جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم علوم المادة

مذكرة ماستر

علوم المادة
فيزياء
فيزياء طاقوية وطاقات متجددة
رقم: أدخل رقم تسلسل المذكرة

إعداد الطالبة:
لهرم وحيدة
يوم: 2024/06/13

الدراسة الكمية لكمون ثنائي القطب في فضاء دي سيتر ثنائي البعد

لجنة المناقشة:

سنقوقة نور الدين	أستاذ	جامعة محمد خيضر بسكرة	رئيس
هدار مبارك	أ. محاضر أ	جامعة محمد خيضر بسكرة	مؤطر
عليان ايدير	أ. محاضر ب	جامعة محمد خيضر بسكرة	مناقش

السنة الجامعية:2024/2023

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ يرفعِ الله الَّذين آمنوا منكم والَّذين

أوتوا العِلمَ درجاتٍ﴾.

(المجادلة آية 11).

الإهداء

إلى من وضع المولى سبحانه و تعالى الجنة تحت قدميها ووقرها في كتابه العزيز أمي الحبيبة

إلى الذي لم يتهاون يوم في توفير سبيل الخير والسعادة لي أبي رحمه الله

إلى سندي في الحياة أخي

"قويدر"

إلى صديقات روحي و سبب سعادتي أخواتي

"هدى منى أسماء و رشيدة"

إلى كل زملائي و معارفي الذين أحبهم وأحترمهم

إلى أساتذتي ولكل من علمني وأفادني في هذه الرحلة

إلى كل من كان لهم الأثر على حياتي

إلى كل من أحبهم قلبي ونسيهم قلمي

وحيدة لهرم

الشكر و التقدير

أول من يشكر و يحمد آناء الليل و أطراف النهار هو العلي القهار الأول والآخر في الظاهر و الباطن، الذي أغرقنا بنعمه التي لا تحصى، و أغدق علينا برزقه الذي لا يفنى، و أنار دروبنا فله جزيل الحمد و الثناء العظيم، هو الذي أنعم علينا إذ أرسل فينا عبده ورسوله محمد بن عبد الله عليه أزكى الصلوات و أطهر التسليم، أرسله بقرآنه المبين، فعلمنا ما لم يعلم، وحثنا على طلب العلم أينما وجد.

لله الحمد كله والشكر كله أن وفقنا و ألهمنا الصبر على المشاق التي واجهتنا .والشكر موصول إلى كل معلم أفادنا بعلمه، من أولى المراحل الدراسية حتى هذه اللحظة

كما نرفع كلمة شكر إلى الدكتور المشرف هدار مبارك، على كل ما قدمه لنا من توجيهات ومعلومات قيمة ساهمت في إثراء موضوع دراستنا، كما نشكر كل من مد لنا يد العون من قريب أو بعيد ونشكر كل أساتذة جامعة محمد خيضر بسكرة

وفي الأخير لا يسعنا إلا أن ندعو الله عز وجل أن يرزقنا السداد و الرشاد والعفاف والغنى و الهداية.

الفهرس:

قائمة الجداول

قائمة الأشكال

المقدمة العامة

المقدمة العامة:

في14 ديسمبر1900 قام عالم الفيزياء الألماني ماكس بلانك (1858 – 1947) بطرح فكرة ميكانيكا الكم[2.1]، التي تطورت يوما بعد يوم بفضل العديد من العلماء من بينهم العالم أينشتاين و ذلك عندما قام بتفسير المفعول الكهروضوئي باستعمال فكرة بلانك[3]، ثم تفسير موجة ديبرولي[4]، كما أن أفكار بلانك استعملت في معادلة شرودنغر التي تصف سلوك الجسم الكمي، و بفضلها تم تقديم نتائج جيدة تشرح طيف الإصدار والامتصاص للهيدروجين [5].

تعرف ميكانيكا الكم بأنها مجموعة من النظريات الفيزيائية التي ظهرت في القرن العشرين وخلقت مصطلح الازدواجية (موجة–جسيم)، ظهرت لتفسير الظواهر على مستوى الذرة والجسيمات دون الذرة كذالك [6].

إن هذه النظرية تطورت في اتجاهين، في الاتجاه الرياضي وهو إيجاد طرق رياضية جديدة لحل معادلة شرودنغر، وفي الاتجاه الفيزيائي عبر تفسير بعض الظواهر الفيزيائية والكيميائية، ونظرا لعدم تناظر الظواهر المدروسة فيهما أدى بالفيزيائيين إلى طرح فكرة الكمونات غير المركزية، التي تعتبر كمونات ليس لها تناظر كروي، فهي لا تتعلق فقط بنصف القطر r وإنما تتعلق بمعاملات أخرى كالزوايا، وهي تمثل طبيعة القوى غير المركزية، تحتل دراسة هذا النوع من الكمونات أهمية كبيرة لما لها من نتائج دقيقة بحكم أنها قريبة من الأنظمة الفيزيائية الحقيقية، مثل الذرات والجزيئات التي نادرا ما تكون متناظرة كرويا كذرات الهيدروجين. بدأت دراسة الكمونات غير المركزية بالأعمال التي قام بها ماكروف (Makarov) عندما حل مسالة جسيم داخل كمون دوراني بواسطة مفاهيم ميكانيكا

الكم [7] . وبعدها أعمال هارتمان (Hartmann) حيث أعطى من خلالهـا الكمونـات غيـر المركزية التي تسمح بفصل معادلة شرودنغر في الإحداثيات الكروية [8] ثـم نظمـت هـذه الكمونات غير المركزية في عمل من أعمال هوتو (Hautou) [9].

هذه الأعمال مهدت الطريق لمزيد من الواقعية في الدراسات و منه الدقة في النتـائج التي تستعمل في العديد من المجالات أهمها الكيمياء الكمية [10] وقد تم اسـتخدامها لوصـف الديناميكا الكمية للجزيئات حلقية الشكل مثل جزيء البنزين، وهناك تطبيق آخر للكمونات غير المركزية وهو تفاعل بين أزواج النواة المشوهة [11] كما أنها تصف المرونة الميكروسـكوبية في نظرية علوم المواد ، و تستعمل للحصول على الثوابت المرنة للبلورة المكعبة [13]. و لها بعض التطبيقات في نظرية النانو بنيوية [12].

من بين الكمونات غير المركزية كمون ثنائي القطب الكهربائي الذي له تطبيقات كثيرة في الكيمياء الجزيئية و البيولوجيا كذلك، ومن جهة أخرى اهتم العلماء بتوسيع ميكانيكـا الكـم إلى الفضاء المنحني وتعتبر من أول المحاولات لدراسة الجاذبية الكمية، وكان هذا عن طريق توسيع مبدأ الشك لهايزمبارغ وما شجع على ذلك أعمال أخرى كالنسبية الخاصـة المزدوجـة يأتي الاهتمام بالأنظمة ثنائية الأبعاد من الشعبية الكبيرة للإنجـازات التجريبيـة فـي تحويـل غازات الكم بأبعاد منخفضة[14] [15].

يتمحور هذا الموضوع حول معالجة مشكلة في ميكانيكا الكم ، و هي معرفـة تـأثير الجاذبية على كمون ثنائي القطب من خلال دراسته في فضاء دي سيتر ثنائي الأبعاد. اعتمـدنا خطة تستوفي شروط العمل بكل جزئياته، انطلاقا من مقدمة وثالث فصول وخاتمة على النحو التالي:

الفصل الأول: جاء بعنوان مفهوم فضاء دي سيتر والكمونات غير المركزية وتطرقنا فيه إلى جزئين الأول خصصناه للتعريف بالفضاء المشوه (deSitter). أما الثاني تكلمنا فيه عن بعض الكمونات غير المركزية.

الفصل الثاني: جاء بعنوان حل معادلة شرودنغرلكمون ثنائي القطب في نظام له بعدان في الفضاء العادي خصصناه للتعريف بهذه المعادلة وحلها في الإحداثيات الكروية.

الفصل الثالث: كان بعنوان حل معادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب له بعدان في فضاء دي سيتر وذلك باستخدام طريقة نيكيفوروف – افاروف لذلك قمنا بتعريف هذه الطريقة أولا، ثم انطلاقا في محاولة حل هذه المعادلة ومقارنة نتائجها بنتائج الفصل الثاني.

الفصل الأول: مفهوم فضاء دي سيتر و الكمونات غير المركزية

المقدمة:

في عام 1925 قام اروين شرودنغر بتطوير معادلة تصف السلوك الموجة للجسم الكمي، بناءا على فرضية دي برولي ونشرها عام 1926 أطلق عليها اسم معادلة شرودنغر نسبة له، لها أهمية كبيرة في الفيزياء خاصة في ميكانيكا الكم [16].

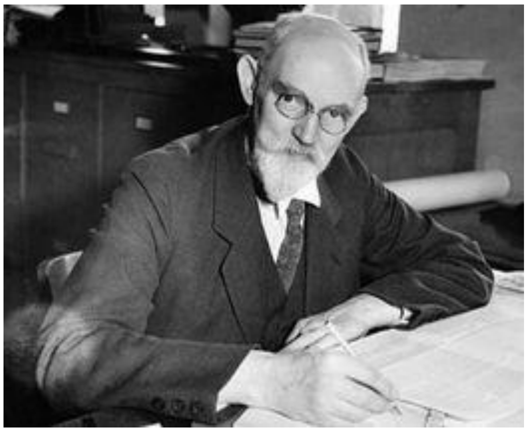
حاول الباحثون توسيع مجالات دراسة هذه المعادلة ولقد استطاعوا تطبيقها في نموذج سنايدر للفضاء المسطح، ثم في الجبر المعمم في الزمان والمكان. الفكرة وراء هذا الامتداد هي مراعاة تعديل معيار الجبر لهايزنبرغ عن طريق إضافة تصحيحات صغيرة إلى علاقات التبديل الأساسية مثل تعميم علاقات مبدأ الشك GUR [17] ومبدأ عدم اليقين المعدل EUP [18]. مما نشأ لنا فضاء منحني له أربعة أبعاد(ثلاث أبعاد للموضع وبعد لزمان) وذلك لان النسبية العامة تصف الجاذبية بأنها خاصية هندسة الزمكان. أي أن أي كتلة فوق سطح تسبب انحناء هو ينتج عن ذلك قوة جاذبة تميل إلى تقريب الكون من بعضه. ويمكن أن يكون هناك سبب آخر لانحناء الزمكان وهو ما يسمى الثابت الكوني. ولقد استعمل هذا المصطلح في معادلة حقل آينشتاين للجاذبية التي تم اعتبارها سنة 1998 ثم بعد 20 عاما أو نحو ذلك تم حذفها من أي حسابات النسبية العامة. لكن الملاحظات الفلكية منذ ذلك الوقت كشفت أن هذا المصطلح ليس صفرا مما أدى إلى تغيير جذري في علم الفيزياء وعلم الكونيات [19].

في هذا الفصل سنقوم بدراسة مفاهيم الفضاء المشوه ديسيتر ومضاد ديسيتر وبعد ذلك نقوم بشرح موجز للكمونات غير المركزية لتسهيل العمل في الفصول الأخرى.

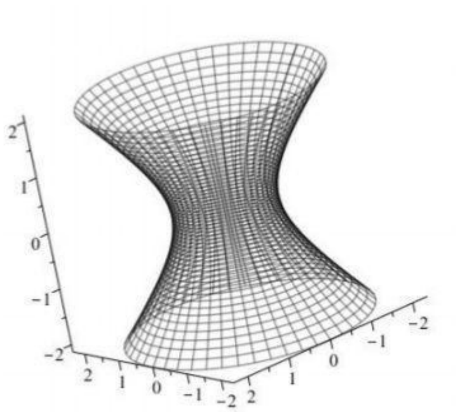
1. مفهوم فضاء دي سيتر (الفضاء المشوه):

اقترح الفيزيائي و الرياضي عالم الفلك الهولندي فيليم دي سيتر (1872–1934) سنة 1932 [21.20] حل لمعادلات النسبية العامة لأينشتاين [22] التي تنص على أن الأجسام الضخمة تشوه

الزمكان ومنه فان الجاذبية هي نتيجة هذا التشوه [23]، هذا الحل خلق لنا فضاء مشوه سمي بفضاء دي سيتر يعرف على أنه كون فارغ ليس به مادة، و لكن له ثابت كوني إيجابي و بسبب هذا الأخير يكون هناك تمدد للزمكان بمعدل متزايد، كما يوجد فضاء مضاد لدي سيتر يعرف على أنه كون فارغ ليس به مادة، و لكن له ثابت كوني سالب بمعنى أنه يتسبب في تقلص الزمكان [25].



الشكل 1 : فيليم دي سيتر (1872−1943) [20].



الشكل 2 : فضاء دي سيتر [24].

يمكن التعبير عن فضاء دي سيتر بمعادلات تعتمد على مبدأ الشك الموسع لهايزنبرج (EUP) Principle Extended Uncertainty ومبدأ الشك المعمم (GUP) Uncertainty Principle Generalized، حيث يأخذ EUP تأثيرات الجاذبية على مسافات كبيرة في الاعتبار، بينما يركز GUPعلى التأثيرات عند المقاييس الصغيرة جدًا مثل الطاقات العالية. و الهدف من استخدام علاقات التبديل المعدلة هو محاولة دمج ميكانيكا الكم مع النسبية العامة. و نعبر عن هذه المعادلات بعلاقات التبديل التالية [27] [26]:

$$[X_i , X_j] = 0; \quad [P_i , P_j] = i\hbar\, \tau\lambda\epsilon_{ijk}L_k \qquad (I.1)$$

$$[X_i , P_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} - \tau\lambda X_i X_j\right) ; \ \tau = \pm 1 \qquad (I.2)$$

حيث λ يمثل معامل التشوه ويكون صغير جدا لأنه في حالة الجاذبية الكمية، يتم تحديد معامل EUP كثابت أساسي مرتبطا بعامل المقياس للكون الممتد ويتناسب مع الثابت الكوني بالعلاقة التالية [28] :[26]

$$\Gamma = 3\,\tau\,\lambda = 3\,\tau / a^2 \qquad (I.3)$$

حيث يمثل a نصف قطر سيتر و هو مكون للعزم الزاوي الذي نعبر عنه بالعلاقة التالية[28]:

$$L_k = \epsilon_{ijk} X_i\ P_j \qquad (I.4)$$

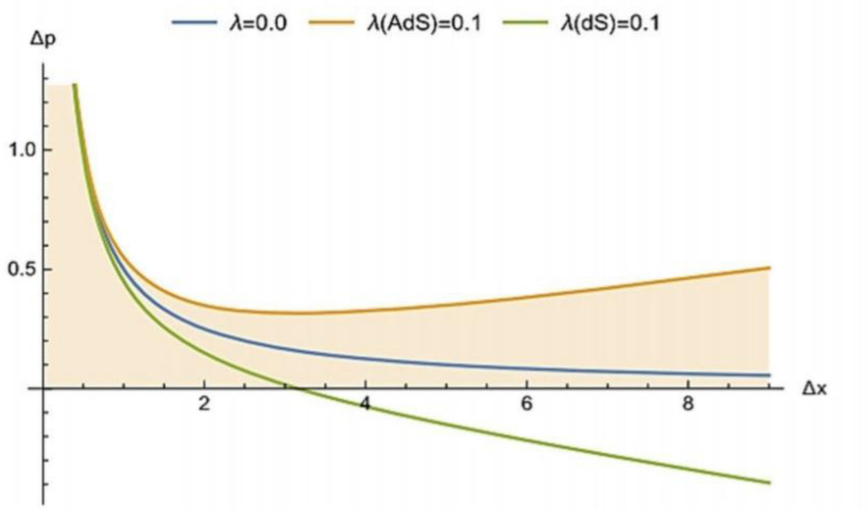
و نعبر عن إشباع الجبر المعتاد بالعلاقة التالية:

$$[L_i\ ,P_j\ ] = i\hbar\ \epsilon_{ijk}P_k,\ [L_i\ ,\ X_j\ ] = i\hbar\ \epsilon_{ijk}X_k\ ,\ [Li\ ,\ Lj\ ] = i\hbar\ \epsilon_{ijk}L_k \qquad (I.5)$$

و كما جرت العادة في ميكانيكا الكم العادية، تؤدي علاقة الاستبدال السابقة إلى علاقة مبدأ عدم اليقين لهايزمبارغ [29] :

$$\Delta X_i \Delta P_i \geq (\hbar\ /\ 2)\ (1 - r\lambda(\Delta X_i)^2) \qquad (I.6)$$

عند رسم هذه العلاقة يظهر لنا الشكل 3 حيث تمثل المنطقة الملونة منطقة ممنوعة لقياسات الموضع والعزم في فضاء دي سيتر المضاد [30].



الشكل 3 : رسم HUP و EUP في كل من حالتي سيتر و سيتر المضاد[30].

و بتعبير رياضي نميز نوعين من الجبر الفرعي حسب قيمة r :

الحالة 1: من أجل τ =**−1** يتميز الجبر المشوه بوجود حد أدنى غير صفري من مبدأ الشك في العزم ويسمى هذا النموذج مضاد سيتر(Ads)[31]. من اجل التبسيط نفترض مبدأ الشك المتماثل:

$$X_i = X \tag{I.7}$$

هذا يسمح لنا بكتابة الحد الأدنى من عدم اليقين للعزم في نموذج سيتر المضاد(Ads)

$$(\Delta P_i)_{min} = \hbar\sqrt{\tau\lambda} \tag{I.8}$$

الحالة 2:عند τ =**+1** يكون لدينا نموذج سيتر[33.32] ، حيث العلاقة السابقة لا تمثل القيمة الدنيا غير صفرية من عدم اليقين في العزم. إذن نعيد صياغة المؤثرين كدوال من المؤثرين x_i و Pi التي تعوض بعلاقات الاستبدال المعتادة يتم ذلك بوجود التحولات التالية :

$$X_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \tag{I.9}$$

$$P_i = -i\hbar\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\,\partial x_i \tag{I.10}$$

2. الكمونات غير المركزية:

إن مصطلح الكمون في الفيزياء يستعمل للإشارة إلى توزيع الشحنة الكهربائية داخل الجزيء، و على هذا الأساس لدينا نوعين من الكمون النوع الأول هو الكمون المركزي V(r) و هو جهد يعتمد على المسافة r فقط، و النوع الثاني هو الكمون غير المركزي V(r, θ, φ) وهو دوال تعتمد على نصف القطر r و الزاوية القطبية θ او الزاوية φ أو الزاويتين معا في حالة نظام ثلاثي الأبعاد.

إن فهم توزيع الكمونات المركزية وغير المركزية داخل الجزيء يساعد في فهم السلوك الكيميائي والفيزيائي للمواد، ويمكن أن يكون له تأثير كبير على خصائص المواد وتفاعلاتها.

1.2. أمثلة عن الكمونات غير المركزية:

هناك أنواع مختلفة من الكمونات غير المركزية التي تمت دراستها نذكر من بينها:

1.1.2. كمون ماكاروف :

في منتصف القرن العشرين قام العالم ايفيان ماكروف وآخرون بوضع معادلة في الكيمياء الكمومية والفيزياء النووية لوصف تفاعلات الاندماج النووي وخواص الجزيئات النووية مثل البنزين والتفاعلات بين أزواج الانوية المشوهة في الإحداثيات الكروية، تكتب كمونات ماكاروف بالشكل التالي[34]:

$$V(r, \theta) = (-a /r) + (b/ r^2 sin^2\theta) + (c \cos\theta /r^2 sin^2\theta) \qquad (I.11)$$

2.1.2. كمون هارتمان:

يستخدم كمون هارتمان لتمثيل العلاقة بين الجزيئات النووية بواسطة دالة تصف التفاعلات بين هذه الجزيئات في الإحداثيات الكروية و نعرف كمون هارتمان كما يلي [35]:

$$V(r, \theta)=V_0 \left((2r_0 /r)-(r_0{}^2 /r^2 sin^2\theta) \right) \qquad (I.12)$$

حيث:

- V_0 الحد الأدنى للكمون
- r_0 البعد القطري

3.1.2. جهد الهزاز شبه التوافقي على شكل حلقة:

الكمونات الجزيئية على شكل حلقة هي كمونات غير مركزية، تتكون من كمونات الهزاز التوافقي الكروي وكمونات إضافية أخرى. يمكن استخدام هذه الكمونات لوصف نموذج جزيئي على شكل رنين مثل البنزين الجزيئي والتفاعل بين النواة المشوهة وهي تستخدم في كيمياء الكم والفيزياء النووية. في السنوات الأخيرة التأثير النسبي للجسيمات الدقيقة في مجالات الكمونات للمذبذب التوافقي غير الكروي أثار اهتماما كبيرا في الفيزياء وتم الحصول على نتائج مهمة. تتكون كموناته من

التراكب بين كمونات المذبذب التوافقي و كمونات دالة القوة السلبية ثم أربع كمونات، بالإضافة إلى اثنين من الكمونات غير المركزية.

ونكتب هذا الكمون بالشكل التالي[36] :

$$V(r, \theta)= (K/2 r^2) + (A/ r^2)+ (b/ r^2sin^2\theta) +(ccos^2\theta / r^2sin^2\theta) \qquad (I.13)$$

حيثc ، b، A،K هي معاملات حقيقية بدون أبعاد.

4.1.2. كمون هوتو:

يستخدم هذا الكمون بكثرة في مجال الفيزياء الحديثة و كيمياء الكم و ذلك بوصف تفاعلات الاندماج و الانشطار النووي و نمذجتها، يعرف كما يلي [37]:

$$V(r, \theta) = V(r) +(f(\theta) /r^2) \qquad (I.14)$$

حيث $f(\theta)$ هي دالة للمتغيرθو قد تم حل هذه الكمونات بطريقة تحليلية في الحالة الكلاسيكية أي معادلة نيوتن و الحالة الكمية اللانسبية أي معادلة شرودنغر و هي أربعة كمونات مختلفة في الفضاء ثنائي البعد و ثلاثة في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

يمكن أن يكون لها تعبيرات مختلفة اعتمادا على الحالة المراد دراستها على الأقل ثالثة تعبيرات مختلفة اعتمادعلى θ في ثلاثة أبعاد وسبعة تعبيرات إذا كانت ثنائية الأبعاد.

5.1.2. كمون كراتزر على شكل حلقة مزدوجة:

تلعب كمونات كراتزر دورا مهما في تاريخ الكيمياء الجزيئية والكمية وقد تم استخدامها لوصف البنية والتفاعلات الجزيئية. بسبب أهميتها في مجال الفيزياء الجزيئية، كانت كمونات كراتزر موضوع العديد من الدراسات منذ تقديمها من قبل كراتزر في عام 1920.

تلعب طاقات الاهتزاز المركزية k وطاقات الاهتزاز غير المركزية v للحالات الجزيئية ثنائية الذرة دورا مهم في دراسة حالات وهياكل الاهتزازات للأنظمة ثنائية الذرة.

في الإحداثيات الكروية، كمون كراتزر على شكل حلقة مزدوجة الذي يصف الحركة الدورانية غير المركزية للجزيئات، يتم تعريفه على النحو التالي[38]:

$$V(r,\theta) = -2De\left((r_e/r) - (1/2)(r_e^2/r^2) \right) + (b/r^2\sin^2\theta) + (a/r^2\cos^2\theta) \quad (I.15)$$

- De هي طاقة التفكك .
- r_eهو الفصل بين النوى في حالة التوازن .
- a و b هي معاملات بدون أبعاد.

6.1.2. كمون ثنائي القطب:

يستخدم هذا الكمون لوصف خصائص النواة الذرية بشكل دقيق و التنبؤ بسلوك الجزيئات و التفاعلات بينها كتفاعلات الاندماج و الانشطار النووي يعبر عن كمون ثنائي القطب بالعبارة التالية :[39]

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{D\cos\theta}{r^2}\right) \quad (I.16)$$

الخاتمة:

إن دراسة الكمونات اللامركزية تعتبر محط جذب العديد من العلماء والباحثين حاليا، لما لها من أهمية بالغة في العديد من المجالات كالفيزياء النووية والكيمياء الكمية والفيزياء الحديثة، وكذلك لدقة نتائجها في وصف التفاعلات بين الجزيئات، ومن ناحية أخرى يمكن دراسة الكمونات اللامركزية بعدة طرق تحليلية أو رقمية، في النظام ثنائي او ثلاثي الأبعاد، سواء الفضاء العادي أو فضاء دي سيتر الذي تم التطرق له سابقا.

ومن بين الكمونات اللامركزية السابقة ذكرنا كمون ثنائي القطب الذي سيتم دراسته بطريقة تحليلية عبر حل معادلة شرودنغر له في النظام ثنائي الأبعاد في الفضاء العادي ثم في فضاء دي سيتر.

الفصل الثاني: حل معادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب في الفضاء العادي ثنائي البعد

المقدمة:

حل معادلة شرودنغر مهم لدراسة الذرات والجزيئات، ومع ذلك فان الأنظمة التي توجد لها حلول تحليلية بواسطة معادلة شرودنغر محدودة للغاية وأغلبيتها كمونات غير مركزية ولذلك اهتم الباحثين في دراسة الكمونات غير المركزية للبحث عن نماذج تقريبية لهذه الأنظمة الفيزيائية وعلى الرغم من هذه التقريبات لم يتم حل سوى القليل من الكمونات بشكل تحليلي [40].

الكمون غير المركزي الأبسط هو ثنائي القطب $V(r) = \frac{D}{r^2}\cos\theta$ درس على نطاق واسع في كل من الفيزياء الذرية والجزيئية والكيمياء وعلم الأحياء وقد جذب اهتمام الباحثين نظرا لوجود أدلة تجريبية تنص على انه لا يمكن أن نتحصل على حالات مرتبطة بهذا الكمون الا إذا كان المعامل D أكبر من القيمة الحرجة، اتبعت الدراسات التجريبية هذه النتائج وأكدتها على الرغم من عدم وجود حلول تحليلية لهذا النظام[40] .

ولتأكيد هذه النتائج نقوم في هذا العمل بحل معادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب في الفضاء العادي في الإحداثيات القطبية في نظام ذو بعدين.

1. تعريف كمون ثنائي القطب:

هو جملة مكونة من شحنتين نقطيتين مختلفتين في الاشارةله أهمية بالغة في دراسة الجزيئات و الذرات [42][41].لانه يظهر كثيرا في الذرات متعددة الالكترونات و كذلك في الجزيئات، و يعتبر تصحيح من الدرجة الأولى لكمون كولومب حيث نعتبر نظام يتكون من شحنة نقطية q تحت تأثير شحنات ممتدة $Q = \sum_j q_j$ حيث q_j تمثل الشحنات النقطية يمتاز هذا الأخير بشحنة

اجمالية غير صفرية و توزيع غير متناظر كرويا يمكن لهذا النظام ان يأخذ كمثال ايون قطبي و شحنة نقطية.

الكمونات الناتجة عن توزيع الشحنة q_j مكتوبة على الشكل:

$$V = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{r_j}$$

هنا q_j هي شحنة العنصر j^{th} المكون للسحنة الكلية Q و

$\vec{r_j} = \overrightarrow{A_jM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_j} = \vec{r} - \vec{a_j}$ هو موضع الشحنة النقطية q بالنسبة لــلشحنة q_j و لقد عرفنا M على انه موضع الشحنة النقطية q الذي يشار إليه بواسطة الشعاع $\vec{r}$ و A_j هو موضع q_j الذي عرفناه بالشعاع $\vec{a_j}$ بالنسبة للمبدأ O و على هذا نكتب:

$$V = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{a_j}|} = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_j \left[\left(\vec{r} - \vec{a_j}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad \text{(II.1)}$$

بعد حساب المربع نجد:

$$= \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_j \left(\vec{r}^2 - 2\vec{r}.\vec{a_j} + \vec{a_j}^2\right)^{-1/2} \qquad \text{(II.2)}$$

بالقسمة على $\vec{r}^2$:

$$= \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_j \left(1 - 2\frac{\vec{r}.\vec{a_j}}{\vec{r}^2} + \frac{\vec{a_j}^2}{\vec{r}^2}\right)^{-1/2} \qquad \text{(II.3)}$$

بحيث نكتب $|\vec{r}| \ll |\vec{a_j}|$ بما أن $|\vec{a_j}|$ صغيرة جدا مقارنة بأبعاد النظام بأكمله الذي يمثله $|\vec{r}|$ يكمن استعمال نشر تايلور لتكون لدينا المعادلة التالية:

$$\left(1-2\frac{\vec{r}.\vec{a_j}}{\vec{r}^2}+\frac{\vec{a_j}^2}{\vec{r}^2}\right)^{-1/2}\approx 1+\frac{\vec{r}.\vec{a_j}}{\vec{r}^2}+0\frac{\vec{a_j}^2}{\vec{r}^2} \quad (II.4)$$

بالاحتفاظ فقط بالجذور من رتبة $\frac{\vec{r}.\vec{a_j}}{\vec{r}^2}$:

حيث:

$$\frac{\vec{r}.\vec{a_j}}{\vec{r}^2}=\frac{|\vec{r}|.\left|\vec{a_j}\right|\cos\theta_j}{\vec{r}^2}=\frac{r.\,a_j\cos\theta_j}{r^2} \quad (II.5)$$

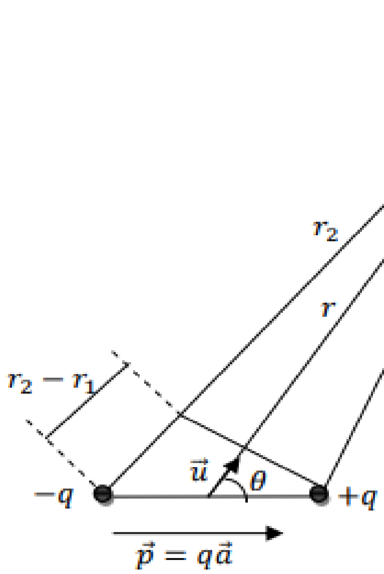
θ_jهي الزاوية بين$\vec{a_j}$ و $\vec{r}$ ، بالتعويض نجد

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\Sigma_j\frac{q_j}{\vec{r}}+\Sigma_j\frac{a_jq_j\cos\theta_j}{r^2}\right) \quad (II.6)$$

الطرف الأول في هذه العبارة هو تفاعل كولومب بين الشحنة الكلية Q و الشحنة النقطية المدروسة،أما الطرف الثاني فهو التأثير الهندسي لعدم التناظر الكروي لتوزيع الشحنة Q الذي يمثل كمون ثنائي القطب الذي طوله هو المسافة بين مجموع الشحن السالبة و مجموع الشحن الموجبة ثنائي القطب الغير نقي هو الذي مجموع شحنه غير معدوم و في الأخير يأخذ العبارة التالية:

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\frac{D\cos\theta}{r^2}\right) \quad (II.7)$$

حيث $D=Qd$ هو طول ثنائي القطب و θ هي الزاوية بين ثنائي القطب و الشعاع الرابط بين الشحنة المدروسة و مركز ثنائي القطب كما هو موضح في الشكل الموالي:



الشكل4 : الكمون الناشئ عن ثنائي القطب[42].

2. حل معادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب في الفضاء العادي ثنائي البعد:

في هذا القسم سنوضح تأثير الفضاء العادي على القيم الذاتية للطاقة والدوال الذاتية للنظام

في وجود الكمون غير المركزي$V(r)$:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{D\cos\theta}{r^2}\right)$$

لدينا معادلة شرودنغر تكتب بالعبارة التالية:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right]\psi = E\psi \tag{II.8}$$

باستعمال الإحداثيات القطبية المعادلة السابقة تصبح:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2}\right) + V\right]\psi = E\psi \tag{II.9}$$

بتعويض عبارة الكمون في معادلة شرودنغر العامة، مع الأخذ بعين الاعتبار أن$0 \leq r \leq \infty$

و$0 \leq \theta \leq 2\pi$ و ذلك لأننا في الأنظمة ثنائية الأبعاد فان المعادلة السابقة تكتب بالشكل التالي:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2}\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\frac{D\cos\theta}{r^2}\right)\right]\psi = E\psi \qquad (II.10)$$

بظرب طرفي المعادلة في $-\frac{2m}{\hbar^2}$ نجد:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}-\frac{2mqD}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\right]\psi = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi \qquad (II.11)$$

لحل هذه المعادلة نستخدم طريقة فصل المتغيرات وهذا بكتابة دالة الحالة بالشكل التالي:

$$\psi(r,\theta) = r^{-1/2} R(r)\emptyset(\theta) \qquad (II.12)$$

بالتعويض في المعادلة السابقة:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}-\frac{2mqD}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\right]r^{-1/2} R(r)\emptyset(\theta) = -\frac{2mE}{\hbar^2}r^{-1/2} R(r)\emptyset(\theta) \qquad (II.13)$$

نقوم الآن بحساب المشتقات في المعادلة السابقة:

المشتقة الثانية بالنسبة ل θ:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(r^{-1/2} R(r)\emptyset(\theta)\right) = r^{-1/2} R(r)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\emptyset(\theta) \qquad (II.14)$$

المشتقة الأولى بالنسبة ل r:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-1/2} R(r)\emptyset(\theta)\right) = -\frac{1}{2}r^{-3/2} R(r)\emptyset(\theta) + r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\emptyset(\theta) \qquad (II.15)$$

المشتقة الثانية بالنسبة ل r:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^{-1/2}\,R(r)\emptyset(\theta)\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}r^{-3/2}\,R(r)\emptyset(\theta)+r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\emptyset(\theta)\right)$$
$$=\frac{3}{4}r^{-5/2}\,R(r)\emptyset(\theta)-r^{-3/2}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\emptyset(\theta)+r^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\emptyset(\theta)\qquad(II.16)$$

بتعويض هذه المشتقات في المعادلة السابقة نجد:

$$\Bigg[\frac{3}{4}r^{-5/2}\,R(r)\emptyset(\theta)-r^{-3/2}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\emptyset(\theta)+r^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\emptyset(\theta)$$
$$+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}r^{-3/2}\,R(r)\emptyset(\theta)+r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\emptyset(\theta)\right)$$
$$-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}r^{-1/2}\,R(r)\emptyset(\theta)$$
$$+\frac{1}{r^2}\left(r^{-1/2}\,R(r)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\emptyset(\theta)-\frac{2mqD}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\, r^{-1/2}\,R(r)\emptyset(\theta)\right)\Bigg]$$
$$=-\frac{2mE}{\hbar^2}r^{-1/2}R(r)\emptyset(\theta)\qquad(II.17)$$

$$\Bigg[\frac{3}{4}r^{-5/2}\,R(r)\emptyset(\theta)-r^{-3/2}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\emptyset(\theta)+r^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\emptyset(\theta)$$
$$+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}r^{-3/2}\,R(r)\emptyset(\theta)+r^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}R(r)\emptyset(\theta)\right)$$
$$-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}r^{-1/2}\,R(r)\emptyset(\theta)+\frac{2mE}{\hbar^2}r^{-1/2}\,R(r)\emptyset(\theta)\Bigg]$$
$$=-\frac{1}{r^2}\left(r^{-1/2}\,R(r)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\emptyset(\theta)-\frac{2mqD}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\, r^{-1/2}\,R(r)\emptyset(\theta)\right)\qquad(II.18)$$

لفصل المعادلة السابقة نقسمها على $R(r)\emptyset(\theta)r^{-1/2}$فنجد:

$$\frac{1}{R(r)}\Bigg[\frac{3}{4}r^{-2}\,R(r)-r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}R(r)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\;+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}r^{-1}\,R(r)+\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)$$
$$-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}\,R(r)+\frac{2mE}{\hbar^2}\;R(r)\Bigg]$$
$$=-\frac{1}{r^2}\frac{1}{\emptyset(\theta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\emptyset(\theta)-\frac{2mqD}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\emptyset(\theta)\right)\qquad(II.19)$$

نضع:

$$\frac{1}{\emptyset(\theta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\emptyset(\theta)-\frac{2mqD}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\emptyset(\theta)\right)=E_\theta \tag{II.20}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\emptyset(\theta)-\frac{2mqD}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\emptyset(\theta)=E_\theta\emptyset(\theta) \tag{II.21}$$

وهي الجزيء الزاوي للمعادلة الحالة.

نعوض المعادلة رقم (II.20) في المعادلة رق (II.19) فنجد:

$$\frac{1}{R(r)}\left[\frac{3}{4}r^{-2}R(r)-r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}R(r)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}r^{-1}R(r)+\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}R(r)+\frac{2mE}{\hbar^2}R(r)\right]=-\frac{1}{r^2}\frac{1}{\emptyset(\theta)}(E_\theta\emptyset(\theta)) \tag{II.22}$$

$$\frac{1}{R(r)}\left[\frac{3}{4}r^{-2}R(r)-r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}R(r)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}r^{-1}R(r)+\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}R(r)+\frac{2mE}{\hbar^2}R(r)\right]=-\frac{1}{r^2}E_\theta \tag{II.23}$$

$$\left[\frac{3}{4}r^{-2}R(r)-r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}R(r)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)+\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2}r^{-1}R(r)+\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}R(r)+\frac{2mE}{\hbar^2}R(r)\right]=-\frac{1}{r^2}E_\theta R(r) \tag{II.24}$$

بالضرب في r^2 وترتيب أطراف المعادلة السابقة نجد:

$$\left[\frac{3}{4}R(r)-r\frac{\partial}{\partial r}R(r)+r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)+\left(-\frac{1}{2}R(r)+r\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}r\,R(r)+r^2\frac{2mE}{\hbar^2}R(r)\right]=-E_\theta R(r) \tag{II.25}$$

$$\left[\frac{1}{4}\ \mathrm{R(r)} + \mathrm{r}^2\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2}\mathrm{R(r)}\ + -\frac{2\mathrm{mqQ}}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\mathrm{r\ R(r)} + \mathrm{r}^2\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}\ \mathrm{R(r)}\right] = -\mathrm{E}_\theta\mathrm{R(r)} \tag{II.26}$$

$$\left[\mathrm{r}^2\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2}\mathrm{R(r)}\ + \left(\frac{1}{4} + \mathrm{E}_\theta\right)\mathrm{R(r)} - \frac{2\mathrm{mqQ}}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\mathrm{r\ R(r)}\right] = -\mathrm{r}^2\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}\ \mathrm{R(r)} \tag{II.27}$$

بالقسمة على r^2نجد:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2}\mathrm{R(r)}\ + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\left(\frac{1}{4} + \mathrm{E}_\theta\right)\mathrm{R(r)} - \frac{2\mathrm{mqQ}}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}\ \mathrm{R(r)}\right] = -\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}\ \mathrm{R(r)} \tag{II.28}$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2} + \left(\mathrm{E}_\theta + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\mathrm{r}^2} - \frac{2\mathrm{mqQ}}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{\mathrm{r}}\right)\right]\mathrm{R(r)} = -\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}\mathrm{R(r)} \tag{II.29}$$

وهي الجزء القطري من معادلة الحالة للنظام.

مما سبق نجد أننا استطعنا أن نقسم معادلة شرودنغر للنظام المدروس إلى جزئين الجزء الأول هو الجزء الزاوي والجزء الثاني هو الجزء القطري

الجزء الزاوي:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{2\mathrm{mqD}}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\emptyset(\theta) = \mathrm{E}_\theta\emptyset(\theta) \tag{II.30}$$

الجزء القطري:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2} + \left(\mathrm{E}_\theta + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\mathrm{r}^2} - \frac{2\mathrm{mqQ}}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{\mathrm{r}}\right)\right]\mathrm{R(r)} = -\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}\mathrm{R(r)} \tag{II.31}$$

للتبسيط نضع $q = -|e|2m_e = \hbar = e^2/2 = 4\pi\epsilon_0 = 1$ حيث, e هي الشحنة العنصرية للإلكترون.

لاستخراج القيم الذاتية للطاقة Eو الدوال الذاتية ψ نقوم أولا بحل معادلة الجزء الزاوي لإيجاد ثابت الفصل E_θ ثم نعوضها في معادلة الجزء القطري.

1.2. حل معادلة الجزء الزاوي:

لدينا معادلة الجزء الزاوي كالتالي :

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\emptyset(\theta)-\left(E_\theta-\frac{2mqD}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\emptyset(\theta)=0$$

نقوم بإعادة كتابة هذه المعادلة على شكل معادلة ماثيو وهذا باستبدال المتغيرات التالية:

$$\theta=2z, a=-4E_\theta \quad , \quad p=-\frac{meD}{\pi\epsilon_0\hbar^2} \tag{II.32}$$

نحسب أطراف المعادلة بواسطة المتغيرات الجديدة

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\emptyset(\theta)=\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial z}\emptyset(\theta)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\emptyset(\theta) \tag{II.33}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\emptyset(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\emptyset(\theta)\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\emptyset(\theta)\right)=\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\emptyset(\theta)\right)=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\emptyset(\theta) \tag{II.34}$$

$$\frac{mqD}{\pi\epsilon_0\hbar^2}=-p \quad , \quad E_\theta=-\frac{1}{4}a \tag{II.35}$$

بالتعويض نجد :

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\emptyset(z)-\left(-\frac{1}{4}a+\frac{2}{4}p\,.\cos2z\right)\emptyset(z)=0 \tag{II.36}$$

بالضرب في 4 نجد المعادلة التالية:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\emptyset(z)+(a-2p\cos2z)\emptyset(z)=0 \tag{II.37}$$

هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة ماثيو و نلاحظ أن حلولها دورية لان θ لها دورة 2π أيz لها دورة π و منه الحلول هي دوال جيب التمام $ce_{2m}(z)$ و جيب $se_{2m+2}(z)$، حيث m عدد طبيعي و بالنظر إلى نظرية بلوخ التي تنص على انه تكون الحلول دورية فقط لقيم محددة

من aالتي ترافقها قيم محددة من b تعرف كل منهما بالقيم المميزة هذه القيم هي $a(2m,p)$أو$a_{2m}(p)$لحلول جيب التمام و $b(2m,p)$ او $b_{2m}(p)$ لحلول جيب.

نلاحظ أنه عندما تختفي تأثيرات ثنائي القطب أي $D \to 0$، نظامنا يصبح لديه سلوك نظام كولوم. ولذلك فان حلول هذه المعادلة تميل إلى حلول كولوم هذا يعني أنه يجب علينا الحفاظ على جيب التمام فقط.

كحل وتجاهل الحلول الجيبية لأنها غير صالحة عندما $D \to 0$ و $m = 0$ حيث m هو عدد الكم المداري.

لا يوجد تعبير تحليلي للقيم المميزة لماثيو $a_{2m}(p)$ و $b_{2m}(p)$ و بالتالي فهي تعطى عموما بيانيا او عدديا. رغم ذلك يمكننا كتابة تعبيرات تحليلة تقريبية للقيم الصغيرة و الكبيرة ل p.

للقيم الصغيرة من p يمكننا التعبير عن a و b لأجل$m > 3$ كالتالي :

$$a_{2m} = 4m^2 + \frac{1}{2(4m^2-1)}p^2 + \frac{20m^2+7}{32(4m^2-1)^3(4m^2-4)}p^2 + \frac{36m^4+232m^4+29}{64(4m^2-1)^5(4m^2-4)(4m^2-9)}p^6 + \mathcal{O}(p^8) \quad \text{(II.38)}$$

باستخدام العبارات التالية $a = -4E_\theta\, , p = -\frac{mqD}{\pi\epsilon_0\hbar^2}$نتحصل على قيم ثابت الفصل E_θ بدلالة معادل ثنائي القطبD :

$$E_\theta^{(2m)} = -m^2 - \frac{1}{(4m^2-1)}\left(\frac{mqD}{\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)^2 - \frac{20m^2+7}{2(4m^2-1)^3(4m^2-4)}\left(\frac{mqD}{\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)^2 - 32\frac{36m^4+232m^4+29}{(4m^2-1)^5(4m^2-4)(4m^2-9)}\left(\frac{mqD}{\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)^6 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{mqD}{\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)^8\right) \quad \text{(II.39)}$$

نرى أنه في الحد $p\to 0$ أو $D\to 0$ نتحصل على $a=4m^2$ وبالتالي يمكن كتابة القيم المميزة في جميع الحالات على النحو التالي:

$$a_{2m}=4m^2+P_m(p) \tag{II.40}$$

كذلك بالنسبة للقيم الذاتية الزاوية :

$$E_\theta^{(2m)}=-m^2+P_m(D) \tag{II.41}$$

حيث $P_m(p)$ و $P_m(D)$ كثير حدود التي تكتب من نفس قوى p و D الزوجية ابتداء من 2.

الان نستخدم قيم $E_\theta^{(2m)}$ من اجل حل المعادلة القطرية.

2.2. حل معادلة الجزء القطري:

نعيد كتابة المعادلة القطرية بدلالة $E_\theta^{(2m)}$ لتصبح كالتالي:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left(E_\theta+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}\right)\right]R(r)=-\frac{2mE}{\hbar^2}R(r) \tag{II.42}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}+\left(E_\theta^{(2m)}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}\right]R(r)=0 \tag{II.43}$$

لتبسيط المعادلة نستخدم التحويل التالي:

$$R(r)=r^\lambda e^{-\beta r}f(r) \tag{II.44}$$

حيث λ هو ثابت يجب تحديده ومنه تصبح المعادلة كالتالي:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}+\left(E_\theta^{(2m)}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}\right]r^\lambda e^{-\beta r}f(r)=0 \tag{II.45}$$

بالاشتقاق نجد:

المشتق الأول:

$$\frac{d}{dr}R(r)=r^{\lambda}e^{-\beta r}\left[\frac{d}{dr}f(r)+\left(\frac{\lambda}{r}-\beta\right)f(r)\right] \tag{II.46}$$

المشتق الثاني:

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r)=r^{\lambda}e^{-\beta r}\left[\frac{d^2}{dr^2}f(r)+\left(\frac{2\lambda}{r}-2\beta\right)\frac{d}{dr}f(r)+\left(\frac{\lambda}{r^2}(\lambda-1)-\frac{2\lambda\beta}{r}+\beta^2\right)f(r)\right] \tag{II.47}$$

بتعويض المشتقات في المعادلة رقم نجد:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{2\lambda}{r}-2\beta\right)\frac{d}{dr}+\left(\frac{\lambda}{r^2}(\lambda-1)-\frac{2\lambda\beta}{r}+\beta^2\right)+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}+\left(E_{\theta}^{(2m)}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}\right]r^{\lambda}e^{-\beta r}f(r)=0 \tag{II.48}$$

نعيد ترتيب أطراف المعادلة السابقة فنجد:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{2\lambda}{r}-2\beta\right)\frac{d}{dr}+\left(\frac{2mE}{\hbar^2}+\beta^2\right)-\left(2\lambda\beta+\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{r}+\left(\lambda(\lambda-1)+E_{\theta}^{(2m)}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}\right]f(r)=0 \tag{II.49}$$

باستعمال التحويلات التالية في المعادلة السابقة:

$$\lambda(\lambda-1)+E_{\theta}^{(2m)}+\frac{1}{4}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1^*)$$

$$\beta^2=-\frac{2mE}{\hbar^2} \tag{II.50}$$

نتحصل على المعادلة التالية:

$$\left[\frac{d}{dr^2}^2+\left(\frac{2\lambda}{r}-2\beta\right)\frac{d}{dr}-\left(2\lambda\beta+\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{r}\right]f(r)=0 \tag{II.51}$$

نضرب المعادلة في r :

.

$$\left[r\frac{d^2}{dr^2}+2(\lambda-\beta r)\frac{d}{dr}-\left(2\lambda\beta+\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\right]f(r)=0 \tag{II.52}$$

المعادلة (1*)تعطي حلين:

$$\lambda=\frac{1}{2}\mp\sqrt{-E_\theta^{(2m)}} \tag{II.53}$$

قيمλ المقبولة هي القيم التي تجعل $f(r)$ فردية عند القيمة r=0 وهي:

$$\lambda=\frac{1}{2}+\sqrt{-E_\theta^{(2m)}} \tag{II.54}$$

الان نستعمل المتغير $z=2\beta r$ ثم نحسب المشتقات:

$$\frac{d}{dr}=\frac{dz}{dr}\frac{d}{dz}=2\beta\frac{d}{dz} \tag{II.55}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}=(2\beta)^2\frac{d^2}{dz^2} \tag{II.56}$$

بتعويض المشتقات في المعادلة (II.52) نجد:

$$\left[\frac{z}{2\beta}(2\beta)^2\frac{d^2}{dz^2}+2\left(\lambda-\beta\frac{z}{2\beta}\right)2\beta\frac{d}{dz}-\left(2\lambda\beta+\frac{2mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\right]f(z)=0 \tag{II.57}$$

بالقسمة على 2β نجد:

$$\left[z\frac{d^2}{dz^2}+(2\lambda-z)\frac{d}{dz}-\left(\lambda+\frac{mqQ}{4\beta\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\right]f(z)=0 \tag{II.58}$$

يتم إعطاء حل هذه المعادلة التفاضلية عند $z = 0$ بدلالة الدوال(Hypergeometric) كالتالي:

$$f(z) = N_1F_1(\lambda + \frac{mqQ}{4\beta\pi\epsilon_0\hbar^2}, 2\lambda, z) \qquad (II.59)$$

نعوض بـــــ $z=2\beta r$ فنجد:

$$f(r) = N_1F_1(\lambda + \frac{mqQ}{4\beta\pi\epsilon_0\hbar^2}, 2\lambda, 2\beta r) \qquad (II.60)$$

ومنه حل المعادلة القطرية هو:

$$R(r) = r^{\lambda}e^{-\beta r}f(r) \qquad (II.61)$$

$$R(r) = r^{\lambda}e^{-\beta r}N_1F_1(\lambda + \frac{mqQ}{4\beta\pi\epsilon_0\hbar^2}, 2\lambda, 2\beta r) \qquad (II.62)$$

نستعمل الجزء الزاوي $\Theta(\theta)$من معادلته والجزء القطري $R(r)$ كذالك لكتابة دالة الموجة بالشكل التالي:

$$\psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \qquad (II.63)$$

$$\psi(r,\theta) = Nr^{\lambda-\frac{1}{2}}e^{-\beta r}\Theta(\theta)_1F_1(\lambda + \frac{mqQ}{4\beta\pi\epsilon_0\hbar^2}, 2\lambda, 2\beta r) \qquad (II.64)$$

حيث N عدد طبيعي.

يمكن كتابة القيمة $F_1(-n_r, 2\lambda, 2\beta r)$ على هيئة متعددات حدود Laguerre من الدرجة n_r كما يلي:

$$L_{n_r}^{(2\lambda-1)}(2\beta r) = \frac{(n_r + 2\lambda - 1)!}{n_r!\,(2\lambda - 1)!}\ {}_1F_1(-n_r, 2\lambda, 2\beta r) \qquad (II.65)$$

يمكن تحديد قيمة N من خلال شروط التقنين $\int |\psi(r,\theta)|^2 r dr d\theta = 1$ و كذلك نذكر بان حل ماثيو المسموح به هو جيب التمام $ce_{2m}(\theta/2)$ و بهذا يمكن استعمال المعادلة التالية:

$$\int_0^\infty e^{-q} q^{k+1} \left[L_n^k(q)\right]^2 dq = \frac{(n+k)!}{n!}(2+k+1) \tag{II.66}$$

ومنه نتحصل على:

$$N = \frac{2^\lambda \beta^{\lambda+1/2}}{(2\lambda-1)!}\left[\frac{(n+2\lambda-1)!}{n!\,(n+\lambda)}\right]^{1/2} \tag{II.67}$$

و باستخدام شروط تقارب الحلول عند اللانهاية أي من اجل $r\to\infty$ تصبح $F1 \to 0$ التي تؤدي إلى:

$\psi \to 0$ و منه نحصل على شرط التكميم التالي:

$$\lambda + \frac{mqQ}{4\beta\pi\epsilon_0\hbar^2} = -n_r, n_r = 0,1,2,\dots \tag{II.68}$$

وباستعمال المعادلات التالية:

$$\beta^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \tag{II.69}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{-E_\theta^{(2m)}} \tag{II.70}$$

$$\lambda + \frac{mqQ}{4\beta\pi\epsilon_0\hbar^2} = -n_r \Rightarrow \beta = -\frac{mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}(n_r+\lambda)^{-1} \Rightarrow \beta^2 = \left(\frac{mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)^2 (n_r+\lambda)^{-2} \tag{II.71}$$

(II.72)

$$\beta^2 = \left(\frac{mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)^2 (n_r + \lambda)^{-2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

ومنه:

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{mqQ}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)^2 (n_r + \lambda^{-2}\ \ ) \tag{II.73}$$

$$E = -\left[\left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mqQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}\right)(n_r + \lambda)\right]^{-2} \tag{II.74}$$

نعوض بعبارة λ فنتحصل على مستويات الطاقة على النحو التالي:

$$E_{n_r,m} = -\left[\left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mqQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}\right)\left(n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{-E_\theta^{(2m)}}\right)\right]^{-2} \tag{II.75}$$

ويمكننا ربط علاقة هذه الطاقات مع طاقة كولوم عند النهاية:

$$D_\theta \longrightarrow 0 \Longrightarrow P_m(D_\theta) \longrightarrow 0 \Longrightarrow E_\theta^{(2m)} = -m^2$$

بالتعويض في عبارة الطاقة نجد:

$$E_{n_r,m} = -\left[\left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mqQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}\right)\left(n_r + \frac{1}{2} + m\right)\right]^{-2} \tag{II.76}$$

نقارن هذه الطاقة بعبارة الطاقة لكمون كولوم (طاقة ذرة الهيدروجين في بعدين).

$$E_{n_r,m} = -\left[\left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mqQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^{-2} \tag{II.77}$$

ومنه نستنتج ان:

$$n = \mathrm{n_r} + m \Rightarrow \mathrm{n_r} = \mathrm{n} - m \tag{II.78}$$

بشرط m≤n و كتعبير نهائي للقيم الذاتية للطاقة نكتب

$$\mathrm{E_{n,m}} = -\left[\left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mathrm{mqQ}}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}\right)\left(\mathrm{n} - m + \frac{1}{2} + \sqrt{-\mathrm{E}_\theta^{(2\mathrm{m})}}\right)\right]^{-2} \tag{II.79}$$

حيث $\mathrm{n} = 1,2,3,\ldots,$ و $\mathrm{m} = 1,2,3,\ldots,$

وفي الأخير نستنتج انه لكي تكون القيم الذاتية للطاقة $\mathrm{E}_{n,\mathrm{m}}$ حقيقية يستلزم أن تكون $\mathrm{E}_\theta^{(2\mathrm{m})}$ قيمة سالبة وبالتالي القيم المميزة $\mathrm{a} = -4\mathrm{E}_\theta$ يجب أن تكون موجبة. هذا يعطي لنا شرط على القيمة p وبالتالي على عزم ثنائي القطب D لأنه تربطهما العلاقة $\mathrm{p} = -\frac{\mathrm{mqD}}{\pi\epsilon_0\hbar^2}$.

ومنه نستنتج أنه لكي توجد الحالات المرتبطة $\mathrm{E}_{n,\mathrm{m}}$، فمن الضروري أن عزم ثنائي القطب D لا يتجاوز القيمة الحرجة التي تحددها المعادلة $\mathrm{E}_\theta^{(2\mathrm{m})} = 0$ التي تعتمد على m.

في الحالة البسيطة $Q = \mathrm{q} = -|\mathrm{e}|$

وباستعمال وحدات ريدبارغ الذرية $2\mathrm{m_e} = \hbar = \mathrm{e}^2/2 = 4\pi\epsilon_0 = 1$، نستطيع إيجاد القيم الحرجة لعزم ثنائي القطب D_{crit}^m وهي موضحة في الجدول التالي :

m	0	1	2	3	4	5	6	7
D_{crit}^m	0.000	7.530	24.547	51.285	87.746	133.930	189.837	255.468

الجدول 1 : جدول يوضح القيم الحرجة لعزم ثنائي القطب.

الخاتمة:

في هذا الفصل قمنا بدراسة تحليلية لمعادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب في نظام ثنائي الأبعاد باستخدام طريقة فصل المتغيرات ومعادلات ماثيو.

حيث قمنا بفصل معادلة شرودنغر إلى جزئين زاوي و قطري، قمنا بحل معادلة الجزء الزاوي فوجدنا أن الحلول تميل إلى حلول كولوم عندما تختفي تأثيرات ثنائي القطب أي $D \rightarrow 0$، من ثم وجدنا القيم المميزة a_{2m}و القيم الذاتية للطاقة $E_{\theta}^{(2m)}$ التي ساعدتنا في حل معادلة الجزء القطري لنتحصل في الأخير على عبارة الطاقات العامة لكمون ثنائي القطب في الفضاء العادي $E_{n_r,m}$ تحت بعض الشروط و هي انه يجب ان تكون القيم المميزة موجبة.

كما وجدنا ان عزم ثنائي القطبD لا يجب ان يتعدى قيم حدية معينة حتى نتحصل على قيم للطاقة.

الفصل الثالث: حل معادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب في فضاء دي سيتر ثنائي البعد

الفصل الثالث: حل معادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب في فضاء دي سيتر ثنائي البعد

المقدمة:

إن دراسة الكمونات غير المركزية تحتل مكانة كبيرة في علم الفيزياء لما لها من استعمالات في الفيزياء الجزيئية و الذرية و النووية، لذا تنوعت الطرق الرياضية من أجل دراسة هذه الأنظمة حيث نميز طرق تقريبية مثل الطريقة التغايرية، طريقة الإضطراب و كذلك طرق تحليلية دقيقة مثل طريقة نيكيفوروف ايفاروف و أيضا طريقة السلاسل. ان هذه الطرق لاقت نجاح باهر عند تطبيقها على ذرة الهيدروجين وكذلك الهزاز التوافقي في ثلاث أبعاد لذا قرر الباحثون تطبيقها على كمونات مختلفة، نذكر على سبيل المثال كمون ثنائي القطب، كمون كراتز...

في هذا الفصل سنقوم بحل معادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب في فضاء دي سيتر بطريقة نيكيفوروف ايفاروف للذلك سنقدم أولا تعريف بسيط بهذه الطريقة ثم نتطرق لحل المعادلة.

1. طريقة نيكيفوروف-افاروف:

مؤخرا اتجه العديد من الباحثين إلى حل النظم الكمية البسيطة باستعمال الطرق الرياضية كطربقة نيكيفوروف – ايفاروف (NU) لأنها تستخدم لحل المعادلات التفاضلية الهندسية الفائقة. وقد استخدمت لحل معادلات الموجة شرودنغر– ديراك و كلاين – غوردون في وجود بعض الكمونات المركزية و غير المركزية المعروفة و حققت نتائج باهرة،حيث تحول

الصيغ المستخدمة في طريقة المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية إلى النوع الهندسي الفائق مع تحويل إحداثيات مناسب s=s(x) مما يسهل عملية حلها:

فيما يلي سنوضح منهجية استعمال وتطبيق الطريقة على المعادلات الفوق هندسية:

$$\psi''(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma(s)}\psi(s)=0 \qquad \text{(III.1)}$$

حيث أن$\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ هي كثيرات حدود من الدرجة الثانية على الاكثر و درجة كثيرات الحدود $\tilde{\tau}(s)$ هي اقل تماما من الدرجة الثانية

إذا أخذنا العوامل التالية:

$$\psi(s)=\emptyset(s)y(s) \qquad \text{(III.2)}$$

تصبح العلاقة السابقة كالتالي:

$$\sigma(s)\,y''(s)+\tau(s)\,y'(s)+\Lambda y(s)=0 \qquad \text{(III.3)}$$

حيث :

$$\pi(s)=\sigma(s)\frac{d}{ds}\left(\ln\emptyset(s)\right),\tau(s)=\tilde{\tau}(s)+2\pi(s) \qquad \text{(III.4)}$$

و نعرفΛ بالعلاقة التالية:

$$\Lambda_n+n\tau'+\frac{n(n-1)\sigma''}{2}=0,\ \ n=0,1,2,.... \qquad \text{(III.5)}$$

و يتم حساب قيم الطاقة الذاتية من المعادلة أعلاه لكن علينا أولا أن نحدد $\pi(s)$ و Λ حيث نعرف:

$$k = \Lambda - \pi'(s) \qquad \text{(III.6)}$$

بحل معادلة $\pi(s)$ نجد :

$$\pi(s) = \left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + \sigma k} \qquad \text{(III.7)}$$

هنا $\pi(s)$ يعتبر كثير حدود s كمعامل بينما يشير الشرط الرئيسي الى المشتق الاول.

يجب أن نعرف أن تحديد k هو النقطة الأساسية لحساب $\pi(s)$ و يتم تعريفه ببساطة من خلال الإشارة إلى أن التعبير الموجود أسفل الجذر التربيعي في العلاقة السابقة يجب ان يكون مربعا لكثير حدود هذا يعطينا معادلة تربيعية عاملة ل k.

لتحديد حلول كثير الحدود $y_n(s)$ نستخدم العلاقة السابقة و علاقة شرودنغر:

$$y_n(s) = \frac{c_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n}[\sigma^n(s)\rho(s)] \qquad \text{(III.8)}$$

حيث c_n هو ثابت التقنين و دالة الوزن $\rho(s)$ تتوافق مع العلاقة التالية :

$$\frac{d}{ds}[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s) \qquad \text{(III.9)}$$

تشير هذه المعادلة الأخيرة إلى كثيرات الحدود المتعامدة الكلاسيكية التي تحتوي على العديد من الخصائص المهمة و خاصة التعامد المحدد من خلال:

$$\int_a^b y_n(s)y_m(s)\,\rho(s)ds = 0\ ,\ \ m \neq n \qquad \text{(III.10)}$$

2. حل معادلة شرودنغر لكمون ثنائي القطب في فضاء دي سيتر ثنائي البعد:

من اجل كتابة معادلة شرودنغر في الفضاء المشوه (فضاء دي سيتر) نستعمل التحويلات التالية:

$$P_i = -i\hbar\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\,\partial x_i \Longrightarrow P_i = \sqrt{1+\tau\lambda r^2}\,p_i \qquad \text{(III.11)}$$

$$X_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \Longrightarrow \vec{r} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \qquad \text{(III.12)}$$

نبحث الآن على عبارة مربع العزم في الفضاء المشوه:

$$p^2 \to \left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\vec{p}\right)^2 = \left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\vec{p}\right)\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\vec{p}\right) \qquad \text{(III.13)}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\vec{p} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right), r = x + y \qquad \text{(III.14)}$$

بالتعويض في تحويل p^2 نجد:

$$p^2 = \left[\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\right]\left[\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\right] \qquad \text{(III.15)}$$

بتوزيع الضرب نجد:

$$p^2 = \left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right) + \left[\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{\jmath}\right] \tag{III.16}$$

بالاشتقاق و الاختزال:

$$p^2 = (1+\tau\lambda r^2)p^2 + \left[\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\left(\frac{2\tau\lambda x}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{2\tau\lambda y}{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\right] \tag{III.17}$$

و بالتالي:

$$p^2 = \left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)p^2 + \left(\tau\lambda x\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \tau\lambda y\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}\right) \tag{III.18}$$

$$p^2 = 1 + \tau\lambda r^2 p^2 + \tau\lambda r p \tag{III.19}$$

في هذا القسم سنوضح تأثير الفضاء المشوه على القيم الذاتية للطاقة والوظائف الذاتية لنظام غير نسبي في وجود الكمون غير المركزي $V(r)$ المعرف كالتالي:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{D\cos\theta}{r^2}\right)$$

نعتبر معادلة شرودنغر التالية:

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{D\cos\theta}{r^2}\right)\right]\psi = E\psi \tag{III.20}$$

باستخدام التحويلات السابقة تصبح المعادلة كالتالي:

$$\left[\frac{\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\vec{p}\right)^2}{2m}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}Q}{r}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)D\cos\theta}{r^2}\right)\right]\psi=E\psi \qquad \text{(III.21)}$$

بالتعويض نجد:

$$\left[\frac{(1+\tau\lambda r^2)p^2+\tau\lambda rp}{2m}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}Q}{r}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)D\cos\theta}{r^2}\right)\right]\psi=E\psi \qquad \text{(III.22)}$$

باستخدام الإحداثيات القطبية تتم كتابة معادلة شرودنغر في الفضاء المشوه بالشكل التالي:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)(1+\tau\lambda r^2)+\tau\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}Q}{r}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)D\cos\theta}{r^2}\right)\right]\psi=E\psi \qquad \text{(III.23)}$$

بالقسمة على $-\frac{\hbar^2}{2m}$

$$\left[\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)(1+\tau\lambda r^2)+\tau\lambda r\frac{\partial}{\partial r}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2mq}{4\pi\hbar^2\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}Q}{r}+\frac{(1+\tau\lambda r^2)D\cos\theta}{r^2}\right)\right]\psi \qquad \text{(III.24)}$$
$$=-\frac{2m}{\hbar^2}E\psi$$

نضع المعادلة بشكل أكثر تبسيطا:

$$\left[\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{mq\sqrt{1+\tau\lambda r^2}Q}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2 r}\right.$$
$$\left.+\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{mqD\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\right]\psi=-\frac{2m}{\hbar^2}E\psi \qquad \text{(III.25)}$$

لفصل هذه المعادلة إلى جزئين جزء زاوي و أخر قطري نعوض دالة الموجة بالشكل التالي:

$$\psi(r,\theta) = r^{-1/2} R(r)\emptyset(\theta)$$

تصبح لدينا معادلتين منفصلتين معادلة زاوية و قطرية:

المعادلة الزاوية هي:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{mqD}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\emptyset(\theta) = E_\theta\emptyset(\theta) \qquad \text{(III.26)}$$

المعادلة القطرية هي:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)^2 + \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r^2}E_\theta - \frac{mq\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\,Q}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2 r}\right]R(r) = -\frac{2mE}{\hbar^2}R(r) \qquad \text{(III.27)}$$

حيث E_θ هو ثابت الفصل

الان علينا حل هذه المعادلات

حل معادلة الجزء الزاوي:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{mqD}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}\cos\theta\right)\emptyset(\theta) = E_\theta\emptyset(\theta) \qquad \text{(III.28)}$$

نلاحظ أن هذه المعادلة هي نفسها في حالة الفضاء للعادي ومنه فان لها نفس الحل السابق الا وهو:

$$E_{\theta}^{(2m)} = -\frac{1}{4}c_{2m}\left(\frac{mqD}{\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right) \tag{III.29}$$

والجزء الزاوي من دالة الموجة هو دالة ماثيو.

حل معادلة الجزء القطري:

الان سنحل المعادلة القطرية:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\right)^2 + \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r^2}E_{\theta} - \frac{mq\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\,Q}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2 r}\right]R(r) = -\frac{2mE}{\hbar^2}R(r) \tag{III.30}$$

بتبسيط نجد:

$$\left[\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r^2}E_{\theta} - \frac{mQ\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2 r}\right]R(r) = -\frac{2mE}{\hbar^2}R(r) \tag{III.31}$$

من اجل حل معادلة الجزء القطري نستعمل طريقة نيكيفاروف ايفاروف أي نستخدم التحويلات التالية:

$$s = \frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r} \Rightarrow s^2 = \frac{1+\tau\lambda r^2}{\lambda r^2} \tag{III.32}$$

نبحث عن r

$$r^2 = \frac{1}{\lambda(s^2-\tau)} \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{\lambda(s^2-\tau)}} \qquad \text{(III.33)}$$

لدينا:

$$\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s} \qquad \text{(III.34)}$$

باستعمال تحويل المتغير:

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\frac{\lambda\tau 2r\sqrt{\lambda}r}{2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} - \sqrt{1+\tau\lambda r^2}\sqrt{\lambda}}{\lambda r^2} \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{-1}{\sqrt{\lambda}r^2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}} \qquad \text{(III.35)}$$

بالتعويض نجد :

$$\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{-1}{\sqrt{\lambda}r^2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r^2 r}\frac{\partial}{\partial s} \qquad \text{(III.36)}$$

بالتبسيط نجد:

$$\frac{(1+\tau r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{s}{r^2}\frac{\partial}{\partial s} \qquad \text{(III.37)}$$

و منه تصبح كالتالي:

$$\frac{(1+\tau\lambda r^2)}{r}\frac{\partial}{\partial r} = -s(s^2-\tau)\lambda\frac{\partial}{\partial s} \qquad \text{(III.38)}$$

لدينا :

$$\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2=\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{\lambda}r^2\sqrt{1+\tau\lambda r^2}}\right)\frac{\partial}{\partial s}\right)^2=\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{(s^2-\tau)\lambda}\right)}\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \quad \text{(III.39)}$$

بالتبسيط نجد:

$$\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2=\left(-(s^2-\tau 1)\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \quad \text{(III.40)}$$

ننشر العبارة:

$$\lambda\left[-(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right]^2=\lambda\left[-(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right]\left[-(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right] \quad \text{(III.41)}$$

$$\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2=-\lambda(s^2\mp 1)^2\frac{\partial^2}{\partial s}-\lambda(s^2\mp 1)\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(-(s^2\mp 1)\right)\right)\frac{\partial}{\partial s} \quad \text{(III.42)}$$

في الأخير تصبح العبارة كالتالي :

$$\left(\sqrt{1+\tau\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2=\lambda\left[(s^2-\tau)^2\frac{\partial^2}{\partial s}+2s(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\right] \quad \text{(III.43)}$$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$\left[\lambda\left((s^2-\tau)^2\frac{\partial^2}{\partial s}+2s(s^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}-s(s^2-\tau)\lambda\frac{\partial}{\partial s}\right)+\lambda s^2E_\theta-\sqrt{\lambda}s\frac{mqQ}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right]R(r)=0 \quad \text{(III.44)}$$

بالتبسيط و القسمة على λ نجد :

$$\left[\left((s^2-\tau)^2\frac{\partial^2}{\partial s}+2s(S^2-\tau)\frac{\partial}{\partial s}-s(s^2-\tau)\lambda\frac{\partial}{\partial s}\right)+s^2E_\theta-s\frac{mqQ}{2\sqrt{\lambda}\pi\varepsilon_0\hbar^2}+\frac{2mE}{\lambda\hbar^2}\right]R(r)=0 \quad \text{(III.45)}$$

بحيث:

$$\eta = \frac{mqQ}{2\sqrt{\lambda}\pi\varepsilon_0\hbar^2} \quad , \quad \varepsilon = \frac{2mE}{\lambda\hbar^2} \tag{III.46}$$

تصبح المعادلة بالشكل التالي:

$$\left[(\tau - s^2)^2\frac{\partial^2}{\partial s^2} - s(\tau - s^2)\frac{\partial}{\partial s} + s^2E_\theta - \eta s + \varepsilon\right]R(s) = 0 \tag{III.47}$$

بقسمة المعادلة على $(\tau - s^2)^2$ تصبح كالتالي:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{s}{(\tau - s^2)}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{(s^2E_\theta - \eta s + \varepsilon)}{(\tau - s^2)^2}\right]R(s) = 0 \tag{III.48}$$

الان سنحل المعادلة القطرية في فضاء دي سيتر:

لدينا في فضاء دي سيتر $\tau = 1$ ومنه المعادلة القطرية تصبح:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{s}{(1 - s^2)}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{(s^2E_\theta - \eta s + \varepsilon)}{(1 - s^2)^2}\right]R(s) = 0 \tag{III.49}$$

بالمقارنة مع المعادلة القطرية نجد:

$$\sigma(s) = (1 - s^2) \ , \ \tilde{\tau}(s) = -s \ , \ \tilde{\sigma}(s) = E_\theta s^2 - \eta s + \varepsilon \tag{III.50}$$

بالتعويض في العلاقة:

$$\pi(s) = \left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + \sigma k} \tag{III.51}$$

نجد:

$$\pi(s) = \frac{-s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} - E_\theta - k\right)s^2 + \eta s + k - \varepsilon} \qquad \text{(III.52)}$$

لإيجاد الطاقة يجب حساب قيمة k حيث يتم تحديده يوضع ما تحت الجذر يساوي مربع كامل من الدرجة الأولى من كثير الحدود، نحصل على:

$$\left(\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k\right)s^2 + \eta s + k - \varepsilon = (s - s_0)^2 \qquad \text{(III.53)}$$

ولدينا:

$$\pi(s) = \frac{-s}{2} \pm (s - s_0) \qquad \text{(III.54)}$$

لذلك يعطى مميز كثير الحدود تحت الجذر في المعادلة الذي يجب ان يكون يساوي الصفر:

$$\eta^2 - 4\left(\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k\right)(k - \varepsilon) = 0 \qquad \text{(III.55)}$$

نكتب المعادلة الأخيرة كمعادلة جبرية من الدرجة الثانية بالنسبة إلى k

$$4k^2 - \left(1 - 4\left(E_\theta^{(2m)} - \varepsilon\right)\right)k + \left(1 - 4E_\theta^{(2m)}\right)\varepsilon + \eta^2 = 0 \qquad \text{(III.56)}$$

نحسب المميز دلتا:

$$\Delta = \left(\varepsilon - \frac{1}{4} + E_\theta^{(2m)}\right)^2 - \eta^2 \qquad \text{(III.57)}$$

بما أن المميز اكبر من الصفر فان للمعادلة حلين k_1 و k_2

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} + \sqrt{\Delta}\right] \\ k_2 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - \sqrt{\Delta}\right] \end{cases} \quad \text{(III.58)}$$

نضع:

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k_{1,2}} \quad \text{(III.59)}$$

s_0 هو حل مزدوج لمعادلة جبرية من الدرجة الثانية:

$$\left(\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k\right)s^2 + \eta s + k - \varepsilon = (s - s_0)^2 = 0 \quad \text{(III.60)}$$

$$s_0 = \frac{\eta}{2\sqrt{\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k_{1,2}}} \quad \text{(III.61)}$$

بالتبسيط نجد:

$$s_0 = \frac{\eta}{2\delta_{1,2}} \quad \text{(III.62)}$$

بالتعويض في عبارة $\pi(s)$

$$\pi(s) = \begin{cases} \pi_{1,2} = \left(\frac{-1}{2} \pm \delta_1\right)s \pm \frac{\eta}{2\delta_1} \\ \pi_{3,4} = \left(\frac{-1}{2} \pm \delta_2\right)s \pm \frac{\eta}{2\delta_2} \end{cases} \quad \text{(III.63)}$$

من اجل:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} + \sqrt{\Delta}\right] \\ k_2 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - \sqrt{\Delta}\right] \end{cases} \qquad (III.64)$$

حيث:

$$\delta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k_{1,2}} \qquad (III.65)$$

نختار القيم الذاتية π_1 التي تعطينا نفس نتائج الفضاء العادي و نعوض في المعادلة التالية:

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \qquad (III.66)$$

بالتعويض نجد:

$$\tau(s) = -s + 2\left[\left(\frac{-1}{2} + \delta_1\right)s + \frac{\eta}{2\delta_1}\right] \qquad (III.67)$$

تصبح كالتالي:

$$\tau(s) = 2(\delta_1 - 1)s + \frac{\eta}{\delta_1} \qquad (III.68)$$

من العلاقة السابقة نجد:

$$\Lambda = k_1 + \pi'_1(s) \qquad (III.69)$$

هناك مشتق سالب بالتعويض تصبح العلاقة كالتالي :

$$\Lambda = -n\pi' - \frac{n(n-1)\sigma''}{2} = -2n(\delta_1 - 1) - \frac{n(n-1)(-2)}{2} = n(n+1-2\delta_1) \qquad (III.70)$$

و منه:

$$\Lambda = k_1 - \frac{1}{2} + \delta_1 = n(n + 1 - 2\delta_1) \qquad \text{(III.71)}$$

نبحث عن k_1 في المعادلة الأخيرة:

$$k_1 = \frac{1}{2} - \delta_1(2n + 1) + n(n + 1) \qquad \text{(III.72)}$$

من اجل الحصول على القيم الذاتية للطاقة نعوض في k_1

$$k_1 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} + \sqrt{\left(\varepsilon - \frac{1}{4} + E_\theta^{(2m)}\right)^2 - \eta^2}\right] \qquad \text{(III.73)}$$

و لدينا :

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k_1} \qquad \text{(III.74)}$$

و لدينا أيضا :

$$k_1 = \frac{1}{2} - \delta_1(2n + 1) + n(n + 1) \qquad \text{(III.75)}$$

بالتعويض نجد:

$$k_1 = \frac{1}{2} - (2n + 1)\sqrt{\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k_1} + n(n + 1) \qquad \text{(III.76)}$$

و منه :

$$\left[k_1 - n(n+1) - \tfrac{1}{2}\right]^2 = \left[(2n+1)\sqrt{\tfrac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - k_1}\right]^2 \tag{III.77}$$

في الأخير نحصل على معادلة جبرية من الدرجة الثانية ل:

$$k_1^2 + (2n^2+2n)k_1 + n^2(n^2+2n+1) - E_\theta^{(2m)}(2n+1)^2 = 0 \tag{III.78}$$

بالتبسيط نجد:

$$k_1^2 + (2n^2+2n)k_1 + n^2(n+1)^2 - E_\theta^{(2m)}(2n+1)^2 = 0 \tag{III.79}$$

بعد حساب المميز دلتا للمعادلة الأخيرة وجدنا ان لها حلين لأنه اكبر من الصفر:

$$k_1' = \frac{-(2n^2+2n) - 2(2n+1)\sqrt{-E_\theta^{(2m)}}}{2} \tag{III.80}$$

$$k_1'' = \frac{-(2n^2+2n) + 2(2n+1)\sqrt{-E_\theta^{(2m)}}}{2} \tag{III.81}$$

بالتبسيط نجد:

$$k_1' = -n(n+1) - (2n+1)\sqrt{-E_\theta^{(2m)}} \tag{III.82}$$

$$k_1'' = -n(n+1) + (2n+1)\sqrt{-E_\theta^{(2m)}} \tag{III.83}$$

نختار الحل k_1'

لدينا:

$$k_1 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} + \sqrt{\left(\varepsilon - \frac{1}{4} + E_\theta^{(2m)}\right)^2 - \eta^2}\right] = n(n+1) - (2n+1)\sqrt{-E_\theta^{(2m)}} \tag{III.84}$$

نعوض ε و η بالعبارتين الآتيتين في المعادلة السابقة .

$$\eta = \frac{mqQ}{2\sqrt{\lambda}\pi\varepsilon_0\hbar^2} \quad , \ \varepsilon = \frac{2mE}{\lambda\hbar^2} \tag{III.85}$$

فنجد:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2mE}{\lambda\hbar^2} + \frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} + \sqrt{\left(\varepsilon\frac{2mE}{\lambda\hbar^2} - \frac{1}{4} + E_\theta^{(2m)}\right)^2 - \frac{mqQ}{2\sqrt{\lambda}\pi\varepsilon_0\hbar^2}^2}\right] = n(n+1) - (2n+1)\sqrt{-E_\theta^{(2m)}} \tag{III.88}$$

نقوم بحل المعادلة الأخيرة فنتحصل على الطاقة:

$$E_n = -\left(\frac{4\pi\hbar^2\varepsilon_0}{2mqQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}\right)\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{-E_\theta^{(2m)}}\right)^{-2} - \frac{\lambda\hbar^2}{8m}\left[(2n+1)\left(2n+1+4\sqrt{-E_\theta^{(2m)}}\right) - 1\right] \tag{III.89}$$

حيث $n=1,2,3,\ldots.$

دالة الموجة $\psi_n(x)$ نحصل عليها من العلاقة السابقة و بأخذ قيمة $\pi_1(s)$ نجد:

$$\pi(s) = \pi_1(s) = \sigma(s)\frac{d}{ds}\left(\ln\emptyset(s)\right) \Rightarrow \emptyset(s) = \exp\left(\int\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\,ds\right) \tag{III.90}$$

بتعويض قيم $\pi(s)$ و $\sigma(s)$ من المعادلتين نجد:

$$\emptyset(s) = \exp\left(\int \frac{\left(\frac{-1}{2}+\delta_1\right)s+\frac{\eta}{2\delta_1}}{1-s^2}\, ds\right) \tag{III.91}$$

بالتبسيط نجد:

$$\emptyset(s) = \exp\left(\left(\frac{-1}{2}+\delta_1\right)\int \frac{s}{1-s^2}\, ds + \frac{\eta}{2\delta_1}\int \frac{s}{1-s^2}\, ds\right) \tag{III.92}$$

بعد حساب التكامل نتحصل على المعادلة التالية:

$$\emptyset(s) = \exp\left(\ln(1+s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)}(1-s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)}\right) \tag{III.93}$$

و منه:

$$\emptyset(s) = (1+s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)}(1-s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)} \tag{III.94}$$

نستخدم العلاقات التالية لإيجاد دالة الوزن:

$$\frac{d}{ds}[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s) \tag{III.95}$$

نستخرج دالة الوزن:

$$\sigma(s)\frac{d\rho(s)}{ds} + \frac{d\sigma(s)}{ds}\rho(s) = \tau(s)\rho(s) \Rightarrow \tau(s) = \sigma(s)\frac{d\rho(s)}{\rho(s)\, ds} + \frac{d\sigma(s)}{ds} \tag{III.96}$$

بالتبسيط نجد:

$$\ln\rho(s) = \int \left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{d\sigma(s)}{\sigma(s)\, ds}\right) ds \tag{III.97}$$

لتبسيط العبارة ندخل الدالة الاسية:

$$\rho(s) = \exp\int\left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} - \frac{d\sigma(s)}{\sigma(s)\,ds}\right) ds \qquad \text{(III.98)}$$

لدينا:

$$\tau(s) = -s + 2\left[\left(\frac{-1}{2} + \delta_1\right)s + \frac{\eta}{2\delta_1}\right] = 2(\delta_1 - 1)s + \frac{\eta}{\delta_1} \qquad \text{(III.99)}$$

بتعويض قيم $\tau(s)$ و $\sigma(s)$

$$\rho(s) = \exp\int\left(\frac{2(\delta_1 - 1)s + \frac{\eta}{\delta_1}}{1 - s^2} - \frac{-2s}{1 - s^2}\right) ds \qquad \text{(III.100)}$$

بالتبسيط:

$$\rho(s) = \exp\left[2\delta_1\int\left(\frac{s}{1 - s^2}\right) ds + \frac{\eta}{\delta_1}\int\left(\frac{1}{1 - s^2}\right) ds\right] \qquad \text{(III.101)}$$

بعد حساب التكامل نجد:

$$\rho(s) = \exp\left(\ln(1 - s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}(1 + s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}\right) \qquad \text{(III.102)}$$

و منه:

$$\rho(s) = \ln(1 + s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}(1 - s)^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}\right)} \qquad \text{(III.103)}$$

لإيجاد$y_n(s)$نستخدم علاقة رودريغز:

$$y_n(s) = \frac{c_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}\left[(1 - s^2)^n \rho(s)\right] \qquad \text{(III.104)}$$

حيث :

$$\rho(s) = (1+s)^{\left(-\delta_1 - \frac{2}{2\delta_1}\right)}(1-s)^{\left(-\delta_1 - \frac{2}{2\delta_1}\right)} \qquad \text{(III.105)}$$

بالتعويض نجد:

$$y_n(s) = \frac{c_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n}\left[(1-s^2)^n (1+s)^{\left(-\delta_1 - \frac{2}{2\delta_1}\right)}(1-s)^{\left(-\delta_1 - \frac{2}{2\delta_1}\right)}\right] \qquad \text{(III.106)}$$

العلاقة الأخيرة تعتمد على كثير حدود جاكوبي:

$$y_n(s) = P_n^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}, -\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}(s) \qquad \text{(III.107)}$$

و منه يمكن كتابة $R_1(s)$ بالشكل التالي:

$$R_1(s) = c_n (1+s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)}(1-s)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)} P_n^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}, -\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}(s) \qquad \text{(III.108)}$$

يمكننا الان كتابة الصيغة العامة لدالة الموجة

$$\psi_n = c_n \left(1 - \frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda} r}\right)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)} \left(1 + \frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda} r}\right)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{\eta}{\delta_1}\right)} P_n^{\left(-\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}, -\delta_1 - \frac{\eta}{2\delta_1}\right)}\left(\frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda} r}\right) \emptyset(\theta) \qquad \text{(III.109)}$$

حيث c_n هو ثابت التقني

3. عبارة الطاقة و دالة الموجة النهائية:

الان نكتب الشكل النهائي للطاقة و دالة الموجة

نعوض ثابت الفصل المتحصل عليه في الفصل الثاني في عبارة الطاقة المشوهة المعدلة لنجد العبارة النهائية للطاقة المشوهة:

$$E_n = -\left(\frac{4\pi\hbar^2\varepsilon_0}{2mqQ}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}\right)\left(n-|m|+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}c_{2m}\left(\frac{mq}{4\pi\hbar^2\varepsilon_0}D\right)}\right)^{-2} + \frac{\lambda\hbar^2}{8m}\left[(2(n-|m|)+1)\left(2(n-|m|)+1+4\sqrt{-c_{2m}\left(\frac{mq}{4\pi\hbar^2\varepsilon_0}D\right)}\right)-1\right] \tag{III.110}$$

n هو الرقم الكمي و m هو الرقم الكمي الثانوي

من العلاقة :

$$\psi(r,\theta) = R(r)\emptyset(\theta) \tag{III.111}$$

و باستعمال دالة ماثيو نجد:

$$\psi_n = N_n\left(1-\frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\right)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)}\left(1+\frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\right)^{\frac{1}{4}\left(1-2\delta_1+\frac{n}{\delta_1}\right)} P_n^{\left(-\delta_1-\frac{\eta}{2\delta_1{}'}-\delta_1-\frac{\eta}{2\delta_1}\right)}\frac{\sqrt{1+\lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}r}\emptyset(\theta) \tag{III.112}$$

حيث $\emptyset(\theta)$ دالة ماثيو

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1}{4} - E_\theta^{(2m)} - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{-E_\theta^{(2m)}}} \qquad \text{(III.113)}$$

الخاتمة :

نلاحظ أن عبارة طيف الطاقة تحتوي على تصحيح إضافي الذي يعتمد على معامل التشوه ويزداد انحرافه بسرعة مع n^2 هذا التأثير راجع إلى تعديل مبدأ هايزمبارغ بالإضافة إلى أن في فضاء دي سيتر الطاقة تزداد بشكل طفيف. كما تظهر خاصية أخرى مثيرة للاهتمام في نتائجنا عند حساب الفرق في الطاقة يصبح هذا الاختلاف ثابتا عند القيم الكبيرة ل n.

الخاتمة العامة

الخاتمة العامة:

في هذا العمل كان هدفنا هو دراسة نظام كمي يتمثل في دراسة سلوك جسم مشحون داخل كمون ثنائي القطب وتأثير الفضاء المشوه دي سيتر على هذا النظام ولتحقيق هذا الهدف قمنا أولا بدراسة هذا النظام في الفضاء العادي ثنائي الأبعاد ،حيث قمنا بحل معادلة شرودينغر التي تصف سلوك هذا الجسم حلا تحليليا حيث استعملنا طريقة فصل المتغيرات وهذا بكتابة المعادلة في الإحداثيات الكروية أين تحصلنا على معادلتين المعادلة الزاوية وهي على شكل معادلة ماثيو والمعادلة القطرية على شكل معادلة فوق هندسية وبحل هاتين المعادلتين تحصلنا على طاقة النظام ودالة الحالة التي أظهرت لنا أن الطاقات تتزايد مع زيادة عزم ثنائي القطب إلى أقصى قيمة ثم تبدأ في التناقص، و منه فإن سلوك هذه الحلول يطابق سلوك القيم المميزة لدوال ماثيو.

كما انه للحصول على قيم للطاقة$E_{n,m}$ حقيقة يجب ألا يتزاوج عزم ثنائي القطب قيم حدية سميناها قيم حرجة،مع العلم أن هذه القيم الحرجة تعتمد على العدد الكمي المغناطيسي m فقط. لكن في حالة ثنائي القطب النقي تتغير المعادلة بحيث يصبح من الضروري أن يتجاوز عزم ثنائي القطب الحد الأدنى للقيمة الحرجة من اجل وجود حالات مرتبطة. يمكن تفسير ذلك من خلال حقيقة أن ثنائي القطب يجذب الشحنة في بعض الاتجاهات، في نفس لوقت ينفر اخرى في اتجاهات اخرى، وهذا قد يزعزع استقرار حالات النظام إذا أصبح عزم ثنائي القطب كبير جدا.

أما فيما يخص الدراسة في الفضاء المشوه دي سيتر التي تمت في الفصل الثالث حيث اعتمدنا نفس الطريقة لفصل المتغيرات حيث تحصلنا على نفس معادلة الزاوية التي تحصلنا عليها في الحالة الأولى حالة الفضاء العادي اما المعادلة القطرية استعملنا لحلها طريقة نيكيفاروف – ايفاروف أين استخرجنا عبارات الطاقات، حيث لاحظنا أن عبارة طيف الطاقة تحتوي على تصحيح إضافي، الذي يعتمد على معامل التشوه λ و الأعداد الكمية n و m ويزداد انحرافه بسرعة مع n^2. هذا التأثير راجع إلى تعديل مبدأ هايزنبارغ وناتج عن تأثير الفضاء على النظام وكنتيجة نجد في فضاء ديسيتر أن الطاقة تزداد بشكل طفيف.

المراجع:

1) ماجد الحمدان : تاريخ الافكار 3 دوائر الفكر الحديث ،طبعة 1،دار نشر سيبويه للطابعة و النشر و التوزيع ، السعودية ، جدة ، سنة 2016 ، صفحة 67

2) Max Planck, 1858-1947.Science**107**,534-537(1948)
3) Klassen, S. The Photoelectric Effect: Reconstructing the Story for the Physics Classroom. Sci and Educ 20, 719–731 (2011).
4) Blokhintsev, D.I. Foundations of Quantum Mechanics. In: Quantum Mechanics. Springer, Dordrecht. (1964)
5) J David. Griffiths, Introduction à la mécanique quantique, et édition, Éducation PearsonSec 4.1. (2005).

6) دوغلاس س.جيانكولي: الفيزياء : المبادئ و التطبيقات ، طبعة 1 ، دار نشر العبيكشان للنشر ، السعودية ، سنة 2014 ،صفحة 787

7) Makarov A.A. et al., A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries, Nuovo Cimento A 52 1061 (1967) .
8) Hertmann Hartmann Die BewegungeinesK"orpers in einemringf"ormigenPotentialfeld, Theor. Chim. Acta 24, 201 (1972)
9) AndrÈ Hautot Exact motion in noncentral electric Öelds, J. Math. Phys. 14, 1320 (1973) .
10) M. Kibler, and T. Negadi, Int. J. Quant. Chem. 26, 405 (1984)
11) Z. M. Cang, and W. Z. Bang, Chin. Phys. 16, 1863 (2007)
12) J. L. Katz, A. Misra, P. Spencer, Y. Wang, S. Bumrerraj, T. Nomurrad, S. Eppell and M.Tabib-Azar, Mater. Sci. Eng. C 27, 450 (2007).
13) and M. P. Anderson, Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 2, 53 (1994).
14) G¨orlitzA;. et al.; Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions, Phys. Rev. Lett. 87, 130402 (2001)
15) Martiyanov K., Makhalov V. and Turlapov A.; Observation of a Two-Dimensional Fermi Gas of Atoms, Phys. Rev. Lett. 105, 030404 (2010)
16) JDavid. Griffiths, Introduction à la mécanique quantique, et édition, Éducation PearsonSec 4.1. (2005).
17) S.Mignemi, Phys. Rev. 84 (2011) 025021.
18) S. rGhosh and S. Mignemi, Int. J. Theor. Phys. 50 (2011) 1803.

19)يوسف البناي : البنية الواسعة للزمان و المكان ، مقدمة الى النظرية النسبية العامة و الثقوب السوداء و علم الكون ، طبعة 2 ، دار كلمات للنشر و التوزيع، المملكة العربية السعودية ، 2018 ، صفحة 50 و 51

20) Willem De Sitter : Einstein’s Friend and Opponent. Springer; 2018.page 1

21)احمد سمير سعد: كون على كرسي الاعتراف، ط1 ،دار اكتب للنشر و التوزيع ، القاهرة ، مصر ،2021 ص 54

22)محمد باسل الطائي :الكون و العدم, ط1, دار النفائس لنشر و التوزيع , القاهرة , مصر , 2021 , ص 132

23)راسل ستانارد : النسبية مقدمة قصيرة جدا ، ترجمة محمد فتحي خضر ، دار نشر هينداويفوندشن ، القاهرة ، مصر ، 2021 ، ص 67

24) Lindley, D. The appearance of bubbles in de sitter space. Nuclear Physics B, 236(2), 522–546. (1984).
25) Bob. Klauber, Simplified Guide to de Sitter and Anti-de Sitter Spaces (Minor Revision), May (2), (2018)
26) M. M. Stetsko, Dirac oscillator and non relativistic Snyder-de Sitter algebra, J. Math. Phys. 56, 012101 (2015)
27) S. Mignemi, Classical and quantum mechanics of the non relativistic Snyder model in curved space, Class. Quant. Grav. 29, 215019 (2012)
28) B. Bolen and M. Cavagli`a, (Anti-)de Sitter black hole thermodynamics and the generalized uncertainty principle, Gen. Relativ. Gravit. 37, 1255-1262 (2005)
29) Martiyanov K., Makhalov V. and Turlapov A.; Observation of a Two-Dimensional Fermi Gas of Atoms, Phys. Rev. Lett. 105, 030404 (2010)
30) Mokhtar Falek, Noureddine Belghar, Mustafa Moumni, Exact solution of Schrödinger equation in (anti-)de Sitter spaces for hydrogen atom Eur.Phys. J. Plus 135:335
31) Ashtekar, A., and Magnon, A. Asymptotically anti-de Sitter space-times. Classical and Quantum Gravity, 1(4), L39–L44. (1984)
32) E. Witten, Quantum gravity in de Sitter space, hep-th/0106109.(2020)

33) Polyakov, A. M. De Sitter space and eternity. Nuclear Physics B, 797(1-2), 199–217.(2008).

34) Makarov A.A. et al., A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries, Nuovo Cimento A 52 1061 (1967)

35) H. Hartmann, R. Schuck, and J. Radtke, Theor. Chim. Acta .42,1 (1976)

36) A. Durmus, F. Yasuk, J. Chem. Phys. 126, 074108 (2007).

37) AndrÈ Hautot Exact motion in noncentral electric Öelds, J. Math. Phys. 14, 1320 (1973)

38) Chang-Yuan Chen. Cheng-Lin Liu. Dong-Sheng Sun, The normalized wave functions of the Hartmann potential and explicit expressions for their radial average values, Physics Letters A 305 (2002) 341–348.

39) M. Moumni, M. Falek; Schrödinger equation for non-pure dipole potential in 2D systems. *J. Math. Phys.* 1 July 2016; 57 (7): 072104.

40) M. Moumni, M. Falek. arXiv:1506.07812v4 [quant-ph] 13 May 2016.

41)مصطفى عليوي: الاجازة في تقانة الاتصالات فيزياء ، دار نشر الجامعة الافتراضيةالسورية ، الجمهورية العربية السورية ، سنة 2020 ، صفحة 46

42)شهرة ثورية : محاضرات في الفيزياء الكهرباء و المغناطيسية ، جامعة قاصدي مرباح–ورقلة، صفحة 22، 24

الملخص:

في هذا العمل قمنا بإجراء دراسة كمية لكمون لا مركزي، وهو كمون ثنائي القطب وهذا في الحالة غير النسبية أي معادلة شرودينغر، وهذه الدراسة تمت في حالتين الحالة الأولى وهي في الفضاء العادي ثنائي البعد حيث تحصلنا على عبارة الطاقة ودالة الموجة للنظام أين وجدنا شرط للحصول على الطاقة وهو عدم تجاوز عزم ثنائي القطب قيمة حدية معينة ،وفي الحالة الثانية درسنا نفس المعادلة بنفس الكمون لكن في الفضاء المشوه ثنائي البعد فضاء(ديسيتر)حيث وجدنا أن هذا التشوه يوثر على الطاقة حيث تزداد.

Résumé:

Dans ce travail, nous avons mené une étude quantitative du potentiel non central, qui est un potentiel dipolaire, dans le cadre non relativiste, c'est-à-dire avec l'équation de Schrödinger. Cette étude a été réalisée dans deux cas : le premier cas est dans l'espace ordinaire bidimensionnel où nous avons obtenu l'expression de l'énergie et la fonction d'onde du système, et nous avons trouvé une condition pour obtenir l'énergie, à savoir que le moment dipolaire ne doit pas dépasser une certaine valeur critique. Dans le deuxième cas, nous avons étudié la même équation avec le même potentiel, mais dans l'espace déformé bidimensionnel (espace de De Sitter), où nous avons constaté que cette déformation influence l'énergie en l'augmentant.

Summary:

In this work, we conducted a quantitative study of a non-central potential, specifically a dipole potential, in the non-relativistic case using the Schrödinger equation. This study was performed in two scenarios: the first scenario in a regular two-dimensional space where we derived the expressions for the system's energy and wave function, and found that obtaining the energy requires the dipole moment not to exceed a certain critical value. In the second scenario, we studied the same equation with the same potential but in a two-dimensional deformed space (de Sitter space), where we found that this deformation affects the energy by increasing.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED KHIDER - BISKRA
Faculté des SE&SNV
Département des Sciences de la matière
Filière: Physique

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم :علوم المادة
شعبة :الفيزياء

تصريح شرفي

خاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية لإنجاز بحث

(ملحق القرار 1082 المؤرخ في 2021/12/27)

أنا الممضي أسفله،

السيد(ة): لهوم وحيدة

الصفة: طالب سنة ثانية ماسترفيزياء تخصص: فيزياء طاقوية وطاقات متجددة

الحامل(ة) لبطاقة التعريف الوطنية رقم: 208062954 الصادرة بتاريخ: 26-06-2022

المسجل بكلية: علوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة قسم: علوم المادة

والمكلف بانجاز أعمال بحث : مذكرة ماستر في الفيزياء

عنوانها: الدراسة الكمية لكمون ثنائي القطب في فضاء دي سيتر ثنائي البعد

أصرح بشرفي أني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية ومعايير الأخلاقيات المهنية والنزاهة الأكاديمية المطلوبة في انجاز البحث المذكور أعلاه وفق ما ينص عليه القرار رقم 1082 المؤرخ في 2021/12/27المحدد للقواعد المتعلقة بالوقاية من السرقة العلمية ومكافحتها.

التاريخ: 25-05-2024

إمضاء المعني بالأمر