



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté de sciences et technologie  
Département de genie mécanique

# MÉMOIRE DE MASTER

**Domaine : Sciences et Techniques**

**Filière : Génie Mécanique**

**Spécialité : Energétique**

Réf. : Entrez la référence du document

---

Présenté et soutenu par :

**MEKKAOUI Yousra**

Le : [Click here to enter a date.](#)

## Etude de l'écoulement d'un fluide dans un canal chauffé partiellement

---

### Jury :

Dr	BOULTIF Nora	MCB	Université de Biskra	Président
Dr	MAHBOUB Chawki	MCB	Université de Biskra	Examineur
Dr	GUERBAAI Salah	MCA	Université de Biskra	Rapporteur

# Remerciements

*On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide de l'encadrement de **GUERBAAI Salah**, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience sa rigueur et disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

*On remercie aussi les membres de nos jury de mémoire : **BOULTIF Nora**, **MAHBOUB Chawki**, pour avoir accepté d'examiner ce travail et pour ses implications concernant nos résultats.*

*Dans le dernier mot, nous remercions nos parents chaleureusement pour leur soutien et les encouragements de nos familles et précieux aides, car ils leurs a consacré ce que vous avez ici.*





# Table des matières

<i>Nomenclatures</i> .....	<i>i</i>
<i>Résumé</i> .....	<i>iii</i>
<i>Introduction générale</i> .....	<i>4</i>
<i>Chapitre I : Généralités et revue bibliographique</i> .....	<i>2</i>
<i>I.1. Introduction:</i> .....	<i>3</i>
<i>I-2-Généralités sur les écoulements dans les conduites :</i> .....	<i>3</i>
<i>1.3. Echanges thermiques à l'intérieur des conduites :</i> .....	<i>6</i>
<i>I.3.1.Echange thermique dans une conduite soumise a un flux uniforme a la paroi :.....</i>	<i>7</i>
<i>I.3.2. Echange thermique dans une conduite chauffée à une température constante a la paroi :</i> .....	<i>9</i>
<i>I.4. Revue bibliographique :</i> .....	<i>11</i>
<i>Chapitre II : géométrie et formulation mathématique</i> .....	<i>15</i>
<i>II.1. Introduction :</i> .....	<i>16</i>
<i>II.2. Domaine physique :</i> .....	<i>16</i>
<i>II. 3. Équations générales :</i> .....	<i>17</i>
<i>II.4. Hypothèse de base :</i> .....	<i>18</i>
<i>II.5. Equations de conservation :</i> .....	<i>19</i>
<i>II.6. Formulation adimensionnelle :</i> .....	<i>19</i>
<i>II.7. Conditions aux limites :</i> .....	<i>21</i>
<i>II.8. Les Nombre de Nusselt:</i> .....	<i>21</i>
<i>II.9. Conclusion :</i> .....	<i>22</i>
<i>Chapitre III : Méthode de résolution</i> .....	<i>23</i>
<i>III.1. Introduction :</i> .....	<i>24</i>
<i>III.2. Méthode des volumes finie :</i> .....	<i>24</i>
<i>III.3. Application de M.V.F :</i> .....	<i>25</i>
<i>3.1. Équation du modèle :</i> .....	<i>25</i>
<i>3.2. Couplage P-U V : [17]</i> .....	<i>28</i>
<i>III.4.Conclusion :</i> .....	<i>33</i>
<i>Chapitre IV : Résultats et discussions</i> .....	<i>34</i>
<i>VI.1. Introduction :</i> .....	<i>35</i>
<i>IV.2. Validation du code de calcul :</i> .....	<i>35</i>
<i>IV.3. Résultat et interprétation :</i> .....	<i>39</i>

<i>1<sup>er</sup> cas: Variation linéaire de de la température le long de la partie chauffée du canal :</i> .....	39
<i>2<sup>ème</sup> cas : Variation sinusoïdale de la température le long de la partie chauffée de la paroi : .....</i>	48
<i>Conclusion générale.....</i>	54
<i>Les references bibliographies.....</i>	56

# Nomenclatures

## *Lettres latines*

<b><i>b</i></b>	Distance entre les deux plaques [ <i>m</i> ]
<b><i>C<sub>f</sub></i></b>	Coefficient de frottement
<b><i>C<sub>p</sub></i></b>	Chaleur spécifique à pression constante [ <i>J/kg.K</i> ]
<b><i>g</i></b>	Accélération de la pesanteur [ <i>m/s<sup>2</sup></i> ]
<b><i>h</i></b>	Enthalpie
<b><i>h<sub>b</sub></i></b>	Enthalpie moyen
<b><i>L</i></b>	Longueur du canal [ <i>m</i> ]
<b><i>ṁ</i></b>	Débit massique
<b><i>p</i></b>	Pression [ <i>Pa</i> ]
<b><i>P</i></b>	Pression adimensionnel
<b><i>q<sub>v</sub></i></b>	Débit volumique [ <i>m<sup>3</sup>/s</i> ]
<b><i>S</i></b>	Terme source
<b><i>T<sub>0</sub></i></b>	Température de fluide à l'entrée du canal [ <i>K</i> ]
<b><i>T<sub>h</sub></i></b>	Température de la section finie [ <i>K</i> ]
<b><i>T<sub>b</sub></i></b>	Température moyenne [ <i>K</i> ]
<b><i>T<sub>ref</sub></i></b>	Température de référence [ <i>K</i> ]
<b><i>T<sub>w</sub></i></b>	Température à la paroi [ <i>K</i> ]
<b><i>u<sub>0</sub></i></b>	Vitesse de fluide à l'entrée du canal [ <i>m/s</i> ]
<b><i>u, v</i></b>	Composantes de la vitesse suivant ( <i>x, y</i> ) [ <i>m/s</i> ]
<b><i>U, V</i></b>	Composantes adimensionnelles de la vitesse

## *Lettres grecques*

<b><i>β</i></b>	le coefficient de dilatation thermique [ <i>1/K</i> ]
<b><i>θ</i></b>	Température adimensionnel
<b><i>λ</i></b>	Conductivité thermique [ <i>W/m.K</i> ]
<b><i>μ</i></b>	Viscosité dynamique [ <i>Pa.s</i> ]
<b><i>ν</i></b>	Viscosité cinématique [ <i>m<sup>2</sup>/s</i> ]
<b><i>ρ</i></b>	Masse volumique [ <i>kg/m<sup>3</sup></i> ]
<b><i>φ</i></b>	Le flux de chaleur [ <i>J/s</i> ]

*Les nombres adimensionnels*

<b><i>Gr</i></b>	<b>Nombre de Grashof</b>
<b><i>Nu</i></b>	<b>Nombre de Nusselt</b>
<b><i>Pr</i></b>	<b>Nombre de Prandtl</b>
<b><i>Re</i></b>	<b>Nombre de Reynolds</b>
<b><i>Ri</i></b>	<b>Nombre de Richardson</b>

## Résumé

Dans ce travail nous proposons une étude numérique de la convection mixte laminaire d'un écoulement en développement simultané dans un canal constitué de deux plaques parallèles et verticales. L'une d'elles est chauffée partiellement. Le fluide est Newtonien et incompressible. Les équations différentielles de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie ont été intégrées et discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis. Nous avons introduit les effets des différents paramètres caractérisant l'écoulement et le transfert de chaleur notamment le nombre de Reynolds et le nombre de Grashof. Pour ce faire, nous avons choisi d'étudier deux différents types de chauffage (Température à variation linéaire et température à variation sinusoïdale). Nous avons analysé l'influence des propriétés thermo-physiques sur la variation des grandeurs thermiques (champs des températures, nombre de Nusselt) et sur les grandeurs dynamiques (champs de vitesses).

Mots clés : plaques parallèles, convection mixte, chauffage partiel, méthode des volumes finis

## Abstract

In this work we propose a numerical study of laminar mixed convection of a simultaneously developing flow in a channel consisting of two parallel and vertical plates. One of the plates is partially heated. The fluid is Newtonian and incompressible. The differential equations for conservation of mass, momentum and energy have been integrated and discretized using the finite volume method. We introduced the effects of the various parameters characterizing flow and heat transfer, notably the Reynolds number and Grashof number. To do this, we chose to study two different types of heating (linearly varying temperature and sinusoidally varying temperature). We analyzed the influence of thermo-physical properties on the variation of thermal quantities (temperature fields, Nusselt number) and on dynamic quantities (velocity fields).

Key words : parallel plates, mixed convection, partial heating, finite volume method

## ملخص

في هذا العمل نقترح دراسة عددية للحمل الحراري المختلط لتدفق يتطور في نفس الوقت في قناة تتكون من لوحين متوازيين. إحداهما ساخنة جزئياً. المائع نيوتوني وغير قابل للانضغاط. تم مكاملة المعادلات التفاضلية لحفظ الكتلة وكمية الحركة والطاقة وتمييزها باستخدام طريقة الحجم المحدود. قدمنا تأثيرات المعاملات المختلفة التي تميز السريان وانتقال الحرارة، خاصةً عدد رينولدز وعدد غراشوف. وللقيام بذلك، اخترنا دراسة نوعين مختلفين من التسخين (درجة حرارة متغيرة خطياً ودرجة حرارة متغيرة جيبياً). قمنا بتحليل تأثير الخواص الفيزيائية الحرارية على تباين الكميات الحرارية (حقول درجة الحرارة، عدد نوسيلت) وعلى الكميات الديناميكية (حقول السرعة).

الكلمات الرئيسية: الصفائح المتوازية، الحمل الحراري المختلط، التسخين الجزئي، طريقة الحجم المحدود

---

## *Introduction générale*

---

## *Introduction Générale*

La convection mixte est un phénomène de transfert thermique associé aux écoulements des fluides, elle intervient dans plusieurs applications industrielles, citons par exemple le refroidissement des composants électroniques, les tours de refroidissement, la distillation de l'eau de mer, les centrales solaires et la climatisation naturelle. A travers la bibliographie on constate l'existence de plusieurs études numériques, expérimentales et analytiques menées à l'étude du transfert thermique par convection mixte dont la plupart supposent des conditions aux limites des températures uniformes.

Par cette étude nous essayons d'introduire des conditions aux limites des températures variables que ça soit linéaire ou sinusoïdale et d'étudier ses effets sur la structure de l'écoulement et sur les échanges thermiques en convection mixte entre plaques parallèles.

L'organisation retenue pour mener à bien ce travail, est la suivante :

Le premier chapitre présente l'état de l'art de convection mixte entre plaques parallèles et une étude analytique de la convection forcée pour un écoulement totalement développé dans un canal. Le modèle physique choisi, à savoir les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées constituent le contenu du deuxième chapitre.

le choix de la méthode et la procédure de résolution dont le parcours passe par le maillage, la discrétisation et l'utilisation de l'algorithme de SIMPLE pour le couplage pression-vitesse Constituent le contenu du troisième chapitre.

On rassemble dans le quatrième chapitre la validation du code de calcul élaboré ainsi que les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyses des divers résultats de cette étude paramétrique sont également présentés.

Et pour clore ce travail, une conclusion s'impose pour résumer et faire le bilan de ce qui a été réalisé et les perspectives à venir que nous espérons réaliser ultérieurement.

---

*Chapitre I : Généralités et revue  
bibliographique*

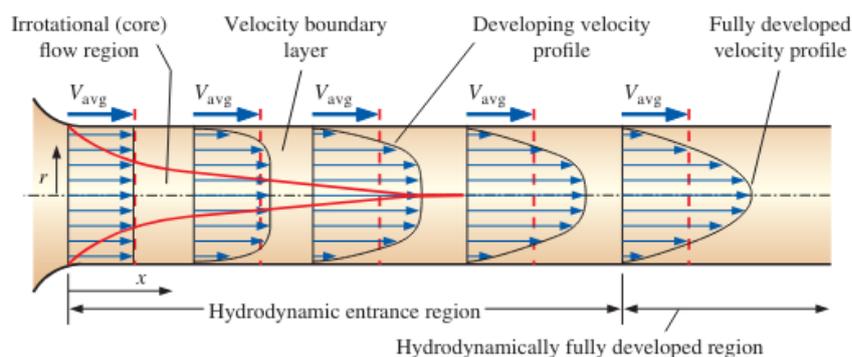
---

## I.1. Introduction :

Les écoulements des fluides incompressibles et le transfert de chaleur dans des canaux formés de plaques parallèles verticales ont été étudiés de manière approfondie au cours des dernières décennies. Il existe de nombreuses situations d'importance pratique qui se conforment à ce phénomène. Des exemples typiques sont le refroidissement des composants électroniques, des cartes de circuits imprimés, des emballages électroniques et certains capteurs solaires et aérothermes. Une variété de conditions physiques décrites par la température de surface au niveau d'une plaque a été prises en compte dans le but d'analyser cette classe de problèmes.

## I-2-Généralités sur les écoulements dans les conduites :

Considérons un écoulement laminaire d'un fluide visqueux à l'intérieur d'un tube circulaire comme le montre la **Fig.I.1**. Le fluide entre avec une vitesse uniforme sur la section d'écoulement. A mesure que le fluide s'écoule dans le tube, une couche limite à faible vitesse se forme et se développe sur la surface de la paroi car le fluide adjacent à la paroi doit avoir une vitesse nulle. Une caractéristique particulière de l'écoulement visqueux à l'intérieur de tubes cylindriques est le fait que la couche limite doit se rencontrer au niveau de l'axe du tube et alors le profil des vitesses reste invariant par la suite. La longueur d'entrée hydrodynamique est la partie du tube dans laquelle la couche limite se développe et la distribution de vitesse change avec la longueur. Le profil de vitesse est invariable dans la région pleinement développée **Fig.I.2**.



**Fig. I.1** : développement du profil de la vitesse pour un écoulement laminaire dans une conduite [1]

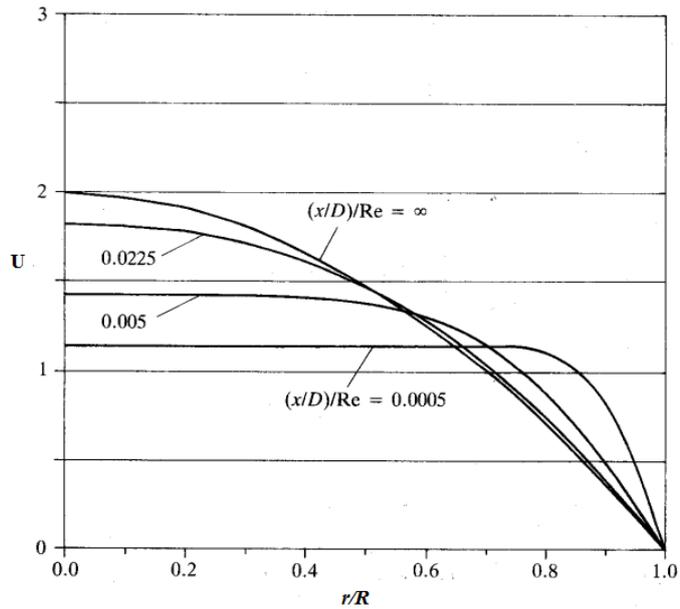


Fig.I.2 : Profil de la vitesse à des différentes positions le long du canal [2]

Les sections d'étude se trouvent dans la partie où l'écoulement est considéré établi (distances d'où moins 20 fois le diamètre de la conduite  $\left(\frac{x}{(D \cdot Re)}\right) \geq 0.05$ ). La perte de charge se réduit à une perte de pression, dans ce cas le coefficient de perte de charge  $\psi$  est défini par :

$$\Delta P = \psi \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho U_d^2 \tag{I.1}$$

$\Delta P$  : perte de pression entre deux sections distantes de L

$D$  : diamètre.

$U_d$  : vitesse du débit.

$\psi$  : coefficient de perte de charge linéaire.

Le coefficient de frottement  $C_f$  s'écrit :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_d^2} \tag{I.2}$$

Avec:  $\tau_p$  = tension exercée par le fluide sur la paroi (force tangentielle par unité de surface).

Déterminons analytiquement à l'aide des équations de conservation les principales caractéristiques de l'écoulement : profil des vitesses, débit, coefficient de perte de charge.

Le fluide considéré est visqueux, l'équation de Navier Stocks en coordonnées cylindriques selon  $ox$  s'écrit :

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} \quad (I.3)$$

$\frac{dP}{dx}$  est une constante.

En intégrant deux fois on obtient :

$$U(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2) \quad (I.4)$$

Le débit total traversant le tube est :

$$\dot{m} = \int \rho U dA = \rho A U_d \quad \Rightarrow \quad U_d = \frac{\dot{m}}{\rho A}$$

$$U_d = \frac{1}{\rho A} \int \rho U dA \quad (I.5)$$

Pour un tube circulaire :  $dA = 2\pi r dr$  donc :

Et :

$$U_d = \frac{R^2}{8\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right)$$

$$U = 2U_d \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (I.6)$$

Le débit volumique

$$q_v = \frac{\pi}{8\mu} R^4 \left( -\frac{dP}{dx} \right) \quad (I.7)$$

Pour le coefficient de perte de charge on obtient :

$$\psi = -\frac{dP}{dx} \frac{2D}{\rho U_d^2} = \frac{64\mu}{\rho U_d D}$$

$$\psi = \frac{64}{Re} \quad (I.8)$$

Avec  $Re = \frac{U_d D}{\nu}$

Et  $\tau = \frac{r}{2} \left( -\frac{dP}{dx} \right)$

Donc

$$C_f = \frac{\psi}{4} = \frac{16}{Re} \quad (I.9)$$

La fig. I.3 illustre la variation du coefficient du frottement en fonction de la géométrie du conduit.

Pour un tube triangulaire

$$C_f = \frac{13.33}{Re} \tag{I.10}$$

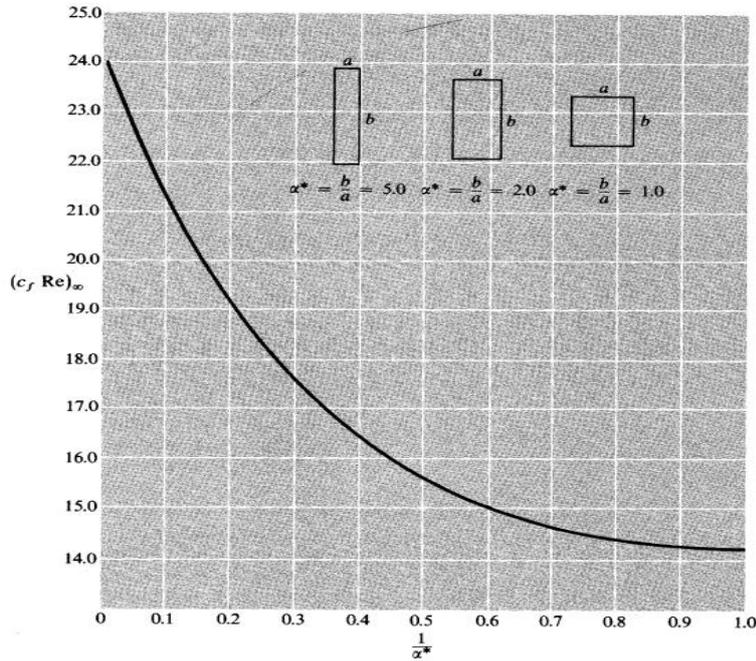


Fig. I.3 coefficient du frottement pour différentes conduites rectangulaires [2]

### 1.3. Echanges thermiques à l'intérieur des conduites :

Un écoulement est totalement développé en hydrodynamique si :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad V = 0 \tag{I.11}$$

Du point de vue thermique le développement total de l'écoulement est moins compliqué, d'abord on va introduire la notion de la température moyenne et de l'enthalpie moyen (bulk), l'enthalpie est utilisée pour l'écriture du premier principe de la thermodynamique sur un volume de contrôle pour calculer l'énergie thermique et le travail mis en jeu.

$$\dot{m}h_b = \int \rho U h dA \tag{I.12}$$

Nous supposons que la chaleur calorifique à pression constante  $C_p$  est constante alors :

$$h = C_p(T - T_{ref}) \tag{I.13}$$

et

$$\dot{m}C_p(T_b - T_{ref}) = \int \rho U C_p(T_b - T_{ref})dA \tag{I.14}$$

Donc :

$$T_b = \frac{\int \rho U C_p T dA}{\dot{m}C_p} \tag{I.15}$$

Pour une conduite cylindrique :

$$T_b = \frac{\int \rho U C_p T 2\pi r dr}{\int \rho U C_p 2\pi r dr} \tag{I.16}$$

Un écoulement est thermiquement totalement développé si :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_p - T}{T_p - T_b} \right) = 0 \tag{I.17}$$

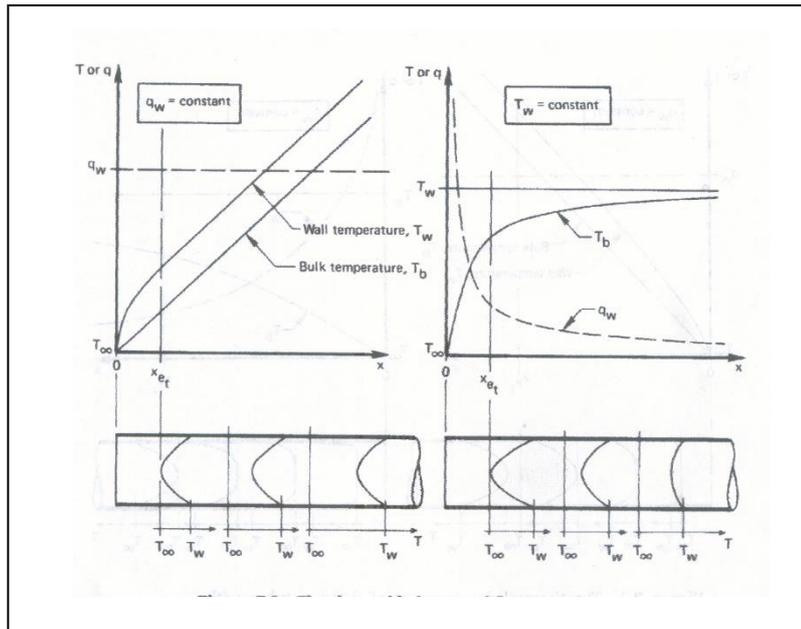


Fig.I.4 : Développement thermique de l'écoulement dans les tubes pour un flux constant à la paroi et pour une paroi à température constante.[2]

### I.3.1. Echange thermique dans une conduite soumise à un flux uniforme a la paroi :

L'équation d'énergie pour un écoulement totalement développé dans une conduite cylindrique s'écrit :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \tag{I.18}$$

Pour un écoulement établi avec  $q_w = cst$  ,  $T_w$  et  $T_b$  croient linéairement avec  $x$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_b}{dx} = \frac{q_w \cdot P}{\dot{m} C_p} \tag{I.19}$$

Avec  $P = 2\pi R$

$$T_b(x) - T_{b\ in} = \int_0^x \frac{q_w \cdot P}{\dot{m} C_p} dx = \frac{q_w \cdot P}{\dot{m} C_p} x \quad (I.20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_b}{dx} = \frac{q_w \cdot P}{\dot{m} C_p} = \frac{2q_w \cdot a}{U_d R \cdot K} \quad (I.21)$$

Avec  $K = \rho C_p$

En remplaçant dans l'équation (I.18) On obtient :

$$4 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{q_w}{RK} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) \quad (I.22)$$

En intégrant cette équation différentielle on obtient :

$$T = \frac{4q_w}{RK} \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2} \right) + C_1 \ln r + C_2 \quad (I.23)$$

Pour déterminer les constantes d'intégration on introduit les conditions aux limites :

- La conduite est symétrique :  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$  pour  $r = 0$  donc  $C_1 = 0$
- La deuxième condition est la définition de la température moyenne (eq I.15)

$$\text{On obtient} \quad C_2 = T_b - \frac{7}{24} \frac{q_w R}{K}$$

Donc :

$$T - T_b = \frac{q_w R}{K} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \frac{7}{24} \right] \quad (I.24)$$

Pour  $r = R$

$$T_w - T_b = \frac{11}{24} \frac{q_w R}{K} = \frac{11}{48} \frac{q_w D}{K} \quad (I.25)$$

Le coefficient d'échange thermique par convection :

$$h(x) = q_w / [T_w(x) - T_p(x)] \quad (I.26)$$

le nombre de Nusselt pour un écoulement totalement développé est :

$$Nu = \frac{hD}{K} = q_w \cdot D / \left[ K (T_w(x) - T_p(x)) \right] = \frac{48}{11} = 4.364 \quad (I.27)$$

Donc, pour une conduite cylindrique soumise à un flux d chaleur constant sur la paroi et pour un écoulement établi thermiquement  $Nu = 4.364$

### I.3.2. Echange thermique dans une conduite chauffée à une température constante a la paroi :

Pour une température constante à la paroi et pour un écoulement totalement développé le nombre de Nusselt tend vers une valeur asymptotique

$$Nu = 3.657 \text{ pour } T_w = \text{cst}$$

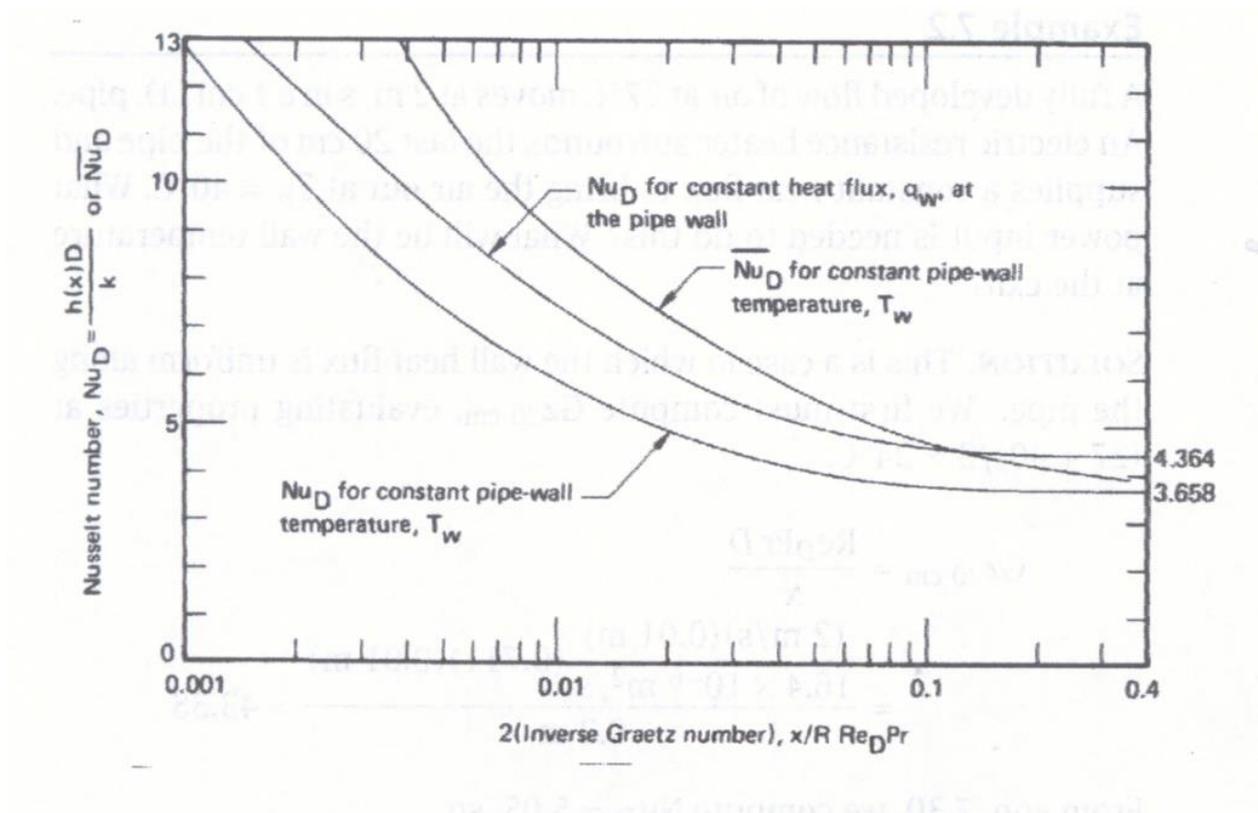


Fig.I.5 : Développement du Nusselt pour un écoulement pour un écoulement établi [2]

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de Nusselt pour différentes géométries des conduites

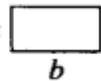
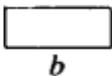
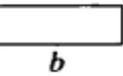
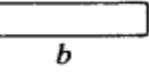
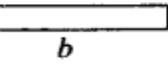
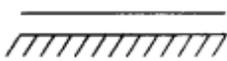
Section de la conduite	$b/a$	$Nu$ ( $q_w=Cst$ )	$Nu$ ( $T_w=Cst$ )
		4.364	3.66
	1.0	3.61	2.98
	1.43	3.73	3.08
	2.0	4.12	3.39
	3.0	4.79	3.96
	4.0	5.33	4.44
	8.0	6.49	5.60
	$\infty$	8.235	7.54
		5.385	4.86
		3.11	2.49

Fig I.6. Le nombre de Nusselt pour un écoulement totalement développé [2]

#### I.4. Revue bibliographique :

**H.A. Attia et N.A. Kotb [3]** une étude porte sur l'écoulement stable d'un fluide visqueux, électriquement conducteur et incompressible, délimité par deux plaques horizontales parallèles infinies isolées et le transfert de chaleur à travers celui-ci. La plaque supérieure est animée d'une vitesse constante tandis que la plaque inférieure reste immobile. La viscosité du fluide varie avec la température. L'effet du champ magnétique externe uniforme ainsi que l'influence du gradient de pression sur la structure de l'écoulement et sur les champs de température sont rapportés.

L'effet de la viscosité dépendant de la température sur un écoulement instable d'un fluide visqueux, électriquement conducteur et incompressible entre deux plaques parallèles avec la prise en considération de la dissipation visqueuse a été étudié par **H.A, Attia [4]**

**J. Orfi, , & N. Galanis [5]** ont présenté une étude numérique des effets des nombres de Grashof solutal et thermique sur les écoulement du fluide et sur les champs de température et de concentration dans des tubes exposés à des températures et de concentration uniformément à l'interface fluide-solide.

**T. S. Chang [6]** a présenté une étude numérique de la convection mixte laminaire dans un canal vertical. Une section finie de la paroi droite est maintenue à une température d'une variation linéaire. Des variations de la vitesse locale, de la température, des nombres de Nusselt locaux et moyens sont tracées pour démontrer les influences des paramètres étudiés, notamment le nombre de Reynolds, le nombre de Grashof et le degré de variation de la température des parois. Les résultats ont montré que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds et avec l'augmentation du nombre de Grashof. Enfin, une excellente corrélation est proposée pour prédire Nu sur la large gamme de paramètres étudiés.

L'écoulement d'un nanofluide dans un tube circulaire avec transfert de chaleur par convection a été étudié numériquement par **S. Z. Heris et al [7]**. La paroi du canal est maintenue à une température constante.

Les résultats montrent clairement que l'ajout de nanoparticules au liquide de base produit une amélioration considérable du transfert de chaleur. Le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la concentration de nanoparticules. La diminution de la taille des nanoparticules à une concentration spécifique augmente les échanges thermiques

**G. Desrayaud, & G. Lauriat [8]** ont présenté une étude numérique porte sur les phénomènes de renversement d'écoulement de l'air avec transfert par convection mixte dans un canal vertical constitué de deux plaques parallèles de longueur finie. Les résultats sont obtenus pour un écoulement assisté par la poussée d'Archimède dans un canal chauffé symétriquement avec des températures de paroi uniformes pour différents nombres de Grashof et nombres de Reynolds. Des renversements centrés à l'entrée du canal sont détectés. La force des cellules diminue à mesure que Le nombre de Reynolds augmente jusqu'à disparaître. Il est également montré que la longueur du canal n'a aucune influence sur l'apparition des zones de recirculation à condition que  $H/D \geq 10$ .

**M.Narahari, & B. K. Dutta [9]** ont présenté une solution exacte au problème de l'écoulement de convection libre non stationnaire et du transfert de chaleur dans un fluide visqueux incompressible situé entre deux longues plaques verticales et parallèles. La température de l'une des plaques augmente linéairement avec le temps, tandis que celle de l'autre reste constante à la température initiale du fluide. Les équations gouvernantes sans dimension sont résolues en utilisant la technique de la transformée de Laplace, aboutissant à des séries infinies à convergence rapide. Les profils calculés de vitesse et de température ainsi que la contrainte de cisaillement et le flux thermique au niveau des plaques sont présentés. Les variations paramétriques et temporelles des grandeurs pertinentes sont discutées.

L'écoulement de convection mixte entièrement développé dans un canal vertical rempli de nanofluides a été étudié par **H. Xu & I. Pop [10]**. Des solutions analytiques sont obtenues pour les deux types d'écoulement assisté et opposé. Les effets de la fraction volumique des nanoparticules  $\phi$  sur la température et les distributions de vitesse sont présentés. L'étude confirme que la fraction volumique de nanoparticules  $\phi$  joue un rôle important dans l'amélioration des caractéristiques de transfert de chaleur et de masse.

**Sun, H., et al [11]** ont proposé un modèle alternatif basé sur des conditions aux limites plus réalistes basées sur une pression totale prescrite à l'entrée et une pression fixe dans les sections de sortie. Les solutions numériques mettent en évidence les grandes différences

entre la vitesse prescrite à l'entrée et les solutions fournies par les conditions limites basées sur la pression.

**Dritselis, C. D et al [12]** ont illustré l'effet de la variation spatiale de la température le long de la paroi d'une conduite constituée de deux plaques parallèles, L'influence d'une condition limite de température spatialement périodique sur la convection mixte laminaire dans un écoulement ascendant entre deux plaques parallèles verticales est étudiée numériquement. Une évaluation détaillée des effets des nombres de Grashof et de Reynolds, de la longueur du canal et de la longueur d'onde de la distribution périodique de la température au niveau de la paroi la plus froide sur l'écoulement et les caractéristiques thermiques a été présentée. Au-delà d'un rapport critique entre les nombres de Grashof et de Reynolds, l'écoulement se transforme progressivement en un régime multicellulaire, avec des caractéristiques périodiques qui correspondent à la périodicité de la distribution de la température à la frontière. Des zones locales de recirculation sont formées près de la paroi la plus froide, avec une taille et une force qui augmentent avec le rapport entre les nombres de Grashof et de Reynolds..

**Boudiaf, A et al [13]** ont examiné les changements de transfert de chaleur induits par la présence de deux obstacles générateurs de chaleur pour un écoulement d'un fluide non-newtonien dans un canal à plaques parallèles. Les effets de la hauteur des deux obstacles et de la distance qui les sépare sur la structure de l'écoulement et le nombre de Nusselt ont été discuté. Les résultats montrent que le taux d'échange thermique est largement affecté par la taille des obstacles et par la distance qui les sépare.

**Bazdidi-Tehrani, F., & Shahini, M. [14]** ont mené une étude numérique du transfert de chaleur par convection mixte associée au rayonnement au sein d'un canal vertical, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations gouvernantes. L'équation de transfert radiatif est résolue par la méthode des ordonnées discrètes. L'objectif principal est d'étudier l'influence des paramètres radiatifs, à savoir le paramètre conduction-rayonnement et l'épaisseur optique, sur l'apparition des zones de recirculation.

Le transfert de chaleur par convection mixte dans un canal horizontal rempli d'un milieu poreux a été étudié par **Ozgen, F., & Varol, Y. [15]**. Il a été observé que des paramètres tels que les nombres de Rayleigh et de Peclet ont un effet sur la structure d'écoulement et sur les champs de température.

Une étude numérique impliquant une analyse graphique a été réalisée par **Rahman, Iet al [16]** pour étudier l'écoulement des fluides et le transfert de chaleur entre deux plaques horizontales possédant des blocs (qui limitent l'écoulement). La présence de blocs crée une recirculation du fluide, ce qui augmente le temps disponible pour le gain de chaleur pendant l'application du flux thermique. Les blocs contribuent à l'augmentation de la température du fluide.

---

*Chapitre II : géométrie et formulation  
mathématique*

---

## II.1. Introduction :

Dans les écoulements de convection mixte dans une canal verticale, le comportement du fluide est entièrement décrit par les champs de vitesses et les champs thermiques, la distribution de pression et les propriétés locales du fluide. Ces variables sont régies par les lois fondamentales de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. La solution de cet ensemble d'équations dépend de plusieurs nombres adimensionnels.

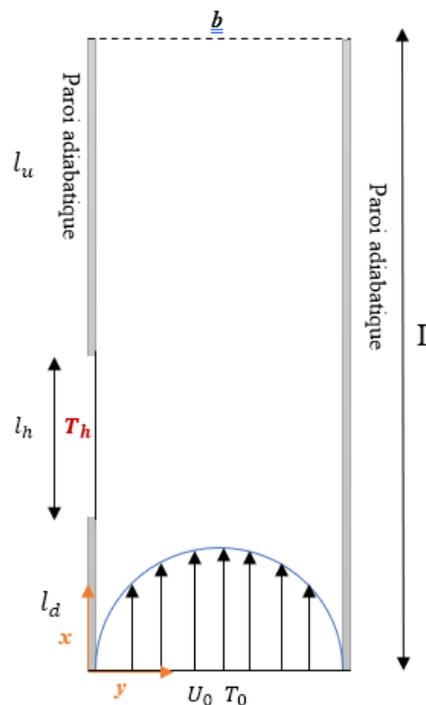
Dans les écoulements de convection mixte, nous distinguons les nombres de Richardson, Grashof, Prandtl et d'autres nombres sans dimension, représentés par diverses propriétés physiques et thermiques. L'importance relative de ces propriétés dépend des conditions thermiques et des facteurs géométriques.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'échange thermique dans une canal verticale avec un côté partiellement actifs par simulation numérique.

Dans ce chapitre, nous établirons les différentes équations mathématiques nécessaires à la résolution du problème considéré.

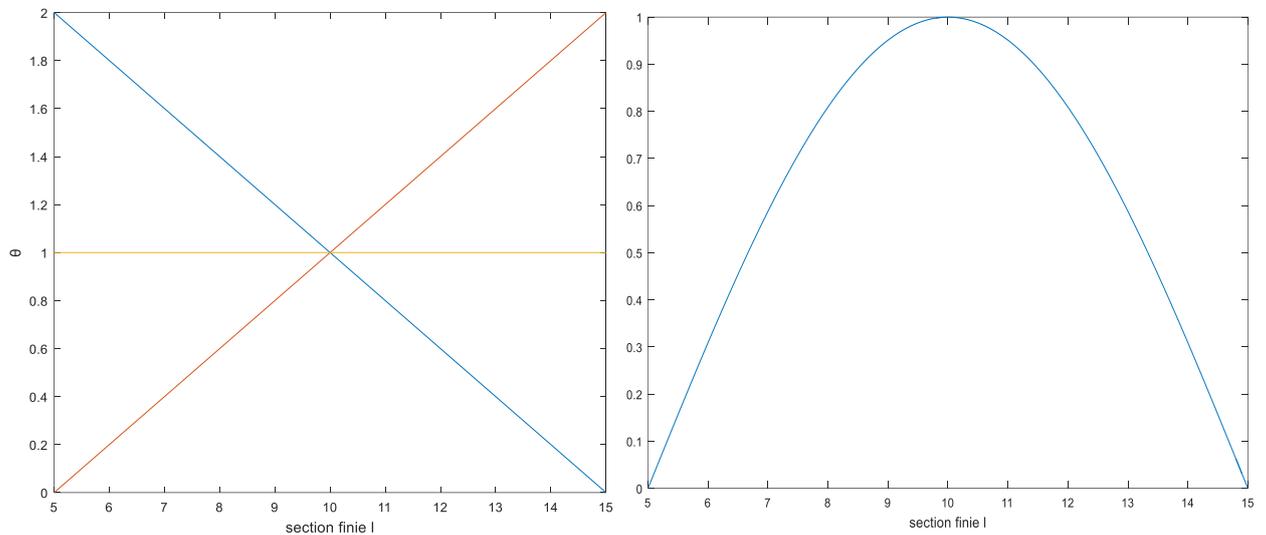
## II.2. Domaine physique :

Le domaine physique considéré est un canal formé par deux plaques parallèles de longueur  $L$  séparées par une distance  $b$  (**Fig.II.1**).



**Fig.II.1** : géométrie physique

Une section de la paroi gauche de longueur finie  $l$  est exposée à des différents types de chauffage (ascendant, descendant uniforme et sinusoïdale) (**Fig.II.2**).



**Fig.II.2** : Variation linéaire et sinusoïdale de la température

### II. 3. Équations générales :

En mécanique des fluides, en supposant que le fluide est un milieu continu, on peut utiliser les lois classiques de conservation qui sont :

- Loi de conservation de la masse ou l'équation de continuité.
- Deuxième loi de Newton (principe de conservation de quantité de mouvement) ou les équations de quantité de mouvement.
- Loi de conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) ou l'équation de l'énergie.
- Equation de continuité (conservation de la masse) :

C'est l'équation qui exprime la loi de conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel. Elle s'écrit mathématiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

- Equation de la conservation de la quantité de mouvement :

Également connue sous le nom de la deuxième loi de Newton permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide lors de son mouvement et les causes qui le produisent.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho g - \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{II. 2})$$

- Equation de conservation d'énergie :

Elle est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique.

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot \lambda \nabla T + \beta \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (\text{II. 3})$$

#### II.4. Hypothèse de base :

La modélisation du système étudié est basée sur les hypothèses suivantes :

- Écoulement permanent et en régime laminaire.
- Le fluide est Newtonien et incompressible.
- L'approximation de Boussinesq est adoptée pour l'étude de la convection naturelle ou mixte (les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes, excepté la masse volumique qui est variable dans le terme de gravité). Cette hypothèse reste possible tant que les écarts de température (température maximale du fluide et celle de référence) ne sont pas très élevés.

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (\text{II. 4})$$

- L'écoulement est supposé bidimensionnel, et la dissipation visqueuse est négligeable.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.

**II.5. Equations de conservation :**

Les équation de base de conservation en coordonnées cartésiennes après simplification s'écrivent comme suit:

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.5})$$

- **Equation de conservation de quantité de mouvement :**

Suivant x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta g (T - T_0) \quad (\text{II.6})$$

Suivant y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

- **Equation de conservation d'énergie :**

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T \quad (\text{II.8})$$

**II.6. Formulation adimensionnelle :**

Cette formulation adimensionnelle permet généralement de réduire le nombre de paramètres nécessaires à la résolution du système mathématique et de faire ressortir les paramètres adimensionnels caractéristiques du problème considéré.

Afin de ramener les équations précédentes à une forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir les grandeurs de référence qui sont pour le cas étudié :

- Distance entre les deux plaques  $b$ .

$$X = \frac{x}{b}, \quad Y = \frac{y}{b} \quad (\text{II.9})$$

- La température adimensionnelle est définie par :

$$\theta = \frac{T-T_0}{T_m-T_0} \quad (\text{II.10})$$

- Pour les vitesses.

$$U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0} \quad (\text{II.11})$$

- Pour la pression.

$$P = \frac{p}{\rho_0 u_0^2} \quad (\text{II.12})$$

On introduit les différentes variables adimensionnées dans les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et l'équation de l'énergie. On trouve que le formalisme général dépend de trois paramètres adimensionnels qui sont le nombre de Richardson, le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad (\text{II.13})$$

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T b^3}{\nu^2} \quad (\text{II.14})$$

$$Re = \frac{2bu_0}{\nu} \quad (\text{II.15})$$

On écrit les équations sous forme adimensionnelle comme suit :

➤ **Equation de conservation de masse :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.16})$$

➤ **Equation de conservation de quantité de mouvement :**

Suivant x :

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + 4Ri \cdot \theta \quad (\text{II.17})$$

Suivant y :

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.18})$$

➤ **Equation de conservation de la chaleur :**

$$\frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{2}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.19})$$

**II.7. Conditions aux limites :**

<i>Limite géométrique</i>	<i>Conditions dynamiques et thermiques</i>
Entrée $X = 0 \quad 0 \leq Y \leq 1$	$\theta = 0 \quad U = 6(Y - Y^2) \quad V = 0$
Paroi gauche $Y = 0$ ➤ $0 \leq X \leq \frac{l_d}{b}$ ➤ $\frac{l_d}{b} < X \leq \frac{l_d}{b} + \frac{l_h}{b}$ ➤ $\frac{l_d}{b} + \frac{l_h}{b} < X \leq \frac{L}{b}$	➤ $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U = 0 \quad V = 0$ ➤ $\theta = \begin{cases} \theta_1 + \frac{2b(X - \frac{l_d}{b})(1 - \theta_1)}{L} \\ \sin\left(\frac{\pi(X - \frac{l_d}{b})}{\frac{l_h}{b}}\right) \end{cases} \quad U = V = 0$ ➤ $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U = 0 \quad V = 0$
Paroi droite $Y = 1 \quad 0 \leq X \leq \frac{L}{b}$	$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U = 0 \quad V = 0$
Sortie $X = \frac{L}{b} \quad 0 \leq Y \leq 1$	$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial X} = 0$

**Tableau II.1 :** Les conditions aux limites

**II.8. Le Nombre de Nusselt:**

Le nombre de Nusselt est un nombre adimensionnel très utilisé dans les applications de transfert de chaleur il caractérise le transfert de chaleur entre la plaque et le fluide environnant. Il représente le rapport entre le flux transmis réellement de la plaque vers le fluide et le flux qui serait transmis en régime de conduction pure.

$$\phi_{réel} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\text{le long de la section chauffée}} = h_c (T_p - T_0)$$

Avec  $h_c$  coefficient d'échange convectif local.

$$\phi_{conductif} = \frac{\lambda(T_p - T_0)}{L}$$

$$Nu = \frac{\phi_{réel}}{\phi_{conductif}} = \frac{h_c L}{\lambda}$$

$$Nu = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_{Y=0} \text{ Le long de la partie chauffée}$$

Le nombre de Nusselt moyen peut être exprimé par la relation intégrale suivante :

$$\overline{Nu} = \frac{b}{l_h} \int_{\frac{l_d}{b}}^{\frac{l_d}{b} + \frac{l_h}{b}} Nu dX$$

### II.9. Conclusion :

A la fin de ce chapitre, nous aboutissons au modèle mathématique. Ce dernier est alors constitué d'un système d'équations, complété par des conditions aux limites. Il s'agit d'un système complexe formé par des équations, qui sont issues de la thermodynamique et de la mécanique des fluides. Les équations de bilan sont donc connues mais :

- La résolution analytique de ces équations de bilan est difficile à réaliser.
- Les non-linéarités visibles dans les équations sont principalement à l'origine des difficultés pour obtenir une solution analytique.

Donc, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable pour la résolution du système d'équations obtenu. Dans notre étude, on a utilisé le code Matlab, basé sur la méthode des volumes finis pour résoudre les différentes équations. Cette méthode est exposée dans le chapitre suivant.

---

## *Chapitre III : Méthode de résolution*

---

**III.1. Introduction :**

La résolution des équations de conservation d'un phénomène physique se fait par l'utilisation d'une méthode numérique bien déterminée. Cette dernière consiste à développer les moyens de la résolution de ces équations. A cette étape, intervient le concept de la discrétisation des équations différentielles, qui a pour résultat, un système d'équations algébriques non linéaires, ces équations décrivent les propriétés discrètes du fluide dans chaque nœud du domaine étudié.

Il existe plusieurs méthodes numériques de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles, les plus utilisées sont :

- La méthode des éléments finis.
- La méthode des différences finies.
- La méthode des volumes finis.

Dans notre étude, on a utilisé la méthode des volumes finis avec des volumes de contrôle quadrilatéraux et un maillage structuré, resserré près des parois. Le schéma de discrétisation employé est de type polynomial et le couplage vitesse-pression est calculé selon l'algorithme SIMPLE.

**III.2. Méthode des volumes finie :**

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation bien adaptée à la simulation numérique de différents types (par exemple, elliptiques, paraboliques ou hyperboliques) de lois de conservation ; elle a été largement utilisée dans plusieurs domaines de l'ingénierie, tels que la mécanique des fluides, le transfert de chaleur et de masse, ou l'ingénierie pétrolière. Certaines des caractéristiques importantes de la méthode des volumes finis sont similaires à celles de la méthode des éléments finis : elle peut être utilisée sur des géométries arbitraires, en utilisant des maillages structurés ou non structurés, et elle conduit à des schémas robustes. La méthode des volumes finis est localement conservatrice car elle est basée sur une approche de "bilan" : un bilan local est écrit sur chaque cellule de discrétisation souvent appelée "volume de contrôle" ; par la formule de divergence, une formulation intégrale des flux sur la frontière du volume de contrôle est ensuite obtenue. Les flux sur la frontière sont discrétisés par rapport aux inconnues discrètes.[17]

### III.3. Application de M.V.F :

#### 3.1. Équation du modèle :

L'équation générale de la convection diffusion peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underbrace{u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y}}_{\text{terme convective}} = \underbrace{\Gamma \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)}_{\text{terme diffusif}} + \underbrace{S}_{\text{terme source}} \quad (\text{III.1})$$

*Terme convective*      *terme diffusif*      *terme source*

$\Gamma$ :coefficient de diffusion

$\phi$ :variable dépendante (T, U, V)

On intègre cette équation pour un volume de control  $\Delta v$

$$[(u\phi)_e - (u\phi)_w]\Delta y + [(v\phi)_n - (v\phi)_s]\Delta x = \Gamma \left[ \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right) \Delta y + \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \right] + \underbrace{S_u + S_p \phi}_b \quad (\text{III.2})$$

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S_u + S_p \phi_P \quad (\text{III.3})$$

Le coefficient du nœud centrale P :

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + F_e - F_w + F_n - F_s \quad (\text{III.4})$$

Avec :

$$F_n = v_n \Delta x, F_s = v_s \Delta x, F_e = u_e \Delta y, F_w = u_w \Delta y$$

$$D_n = \frac{\Gamma \Delta x}{\Delta y_n}, D_s = \frac{\Gamma \Delta x}{\Delta y_s}, D_e = \frac{\Gamma \Delta y}{\Delta x_e}, D_w = \frac{\Gamma \Delta y}{\Delta x_w}$$

$$a_N = \frac{\Gamma \Delta x}{\Delta y_n} - \frac{v_n \Delta x}{2} = D_n - \frac{F_n}{2} \quad (\text{III.5})$$

$$a_S = \frac{\Gamma \Delta x}{\Delta y_s} + \frac{v_s \Delta x}{2} = D_s + \frac{F_s}{2} \quad (\text{III.6})$$

$$a_E = \frac{\Gamma \Delta y}{\Delta x_e} - \frac{u_e \Delta y}{2} = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (\text{III.7})$$

$$a_W = \frac{\Gamma \Delta y}{\Delta x_w} + \frac{u_w \Delta y}{2} = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (\text{III.8})$$

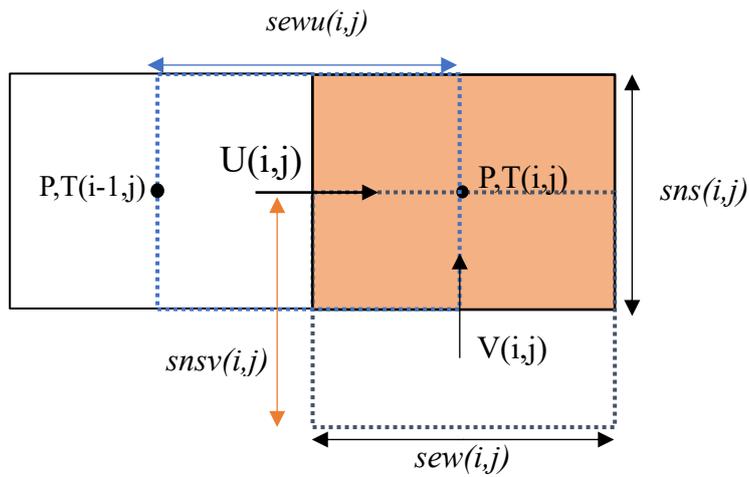


Fig III.1 : volume de contrôle bidimensionnel

Les coefficients diffusif « D » et convectif « F » pour chaque interface :

Pour la vitesse u

	F	D
N	$F_n = sewu(i) \cdot \frac{v(i, j + 1) + v(i - 1, j + 1)}{2}$	$D_n = \frac{\Gamma sewu(i)}{dynp(j)}$
S	$F_s = sewu(i) \cdot \frac{v(i, j) + v(i - 1, j)}{2}$	$D_s = \frac{\Gamma sewu(i)}{dysp(j)}$
E	$F_e = sns(j) \cdot \frac{u(i + 1, j) + u(i, j)}{2}$	$D_e = \frac{\Gamma sns(j)}{dxeu(i)}$
W	$F_w = sns(j) \cdot \frac{u(i, j) + u(i - 1, j)}{2}$	$D_w = \frac{\Gamma sns(j)}{dxwu(i)}$

Pour la vitesse v

	F	D
N	$F_n = sew(i) \cdot \frac{v(i,j) + v(i,j+1)}{2}$	$D_n = \frac{\Gamma sew(i)}{sns(j)}$
S	$F_s = sew(i) \cdot \frac{v(i,j-1) + v(i,j)}{2}$	$D_s = \frac{\Gamma sew(i)}{sns(j-1)}$
E	$F_e = sns v(j) \cdot \frac{u(i+1,j) + u(i-1,j+1)}{2}$	$D_e = \frac{\Gamma sns v(i,j)}{sewu(i+1,j)}$
W	$F_w = sns v(j) \cdot \frac{u(i,j) + u(i,j-1)}{2}$	$D_w = \frac{\Gamma sns v(i,j)}{sewu(i,j)}$

Pour la température T

	F	D
N	$F_n = sew(i,j) \cdot v(i,j+1)$	$D_n = \frac{\Gamma sew(i,j)}{dyn(i,j)}$
S	$F_s = sew(i,j) \cdot v(i,j)$	$D_s = \frac{\Gamma sew(i,j)}{dys(i,j)}$
E	$F_e = sns(i,j) \cdot u(i+1,j)$	$D_e = \frac{\Gamma sns(i,j)}{dxe(i,j)}$
W	$F_w = sns(i,j) \cdot u(i,j)$	$D_w = \frac{\Gamma sns(i,j)}{dxw(i,j)}$

### 3.2. Couplage P-U V : [17]

➤ **Algorithme de SIMPLE :**

L'acronyme SIMPLE signifie Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations. L'algorithme a été proposé à l'origine par Patankar et Spalding (1972) et constitue essentiellement une procédure de supposition et de correction pour le calcul de la pression sur la disposition de grille échelonnée présentée ci-dessus. La méthode est illustrée en considérant les équations d'écoulement stationnaire laminaire bidimensionnelles en coordonnées cartésiennes.

Pour lancer le processus de calcul SIMPLE, on prend l'équation de discrétisation de l'équation de quantité de mouvement :

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} + (p_{i-1,j} - p_{i,j})A_{i,j} + b_{i,j} \quad \text{(III.a)}$$

$$a_{i,j}v_{i,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (p_{i,j-1} - p_{i,j})A_{i,j} + b_{i,j} \quad \text{(III.b)}$$

En utilisant un champ de pression deviné  $p^*$  pour donner les composantes de vitesse  $u^*$  et  $v^*$  comme suit :

$$a_{i,j} \cdot u_{i,j}^* = \sum a_{n,b}u_{n,b}^* + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad \text{(III.a*)}$$

$$a_{i,j} \cdot v_{i,j}^* = \sum a_{n,b}v_{n,b}^* + (p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \quad \text{(III.b*)}$$

Nous définissons la correction  $p'$  comme la différence entre le champ de pression correct  $p$  et le champ de pression deviné  $p^*$ , de sorte que :

$$p = p^* + p' \Leftrightarrow p' = p - p^* \quad \text{(III.9)}$$

De même, nous définissons des corrections de vitesse  $u'$  et  $v'$  pour relier les vitesses correctes  $u$  et  $v$  aux vitesses devinées  $u^*$  et  $v^*$  :

$$u = u^* + u' \Leftrightarrow u' = u - u^* \quad \text{(III.10)}$$

$$v = v^* + v' \Leftrightarrow v' = v - v^* \quad \text{(III.11)}$$

La substitution du champ de pression correct  $p$  dans les équations de quantité de mouvement donne le champ de vitesse correct  $(u,v)$ . Les équations discrétisées (a) et (b) relient les champs de vitesse corrects au champ de pression correct.

La soustraction des équations (a\*) et (b\*) de (a) et (b), respectivement, donne

$$\mathbf{a}_{i,j}(\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i,j}^*) = \sum \mathbf{a}_{n,b}(\mathbf{u}_{n,b} - \mathbf{u}_{n,b}^*) + [(\mathbf{p}_{i-1,j} - \mathbf{p}_{i-1,j}^*) - (\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{i,j}^*)]A_{i,j} \quad (\text{III.12})$$

$$\mathbf{a}_{i,j}(\mathbf{v}_{i,j} - \mathbf{v}_{i,j}^*) = \sum \mathbf{a}_{n,b}(\mathbf{v}_{n,b} - \mathbf{v}_{n,b}^*) + [(\mathbf{p}_{i,j-1} - \mathbf{p}_{i,j-1}^*) - (\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{i,j}^*)]A_{i,j} \quad (\text{III.13})$$

Avec :

$$A_{i,j} = \Delta x A_{i,j} = \Delta y a_{i,j} = \mathbf{a}_{i,j} = \mathbf{a}_p$$

$$\mathbf{a}_p \mathbf{u}'_{i,j} = \sum \mathbf{a}_{nb} \mathbf{u}'_{nb} + (\mathbf{p}'_{i-1,j} - \mathbf{p}'_{i,j}) \Delta y \quad (\text{III.14})$$

$$\mathbf{a}_p \mathbf{v}'_{i,j} = \sum \mathbf{a}_{nb} \mathbf{v}'_{nb} + (\mathbf{p}'_{i,j-1} - \mathbf{p}'_{i,j}) \Delta x \quad (\text{III.15})$$

L'omission de ces termes  $\sum \mathbf{a}_{nb} \mathbf{u}'_{nb}$  et  $\sum \mathbf{a}_{nb} \mathbf{v}'_{nb}$  est la principale approximation de l'algorithme SIMPLE :

Donc

$$\mathbf{u}'_{i,j} = \mathbf{d}_{i,j} (\mathbf{p}'_{i-1,j} - \mathbf{p}'_{i,j}) \quad (\text{III.16})$$

$$\mathbf{v}'_{i,j} = \mathbf{d}_{i,j} (\mathbf{p}'_{i,j-1} - \mathbf{p}'_{i,j}) \quad (\text{III.17})$$

$$\text{Avec : } \mathbf{d}_{i,j} = \frac{\Delta x}{(\mathbf{a}_p)_v} ; \mathbf{d}_{i,j} = \frac{\Delta y}{(\mathbf{a}_p)_u}$$

$$\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,j}^* + \frac{\Delta y}{(\mathbf{a}_p)_u} (\mathbf{p}'_{i-1,j} - \mathbf{p}'_{i,j}) \quad (\text{III.18})$$

$$\mathbf{v}_{i,j} = \mathbf{v}_{i,j}^* + \frac{\Delta x}{(\mathbf{a}_p)_v} (\mathbf{p}'_{i,j-1} - \mathbf{p}'_{i,j}) \quad (\text{III.19})$$

$$\mathbf{u}_{i+1,j} = \mathbf{u}_{i+1,j}^* + \frac{\text{sns}(j)}{(\mathbf{a}_p)_u} (\mathbf{p}'_{i,j} - \mathbf{p}'_{i+1,j}) \quad (\text{III.20})$$

$$\mathbf{v}_{i,j+1} = \mathbf{v}_{i,j+1}^* + \frac{\text{sew}(i)}{(\mathbf{a}_p)_v} (\mathbf{p}'_{i,j} - \mathbf{p}'_{i,j+1}) \quad (\text{III.21})$$

Le champ de vitesse est également soumis à la contrainte de satisfaire l'équation de continuité. La continuité est satisfaite sous forme discrétisée pour le volume de contrôle scalaire illustré à la figure III.2

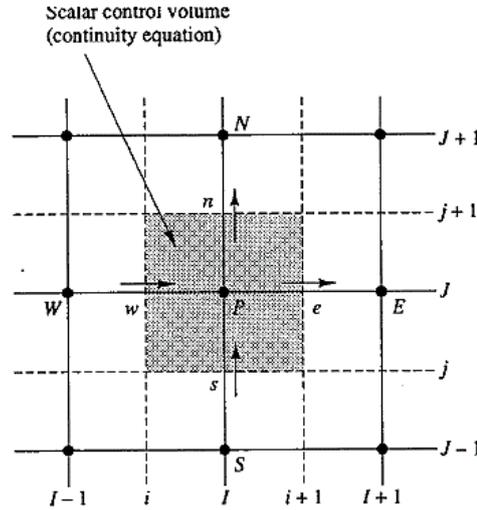


Fig. III.2 Le volume de contrôle scalaire utilisé pour la discrétisation de l'équation de continuité

$$\iint \frac{\partial U}{\partial X} dXdY + \iint \frac{\partial V}{\partial Y} dXdY = 0 \quad (\text{III.22})$$

$$[U_{i+1,j} - U_{i,j}]\Delta y + [V_{i,j+1} - V_{i,j}]\Delta x = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\left[ \mathbf{u}_{i+1,j}^* + \frac{sns(j)}{(a_p)_u} (\mathbf{p}'_{i,j} - \mathbf{p}'_{i+1,j}) - (\mathbf{u}_{i,j}^* + \frac{sns(j)}{(a_p)_u} (\mathbf{p}'_{i-1,j} - \mathbf{p}'_{i,j})) \right] \Delta y + \left[ \mathbf{v}_{i,j+1}^* + \frac{sew(i)}{(a_p)_v} (\mathbf{p}'_{i,j} - \mathbf{p}'_{i,j+1}) - (\mathbf{v}_{i,j}^* + \frac{sew(i)}{(a_p)_v} (\mathbf{p}'_{i,j-1} - \mathbf{p}'_{i,j})) \right] \Delta x = 0 \quad (\text{III.24})$$

$$a_{i,j} \mathbf{p}'_{i,j} = a_{i+1,j} \mathbf{p}'_{i+1,j} + a_{i-1,j} \mathbf{p}'_{i-1,j} + a_{i,j+1} \mathbf{p}'_{i,j+1} + a_{i,j-1} \mathbf{p}'_{i,j-1} + b'_{i,j} \quad (\text{III.25})$$

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \quad (\text{III.26})$$

$$a_{i+1,j} = \frac{sns(j)}{(a_p)_u} \Delta y \quad (\text{III.27})$$

$$a_{i-1,j} = \frac{sns(j)}{(a_p)_u} \Delta y \quad (\text{III.28})$$

$$a_{i,j+1} = \frac{sew(i)}{(a_p)_v} \Delta x \quad (\text{III.29})$$

$$a_{I,J-1} = \frac{sew(i)}{(a_p)_v} \Delta x \quad (III.30)$$

$$b'_{I,J} = [sns(j)(u_{i,j}^* - u_{i+1,j}^*) + sew(i)(v_{i,j}^* - v_{i,j+1}^*)] \quad (III.31)$$

L'équation (III.25) représente l'équation de continuité discrétisée sous la forme d'une équation de correction de pression  $p'$ . Le terme source  $b'$  dans l'équation est le déséquilibre de continuité résultant du champ de vitesse incorrect  $u^*, v^*$ .

En résolvant l'équation (III.25), le champ de correction de pression  $p'$  peut être obtenu en tous points. Une fois le champ de correction de pression connu, le champ de pression correct peut être obtenu à l'aide de la formule  $p = p^* + p'$  et des composantes de vitesse grâce aux formules de correction (III.10 -III.11). L'omission de termes tels que  $\sum a_{n,b} u'_{n,b}$  dans la dérivation n'affecte pas la solution finale car les corrections de pression et de vitesse seront toutes nulles dans une solution convergée donnant :  $p^* = p$ ,  $u^* = u$  et  $v^* = v$

L'équation de correction de pression est susceptible de diverger à moins qu'une certaine sous-relaxation ne soit utilisée pendant le processus itératif et que de nouvelles pressions améliorées ouf soient obtenues avec

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p' \quad (III.32)$$

Où  $\alpha_p$  est le facteur de sous-relaxation de pression.

Les vitesses sont également sous-relâchées. Les composantes de vitesse améliorées de manière itérative et sont obtenues à partir de :

$$u^{new} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \quad (III.33)$$

$$v^{new} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)} \quad (III.34)$$

La séquence des étapes dans l'algorithme SIMPLE est présentée sur la Figure III.3

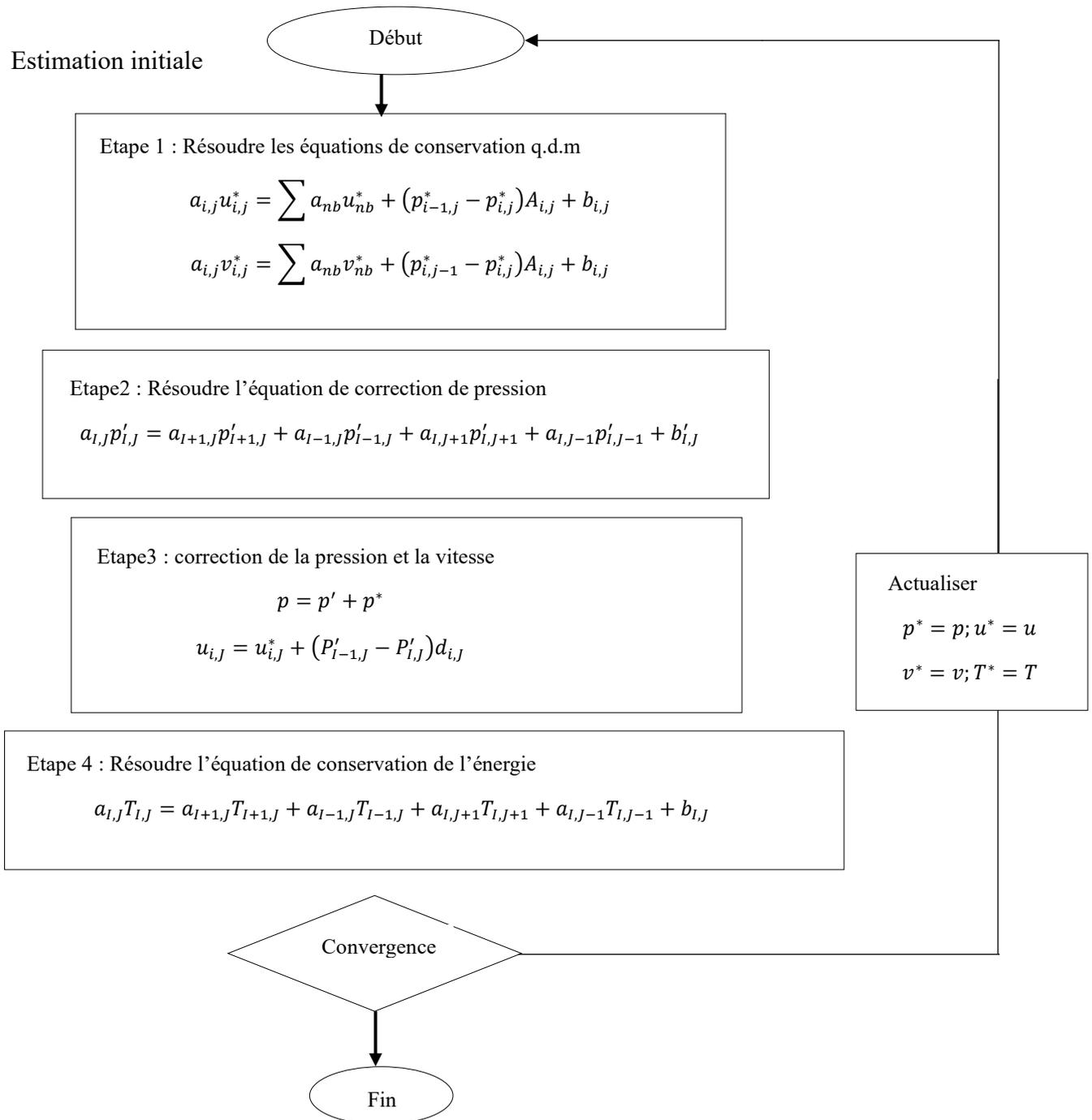


Figure III.3 : L'algorithme simple

**III.4.Conclusion :**

A travers ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode des volumes finis, les étapes de discrétisation du modèle mathématique, ainsi que la résolution des équations algébriques.

Une résolution numérique bidimensionnelle des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie a été mise en œuvre pour simuler la variation de profile de vitesse et le champ de température dans le canal. La résolution est effectuée par le code Matlab, basé sur la méthode des volumes finis. Les résultats obtenus par ce code sont présentés dans le chapitre suivant.

---

## *Chapitre IV : Résultats et discussions*

---

### VI.1. Introduction :

Ce chapitre présente les résultats de simulations numériques de la convection mixte dans un canal constitué de deux plaques parallèles. L'analyse présentée auparavant montrent que les caractéristiques du transfert de chaleur dépendent des paramètres adimensionnels : le nombre de Prandtl, le nombre de Reynolds, le nombre de Grashof et ou le nombre de Richardson. Certains paramètres ont été fixés. Ainsi tous les essais numériques ont été faits pour un nombre de Prandtl,  $Pr=0.71$  ce qui représente l'air et pour différents types de chauffage. Les longueurs sont choisies comme suit:

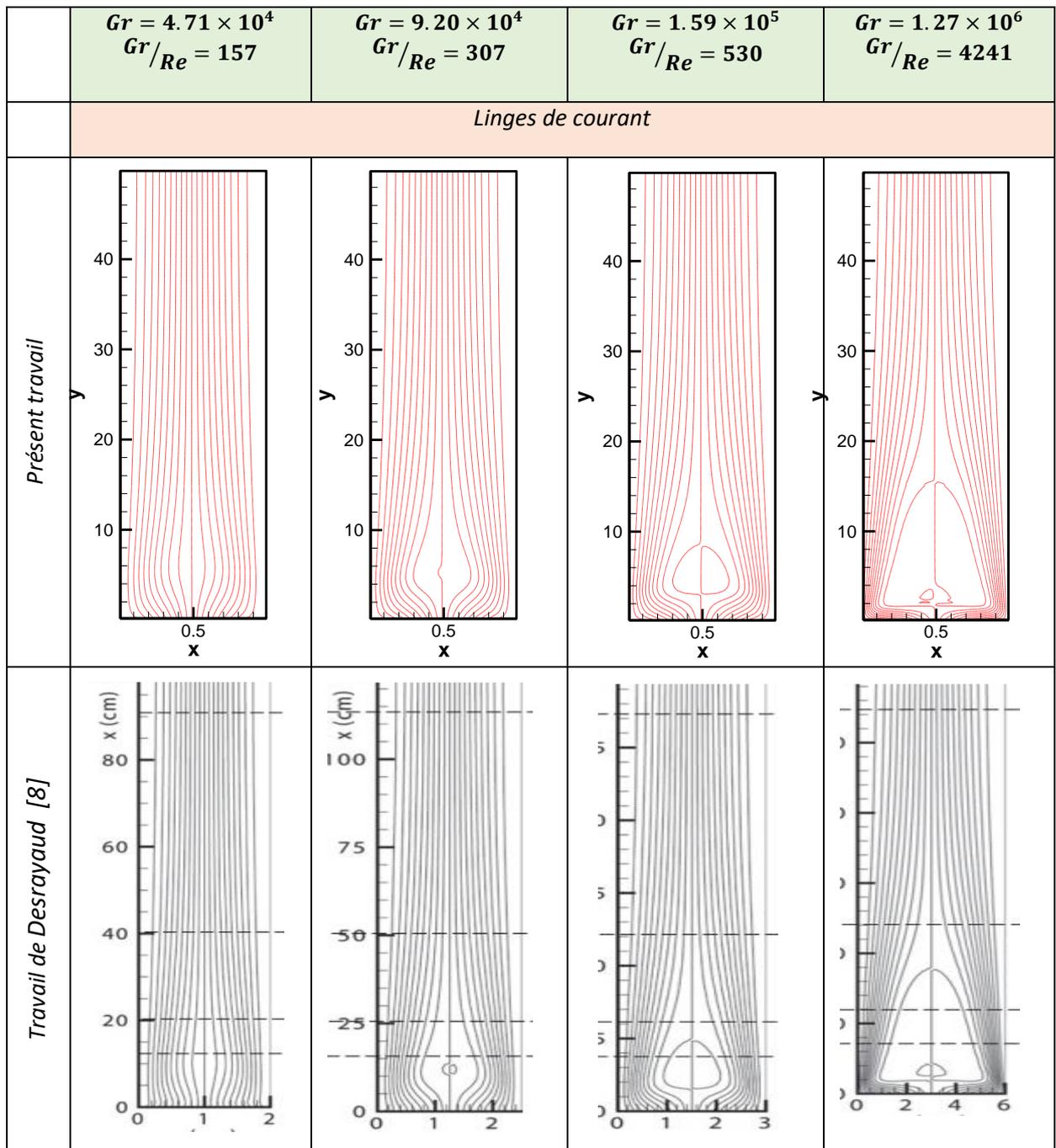
$$l_d = 5b, \quad l_h = 10b, \quad l_u = 35b .$$

Une combinaison du nombre de Richardson et du nombre de Reynolds est choisi pour déterminer leurs effets sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique.

La visualisation de ces champs a été réalisée en utilisant le logiciel de visualisation **Tecplot 360**, quant aux courbes, elles ont été réalisées en utilisant le logiciel **Origine 2019**.

### IV.2. Validation du code de calcul :

Pour vérifier la fiabilité de notre code de calcul nous avons comparé nos résultats avec ceux extraits de Gilles Desrayaud et Guy Lauriat [8]. Les figures **Figure IV.1** et **Figure IV.2** représentent une comparaison des lignes de courant et des isothermes pour différentes combinaisons du nombre de Reynolds et du nombre de Grashof et les profils des vitesses à des différentes positions le long du canal sont présentés sur les figures **Figure IV.3** et **Figure IV.4**. A travers cette étude comparative, on constate une bonne concordance et un accord très satisfaisant entre nos résultats et ceux trouvés par G. Desrayaud et al [8] ce qui nous permet de conclure que le code numérique élaboré peut décrire le modèle physique présenté dans le chapitre II



**Fig.IV.1:** Les lignes de courant pour  $Re=300$  et pour différentes valeurs du nombre de Grashof

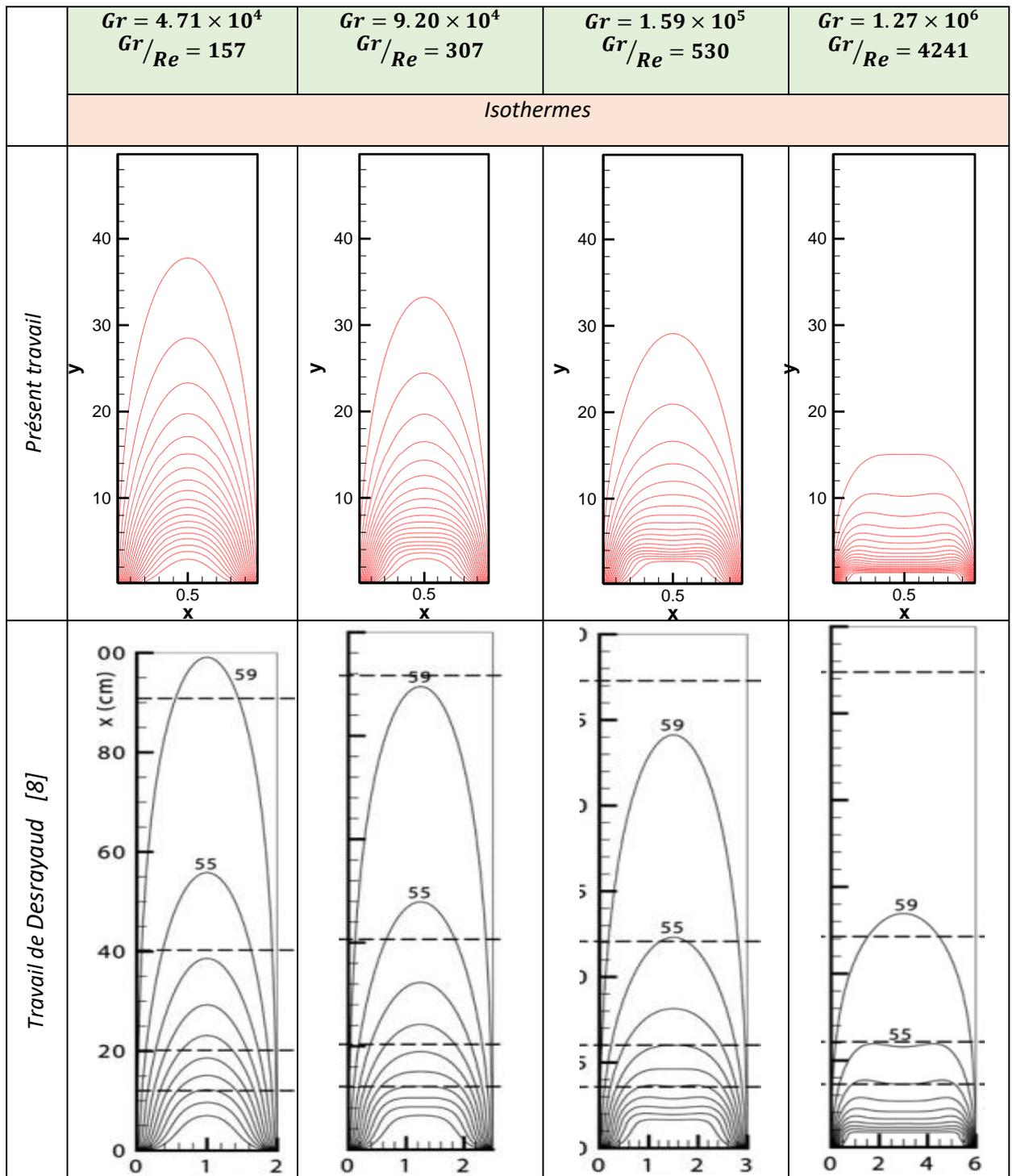
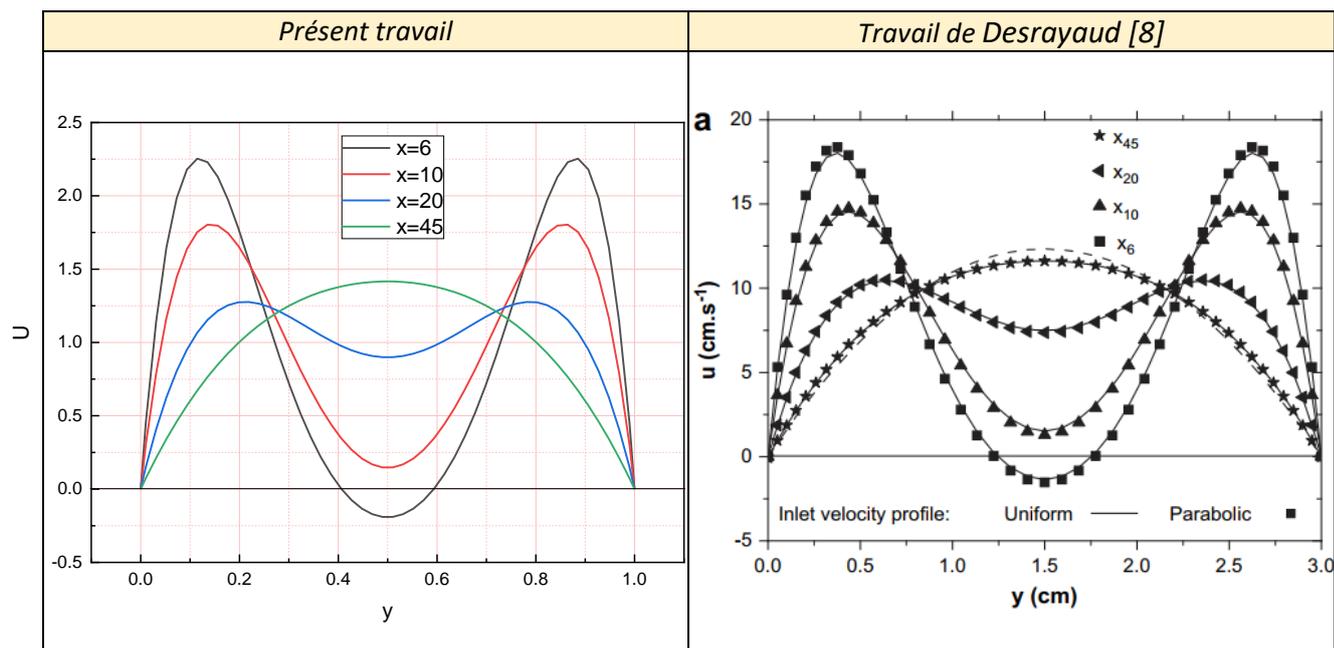
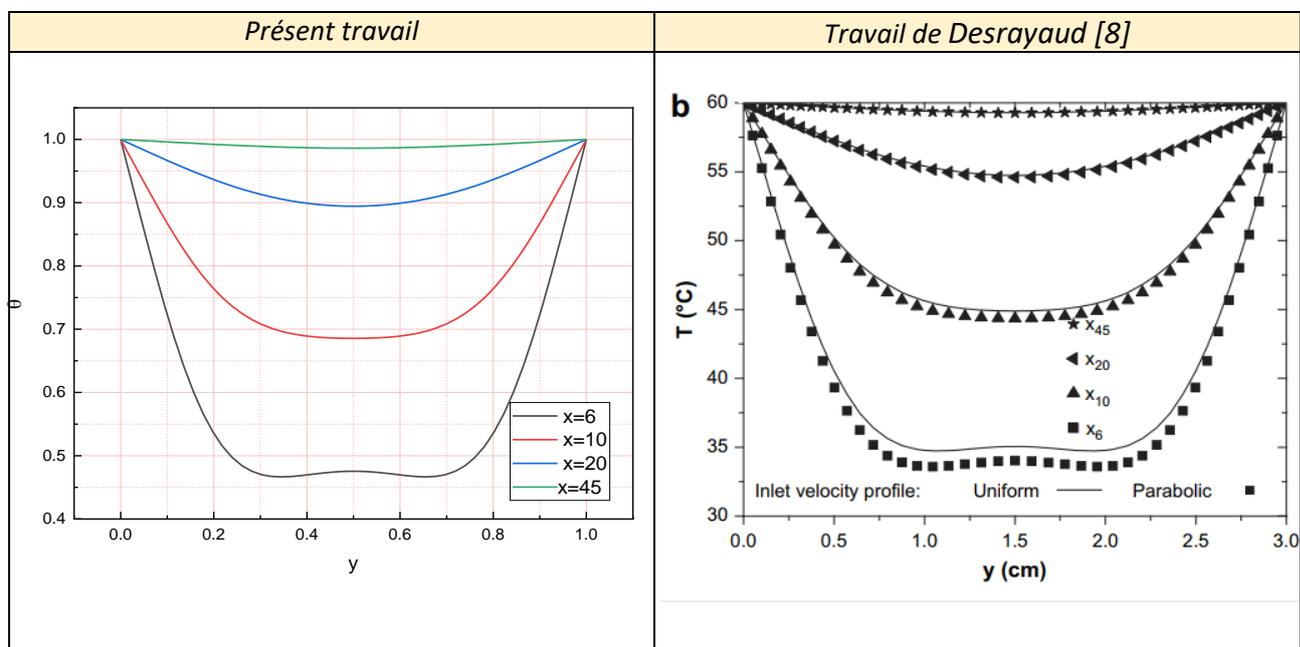


Fig.IV.2: Les isothermes pour  $Re=300$  et pour différentes valeurs du nombre de Grashof



**Fig.IV.3 :** Profil de vitesse longitudinale à des différentes positions le long du canal pour  $Re=300$  et  $Gr=1.59 \times 10^5$



**Fig.IV.4 :** la distribution de température à des différentes positions le long du canal pour  $Re=300$  et  $Gr=1.59 \times 10^5$

### IV.3. Résultat et interprétation :

La convection mixte dans le canal vertical avec une température de paroi variable est régie par les paramètres non dimensionnels : le nombre de Reynolds  $Re$ , le nombre de Grashof  $Gr$ , le nombre de Prandtl  $Pr$ , la longueur de la section chauffée  $l_h$  et le type de chauffage.

Les simulations numériques sont effectuées pour les nombres de Reynolds ( $Re=100$ ,  $Re=500$ ) les nombres de Grashof ( $Gr=4000$ ,  $Gr=40000$ ) et pour différents types de chauffage. L'air est utilisé comme fluide de travail ( $Pr = 0,71$ ) et  $l_h = 10b$

#### 1<sup>er</sup> cas: Variation linéaire de de la température le long de la partie chauffée du canal :

Une partie de longueur  $l_h = 10b$  est chauffée à une température dont la variation est linéaire et obéit à l'équation :

$$\theta = \theta_1 + 2X(1 - \theta_1) \cdot \frac{b}{l_h}$$

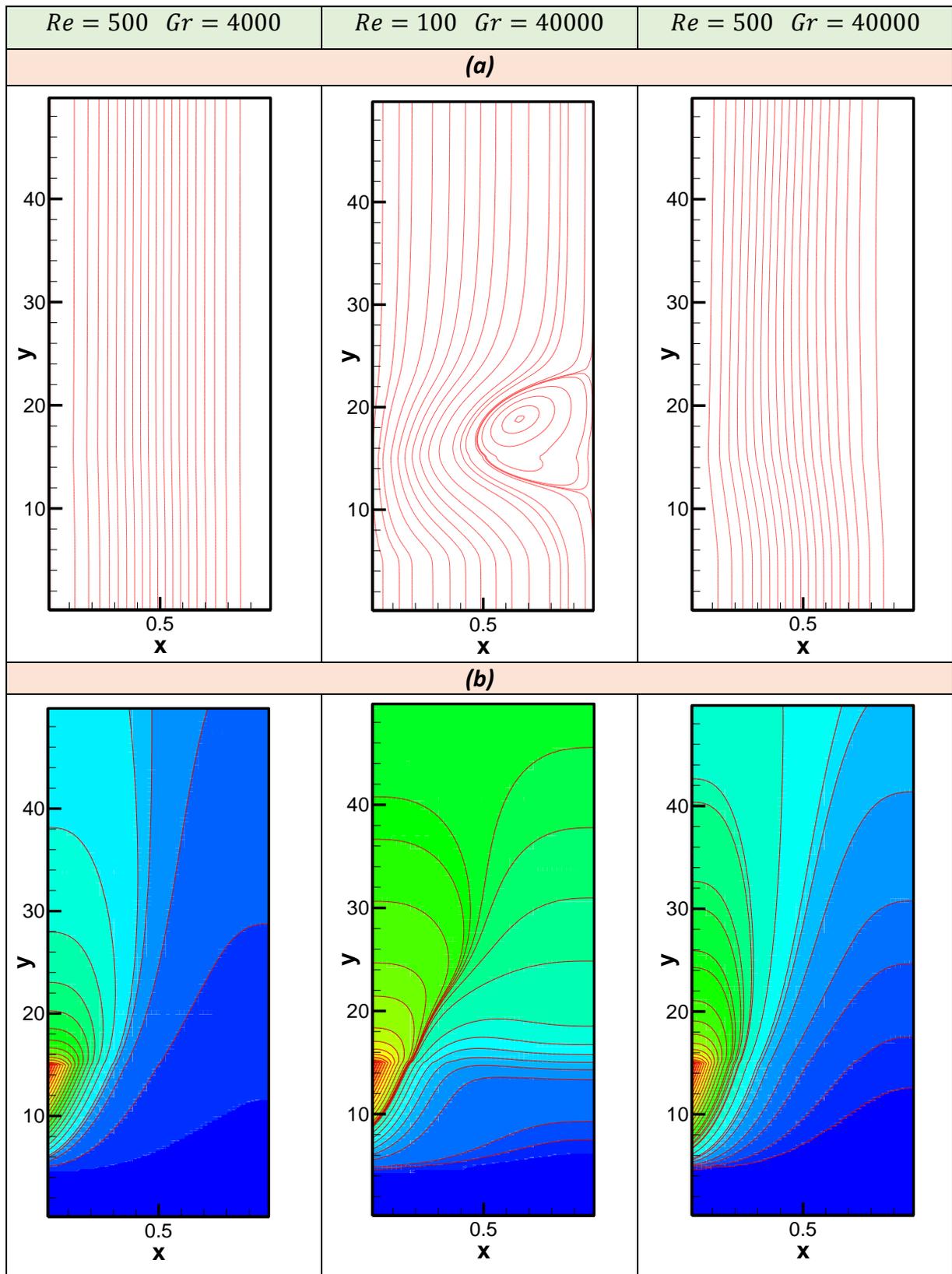
$\theta_1 = 0$  : cas d'un chauffage croissant.

$\theta_1 = 1$  : cas d'un chauffage uniforme

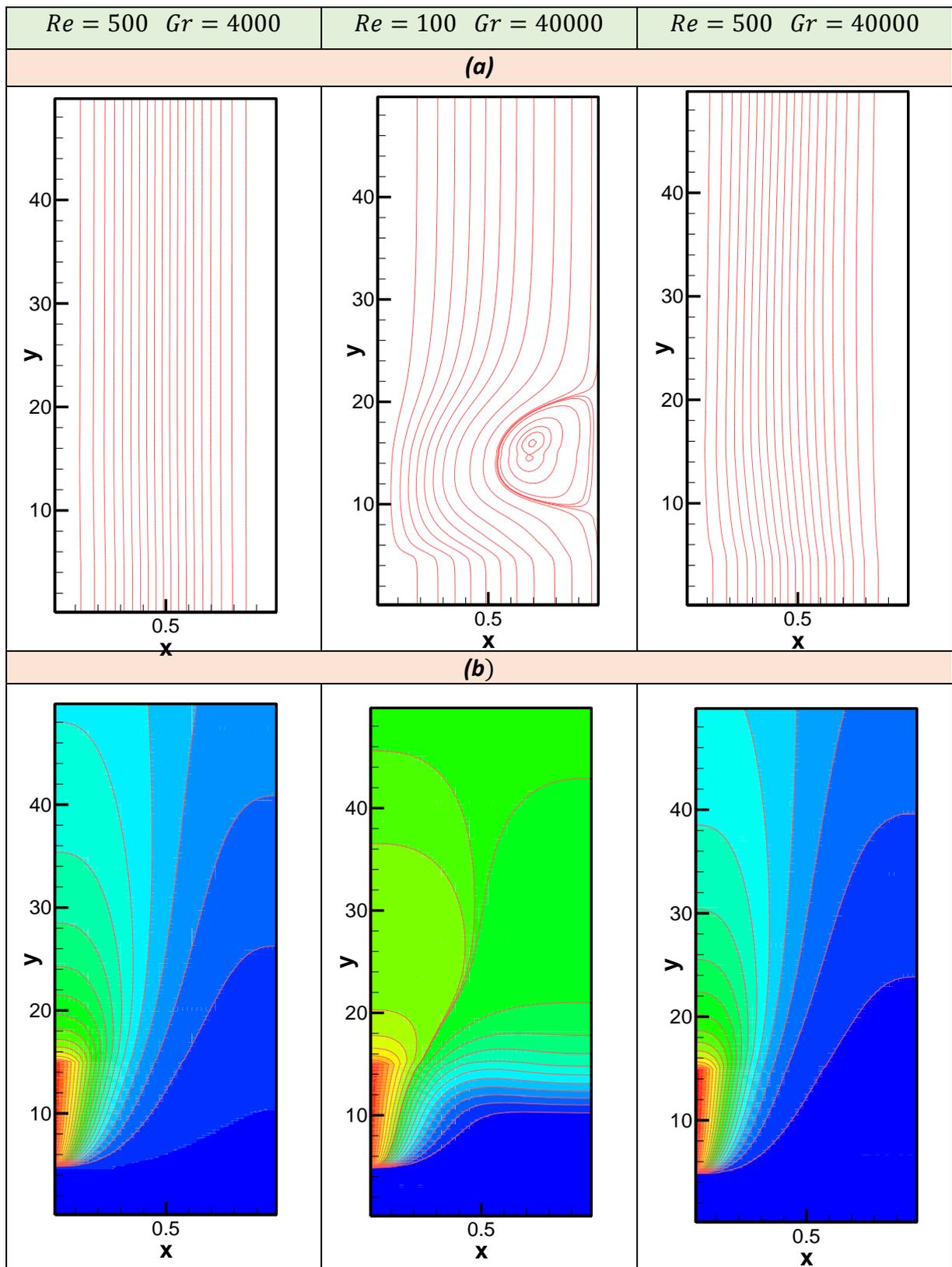
$\theta_1 = 2$  : cas d'un chauffage décroissant

Pour les faible nombre de Grashof ( $Ri = \frac{Gr}{Re^2} \ll 1$ ), la convection forcée est dominante.

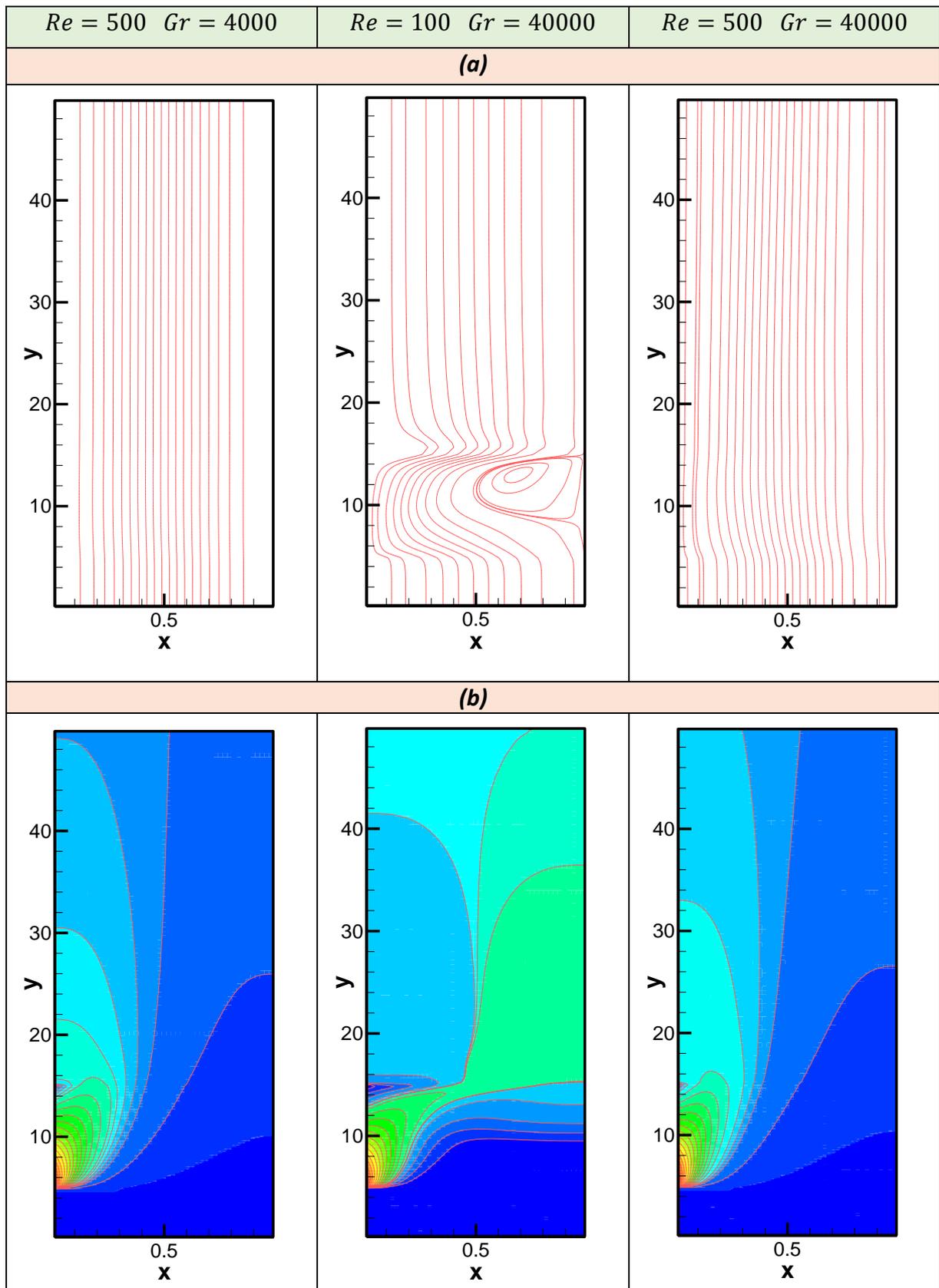
Quelque soit le type de chauffage, les lignes de courant sont des lignes parallèles et la distribution de la température est limité près de la paroi chauffée comme le montrent les figures **Fig.IV.5**, **Fig.IV.6** et **Fig.IV.7** et le profil des vitesses se rapproche de la le forme parabolique au niveau des trois positions (profil pour un écoulement totalement développé) comme le montre la figure Fig.IV.8. Avec l'augmentation du nombre de Grashof et la diminution du nombre de Reynolds, l'effet de la convection naturelle apparaît par la formation d'une zone de recirculation au voisinage de la paroi droite du fait de l'accélération du fluide près de la partie chauffée sous l'effet des forces de flottabilité thermique et par conservation de quantité de mouvement, le fluide au voisinage de la paroi droite décélère et le résultat est la création d'une cellule de recirculation qui tourne dans le sens des aiguilles de montre pour le cas d'un chauffage croissant et un chauffage uniforme. Pour un chauffage décroissant, on constate la formation d'une deuxième cellules de recirculation à la sortie de la partie chauffée et au voisinage de la paroi gauche. Cette structure peut être vérifier au niveau des profils des vitesses ou on peut clairement observer des valeurs négatives des vitesses ce qui confirme la création des zones de recirculation



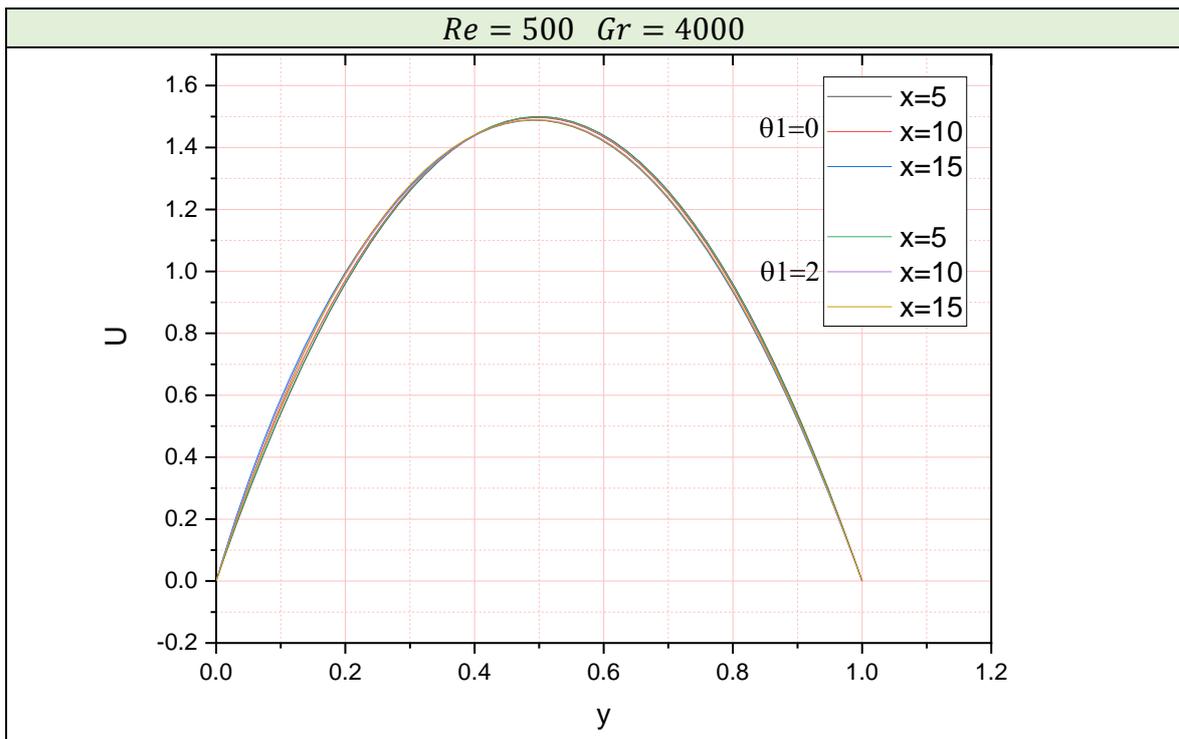
**Fig.IV.5** : les lignes de courant (a) et les isothermes (b) à différentes valeurs de Reynolds et de nombre de Grashof pour un chauffage croissant ( $\theta_1 = 0$ )



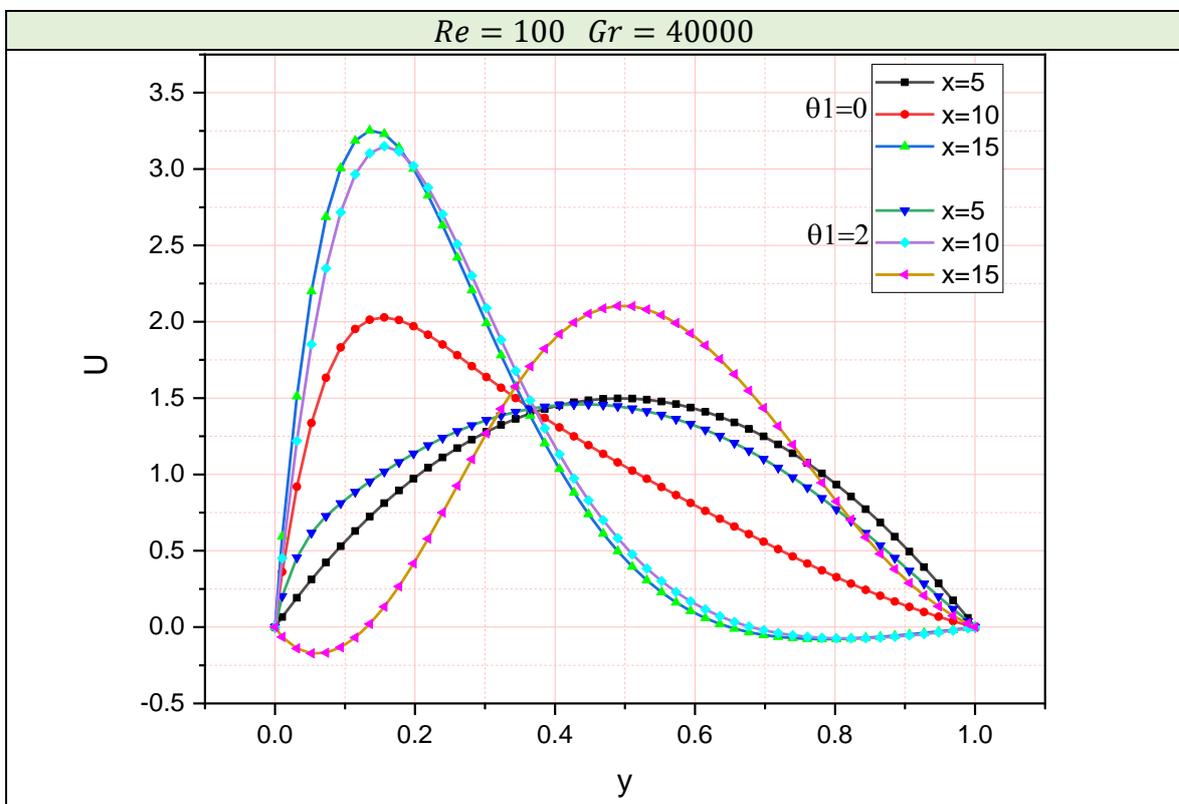
**Fig.IV.6 :** les lignes de courant (a) et les isothermes (b) à différentes valeurs de Reynolds et de nombre de Grashof pour un chauffage uniforme ( $\theta_1 = 1$ )



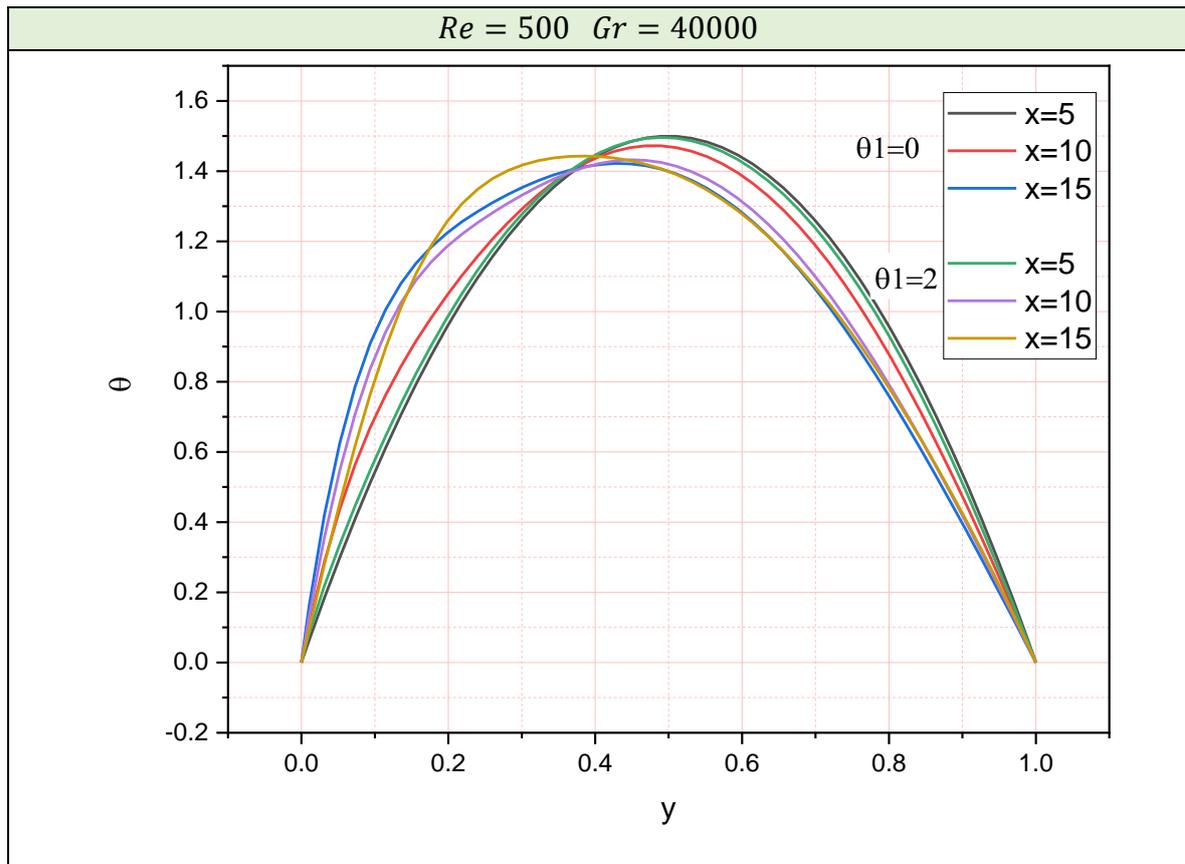
**Fig.IV.7** :les lignes de courant (a) et les isothermes (b) à différentes valeurs de Reynolds et de nombre de Grashof pour un chauffage décroissant( $\theta_1 = 2$ )



**Fig.IV.8** :Le profil de vitesse à différentes positions de la partie chauffée pour  $Re = 500 \quad Gr = 4000$

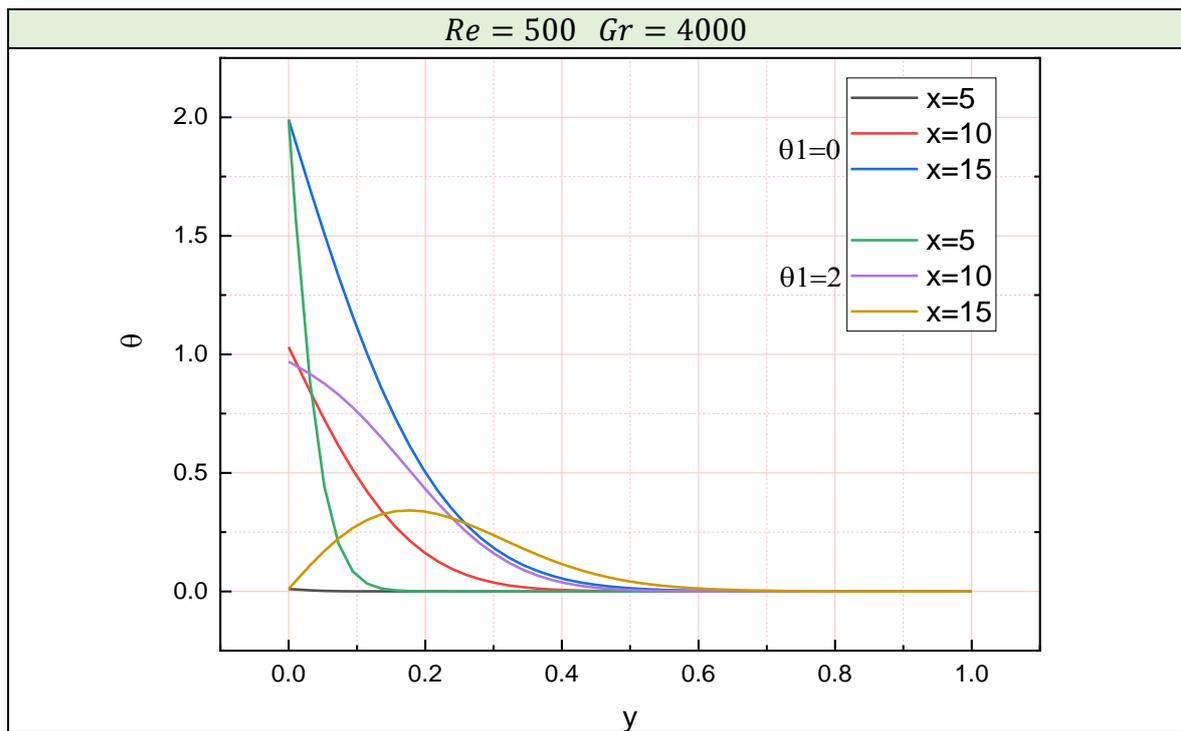


**Fig.IV.9** :Le profil de vitesse à différentes positions de la partie chauffée pour  $Re = 100 \quad Gr = 40000$

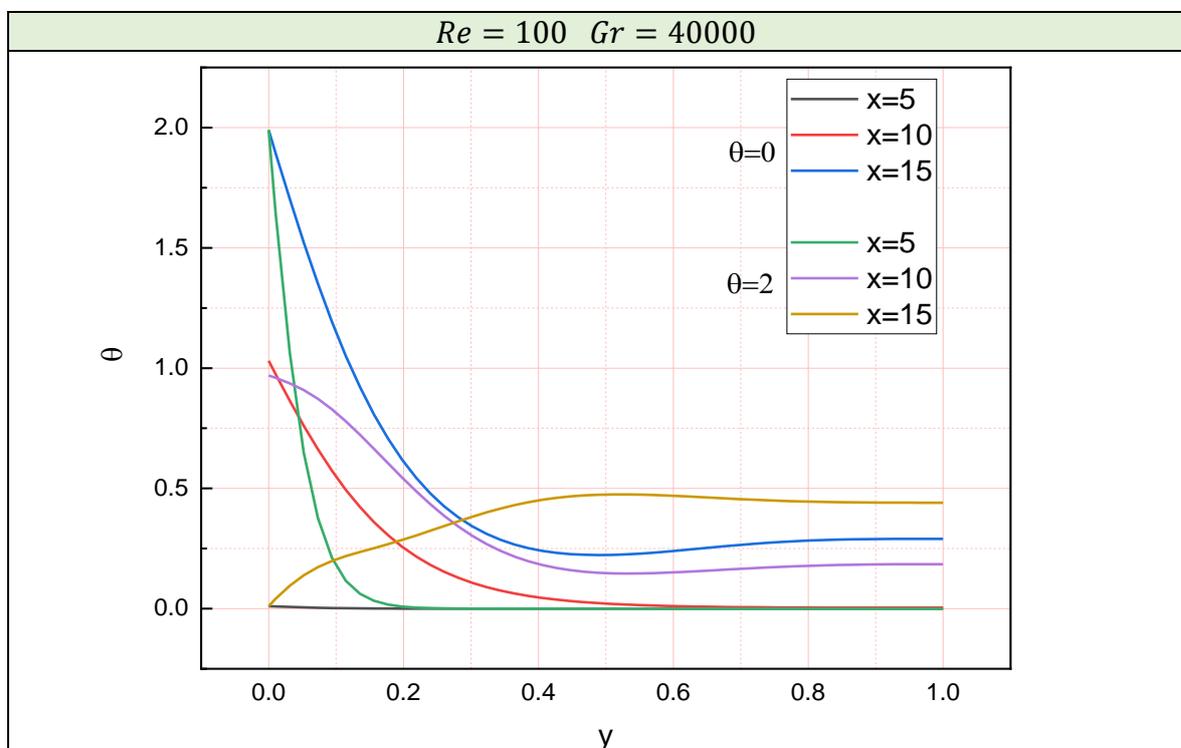


**Fig.IV.10:**Le profil de vitesse à différentes positions de la partie chauffée pour  $Re = 500$   $Gr = 40000$

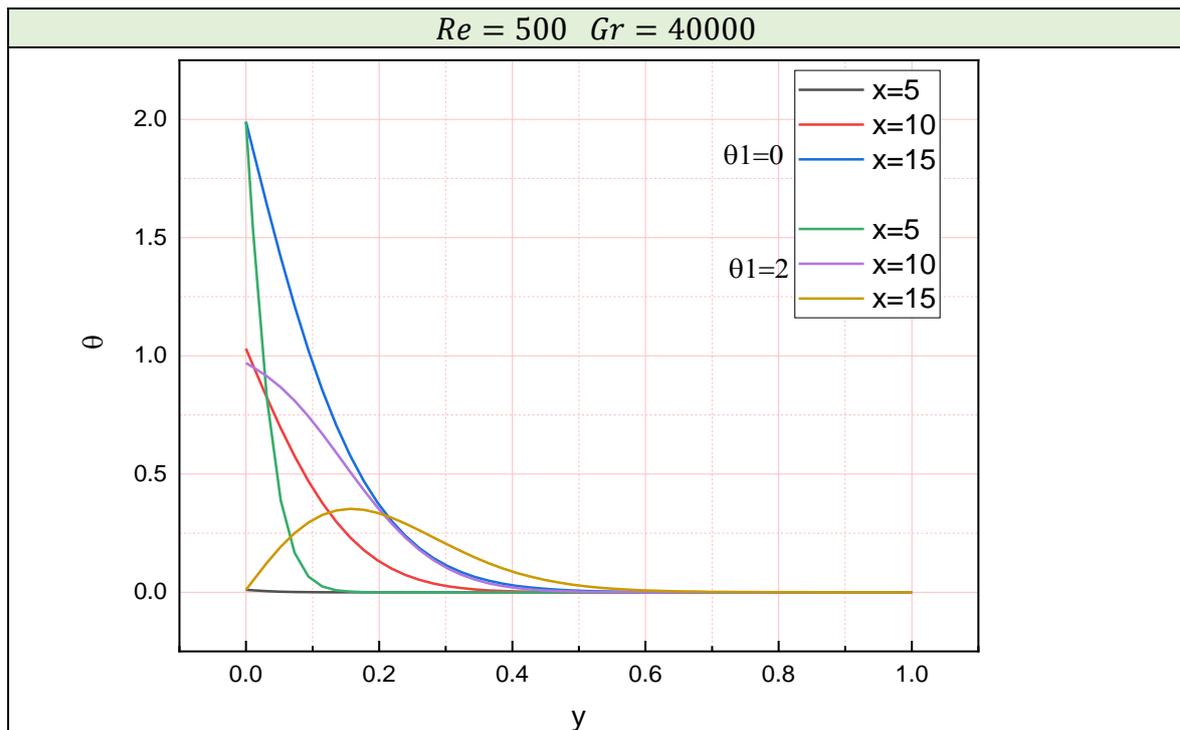
La distributions de température représentée sur les figures **Fig.IV.11**, **Fig.IV.12** et **Fig.IV.13** sont limitées à proximité de la paroi gauche pour les de convection forcée dominante, donc la température de la paroi droite est toujours maintenue à zéro. avec l'apparition de l'effet de la convection naturelle, les températures pénètrent dans le canal et la température de la paroi droite est augmentée.



**Fig.IV.11** :Variation de la température à des différentes positions de la partie chauffée pour  $Re = 500 \quad Gr = 4000$

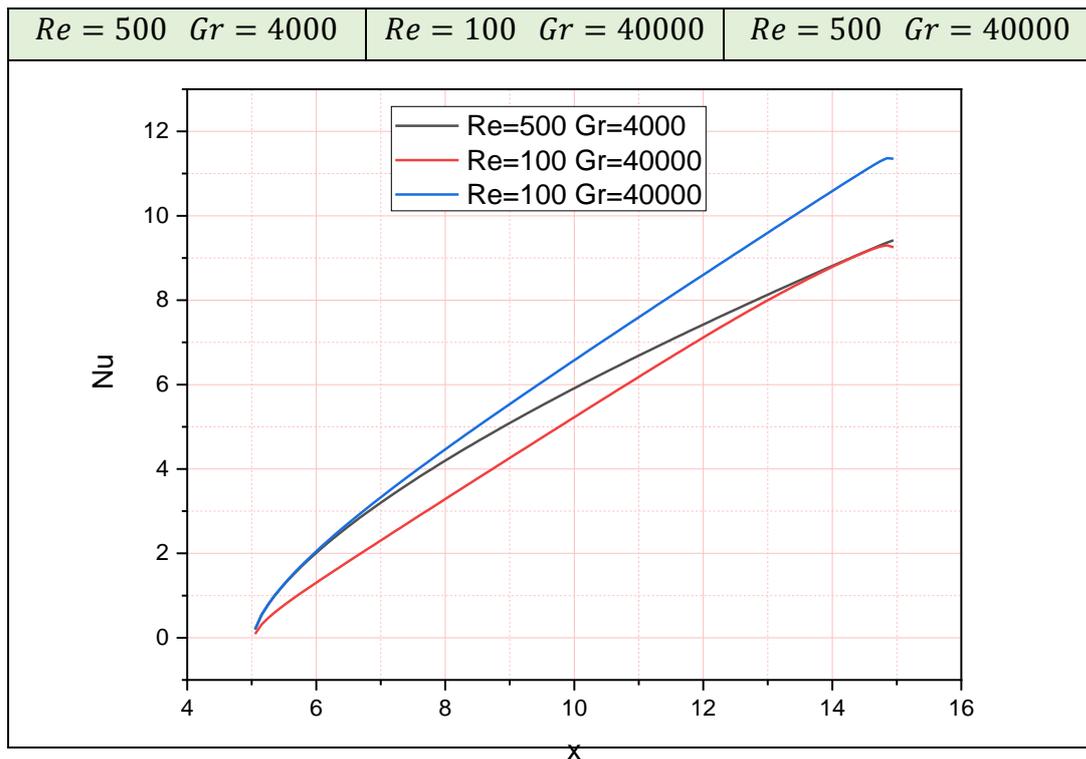


**Fig.IV.12** :variation de la température à différentes positions de la partie chauffée pour  $Re = 100 \quad Gr = 40000$

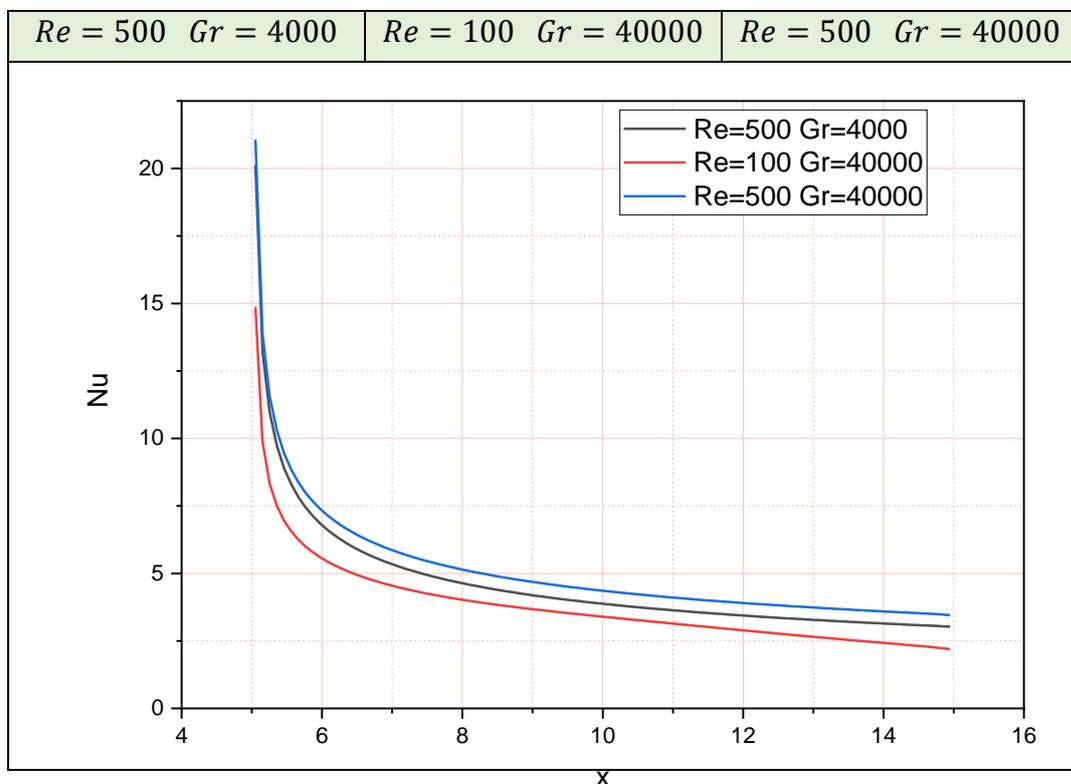


**Fig.IV.13** :Variation de la température à des différentes positions de la partie chauffée pour  $Re = 500$   $Gr = 40000$

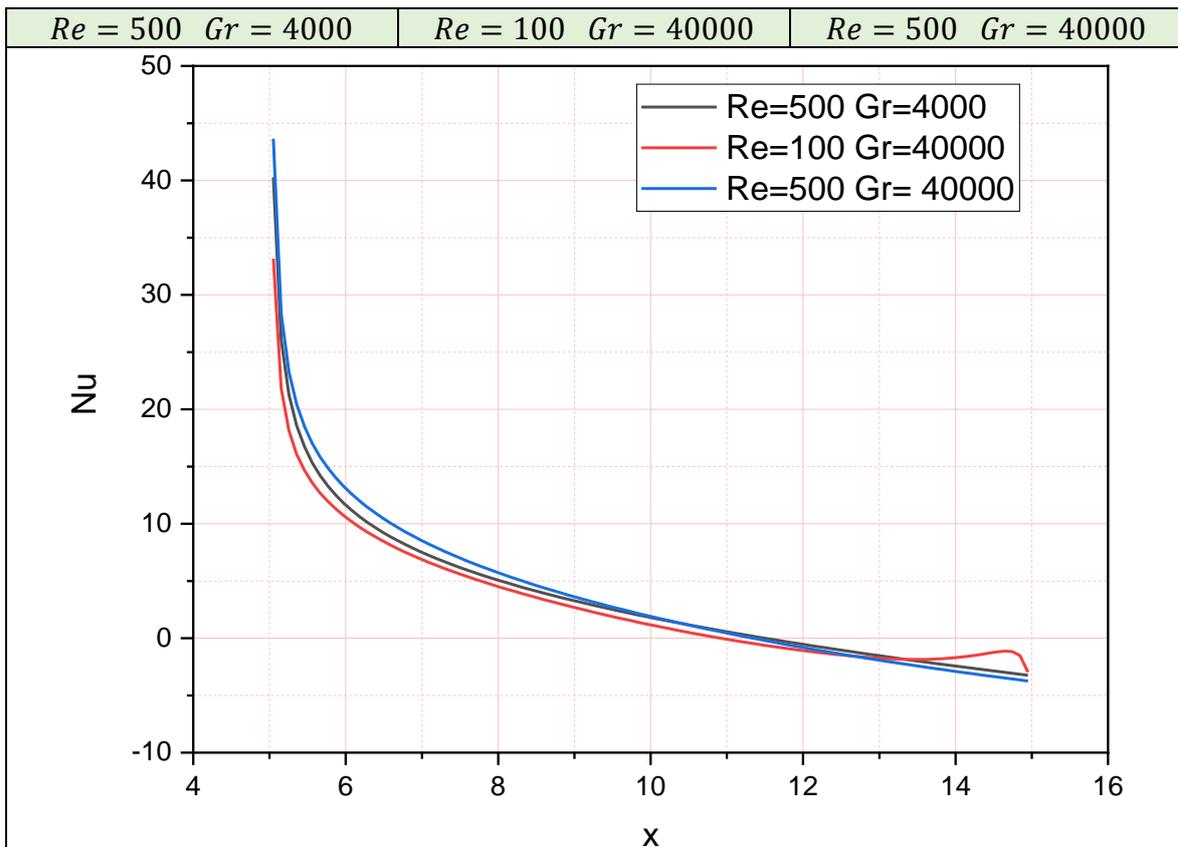
Pour la variation du nombre de Nusselt, des tendances similaires sont obtenues pour le chauffage croissant et un chauffage décroissant à l'exception du cas où la convection naturelle est dominante et pour un chauffage décroissant ( $\theta_1 = 2$ ) à la fin de la section chauffée,  $Nu$  diminue d'abord, puis augmente légèrement, enfin chute brusquement. Cette variation inhabituelle de  $Nu$  résulte de l'action simultanée du reversement de l'écoulement et la chaleur transférée du fluide le plus chaud au fluide le plus froid voir **Fig.IV.14** **Fig.IV.15** et **Fig.IV.16**.



**Fig.IV.14** :Evolution du nombre de Nusselt local le long de la partie chauffée de la paroi pour un chauffage croissant ( $\theta_1 = 0$ )



**Fig.IV.15** :Evolution du nombre de Nusselt local le long de la partie chauffée de la paroi pour un chauffage uniforme ( $\theta_1 = 1$ )



**Fig.IV.16:** Evolution du nombre de Nusselt local le long de la partie chauffée de la paroi pour différentes valeurs de nombre de Re et de Gr et pour un chauffage décroissant ( $\theta_1 = 2$ )

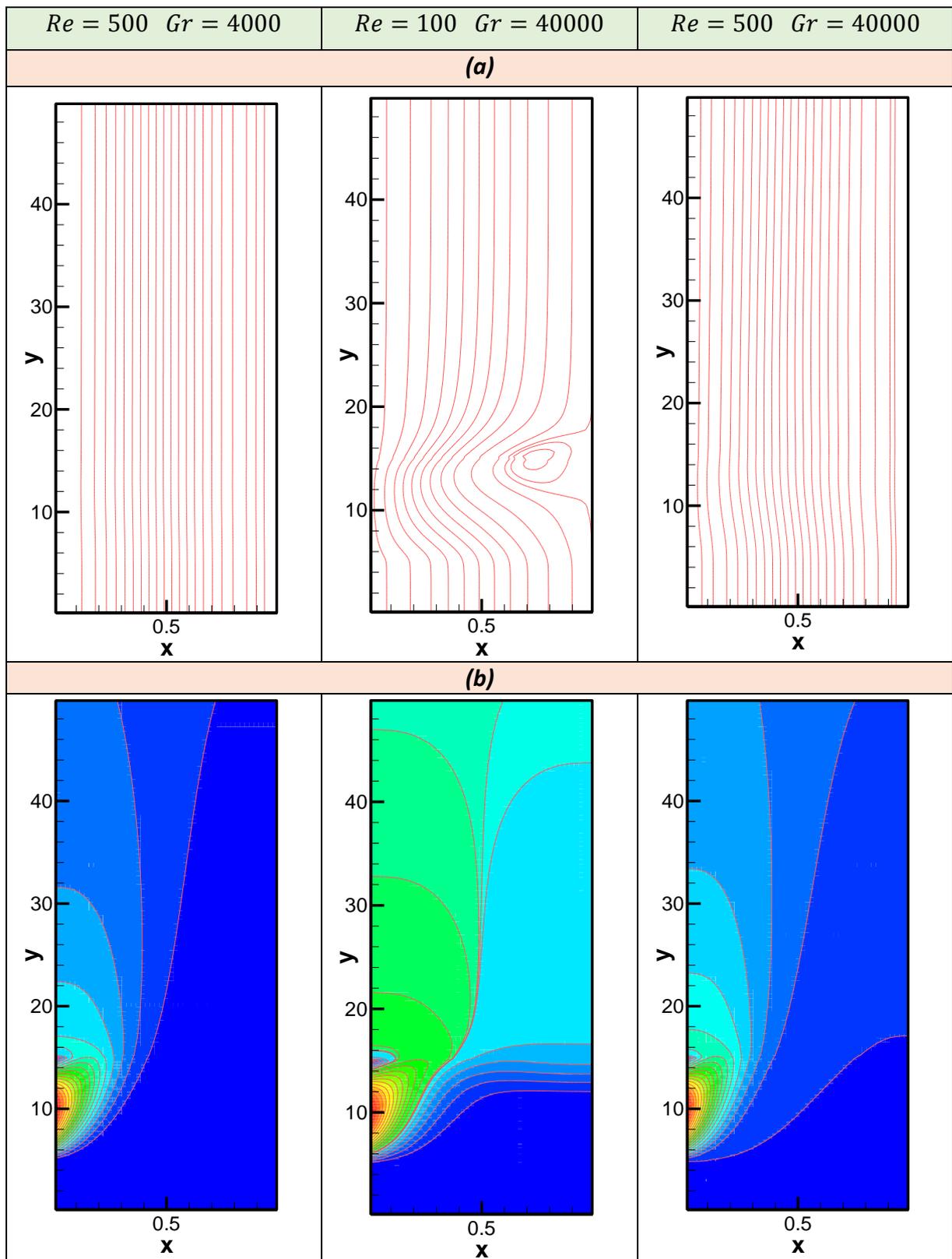
**2<sup>ème</sup> cas : Variation sinusoïdale de la température le long de la partie chauffée de la paroi :**

La température de la partie chauffée varie suivant la formule :

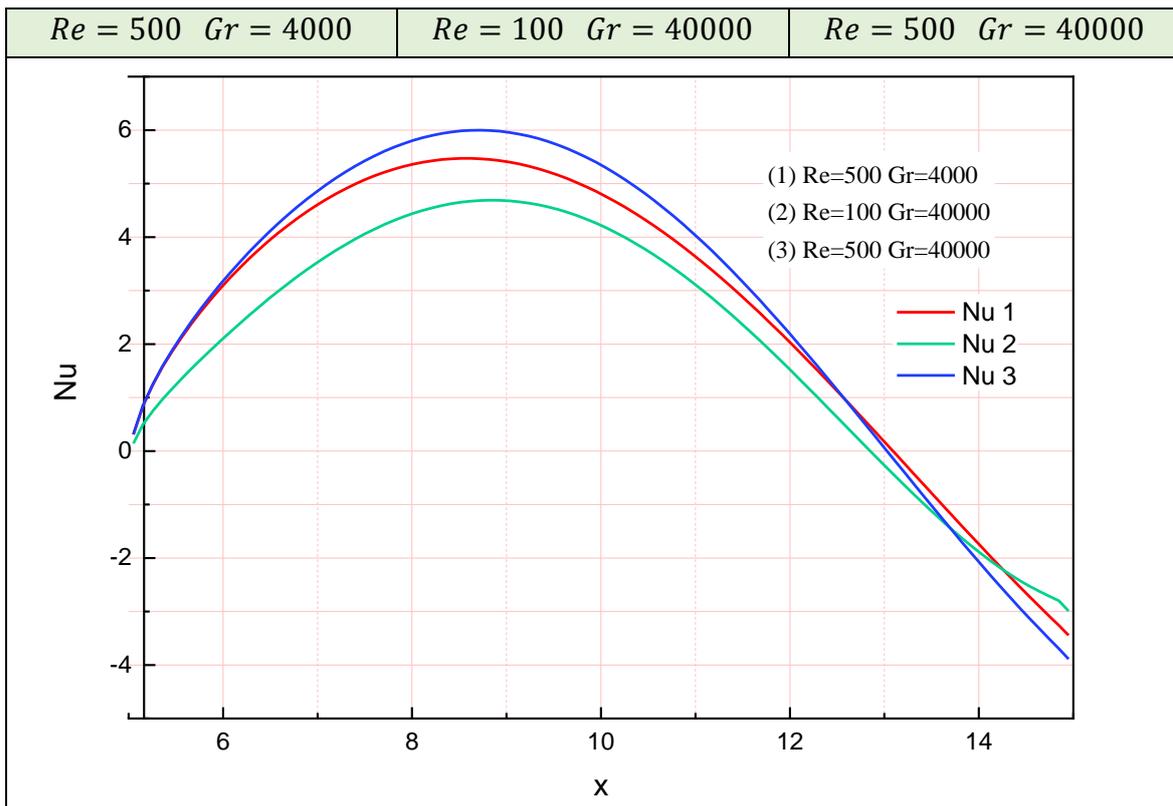
$$\theta = \sin\left(\frac{\pi(X - \frac{l_d}{b})}{\frac{l_h}{b}}\right)$$

La structure de l'écoulement est similaire au cas précédent pour le cas des faibles valeurs du nombre de Grashof (cas de la convection forcée dominante). Les lignes de courant sont parallèles, les isothermes sont concentrées au voisinage de paroi chauffée et les profils de la vitesse prennent une forme parabolique (forme d'un écoulement totalement développé) comme il est indiqué sur les figures **Fig.IV.17** et **Fig.IV.18**.

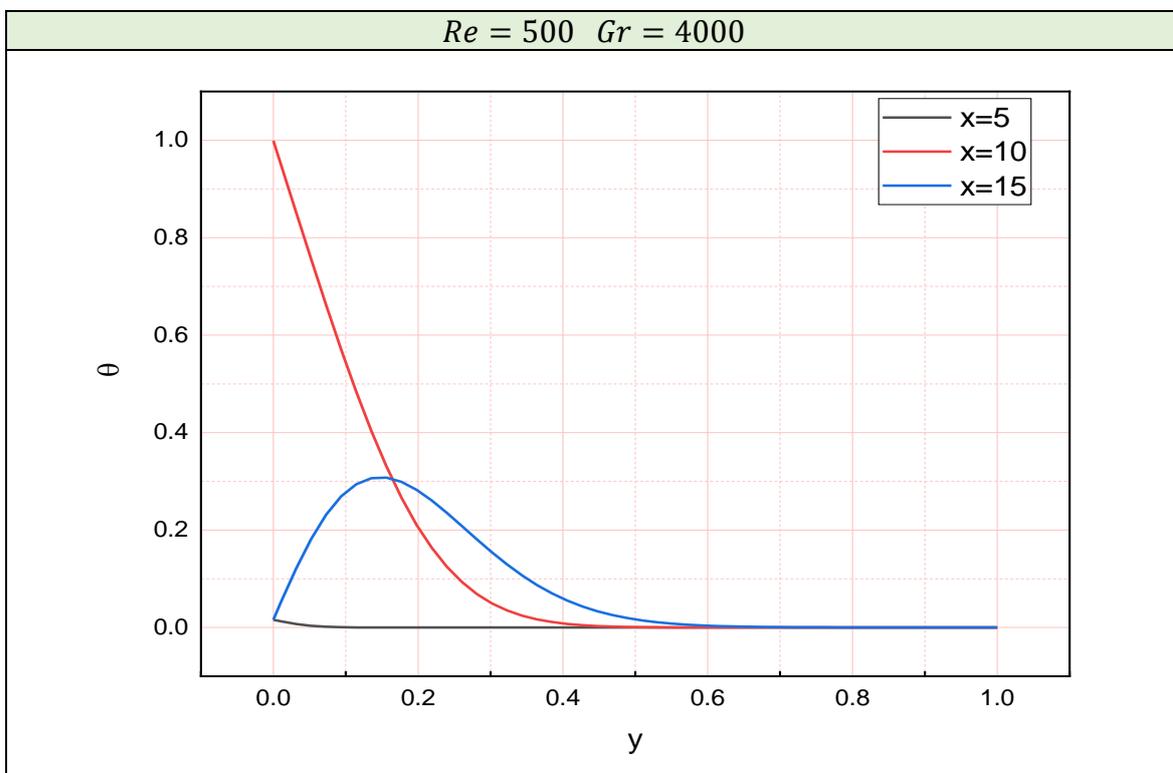
Le fluide dans le canal est à faible température l'exception de la zone adjacente à la paroi chauffée où on détecte des températures élevées surtout au milieu de la zone chauffée **Fig.IV.19**



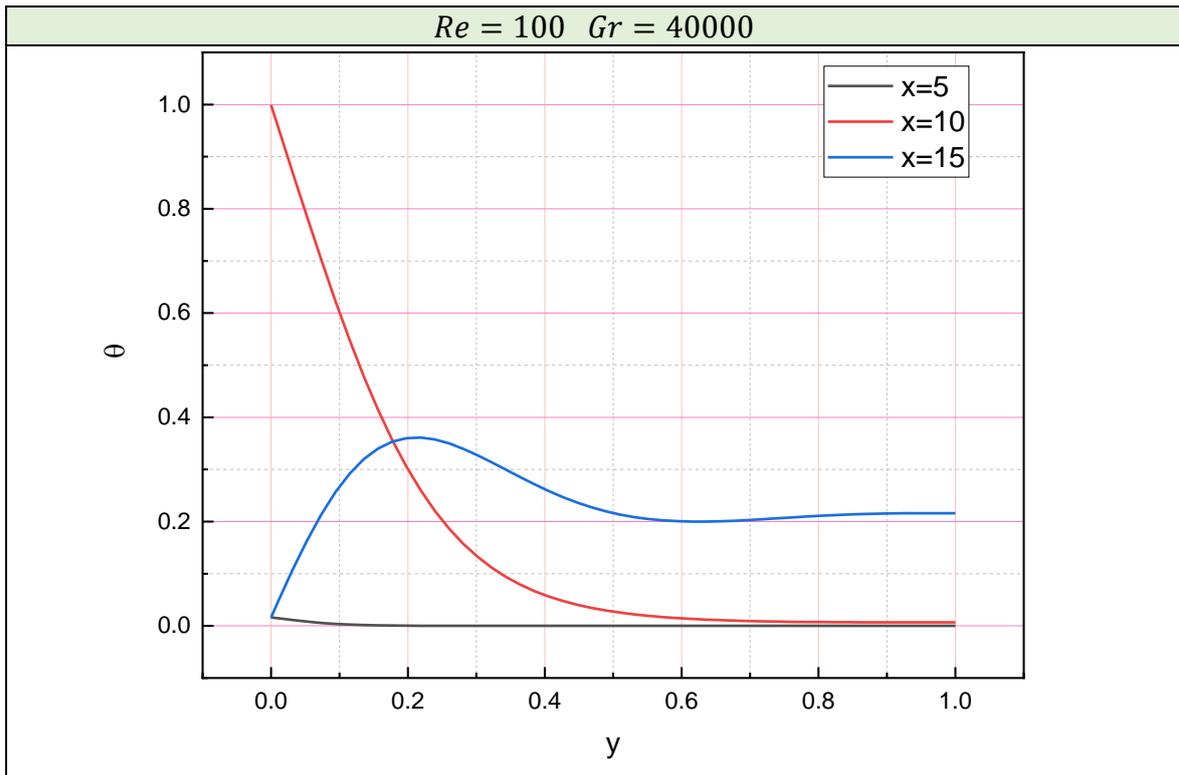
**Fig.IV.17** : : Les lignes de courant (a) et les isothermes (b) à différentes valeurs de Reynolds et de nombre de Grashof pour un chauffage sinusoïdal



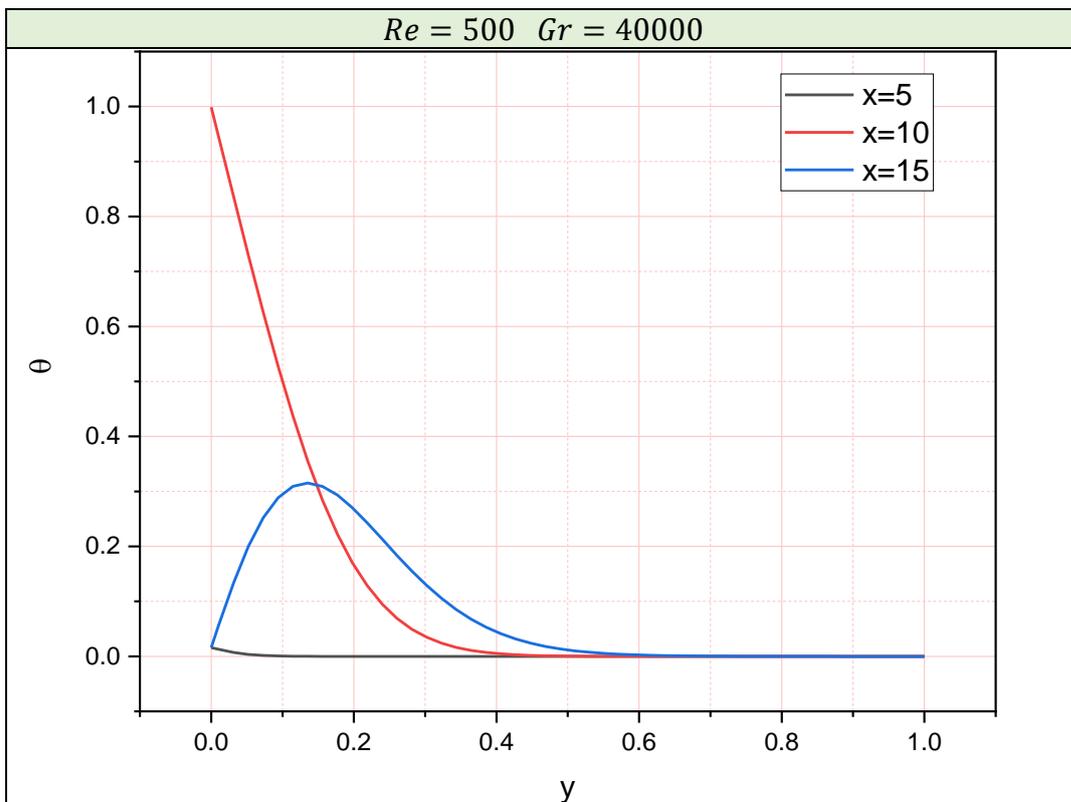
**Fig.IV.18 :** Evolution du nombre de Nusselt local le long de la partie chauffée de la paroi pour différentes valeurs de nombre de Re et de Gr



**Fig.IV.19:** Variation de la température le long de la paroi chauffée pour  $Re = 500 \quad Gr = 4000$



**Fig.IV.20** : Variation de la température le long de la paroi chauffée pour  $Re = 100$   $Gr = 40000$ .



**Fig.IV.21** : Variation de la température le long de la paroi chauffée pour  $Re = 500$   $Gr = 40000$

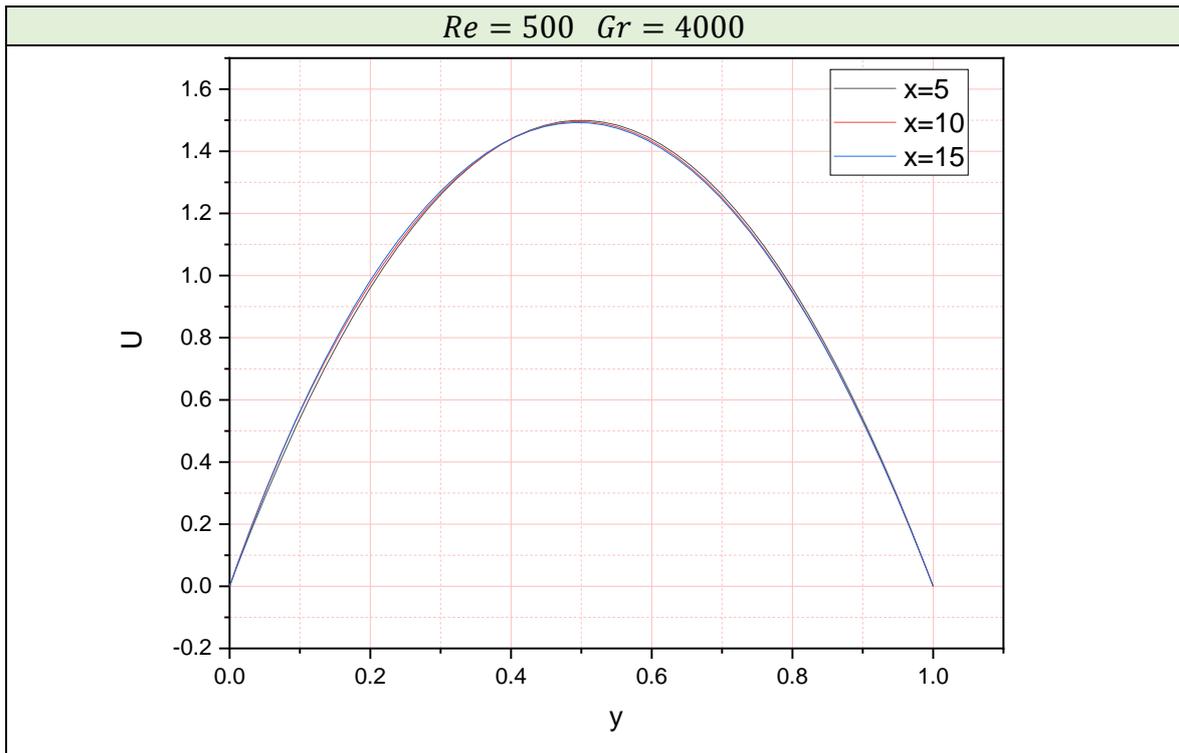


Fig.IV.22: Le profil de vitesse à différentes positions de la partie chauffée pour

$Re = 500$   $Gr = 4000$

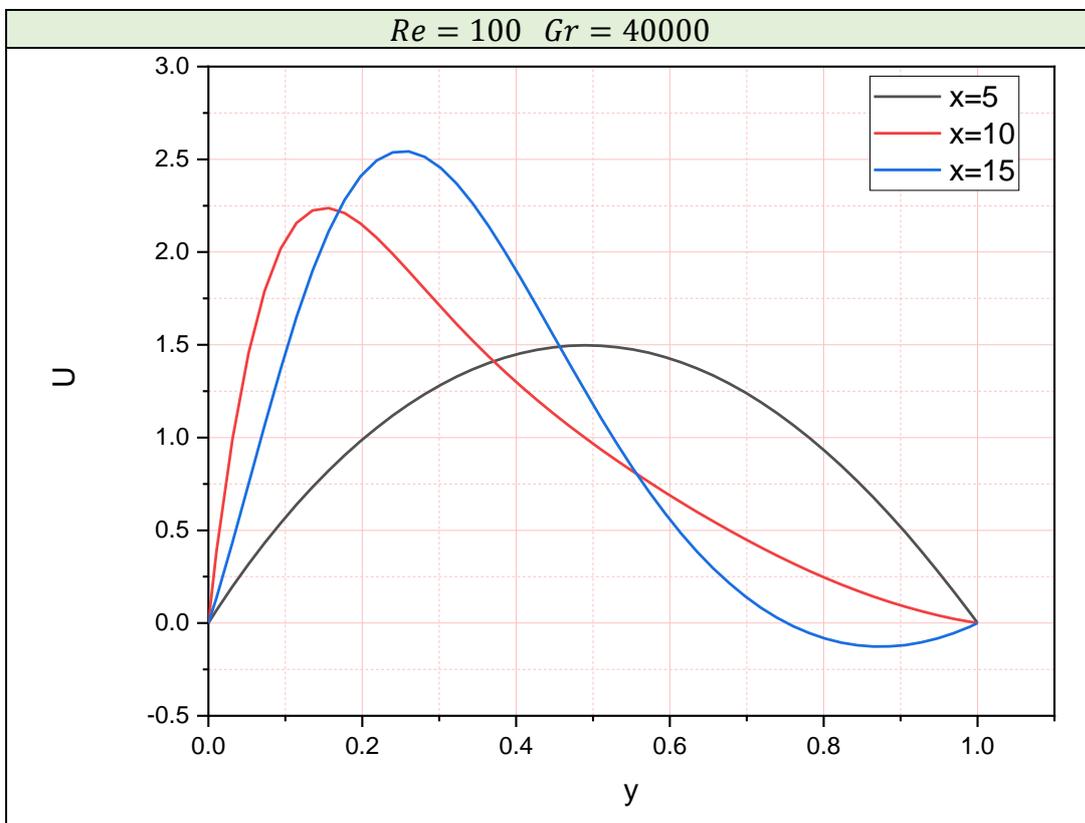
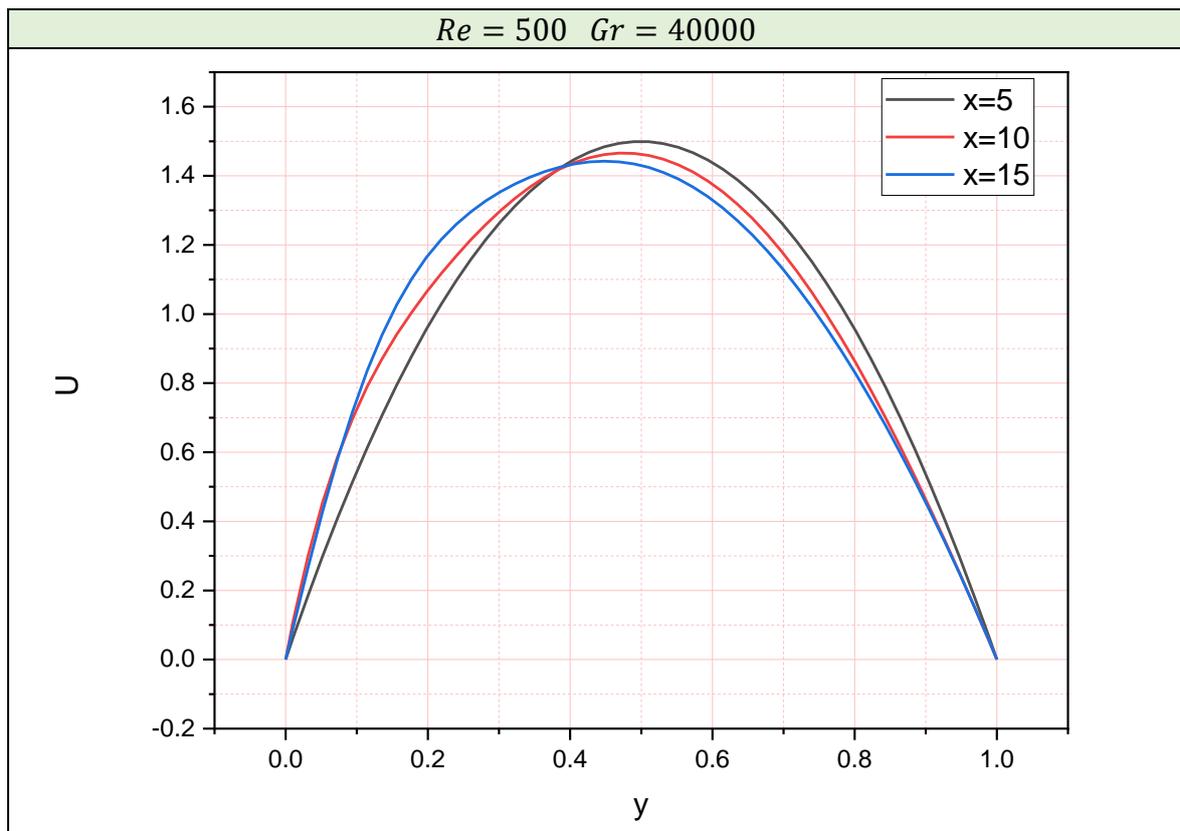


Fig.IV.23 :Le profil de vitesse à différentes positions de la partie chauffée pour

$Re = 100$   $Gr = 40000$



**Fig.IV.24** :Le profil devitesse à différentes positions de la partie chauffée pour  $Re = 500 \quad Gr = 40000$

L'augmentation du nombre de Grashof favorise la création d'une zone de recirculation et des vitesses négatives apparaissent. le fluide accélère au voisinage de la paroi chauffée et décélère dans l'autre coté **Fig.IV.23**. Du fait du recirculation du fluide la température se propage dans le canal **Fig.IV.20** .

---

## *Conclusion générale*

---

## *Conclusion générale*

L'écoulement laminaire d'un fluide incompressible avec transfert thermique dans un canal vertical avec un chauffage d'une section finie de la paroi gauche a été étudié en résolvant numériquement les équations de conservation correspondantes. Un code de calcul écrit en langage Matlab à été élaboré et vérifié. L'effet du nombre de Reynolds, du nombre de Grashof et le type de chauffage de la section finie est présenté sous forme de lignes de courant, des isothermes de profils de température et de vitesse et de la variation du nombre de Nusselt. Compte tenu des résultats obtenus on peut conclure que :

- Pour des faible valeurs du nombre de Grashof, la convection forcée est dominante et l'écoulement est totalement développé pour les différents cas étudiés.
- L'augmentation du nombre de Grashof rend la convection naturelle la plus dominante et l'écoulement et perturbé et des zone de recirculation se forment selon le cas étudié.
- La recirculation du fluide permet à la chaleur de se propager dans le canal.
- L'écoulement du fluide et le transfert thermique est influencé par la combinaison de deux paramètres adimensionnels: le nombre de Grashof et le nombre de Reynolds.

## *Les Références bibliographiques*

- [1] A.Yunus Çengel , M.John Cimbala, FLUID MECHANICS: FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS, THIRD EDITION
- [2] W.M.Kays., M.E.Crawford., (1993). Convective heat and mass transfer. New York: McGraw-Hill.
- [3] H. A.Attia , & N. A. Kotb, (1996). MHD flow between two parallel plates with heat transfer. *Acta Mechanica*, 117(1), 215-220.
- [4] H. A. Attia, (1999). Transient MHD flow and heat transfer between two parallel plates with temperature dependent viscosity. *MechanicsResearch Communications*, 26(1), 115-121.
- [5] J.Orfi , & N. Galanis, (2002). Developing laminar mixed convection with heat and mass transfer in horizontal and vertical tubes. *International journal of thermal sciences*, 41(4), 319-331.
- [6] T. S. Chang, (2007). Effects of a finite section with linearly varying wall temperature on mixed convection in a vertical channel. *International journal of heat and mass transfer*, 50(11-12), 2346-2354.
- [7] S. Z. Heris , M. N. Esfahany , & G. J. N. H. T. Etemad, (2007). Numerical investigation of nanofluid laminar convective heat transfer through a circular tube. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 52(11), 1043-1058.
- [8] G. Desrayaud , & G. Lauriat, (2009). Flow reversal of laminar mixed convection in the entry region of symmetrically heated, vertical plate channels. *International Journal of Thermal Sciences*, 48(11), 2036-2045.
- [9] M.Narahari , & B. K. Dutta, (2011). Free convection flow and heat transfer between two vertical parallel plates with variable temperature at one boundary. *Acta Technica*, 56, 103-113.
- [10] H.Xu, , & I. Pop, (2012). Fully developed mixed convection flow in a vertical channel filled with nanofluids. *International communications in heat and mass transfer*, 39(8), 1086-1092.
- [11] H.Sun, , R. Li, E.Chénier, & G. Lauriat, (2012). On the modeling of aiding mixed convection in vertical channels. *Heat and Mass Transfer*, 48, 1125-1134.
- [12] C. D. Dritselis , A. J. Iatridis , I. E.Sarris, & N. S. Vlachos, (2013). Buoyancy-assisted mixed convection in a vertical channel with spatially periodic wall temperature. *International journal of thermal sciences*, 65, 28-38.
- [13] A.Boudiaf, F. Danane , Y. K.Benkahla , N. Labsi , & A.Boutra, (2018). Heat transfer convection of a power law fluid flow within a parallel plate channel provided with two generating obstacles. *Mechanics&Industry*, 19(2), 210.
- [14] F.Bazdidi-Tehrani , & M. Shahini, (2009). Combined mixed convection-radiation heat transfer within a vertical channel: investigation of flow reversal. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 55(3), 289-307.

## *Les Références bibliographiques*

- [15] F. Ozgen, & Y. Varol, (2019). Numerical study of mixed convection in a channel filled with a porous medium. *Applied Sciences*, 9(2), 211.
- [16] I. Rahman, M. A. Shahriar, & S.Rahman, (2021). Numerical Analysis of Flow and Heat Transfer Characteristics between Two Parallel Plates with Constriction (s). *Computational Engineering and Physical Modeling*, 4(3), 55-69.
- [17]H.K. Versteeg and W.Malalasekera, an introduction to computational fluid dynamic the finite volume method.