de monotonies, et nous donnons quelques exemples d'application au contrôle optimal.
Mot-clés : équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, contrôle optimal.

Abstract

This memory deals with the forward backward stochastic differential equations (FBSDE in short). This type of equation is used in financial mathematics and in stochastic optimal control. The main objective of this memory is the study of existence and uniqueness of solution to the coupled (FBSDE) under monotonous conditions, and we give some examples of application to optimal control.
Key-words : the forward backward stochastic differential equations, optimal control

ملخص

يركز عمل الاطروحة هذا على المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية التقدمية.يستخدم هذا النوع من المعادلات في الرياضيات المالية و التحكم العشوائى

ان الهدف لاساسي من هذه لاطروحة هو دراسة وجود ووحدانية الحل لهذه المعادلات مع الشروط الرتيبة . ونقدم بعض لامثلة التطبقية في التحكم العشوائي المعادلات التفاضلية
الكلمات المفتاحية:العشوئية التراجعية التقدمية التحكم العشوائي