République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques – Option : **Probabilités**

Par

Selami Hourma

Titre :

Principe du maximum avec des informations incompletes

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Imad Eddine Lakhdari**	UMK - Biskra	**Président**
Prof.	**Mokhtar Hafayed**	UMK - Biskra	**Encadreur**
Dr.	**Naceur Rahmani**	UMK - Biskra	**Examinateur**

Juin 2024

Dédicace

Je dédie cet humble travail

A mes chers et honorables parents, les quels je les remercier infiniment.

Votre support m'a été très précieux.

J'espère leurs avoir rendu un petit peu de ce qu'ils m'ont apporté.

A mon chère épouse et à mon petit-fils Mohamed

A tous mes frères et membres de famille

avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite

Hourma Selami ©2024

Remerciements

J'exprime d'abord mes profonds remerciements à mon "DIEU" qui m'a donné le courage et la volonté pour continue ce travail :

"EL HAMDO LILAH"

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Prof. Mokhtar HAFAYED, pour sa patience et sa générosité et les précieux conseils et orientations pertinentes qui m'ont permis de finaliser la rédaction de ce mémoire dans des excellentes conditions.

Je tiens aussi à remercier les membres de jury, Dr. Imad Lakhdari et Dr Naceur Rahmani, merci d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce travail.

Mes remerciements vont également à mes frères amis (ex-collègues), Prof. YAHYA D. et Dr. GUIDAD D., qu'ils m'ont supporté dès le début par leurs encouragements, conciles et soutien pour que je puisse continue mes études et soutenir ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous les enseignants qui ont contribués à mon formation.

A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Abstract

In our work, we study a stochastic optimization control problem, where the controller has incomplet informations. More precisely ; the information available to the controller is possibly less than the whole (full) information. We establish a set of necessary conditions for optimal stochastic control of systems driven by stochastic differential equations in the form of stochastic maximum principle. The incomplete informations means that the information available to the controller is possibly less than the whole (full) information. That is, any admissible control is adapted to a subfiltration. This type of control problems which has potential applications in mathematical finance becomes naturally, because it may fail to obtain an admissible control with complet information in real world applications. In this work, the control domain is assumed to be convex.

Keywords. *Stochastic optimal control ; stochastic differential equation ; incomplet information, necessary conditions of optimality. Ito-formula. variational method, convex perturbations.*

Résumé

Dans notre travail, nous étudions un problème d'optimisation stochastique, où le contrôleur dispose d'informations incomplètes. Plus précisément ; les informations dont dispose le responsable du traitement sont peut-être inférieures à la totalité des informations (complètes). Nous établissons un ensemble de conditions nécessaires pour un contrôle stochastique optimal des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques sous la forme du principe du maximum stochastique. Les informations incomplètes signifient que les informations dont dispose le responsable du traitement sont éventuellement inférieures à l'ensemble des informations (complètes). C'est-à-dire que tout contrôle admissible est adapté à une sous-filtration. Ce type de problème de contrôle qui a des applications potentielles en finance mathématique devient naturel, car il peut ne pas parvenir à obtenir un contrôle admissible avec des informations complètes dans des applications du monde réel. Dans ce travail, le domaine de contrôle est supposé convexe.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on considère des problèmes des contrôles optimaux stochastiques et le principe du maximum sous l'information partielle. Il existe deux principes de résolution du problème de contrôle optimal :

i) Principe de la programmation dynamique : Le principe de la programmation dynamique (PPD) est un principe fondamental pour la théorie du contrôle stochastique, a été introduite par Bellman en (1953- 1956).

ii) Principe du maximum de Pontryagin : Le principe du maximum a été introduit par Pontryagin et al, en (1953-1956). Elle s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe en utilisant l'approche de Lagrange en calculant des variations sur la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à un paramètre de perturbation positive θ :

$$\frac{d}{d\theta}\left[J(u_\theta)\right]|_{\theta=0} \geq 0.$$

L'objet du contrôle optimal stochastique est de maximiser (minimiser) un coût sur un ensemble $\mathcal{U}$ de tous les contrôles admissibles :

$$J\left(\widehat{u}\right) = \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} J\left(u\left(\cdot\right)\right)$$

Le principe du maximum a été établie par Pontryagin et al., en 1956, et la première version du maximum stochastique a été établie par Kushner en (1973-1976), pour objectif de trouver l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes qui satisfaites de ce contrôle.

Nous présentons ce travail en trois chapitres comme suit : dans le premier chapitre généralités sur les processus stochastiques, nous donnons des généralités et concepts de base sur les processus stochastiques. Ces différentes notions, vont être utilisées dans la suite de ce mémoire. On va s'intéresser ainsi, à des phénomènes aléatoires dépendant du temps. De telle sorte que toute l'information connue à la date t est rassemblé dans une tribu notée $\mathcal{F}_t$.

Dans le deuxième chapitre : Contrôle optimal stochastique, la théorie du contrôle à été initialement développée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthèse des systèmes de contrôle et de système dynamique (c'est à dire l'évolution du système au cours du temps). Cette grande théorie à de nombreuses applications en gestion et en finance.

Dans le troisième chapitre : Principe du maximum sous l'information partielle, ce chapitre est consacré à la démonstration des conditions nécessaires du principe du maximum sous l'information partielle de la façon plus intuitive possible. Cette méthode de résolution est utilisée dans le cas qu'il ne dispose pas d'une mesure complète et parfaite de l'état complet du système à chaque fois. Par exemple, une information retardée par $a > 0$: $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{(t-a)}$.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

Dans ce premier chapitre, nous donnons des généralités et concepts de base sur les processus stochastiques. Ces différentes notions, vont être utilisées dans la suite de ce mémoire. On va s'intéresser ainsi, à des phénomènes aléatoires dépendant du temps. De telle sorte que toute l'information connue à la date t est rassemblé dans une tribu notée $\mathcal{F}_t$.

1.1 Filtration et Processus

Considérons dans la suite l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition 1.1.1 *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, c´est-a-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_S$ pour tout $t \leq s$.*

On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$. On parle donc d'hypothèses habituelles si :

– Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

– La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

– Une filtration $\mathcal{G}$ est dite plus grosse que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t, \ \forall t$.

Définition 1.1.2 *Une processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires* $(X_t; t \in [0, \infty[)$ *définies sur le même espace de probabilités. Le processus stochastique* $(X_t, t \geq 0)$ *est dit adapté (par rapport à une filtration* $\mathcal{F}_t$*) si* X_t *est* $\mathcal{F}_t -$ *mesurable pour tout* t*.*

Remarque 1.1.1 *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou continu) si les applications* $t \rightarrow X_t(\omega)$ *sont continués pour presque tout* ω*. De plus, un processus est dit càdlàg (continu à droite et de limites à gauche) si ses trajectoires sont continués à droite, et avec une limite à gauche.*

A un processus stochastique X on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c'est à dire la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left\{X_s,\ s \leq t\right\}$. On utilise souvent des processus dit prévisibles. La définition précise est la suivante : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On appelle tribu des prévisibles la tribu sur $(0, \infty) \times \Omega$ engendrée par les rectangles de la forme :

$$]s, t] \times A, \quad 0 \leq s \leq t, \quad A \in \mathcal{F}_s.$$

Un processus est prévisible si et seulement si l'application $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles [1, 10, Remark 2.2]. En effet, il suffit de savoir que les processus càg sont prévisibles.

Remarque 1.1.2 *On dit que deux processus* X *et* Y *sont égaux à une modification près si* $X_t = Y_t$ *p.s.* $\forall t$*. Deux processus sont égaux en loi* $X \overset{loi}{=} Y$ *si pour tout* $(t_1, t_2, , ..., t_n)$ *et pour tout* n *on a* $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \overset{loi}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$*.*

1.1.1 Processus croissant

- Un processus $A = (A_t\ , t \geq 0)$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \rightarrow A_t$ est une fonction croissante c'est-à-dire :

$$A_t(\omega) \leq A_s(\omega) \quad , \forall t \leq s \quad , p.s.$$

– Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ et dit à variation bornée sur $[0, t]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i \left| V_{t_{i+1}} - V_{t_i} \right| \leq K \ ,$$

le *sup* étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

– Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ et dit à variation finie sur $[0, t]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i \left| V_{t_{i+1}} - V_{t_i} \right| \leq \infty,$$

Le *sup* étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.

– Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit à variation finie s'il est à variation finie sur $[0, t]$ pour tout t. Il est alors la différence de deux processus croissants (et réciproquement).

1.1.2 Processus Gaussiens

Définition 1.1.3 *Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire (v.a.) gaussienne :*

$$\forall n \ , \forall t_i \ \ , 1 \leq i \leq n \ , \forall a_i \ , \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad \textit{est une v.a. gaussienne.}$$

Remarque 1.1.3 *Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa covariance. Un espace gaussien est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega)$ formé de v.a. gaussiennes centrées. L'espace gaussien engendré par un processus gaussien est le sous espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a. centrées $(X_t - E(X_t), \ t \geq 0)$, c'est-à-dire le sous espace formé par les combinaisons linéaires de ces variables centrées et leurs limites en moyenne quadratique.*

1.2 Espérance Conditionnelle

Soit A et B deux évènements (sous-ensembles de Ω). On définit la probabilité conditionnelle de A sachant B par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

pour tout B tel que $P(B) \neq 0$.

Propriété 1.2.1 $P(.|B)$ *est une probabilité sur* Ω*.*

On peut définir l'espérance d'une variable par rapport à cette loi. Considérons le cas d'une variable X à valeurs dans $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Soit B fixé et $Q(A) := P(A|B)$. On a alors en désignant par E_Q l'espérance par rapport à Q :

$$E_Q(X) = \sum_j x_j Q(X = x_j) = \sum_j x_j \frac{P(X = x_j \cap B)}{P(B)}.$$

On peut écrire

$$P(\{X = x_j\} \cap B) = \int_B 1_{\{X=x_j\}} dP$$

où $1_{(X=x_j)}$ est la fonction indicatrice qui vaut 1 si $\omega \in \{X = x_j\}$ et 0 si non et on remarque que $\sum_j x_j 1_{\{X=x_j\}} = X$. Alors,

$$\sum_j x_j \frac{P(X = x_j \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP,$$

ce que l'on peut lire

$$\int_B E_Q(X) \, dP = E_Q(X) \, P(B) = \int_B X dP.$$

On note $E(X|B) = E_Q(X)$. Soit alors $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par B et $E(X|\mathcal{B})$ la variable aléatoire définie par $E(X|\mathcal{B}) = E(X|B) \, 1_B + E(X|B^c) \, 1_{B^c}$. On a

$$\int_D E(X|\mathcal{B}) \, dP = \int_D X dP.$$

pour tout élément $D \in \mathcal{B}$. O appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, quand cette variable aléatoire X est $\mathcal{B}-mesurable$. Un cas particulier intéressant est celui où l'évènement $\mathcal{B}$ est lié à une v.a.

Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(resp\,(y_1, y_2, ..., y_n))$, telles que $\forall i$, $P\,(Y = y_i) \neq 0$. On peut alors définir $P\,(X = x_j|Y = y_j) = \mu\,(x_j; y_j)$. On remarque que pour tout y_i, $\mu\,(.; y_i)$ définit une probabilité sur $(x_1, x_2, ..., x_n)$. On peut donc définir l'espérance de X par rapport à cette loi par :

$$\begin{aligned} E\,(X|Y = y_i) &= \sum_j x_j P\,(X = x_j|Y = y_i) \\ &= \sum_j x_j \mu\,(x_j; y_i) = \frac{1}{P\,(Y = y_i)} \int_{Y=y_i} X dP. \end{aligned}$$

On définit ainsi une fonction Ψ telle que $\Psi\,(y_i) = E\,(X|Y = y_i)$.

IL est facile de vérifier que :

$$\sum_i P\,(Y = y_i)\,E\,(X|Y = y_i) = \sum_i P\,(Y = y_i)\,\Psi\,(y_i) = E\,(\Psi\,(Y)) = E\,(E\,(X|Y)) = E\,(X)\,.$$

On note $\Psi\,(Y) = E\,(X|Y)$ l'espérance conditionnelle de X sachant Y ou encore l'espérance conditionnelle de X par rapport à Y. Cette fonction est caractérisée par :

a) $\Psi\,(Y)$ est $Y - mesurable$,

b) $E\,(\Phi\,(Y)\,X) = E\,(\Phi\,(Y)\,\Psi\,(Y))$ pour toute fonction Φ.

Remarque 1.2.1 *IL suffit par linéarité de vérifier b) pour* $\Phi = 1_{y_i}$.

1.2.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit X une v.a.r. (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.2.1 *L'espérance conditionnelle* $E\,(X|\mathcal{G})$ *de* X *sachant* $\mathcal{G}$ *est l'unique v.a. :*

a) $G-mesurable.$

b) telle que $\int_A E\,(X|\mathcal{G})\,dP = \int_A X dP, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$

Remarque 1.2.2 *$E(X|\mathcal{G})$ c'est aussi l'unique (à une égalité P.s près) variable $\mathcal{G}-$ mesurable telle que :*

$$E\left[E(X|\mathcal{G})Y\right]=E(XY)$$

pour toute variable Y, $\mathcal{G}-$ mesurable bornée.
Il en résulte que si X est de carré intégrable, $E(X|\mathcal{G})$ est la projection de X sur l'espace des variables aléatoires $\mathcal{G}-$ mesurable, de carré intégrable, c'est-à-dire la v.a. $\mathcal{G}-$ mesurable qui minimise $E\left[(X-Y)^2\right]$ parmi les v.a. Y, $\mathcal{G}-$ mesurables.

1.2.2 Espérance conditionnelle par rapport à une variable

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note $E(X|Y)$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par rapport Y, donc c'est une fonction de Y : il exist ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ borélienne telle que $E(X|Y)=\psi(Y)$.

Propriété 1.2.2 *L'espérance coditionnelle $E(X|Y)$ est caractérisée par :*
a) $E(X|Y)$ c'est une variable $\sigma(Y)$ mesurable.
b) $\int_A E(X|Y)\,dP=\int_A X dP \quad \forall A\in\sigma(Y)$.

Remarque 1.2.3 *La propriété b) est équivalente à $E(E(X|Y)\phi(Y))=E(X\phi(Y))$ pour toute fonction ϕ borélienne bornée, ou à $\int_{Y\in B}E(X|Y)\,dP=\int_{Y\in B}XdP$ pour tout $B\in\mathcal{B}$.*

Proposition 1.2.1 *On utilise souvent la notation $E(X|Y=y)$ pour désigner la valeur de ψ en y . On a alors :*
i) $E(X|Y=y)$ est une fonction borélienne.
ii) $\int_B E(X|Y=y)\,dP_Y(y)=\int_{\mathbb{R}\times B}x dP_{X,Y}(x,y), \quad \forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

1.2.3 Propriétés de l'espérance conditionnelle

L'espérance conditionnelle vérifiée les propriétés suivantes :

1. Linéarité : Soit a et b deux constantes, $E(aX+bY|\mathcal{G})=aE(X|\mathcal{G})+bE(Y|\mathcal{G})$.

2. Croissance : Soit X et Y deux v.a. telles que $X \leq Y$. Alors, $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$.

3. $E[E(X|\mathcal{G})] = E(X)$.

4. Si X est $\mathcal{G} - mesurable$, alors $E(X|\mathcal{G}) = X$.

5. Si Y est $\mathcal{G} - mesurable$, alors $E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$.

6. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.

7. Si $\mathcal{G}$ est la tribu grossière (composée de l'ensemble vide et de Ω), alors $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.

8. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors

$$E(X|\mathcal{H}) = E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}).$$

   On note souvent $E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{H}|\mathcal{G})$.

9. Si (X, Y) sont indépendantes, et ϕ une fonction borélienne bornée, alors

$$E(\phi(X,Y)|Y) = [E(\phi(X,y))]_{y=Y.}$$

   Cette dernière égalité signifie que, pour calculer $E(\phi(X,Y)|Y)$ lorsque les variables X et Y sont indépendantes, on explicite la fonction Ψ telle que $\Psi(y) = E(\phi(X,y))$, puis on remplace y par Y pour obtenir la v.a. $\Psi(Y)$.

Définition 1.2.2 (Variance conditionnelle :) *On définit $Var(X|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - E^2(X|\mathcal{G})$. C'est une v.a. positive en vertu de l'inégalité de Jensen : Soit ϕ une fonction convexe :*

$$E(\phi(X)|\mathcal{F}) \geq \phi E(X|\mathcal{F}).$$

1.2.4 Formule de Bayes

Soit P une probabilité et $\mathcal{Q}$ une probabilité équivalente à P définie par $d\mathcal{Q} = LdP$.

Théoréme 1.2.1 *On peut exprimer l'espérance conditionnelle d'une variable sous $\mathcal{Q}$ en fonction* *de l'espérance conditionnelle sous P :*

$$E_{\mathcal{Q}}\left(X|\mathcal{G}\right)=\frac{E_P\left(LX|\mathcal{G}\right)}{E_P\left(L|\mathcal{G}\right)}.$$

Preuve. Il s'agit de trouver Z v.a. $\mathcal{G}-mesurable$ telle que

$$E_{\mathcal{Q}}\left(ZY\right)=E_{\mathcal{Q}}\left(XY\right)$$

pour toute v.a. Y $\mathcal{G}-mesurable$. On écrit

$$E_{\mathcal{Q}}\left(ZY\right)=E_P\left(LZY\right)=E_P\left(ZYE_P\left(L|\mathcal{G}\right)\right)$$

et

$$E_{\mathcal{Q}}\left(XY\right)=E_P\left(LXY\right)=E_P\left(YE_P\left(LX|\mathcal{G}\right)\right)$$

en utilisant la $\mathcal{G}-mesurabilit\acute{e}$ de Z,Y . L'égalité devant être vérifiée pour tout Y, il vient $ZE_P\left(L|\mathcal{G}\right)=E_P\left(LX|\mathcal{G}\right)$, d'où l'expression de Z. ■

1.3 Loi conditionnelle

Définition 1.3.1 *Soit (X,Y) v.a.r. La loi conditionnelle de X sachant Y est la famille de lois sur $\mathbb{R}$ notée $\mu\left(y,dx\right)$ indexées par y (qui décrit l'ensemble des valeurs prises par Y) telle que :*

$$E\left[\Phi\left(X\right)|Y=y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(x\right)\mu\left(y,dx\right)$$

pour toute fonction Φ borélienne bornée.

La propriété s'étend aux fonctions Φ intégrables par rapport à μ. Lorsque l'on connait cette loi conditionnelle, les calculs d'espérance et de variance conditionnelle se réduisent à des calculs d'espérance et de variance. En effet, $E\left[X|Y=y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x\mu\left(y,dx\right)$, est pour tout y, l'espérance d'une v.a. de loi $\mu(y, dx)$. Si le couple (X, Y) à une densité $f(x, y)$, on peut montrer que :

$$\mu(y, dx) = \frac{f(x, y)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} f(u, y)\, du}.$$

Remarque 1.3.1 (Cas Gaussien) *Si le coupl de v.a.r.(X, Y) est gaussien (avec une densité ou non), la densité conditionnelle de X à Y est une loi gaussienne d'espérance linéaire en Y et de variance c indépendante de Y. Il est alors facile de retrouver la valeur de l'espérance : $E(X|Y) = aY + b$ implique $E(X) = aE(Y) + b$ et $E(XY) = E(YE(X|Y)) = E(aY^2) + bE(Y)$, d'où*

$$\begin{aligned} a &= \frac{Cov(X, Y)}{VarY}, b = E(X) - aE(Y), \\ c &= E\left(X^2|Y\right) - E^2(X|Y) \\ &= E\left(X^2\right) - E\left[(aY + b)^2\right] \end{aligned}$$

Ceci se généralise à un vecteur multidimensionnel : si (X, Y) est un vecteur gaussien, la densité conditionnelle de X à Y est une loi gaussienne d'espérance linéaire en Y et de variance c indépendante de Y.

1.4 Martingales

1.4.1 Cas discret

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_n$ croissante (telle que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$). La tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 1.4.1 *Une suit de v.a.r. $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une $\mathcal{F}_n - martingale$ si*

1)X_n est intégrable, $\forall n \in \mathbb{N}$

2)X_n est $\mathcal{F}_n - mesurable$, $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Propriété 1.4.1 *$E(X_{n+p}|\mathcal{F}_n) = X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.*

Exemple 1.4.1 *Si $X_n = Y_1+Y_2+...+Y_n$ où les Y_i sont indépendantes, équidistribuées et centrées, X_n est une martingale.*

1.4.2 Cas continu

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_t$ croissante (telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$,$\forall s \leq t$).

Définition 1.4.2 *Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

i) X_t est $\mathcal{F}_t -$ mesurable et intégrable pour tout t.

ii) $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_S, \forall s \leq t$.

Propriété 1.4.2 *Si X est une martingale, alors $E(X_t) = E(X_0)$, $\forall t$.*

Propriété 1.4.3 *Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeurs terminale : $X_t = E(X_T|\mathcal{F}_t)$. Cette dernière propriété est d'un usage très fréquent en finance.*

Définition 1.4.3 *Une famille de varaibles aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une surmartingale (resp. sous-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

i) X_t est $\mathcal{F}_t -$ mesurable et intégrable pour tout t.

ii) $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_S$, $\forall s \leq t$ (resp. $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_S$).

Exemple 1.4.2 *Si X est une martingale, alors X^2 est une sous martingale. Si de plus, X est une martingale et A un processus croissant, alors $X + A$ est une sous martingale.*

On dira que X est une martingale, si la filtration de référence est la filtration naturelle de X. On fera attention, car la propriété de martingale dépend de la filtration et une $\mathbf{F}-$*martingale* n'est en général pas une $\mathbf{G}$ martingale si $\mathbf{G}$ est plus grosse que $\mathbf{F}$.

Remarque 1.4.1 *Une martingale continue à variation bornée est égale à une constante.*

En effet si M est une telle martingale et V sa variation,

$$E\left(M_t^2\right) = E\left[\left(\sum\left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right)\right)^2\right] \leq E\left[V_t \sup\left|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right|\right] \leq K\ E\left[\sup\left|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right|\right]$$

et le membre de droite converge p.s. vers 0 *quand on raffine la partition.*

Proposition 1.4.1 (Inégalité de Doob) *Si X est une martingale continue, alors*

$$E\left(\sup_{s\leq T} X_s^2\right) \leq 4E\left(X_T^2\right).$$

1.5 Le mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.5.1 *Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Browinien (standard) si :*

a) $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).

b) $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.

c) $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}\right)$ sont indépendantes.

Remarque 1.5.1 *La popriété b) est la stationnarité des accroissements du mouvement Brownien, la propriété c) traduit que le mouvement Brownien est à accroissements indépendantes. On peut aussi écrire c) sous la forme équivalente suivante :*

c´) Soit $s \leq t$ .La variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu du passé avant s , soit $\sigma\left(B_u, u \leq s\right)$.

Nous ne démontrons pas l'existence du mouvement Brownien (MB dans la suite). On pourra consulter l'ouvrage de Karatzas et Shreve (1988) .On le construit sur " l'espace canonique " $\Omega = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fonction continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par $B_t(\omega) = \omega(t)$ et on munit cet espace d'une mesure (mesure de Wiener) telle que B soit un MB. La filtration naturelle est $\mathcal{F}_t = \sigma\left\{B_s, s \leq t\right\}$ .On lui ajoute de façon implicite les négligeables. On peut montrer qu'elle vérifie alors les conditions habituelles. On s'autorisera à noter $B(t_i)$ au lieu de B_t, la valeur de la trajectoire en t_i pour des raisons de lisibilité.

1.5.1 Généralisation

Le processus $X_t = a + B_t$ est un mouvement Brownien issu de a. On dit que X est un Brownien généralisé ou un MB de drift μ si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où B est un mouvement Brownien. La variable X_t est une variable gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$. Les v.a.$\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n\right)$ sont indépendantes.

Propriété 1.5.1 *Dans ce qui suit , $B = (B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma\left\{B_s, s \leq t\right\}$ est sa filtration naturelle.*

1.5.2 Intégrale de Wiener

Définition 1.5.2 *On note $L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ l'ensemble des (classes d'équivalence) des fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est-à-dire telles que $\int_0^{+\infty} \left|f\left(s\right)\right|^2 ds < \infty$. C'est un espace de Hilbert pour la norme $\left\|f\right\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} f^2\left(s\right) ds\right)^{\frac{1}{2}}$.*

a) Fonctions en escalier : Pour $f = 1_{]u,v]}$, on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = B(v) - B(u).$$

Soit f une fonction en escalier, de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i]}$, on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}(B(t_i) - B\left(t_{i-1}\right)).$$

La variable aléatoire $I(f) \overset{déf}{=} \int_0^{+\infty} f(s)dB_s$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$. En effet, $I(f)$ est gaussienne car le processus B est gaussien, centrée, car B est centré. De plus,

$$Var(I(f)) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 Var(B(t_i) - B\left(t_{i-1}\right)) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds = \left\|f\right\|_2.$$

L'intégrale est linéaire :$I(f+g) = I(f) + I(g)$.Si f et g sont des fonction e escalier $E(I(f)I(g)) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)ds$. En effet

$$Var(I(f+g)) = Var\left[I(f) + I(g)\right] = Var(I(f)) + Var(I(g)) + 2E(I(f)I(g)) = \int_0^{\infty} (f+g)^2(s)ds$$
$$= \int_0^{\infty} f^2(s)ds + \int_0^{\infty} g^2(s)ds + 2\int_0^{\infty} f\left(s\right) g\left(s\right) ds$$

b) Cas général : On montre en analyse que, si $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$,il existe une suite f_n de fonctions en escalier qui converge(dans $L^2(\mathbb{R}^+)$) vers f, c'est-à-dire qui vérifie

$$\int_0^\infty |f_n - f|^2 (x)dx \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. La suite de v.a.$F_n = \int_0^\infty f_n(s)dB_s$ est une suite de cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ (en effet $\|F_n - F_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \underset{n,m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$), donc elle est convergente. Il reste à vérifier que la limite ne dépend que de f et non de la suite f_n choisie. On pose

$$I(f) \overset{déf}{=} \int_0^\infty f(s)dB_s = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^\infty f_n(s)dB_s$$

la limite étant prise dans $L^2(\Omega)$. On dit que $I(f)$ est l'intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener) de f par rapport à B. Le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé par les v.a.$\int_0^\infty f(s)dB_S$ coïncide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien.

Propriété 1.5.2 *L'application $f \to I(f)$ est linéaire et isométrique de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Omega)$: la linéarité signifie que $I(f+g) = I(f)+I(g)$ et l'isométrie que la norme de $I(f)$ est égale à la norme de f . La norme de $I(f)$ est la norme $L^2(\Omega)$ définie par $\|I(f)\|^2 = E((I(f))^2)$, la norme de f est la norme $L^2(\mathbb{R}^+)$,soit $\|f\|^2 = \int_0^\infty f^2(s)ds$.*

Remarque 1.5.2 *La propriété d'isométrie implique $E(I(f)I(g)) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)ds$.*

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$.La variable $I(f)$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\int_{\mathbb{R}^+} f^2(s)ds$ appartenant à l'espace gaussien engendré par $(B_t, t \geq 0)$ et elle vérifie pour tout t

$$E\left(B_t \int_{\mathbb{R}^+} f(s)dB_s\right) = \int_0^t f(s)ds.$$

1.5.3 Processus lié à l'intégrale stochastique

On définit pour $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ la v.a. $\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^\infty 1_{[0,t[}(s)f(s)dB_s$.
On peut de la même façon définir $\int_0^t f(s)dB_s$ pour f telle que $\int_0^T |f(s)|^2 ds < \infty, \forall T$, ce qui permet de définir l'intégrale stochastique pour une classe plus grande de fonctions. On notera L^2_{loc} cette

classe de fonctions.

Théoréme 1.5.1 *Soit* $f \in L^2_{loc}$ *et* $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$.

a) Le processus M *est une martingale continue, la v.a.* M_t *est d'espérance* 0 *et de variance* $\int_0^t f^2(s)ds$.

b) Le processus M *est un processus gaussien centré de covariance* $\int_0^{t\wedge s} f^2(u)du$ *à accroissements indépendants.*

c) Le processus $\left(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds, t \geq\right)$ *est une martingale.*

d) Si f *et* g *sont dans* L^2_{loc} *,on a* $E\left(\int_0^t f(u)dB_u \int_0^s g(u)dB_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du$.

Preuve. On commence par le cas où la fonction f est étagée et on passe à la limite. Pour vérifier que M est une martingale, pour $f = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i]}$ on montre que

$$0 = E\left(M_t - M_s|\mathcal{F}_s\right) = E\left(\int_s^t f(u)dB_u|\mathcal{F}_s\right)$$

Supposons que $t_i < s < t \leq t_{i+1}$ .Dans ce cas $E\left(\int_s^t f(u)dB_u|\mathcal{F}_s\right) = f_i E((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s)$ et l'igalité est vérifiée.

Supposons que $t_i < s \leq t_{i+1} \leq t_j < t \leq t_{j+1}$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} E\left(\int_s^t f(u)dB_u|\mathcal{F}_s\right) &= E\left(f\left(B_t - B_{t_j}\right) + \sum_{k=i+1}^{j-1} f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + f_i(B_{t_{i+1}} - B_s)|\mathcal{F}_s\right) \\ &= f_j E(B_t - B_{t_j}|\mathcal{F}_s) + \sum_{k=i+1}^{j-1} f_k E(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|\mathcal{F}_s) + f_i(B_{t_{i+1}} - B_s|\mathcal{F}_s) = 0. \end{aligned}$$

Les autres cas sont analogues. En particulier

$$\begin{aligned} E(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s) = E((M_t - M_S)^2|\mathcal{F}_s) &= E\left(\left(\int_s^t f(u)dB_u\right)^2|\mathcal{F}_s\right) \\ &= E(\sum f(t_k)(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k\wedge t})^2|\mathcal{F}_s. \\ &= \sum f^2(t_k)((t_{k+1}\wedge t) - (t_k \wedge t)). \end{aligned}$$

■

1.5.4 Intégration par parties

Théoréme 1.5.2 *Si f est une fonction de classe C^1, alors*

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B_s ds.$$

Preuve. Il suffit, d'après théorème précédent de vérifier que pour tout u, $E\left[B_u \int_0^t f(s)dB_s\right] = E(B_u\left[f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds\right]$. Le premier membre vaut $\int_0^{t\wedge u} f(s)ds$, on calcule le second au moyen des deux égalités $E(B_u f(t)B_t) = f(t)(t\wedge u)$, $E(B_u \int_0^t f'(s)B_s ds) = \int_0^t f'(s)(s\wedge u)ds$. L'égalité résulte alors de l'application de la formule d'intégration par parties classique pour calculer des expressions du type $\int_0^b sf'(s)ds$:

$$d(B_t f(t)) = f(t)dB_t + B_t f'(t)dt.$$

■

Exemple 1.5.1 *Le Brownien géométrique : Soit B un MB , b et σ deux constantes. Le processus*

$$X_t = X_0 \exp\left\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\right\}$$

est appelé Brownien géométrique. Ce processus est aussi appelé processus "log-normal". En effet, dans ce cas

$$\ln X_t = \left\{b - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} t + \sigma B_t + \ln x$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale.

1.6 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien B sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

1) Cas de processus étagés : On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémetaire) s'il existe une suite de réels $t_j, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suit de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_t - mesurable$, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in \left]t_j, t_{j+1}\right]$, soit $\theta_s(\omega) =$

$\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j(\omega)\,1_{]t_j,t_{j+1}]}(s)$. On définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1}\theta_j\,(B(t_{j+1}) - B(t_j)).$$

On a $E(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = 0$ et $Var(\int_0^\infty \theta_s dB_s) = E\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right]$. On obtient

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1}\theta_j(B(t_{j+1}\wedge t) - B(t_j\wedge t)).$$

ce qui établit la continuité de l'application $t \to \int_0^\infty \theta_s dB_s$. Si $T_j, 0 \leq T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, et si $\theta_s = \sum_{j=0}^{n-1}\theta_j 1_{]T_j,T_{j+1}]}(s)$ où θ_j est une suite de variables aléatoires telles que θ_j soit $\mathcal{F}_T - mesurable$, appartienne à $L^2(\Omega)$, on définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1}\theta_j(B(T_{j+1}\wedge t) - B(T_j\wedge t)).$$

2) Cas Général : On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déjà le cas de processus étagé. On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, $(\mathcal{F}_t) - adapt\acute{e}s$ tels que

$$\|\theta\|^2 \overset{d\acute{e}f}{=} E\left[\int_0^\infty \theta_t^2 dt\right] < \infty$$

Les processus étagés appartiennent à Γ. On dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)$ si $\|\theta-\theta_n\|^2 \to 0$ quand $n\to\infty$.

L'application $\theta \to \|\theta\|$ définit une norme qui fait de Γ un espace complet.

On peut définir $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ pour tous les processus θ de Γ : on approche θ par des processus étagés, soit $\theta = \lim_{n\to\to\infty}\theta_n$ où $\theta_n = \sum_{j=1}^{k(n)}\overset{\sim n}{\theta}_j 1_{]t_j,t_{j+1}]}$, avec $\overset{\sim n}{\theta}_j \in \mathcal{F}_{t_j}$ la limite étant au sens de $L^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)$.

L'intégrale $\int_0^\infty \theta_s dB_s$ est alors la limite dans $L^2(\Omega)$ des sommes $\sum_{j=1}^{k(n)}\overset{\sim n}{\theta}_j(B(t_{j+1}) - B(t_j))$ dont l'espérance est 0 et la variance vaut $E\left[\sum_j \overset{\sim 2}{\theta}_j(t_{j+1}-t_j)\right]$.

On a alors $E\left(\int_0^\infty \theta_s dB_s\right) = 0$ et $E\left(\int_0^\infty \theta_s dB_s\right)^2 = E(\int_0^\infty \theta_s^2 d_s)$.

On note $\int_0^\infty \theta_s dB_s = \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]}(s) dB_s$. Si θ et étagé : $\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_i \theta_i (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1_{]0,\tau]}$ est adapté et on définit

$$\int_0^{\tau\wedge t} \theta_s dB_s = \int_0^t \theta_s 1_{[0,\tau]}(s) dB_s.$$

1.6.1 Propriétés

On note Λ l'ensemble $L^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant $E(\int_0^t \theta_s^2(\omega)\, ds) < \infty, \forall t$.

1) linéarité : Soit a et b des constantes et $(\theta^i; i = 1, 2)$ deux processus de Λ .On a

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2) dB_s = a \int_0^t \theta_s^1 dB_s + b \int_0^t \theta_s^2 dB_s$$

2) propriétés de martingale :

Proposition 1.6.1 *Soit*

$$M_t = \int_0^t \theta_s dB_s, \quad \text{où} \quad \theta \in \Lambda$$

a) Le processus M est martingale (à trajectoires continues).

b) Soit $N_t = \left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$. Le processus $(N_t, t \geq 0)$ est une martingale.

Preuve. Toutes ces propriétés se démontrent pour des processus étagés, puis pour les processus de Λ par passage à la limite. La propriété de martingale s'écrit

$$E\left(\int_0^t \theta_u dB_u | \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s \theta_u dB_u, \quad \forall t \geq s$$

où

$$E\left(\int_s^t \theta_u dB_u | \mathcal{F}_s\right) = 0$$

et implique en particulier que $E\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right) = 0$.

La propriété b) équivaut à $E\left[\left(\int_s^t \theta_u dB_u\right)^2 | \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t \theta_u^2 du | \mathcal{F}_s\right]$. Si l'on veut définir M_t pour

$t \leq T$, il suffit de demander que $\theta \in L^2(\Omega \times [0,T])$, c'est à dire $E\left(\int_s^T \theta_t^2 dt\right) < \infty$ et que θ soit adapté. Sous cette condition $(M_t, t \leq T)$ est encore une martingale. ■

Corollaire 1.6.1 *L'espérance de M_t est nulle et sa variance est égale à $\int_0^t E\{\theta_s\}^2 ds$. Soit*

$$\phi \in \Lambda . E\left(\int_0^t \theta_s dB_s \int_0^t \phi_s dB_s\right) = E\left(\int_0^t \theta_s \phi_s ds\right).$$

Si $M_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$ et $M_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$, le processus

$$M_t(\theta) M_t(\varphi) - \int_0^t \theta_s \varphi_s ds$$

est une martingale.

Preuve. Il suffit de remarquer que$\int_0^t (\theta_s + \phi_s) dB_s$ et $\left(\int_0^t (\theta_s + \phi_s) dB_s\right)^2 - \int_0^t (\theta_s + \phi_s)^2 ds$ sont des martingales. ■

1.6.2 Martingale locale

On peut définir $\int_0^t \theta_s dB_s$ pour des processus adaptés càglàd qui n'appartiennent pas nécessairement à $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$, mais qui vérifient pour tout t, $\int_0^t \theta^2(s,\omega) ds < \infty$ $p.s.$ Dans ce cas M n'est pas une martingale mais une martingale locale et $E(M_t)$ peut être non nul. On utilise souvent qu'une martingale locale positive est une sur martingale.

1.6.3 Inégalité maximale

On a souvent besoin de majorations d'intégrales stochastiques. Soit $\theta \in \Lambda$, l'inégalité de Doob conduit à

$$E\left(\left[\sup_{s \leq T} \int_0^s \theta_u dB_u\right]^2\right) \leq 4E\left(\left[\int_0^T \theta_u dB_u\right]^2\right) = 4\int_0^T E[\theta_u]^2 du.$$

1.6.4 Processus d'Itô

Définition 1.6.1 *Un processus X est un processus d'Itô si*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s| \, ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s. pour tout t ,et σ un processus appartenant à Λ. On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion. L'écriture $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ est unique (sous réserve que les processus b et σ vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signifie que si

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = \tilde{b}_t dt + \tilde{\sigma}_t dB_t$$

alors, $b = \tilde{b}$ et $\sigma = \tilde{\sigma}$. En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement.

On peut définir un processus d'Ito pour des coefficients de diffusion tels que$\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$ $P.p.s.$ La partie $x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie. Si un processus A à variation finie est une martingale, il est constant. En effet, si $A_0 = 0$, $A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ et par suite $E\left(A_t^2\right) = 0$.

Propriété 1.6.1 *Si σ appartient à Λ, on a $E\left(X_t\right) = E\left(X_0\right) + \int_0^t E\left(b_s\right) ds$, et*

$$\forall t \geq s, \quad E\left(X_t | \mathcal{F}_s\right) = X_0 + \int_0^s b_u du + E(\int_0^s b_u du | \mathcal{F}_s) + \int_0^t \sigma_u dB_u = X_s + E(\int_0^s b_u du | \mathcal{F}_s).$$

Si $b \equiv 0$ et $\sigma \in \Lambda$, le processus X est une martingale continue. On verra que la réciproque est vraie : sous certaines conditions d'intégrabilité et de mesurabilité, toute martingale continue s'écrit $x + \int_0^t \phi_s dB_s$.

1.6.5 Intégrale par rapport à un processus d'Itô

Soit X un processus d'Itô de décomposition $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$. On note (sous réserve de conditions d'intégrabilité)

$$\int_0^t \theta_s dX_s \overset{déf}{=} \int_0^t \theta_s b_s ds + \int_0^t \theta_s \sigma_s dB_s$$

1.6.6 Crochet d'un processus d'Itô

Soit Z une martingale continue de carré intégrable (telle que $E(\sup_t Z_t^2) < \infty$).On peut montrer qu'il existe un processus croissant continu A tel que $(Z_t^2 - A_t, t \geq 0)$ est une martingale. Le processus A est appelé le "crochet oblique", ou le crochet de Z. On le note très souvent $A_t = \langle Z, Z \rangle_t$ ou encore $\langle Z \rangle_t$. En utilisant ce vocabulaire probabiliste, nous avons établi que le crochet du Brownien est t et que le crochet de l'intégrale stochastique $\left(M_t = \int_0^t \theta_s dB_s \right)$ est$\int_0^t \theta_s^2 ds$.
Si M et N sont deux martingales locales continues, on définit leur crochet par

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2} \left(\langle M+N, M+N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t \right).$$

C'est l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale locale. Le crochet de deux intégrales stochastiques $X_t = x + \int_0^t H_s dB_s$, $Y_t = y + \int_0^t K_s dB_s$ est

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s K_s ds$$

Proposition 1.6.2 *Le crochet de deux martingale continues M et N est égal à la variation quadratique de ces processus*

$$\langle M, N \rangle_t = \lim \sum_{i=1}^{n} \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \right) \left(N_{t_{i+1}} - N_{t_i} \right)$$

Il en résulte que si P et Q sont équivalentes, le crochet de M sous P et sous Q sont égaux. On dit que deux martingales continues sont orthogonales si leur crochet est nul ou si leur produit est une martingale.

Si M est une martingale locale continue, on a équivalence entre $E \langle M \rangle_t < \infty$ et $(M_s, s \leq t)$ est une martingale L^2 bornée. On étend la définition du crochet aux processus d'Itô : si

$$dX_i(t) = b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB_t \ , \ \ i = 1, 2$$

sont deux processus d'Itô, leur crochet est par définition le crochet de leur partie martingale. Nous en déduisons une nouvelle forme de la définition de Browniens corrélés : deux Browniens sont corrélés si leur crochet est pt. On définit le crochet du processus d'Itô X comme étant le crochet de sa partie martingale. Le crochet de X est $A_t = \langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$ .On caractérise le mouvement Brownien en disant que c'est une martingale continue d'espérance nulle et de crochet t.

1.6.7 Lemme d'Itô

Dans ce qui suit, X est un processus d'Itô de décomposition $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$. Nous renvoyons à Revuz-Yor pour la démonstration basée sur la formule de Taylor et propriété du crochet.

Théoréme 1.6.1 *(première forme) Soit f un fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivé bornées. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds.$$

Sous forme condensée

$$df\,(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, \sigma_t^2 dt.$$

ou encore

$$df\,(X_t) = f'(X_t)\, b_t dt + \frac{1}{2} f''\,(X_t)\, \sigma_t^2 dt + f'(X_t)\, \sigma_t dB_t$$

et en utilisant le crochet

$$df\,(X_t) = f'(X_t)\, b_t dt + \frac{1}{2} f''\,(X_t)\, d\,\langle X \rangle_t + f'(X_t)\, \sigma_t dB_t$$

La condition de bornitude des dérivées n'est exigée que pour l'existence des intégrales et pour la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La formule est facile à mémoriser en notant sa ressemblance avec la formule de Taylor, sous la forme

$$df\,(X_t) = f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}f''\,(X_t)\,dX_t.dX_t$$

et la règle de multiplication

$$dt.dt = 0, \quad dt.dB_t = 0, \quad dB_t.dB_t = dt$$

Proposition 1.6.3 *Supposons que*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b\,(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma\,(X_s)\,dB_s$$

où b et σ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées et vérifiant

$$\forall x, \quad b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) = 0$$

le processus $f(x)$ est une martingale.

1.6.8 Equations différentielles stochastiques

Définition 1.6.2 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$\begin{cases} dX_t = b\,(t, X_t)\,dt + \sigma\,(t, X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, démontrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.

Définition 1.6.3 *Soit b et σ sont des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement Brownien*

B sur cet espace. Une solution de l'équation différentielle stochastique est un processus X continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ et $\int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s$ sont un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

est satisfaite pour tout t, $P.p.s.$

1.6.9 Exemples de processus d'Itô

Le Brownien géométrique : On considère l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = X_t b_t dt + X_t \sigma_t dB_t \quad , \quad X_0 = x$$

où b et σ sont des processus adaptés bornés. Plaçons nous dans le cas de coefficients déterministes. Cette équation admet une solution unique

$$x \exp\left\{\int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)\, ds\right\}$$

(il suffit d'appliquer la formule d'Itô). On écrit souvent $dX_t = X_t b_t dt + X_t \sigma_t dB_t \quad , \quad X_0 = x$ sous la forme

$$\frac{dX_t}{X_t} = b(t)dt + \sigma(t)dB_t.$$

La martingale $M_t = X_t e^{-bt}$ est solution de

$$dM_t = M_t \sigma dB_t.$$

Théoréme 1.6.2 *La solution de $dX_t = X_t\left[bdt + \sigma dB_t\right]$ s'écrit*

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\}$$

ou encore

$$X_t = X_s \exp\left\{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma\left(B_t - B_s\right)\right\}$$

Preuve. Il est facile de vérifier que l'équation $dX_t = X_t\left[bdt + \sigma dB_t\right],\ X_0 = x$ a une unique solution. Soit Y une secod solution. Nous savons que X ne s'annule pas et

$$d(\frac{1}{X_t}) = \frac{1}{X_t}\left[\mu dt + \sigma dB_t\right].$$

avec $\mu = -b + \sigma^2$. Nous pouvons définir $Z_t = \frac{Y_t}{X_t}$. Ce processus vérifie

$$dZ_t = Z_t\left[\left(\mu + b - \sigma^2\right)dt + (\sigma - \sigma)\, dB_t\right] = 0$$

soit $dZ_t = 0$, ce que est une équation différentielle ordinaire, de solution $Z_t = Z_0$. ■

Chapitre 2

Contrôle optimal stochastique

La théorie du contrôle a été initialement développée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthèse des systèmes de contrôle et de système dynamique (c'est à dire l'évolution du système au cours du temps).Cette grande théorie à de nombreuses applications en gestion et en finance. [3, 4, 5, 6, 7, 12, Remark 2.2]

D'une manière générale, un problème de contrôle se construite par les caractéristiques suivantes :

1) **État du système :** Soit un système dynamique caractérisé par son état à tout instant, le temps peut être continu ou bien discret. L'horizon (l'intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini. On notera $X_t(\omega)$ l'état du système à l'instant t. Une fois l'état soit défini, il s'agit de décrire les lois d'évolution de cet état en fonction du temps. L'application $t \to X_t$ décrit l'évolution du système. Cette évolution est fournie par un modèle probabiliste.

2) **Contrôle :** La dynamique X_t de l'état du système est exigé par un contrôle que nous modélisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire que u_t est adapté par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.

3) **Critère de coût :** Le but principal du contrôle optimal est de minimiser (ou de maximiser selon le cas un gain ou bien une perte) une fonctionnelle

$$J(u(.)) = E\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt + g(X(T))\right]$$

sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles. La fonction valeur associée à ce problème de contrôle stochastique est donnée par :

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{U} : v(t,x) = \inf_{u \in U} J(t,x,u).$$

Un contrôle admissible $\hat{u} \in \mathcal{U}$ est dit optimal si :$v(t,x) = J(t,x,\hat{u})$.

2.1 Classes des contrôles

2.1.1 Contrôle admissible

Définition 2.1.1 *On appelle un contrôle admissible tout processus* $(u_t)_{t\in[0,T]}$ *mesurable, intégrable et adapté à une valeur dans un borélien* $A \subset \mathbb{R}$, *notons par* $\mathcal{U}$ *l'ensemble de tous les contrôles admissibles :*

$$\mathcal{U} = \{u : [0,T] \times \Omega \to A, \quad u \text{ -mesurable, intégrable et } \mathcal{F}_t - \text{adapté}\}$$

2.1.2 Contrôle optimal

Le problème du contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $J(u(.))$ sur un ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$.

Définition 2.1.2 *On dit que le contrôle* $\hat{u}$ *est optimal si :*

$$J(\hat{u}) \leq J(u), \ \forall u \in \mathcal{U}$$

Remarque 2.1.1 (Contrôle presque optimal) *Soit* $\varepsilon > 0$ *,le contrôle* u^ε *est dit presque optimal où bien* $\varepsilon - optimal$ *si :*

$$J(u^\varepsilon) \leq J(u) + \varepsilon, \forall u \in \mathcal{U}$$

2.1.3 Contrôle Feed-Back

Soit u un contrôle $\mathcal{F}_t - adapt\acute{e}$ et soit $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$ la filtration naturelle engendrée par le processus X , on dit que u_t est Feed-Back contrôle si u_t est aussi adapté par rapport à la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^X\right\}$. On dit aussi qu'un contrôle u est Feed-Back si est seulement si u dépend de X.

2.1.4 Contrôle relaxé

On considère un ensemble des mesures de Radon V sur $[0,T] \times A$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue muni de la topologie de convergence stable des mesures. L'espace V est muni de sa tribu borélienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q \to \int f(s,a)\, q(ds,da)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurable, bornée et continue en a.

Définition 2.1.3 *Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire $q(\omega, dt, da)$ à valeurs dans l'espace V telle que pour chaque t :$1_{[0,T]}$ qu'est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

2.1.5 Contrôle ergodique et contrôle Risk-sensible

Certains systèmes stochastiques peuvent exhiber sur le long terme un comportement stationnaire caractérisé par une mesure invariante. Cette mesure, si elle existe, est obtenue en calculant la moyenne d'état du système sur le long terme. Un problème de contrôle ergodique consiste alors à optimiser sur le long terme un certain critère prenant en compte cette mesure invariante. Cette formulation standard consiste à optimiser sur les contrôles u_t une fonctionnelle comme suit :

$$\lim_{T\to+\infty} \sup \frac{1}{T} E\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt\right],$$

où bien

$$\lim_{T\to+\infty} \sup \frac{1}{T} \ln E\left[\exp\left(\int_0^T f(t, X(t), u(t))\, dt\right)\right].$$

Cette dernière formulation est appelée contrôle Riske-sensible est a été utilisée dans plusieurs travaux en mathématiques financiers comme un critère de gestion de portefeuille à long terme.

Un autre critère basé sur le comportement de type grandes déviations du système :

$$P\left[X_T/T \geq c\right] \simeq \exp\left(-I\left(c\right)T\right) \quad \text{, quand } T \to +\infty$$

Consiste à maximiser sur les contrôles u une fonctionnelle de la forme :

$$\lim_{T\to+\infty} \sup \frac{1}{T} P\left[\frac{1}{T} \geq c\right].$$

Ce problème de contrôle de grandes déviations s'interprète en finance comme la version asymptotique (ergodique) du critère quantile consistant à maximiser la probabilité que la valeur terminale X_T du portefeuille soit au-dessus d'un certain index.

Remarque 2.1.2 *Il existe de nombreux autres classes et autre problèmes de contrôle.*

2.2 Méthodes de résolution en contrôle stochastique

Il existe deux méthodes majeures pour la résolution des problèmes des contrôles stochastiques ; le principe de la programmation dynamique et le principe du maximum de Pontryagin.

2.2.1 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique (PPD) est un principe fondamental pour la théorie du contrôle stochastique.

1) Horizon fini : Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Alors, on a

$$v\left(t, x\right) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} E\left[\int_t^\theta f\left(s, X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + v\left(\theta, X_\theta^{t,x}\right)\right].$$

2.2.2 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) est la version infinitésimale du principe de la programmation dynamique : elle décrit le comportement locale de la fonction valeurs $v\left(t, x\right)$ lorsqu'on fait tendre le temps d'arrêt θ. Dans cette section, nous dérivons formellement l'équation d'HJB en supposant que la fonction valeur v est de classe C^2. L'équation classique d'HJB associée au problème de contrôle stochastique est

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\inf_{\alpha\in\mathcal{A}(x)}\left[\mathcal{L}^{\alpha}v(t,x)+f(t,x,\alpha)\right]=0,\quad \text{sur }\ [0,T]\times\mathbb{R}^n,$$

où $\mathcal{L}^{\alpha}$ est le générateur infinitésimal de second-ordre à la diffusion X_t solution de l'équation contrôlée par u donné par la formule suivante :

$$\mathcal{L}^{\alpha}v=b(x,\alpha).D_xv+\frac{1}{2}tr(\sigma(x,\alpha)\acute{\sigma}(x,\alpha)D_x^2v),$$

pour tout $\alpha\in A$,on a l'inégalité :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\left[-\mathcal{L}^{\alpha}v(t,x)-f(t,x,\alpha)\right]\leq 0.$$

D'outre part, supposons que α^*contrôle optimale .alors on a :

$$v(t,x)=E\left[\int_t^{t+h}f(s,X_s^*,\alpha_s^*)\,ds+v\left(t+h,X_{t+h}^*\right)\right],$$

où X^* est l'état du système solution précédant partant de x en t avec le contrôle α^*. Par un argument similaire et avec des conditions de régularités sur v, on obtient :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)-\mathcal{L}^{\alpha_t^*}v(t,x)-f(t,x,\alpha_t^*)=0.$$

Lorsqu'on cherche à maximiser un gain, l'équation aux dérivées partielles devient

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\left[-\mathcal{L}^{\alpha}v(t,x)-f(t,x,\alpha)\right]=0,\quad\forall(t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n$$

On réécrit souvent cette équation aux dérivées partielles de la façon suivante :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+H(t,x,D_xv(t,x),D_x^2v(t,x))=0\quad\forall(t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n$$

telle que $\forall(t,x,p,M) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times S_n$ (ou S_n est l'ensemble des matrices $n\times n$ symétriques :

$$H(t,x,p,M) = \sup_{\alpha\in A}\left[-b(x,\alpha).p - \frac{1}{2}tr(\sigma\sigma'(x,\alpha)M - f(t,x,\alpha)\right].$$

Cette fonction H est appelée Hamiltonien du problème de contrôle associé.

2.2.3 Principe du maximum de Pontryagin

Le Principe du maximum de Pontryagin a été introduite par Pontryagin en 1956. Elle s'appuie sur l'idée suivante :

Si un contrôle optimal existe en utilisant l'approche de Lagrange en calculant des variations sur la fonctionnelle $J(u)$ par rapport à un paramètre de perturbation positive θ :

$$\frac{d}{d\theta}J(u_\theta)|_{\theta=0} \geq 0.$$

Ce principe consiste à introduire un processus adjoint $p(t)$ solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde et d'une inégalité variationnelle.

Commençons par la formulation du problème de contrôle optimal : Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ sur lequel est défini un mouvement Brownien standard multidimensionnel $W(t)$.

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t,X(t),u(t))\,dt + \sigma(t,X(t),u(t))dW(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

L'idée principale de la résolution est d'introduire un processus adjoint $p(t)$ solution de l'EDSR :

$$\begin{cases} dp(t) = -H_x(t,X(t),u(t),p(t),q(t))\,dt + q(t)dW(t). \\ p(T) = g_x(X(T)). \end{cases}$$

$$H(t,X(t),u(t),p(t),q(t)) = f(t,X(t),u(t)) + b(t,X(t),u(t)).p(t) + tr\left(\sigma^T(t,X(t),u(t))\,q(t)\right).$$

est le Hamiltonien du système.

Chapitre 3

Principe du maximum avec des informations incomplètes

Ce chapitre est consacré à la démonstration des conditions nécessaires du Principe du maximum sous l'information partielle de la façon plus intuitive possible. Cette méthode de résolution est utilisée dans le cas qu'il ne dispose pas d'une mesure complète et parfaite de l'état complet du système à chaque fois. Par exemple, une information retardée par a : $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{(t-a)} \quad a > 0$.

3.1 Enoncé général

Soit $W(t)$ un MB et $U \subset \mathbb{R}^k$ convexe et l'espace filtrée $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. Supposons que $X(t) = X^{(u)}(t) \in \mathbb{R}^n$ est donné par l'équation différentielle stochastique controlé suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), u(t))\, dt + \sigma(t, X(t), u(t)) dW(t) \\ X(0) = x_0 \quad où\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

tel que :

1. $u(.)$ est le contrôle admissible (Définition 2.1.1) ; ie :

$$u \in \mathcal{U} := \left\{ u : [0, T] \times \Omega \longrightarrow U / u \text{ est } (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0} - adapé \right\}.$$

2. Le “coût de fonctionnement” :

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

et le “coût terminal” :

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$$

sont deux fonctions de classe C^1 par rapport à x et u.

3. $T > 0$ est constant.

4. Pour $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$,$\forall t \geq 0$, on a le coût fonctionnel comme suit :

$$J\left(u\left(.\right)\right) = E\left[\int_0^T f\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt + g\left(X\left(T\right)\right)\right]$$

où :

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ de classe } C^1.$$

$$E\left[\int_0^T \left|f\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right)\right)\right| dt + \left|g\left(X\left(T\right)\right)\right|\right] < \infty, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Le problème de contrôle sous l'information partiel est de trouver un controle u^* qui minimise (maximise) le coût $J(u(.))$ G_t-mesurable.($G_t - adapte$)

3.2 Conditions Nécessaires

Maintenant la question posée si $\widehat{u}$ est un contrôle optimal, satisfait-t-il les conditions d'optimalités sous l'information partiel sous les mêmes conditions ou bien elles diffère ? supposos qu'on a les hypothèses suivantes :

(H_1) pour tout t et h telle que $0 \leq t \leq t+h \leq T$, $\forall i = \overline{1,k}$,$\forall \alpha = \alpha\left(\omega\right)$ $\mathcal{G}_t-$mesurable borné, on définit le contrôle comme suit :

$$v(s) := \left(0, 0, ..., 0, v^i\left(s\right), 0, ..., 0\right) \in U \subset \mathbb{R}^k$$

avec $v^i(s) := \alpha^i_{\chi[t,t+h]}(s) \quad s \in [0,T]$ est un contrôle admissible (ie : $v^i \in \mathcal{U}$).

(H_2) pour tout u ,$u \in \mathcal{U}$ avec v est bornée $\exists \varepsilon > 0 : u + \theta v \in \mathcal{U}$ pour tout $\theta \in E_\varepsilon := (-\varepsilon, +\varepsilon)$, on définit le processus

$$Z(t) := Z^{(u,v)}(t) = \frac{d}{d\theta} X^{(u+\theta v)}(t)|_{\theta=0}|.$$

Notons que :$Z(0) = 0$ et :

$$dZ(t) = \frac{d}{d\theta}\left[b\left(t, X^{(u+\theta v)}(t), u(t) + \theta v(t)\right)dt + \sigma(t, X^{(u+\theta v)}(t), u(t) + \theta v(t))dW(t)\right]$$

Alors la dérivée par rapport à θ de la formule précédente est :

$$\begin{aligned} dZ(t) &= b_x\left(t, X^{(u+\theta v)}(t), u(t) + \theta v(t)\right)Z(t) + b_u(t, X^{(u+\theta v)}(t), u(t) + \theta v(t))v(t)\,dt \\ &\sigma_x\left(t, X^{(u+\theta v)}(t), u(t) + \theta v(t)\right) + \sigma_u(t, X^{(u+\theta v)}(t), u(t) + \theta v(t))v(t)\,dW(t)\,. \end{aligned}$$

(H_3) supposons que $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ est un maximum local pour $J(u)$ alors

$$h(\theta) := J\left(\widehat{u} + \theta v\right) \quad , \quad \theta \in E_\varepsilon.$$

est maximale au point $\theta = 0$.

On suppose qu'il exist un pair $\left(\widehat{p}(t), \widehat{q}(t)\right)$ de solution de l'équation adjoint :

$$\begin{cases} d\widehat{p}(t) = -H_x\left(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t), \widehat{p}(t), \widehat{q}(t)\right)dt + \widehat{q}(t)dW(t). \\ \widehat{p}(T) = g_x(\widehat{X}(T)) \end{cases}$$

de plus si $\widehat{Z}(t) = Z^{\left(\widehat{u},v\right)}(t)$ avec Φ_i ,$\Psi_{i,j}$ leurs coefficients correspondants alors :

(H_4) $E\left[\int_0^T \widehat{Z}(t)^T \widehat{q}\widehat{q}^T(t)\,\widehat{Z}(t)\,dt\right] < \infty.$

(H_5) $E\left[\int_0^T \widehat{p}(t)^T\, \Psi\Psi^T(t, \widehat{X}(t), \widehat{u}(t))\widehat{p}(t)\,dt\right] < \infty.$

Théoréme 3.2.1 *Sous les hypothèses* $(H_1 - H_5)$ *on a* $\widehat{u}$ *est une poit stationnaire pour* $E[H|\mathcal{G}_t]$

donc :

$$E\left[H_u\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)|\mathcal{G}_t\right]=0.$$

Preuve. Par (H_3) , on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= h^{'}(0) \\
&= \frac{d}{d\theta}J\left(\widehat{u}+\theta v\right)|_{\theta=0} \\
&= \frac{d}{d\theta}E\left[\int_0^T f\left(t,X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(t),\widehat{u}(t)+\theta v(t)\right)dt+g\left(X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(T)\right)\right]|_{\theta=0} \\
&= E\left[\int_0^T \{f_x\left(t,X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(t),\widehat{u}(t)+\theta v(t)\right)^T \frac{d}{d\theta}X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(t)\right. \\
&+ f_u\left(t,X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(t),\widehat{u}(t)+\theta v(t)\right)^T v(t)\,dt\}|_{\theta=0} \\
&+ E\left[g_x\left(X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(T)\right)^T\frac{d}{d\theta}X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(T)\right]|_{\theta=0}
\end{aligned}$$

Alors, en déduit

$$\begin{aligned}
0 = E&\left[\int_0^T f_x\left(t,X^{(u+\theta v)}(t),u(t)+\theta v(t)\right)^T\widehat{Z}(t)dt\right] \\
+E&\left[\int_0^T f_u\left(t,X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(t),\widehat{u}(t)+\theta v(t)\right)^T v(t)dt\right] \\
+E&\left[g_x\left(X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}(T)\right)^T\widehat{Z}(T)\right].
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Notons d'abord :$X^{\left(\widehat{u}+\theta v\right)}:=\widehat{X}$. Par les hypothèses (H_3) et (H_4) et en appliquant formule d'Itô on obtient :

$$\begin{aligned}
&E\left[g_x\left(\widehat{X}\left(T\right)\right)^T\widehat{Z}(T)\right]\\
&=E\left[\widehat{p}\left(T\right)^T\widehat{Z}(T)\right]\\
&=E\left[\int_0^T\widehat{p}\left(t\right)^T d\widehat{Z}(t)\right]+E\left[\int_0^T\widehat{Z}(t)^T d\widehat{p}(t)\right]+E\left[\int_{\subset}^T d\left\langle\widehat{p}(t)\widehat{Z}(t)\right\rangle\right]\\
&=E\left[\sum_{i=1}^n\int_0^T\widehat{p^i}\left(t\right)\left[b_x^i\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t)\right)\widehat{Z}(t)+b_u^i\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t)\right)v(t)\right]^T dt\right]\\
&+E\left[-\sum_{i=1}^n\int_0^T\widehat{Z^i}\left(t\right)H_x\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)dt\right]\\
&+E\left[\int_0^T\left\{\sum_{i,j=1}^n\widehat{q^i}(t)\left[\sigma_x^{i,j}\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t)\right)+\sigma_u^{i,j}\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t)\right)v(t)\right]\right\}dt\right]
\end{aligned}$$

On a aussi

$$H_x\left(t,X(t),u(t),p(t),q(t)\right)=f_x\left(t,x,u\right)+\sum_{i=1}^n b_x^i\left(t,x,u\right)p^i-\sum_{i,j=1}^n\sigma_x^{i,j}\left(t,x,u\right)q^{i,j}$$

De la même manière,

$$H_u\left(t,X(t),u(t),p(t),q(t)\right)=f_u\left(t,x,u\right)+\sum_{i=1}^n b_u^i\left(t,x,u\right)p^i-\sum_{i,j=1}^n\sigma_u^{i,j}\left(t,x,u\right)q^{i,j}$$

Alors, (3.2) devient

$$\begin{aligned}
E\left[g_x\left(\widehat{X}\left(T\right)\right)^T\widehat{Z}(T)\right]&=E\left[\int_0^T-f_x\left(t,\widehat{X}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)\widehat{Z}(t)dt\right]\\
&+E\left[\sum_{i=1}^n\int_0^T\widehat{p^i}\left(t\right)\left[b_u^i\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t)\right)v(t)\right]^T dt\right]\\
&+E\left[\int_0^T\left\{\sum_{i,j=1}^n\widehat{q^i}(t)\left[\sigma_u^{i,j}\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t)\right)v(t)\right]^T\right\}dt\right] \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (H_5) et (3.3) on obtient :

$$
\begin{aligned}
0 &= E\left[\int_0^T f_x\left(t,\widehat{X}\left(t\right),u\left(t\right)\right)^T \widehat{Z}(t)dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T f_u\left(t,\widehat{X}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)^T v(t)dt\right] + E\left[g_x\left(\widehat{X}\left(T\right)\right)^T \widehat{Z}(T)\right] \\
&= E\left[\int_0^T f_x\left(t,\widehat{X}\left(t\right),u\left(t\right)\right)^T \widehat{Z}(t)dt\right] + E\left[\int_0^T f_u\left(t,\widehat{X}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)^T v(t)dt\right] \\
&- E\left[\int_0^T f_x\left(t,\widehat{X}\left(t\right),\widehat{u}\left(t\right)\right)^T \widehat{Z}(t)dt\right] \\
&+ E\left[\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \left\{\widehat{p}^i\left(t\right)\frac{\partial}{\partial u_i}b^i\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t)\right) + \sum_{k=1}^n \widehat{q}^{k,j}(t)\frac{\partial}{\partial u_i}\sigma^{k,j}\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t)\right)\right\} v^i(t)dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T H_u\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)^T v(t)dt\right]
\end{aligned}
$$

Fixons $t\in[0,T]$ et appliquant (H_1) :

$$
\begin{aligned}
0 &= E\left[\int_0^T H_u\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)^T v(t)dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial u_i}H\left(s,\widehat{X}(s),\widehat{u}(s),\widehat{p}(s),\widehat{q}(s)\right)\alpha^i_{\chi[t,t+h]}(s)ds\right] \\
&= E\left[\int_t^{t+h} \frac{\partial}{\partial u_i}H\left(s,\widehat{X}(s),\widehat{u}(s),\widehat{p}(s),\widehat{q}(s)\right)\alpha^i(s)ds\right].
\end{aligned}
$$

Par la dérivation par rapport à h au point $h=0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &= E\left[\frac{\partial}{\partial h}\int_t^{t+h} \frac{\partial}{\partial u_i}H\left(s,\widehat{X}(s),\widehat{u}(s),\widehat{p}(s),\widehat{q}(s)\right)\alpha^i(s)ds\right]|_{h=0} \\
&= E\left[\frac{\partial}{\partial u_i}H\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)\alpha^i(t)\right],
\end{aligned}
$$

et comme est un v.a. arbitraire $\mathcal{G}_t$-mesurable borné. Alors, on a trouvé une resultat de principe du maximum (conditions necessaires d'optimalité) par l'espérance conditionnelle

$$
E\left[H_u\left(t,\widehat{X}(t),\widehat{u}(t),\widehat{p}(t),\widehat{q}(t)\right)|\mathcal{G}_t\right] = 0.
$$

Les informations incomplètes signifient que les informations dont dispose le responsable du traitement sont éventuellement inférieures à l'ensemble des informations (complètes). C'est-à-dire que tout contrôle admissible est adapté à une sous-filtration G_t.qui donne le résultat demandé. ■

Conclusion

Le principe du maximum, qui est au cœur de ce travail, est l'une des deux grandes formulations de la théorie générale de l'optimisation stochastique, l'autre étant la Programmation dynamique. Ces deux approches ont chacune leur intérêt propre et sont complémentaires. L'une se déduit de l'autre, mais sous des hypothèses trop restrictives pour nombre d'applications.

Dans ce mémoire nous avons présenté un problème du contrôle optimal stochastique qu'est donné par l'équation différentielle stochastique non linéaire à coefficients contrôlés. Nous étudions un problème d'optimisation stochastique, où le contrôleur dispose d'informations incomplètes. Les informations incomplètes signifient que les informations dont dispose le responsable du traitement sont éventuellement inférieures à l'ensemble des informations (complètes). C'est-à-dire que tout contrôle admissible est adapté à une sous-filtration.

Ce type de problème d'optimisation stochastiques qui a des applications potentielles en finance mathématique devient naturel, car il peut ne pas parvenir à obtenir un contrôle admissible avec des informations complètes dans des applications réelles.

Bibliographie

[1] A. Bensoussan (1983), Lectures on stochastic control. *In Lect. Notes in Math.* 972, Springer Varlag, pp. 1-62.

[2] F. Baghery, Oksendal B. (2007), A maximum principle for stochastic control with partial information, *Stoch. Anal. Appl.*, pp. 705–717.

[3] S. Boukaf & Lina Guenane & Mokhtar Hafayed, Optimal continuous-singular control of stochastic McKean-Vlasov system in Wasserstein space of probability measures, IJDSDE 265175, International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations . (2022) DOI : 10.1504/IJDSDE.2022.126543.

[4] I.E. Lakhdari & H. Miloudi & M. Hafayed : Stochastic maximum principle for partially observed optimal control problems of general McKean-Vlasov differential equations, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Springer (2020), DOI : 10.1007/s41980-020-00426-1.

[5] L. Guenane & Mokhtar Hafayed, & Shahlar Meherrem & Syed Abbas : On optimal solutions of general continuous-singular stochastic control problem of McKean-Vlasov type. Mathematical Methods in the Applied Sciences , Wiley DOI : 10.1002/mma.6392. (2020), Volume 43, Issue 10, Pages 6498-6516.

[6] M. Hafayed, & S. Meherrem , On optimal control of mean-field stochastic systems driven by Teugels martingales via derivative with respect to measures, International journal of control, DOI :10.1080/00207179.2018.1489148, Vol 93 (5), pp 1053-1062. (2020).

[7] Mokhtar Hafayed, & Abdelmadjid Abba & Syed Abbas : On partial-information optimal singular control problem for mean-field stochastic differential equations driven byTeugels mar-

tingales measures, ID : 1079648 DOI :10.1080/00207179.2015.1079648 Internat. J. Control , 89 (2016), no. 2, 397–410. 2016.

[8] S. Meherrem, Mokhtar Hafayed, Maximum principle for optimal control of McKean-Vlasov FBSDEs with Lévy process via the differentiability with respect to probability law, Optimal Control Applications and Methods DOI : 10.1002/oca.2490 2019. (40) pp. 499-516.

[9] S. Meherrem, & Mokhtar Hafayed, & Syed Abbas : On Peng's type maximum principle for optimal control of mean-field stochastic differential equations with jump processes, International Journal of Modelling, Identification and Control. DOI : 10.1504/IJMIC.2018.10014194. (2019).

[10] Pham H. (2005), *Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance.* Vol. 61, Springer Verlage.

[11] Jean blanc M. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. *Lecture Notes*, University of Évry : http ://www. maths. univ-evry.fr/pages_perso/jeanblanc.

[12] J. Yong Zhou X.Y. (1999), *Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Springer Verlag.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	Convergence en probabilité.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}, \xrightarrow{\mathcal{D}}$	Convergence en loi, convergence en distribution.
$\xrightarrow{p.s.}$	Convergence presque sûre.
$\xrightarrow{m.p}$	Convergence en moyenne d'ordre p.
T	Temps terminal.
b	Drift.
σ	Coefficient de diffusion
$P - p.s$	Presque surement pour la mesure de probabilité P.
$s \wedge t$	$\min(s,t)$.
$s \vee t$	$\max(s,t)$
$\hat{u}$	Contrôle optimal.
C^1	Ensemble des fonctions une-fois continuement dérivable.
C^2	Ensemble des fonctions 2-fois continuement dérivable.
$EDSR$	Équation différentielle stochastique rétrograde
$H(t, X(t), u(t), p(t), q(t))$	système Hamiltonian
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman

PPD	Principe de la Programmation Dynamique
MP	Mouvement Brownien
$v.a.$	Variable aléatoire
EDP	Equations différentielles partielles
EDS	Equations différentielles stochastiques
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace de probabilités
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$	Espace de probabilités filtré
$\langle M, N \rangle_t$	Crochet d'Itô
$\langle X, X \rangle_T$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$
$p(t)$	Processus adjoint.
exp	Exponentiel
$\limsup$	limite supérieur
$\liminf$	limite inferieur
$L^2(.)$	ensemble des fonctions de carrés intégrable.
$\mathcal{F}_t^X$	Filtration naturelle engendrée par le processus X.
M_t	Crochet de l'intégrale stochastique.
$J(u(.))$	Fonctionnelle du cout $u(.)$.
$W(t)$	Mouvement Brownien.
$E[.]$	Espérance mathématiques.
$Var(.)$	Variance.
$Cov(.,.)$	Covariance.
$E[.\|.]$	Espérance conditionnelle.
1_B	Fonction indicatrice.
B^c	Ensemble complémentaire de B.

ملخـــــص

قمنا في هذا العمل بدراسة مشكلة الأمثلية العشوائية، حيث يكون لدى المتحكم معلومات غير كاملة. أكثر دقة؛ قد تكون المعلومات المتاحة لوحدة التحكم أقل من إجمالي المعلومات (الكاملة). لقد وضعنا مجموعة من الشروط الضرورية للتحكم العشوائي الأمثل في الأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية في شكل مبدأ الحد الأقصى العشوائي. المعلومات غير الكاملة تعني أن المعلومات المتاحة لوحدة التحكم قد تكون أقل من إجمالي المعلومات (الكاملة). وهذا يعني أن أي تحكم مقبول يكون مناسبًا للترشيح الفرعي. يصبح هذا النوع من مشاكل التحكم الذي له تطبيقات محتملة في التمويل الرياضي أمرًا طبيعيًا لأنه قد يفشل في تحقيق التحكم المقبول بمعلومات كاملة في تطبيقات العالم الحقيقي. كما نفترض في هذا العمل، أن يكون مجال التحكم محدبًا.

Résumé

Dans notre travail, nous étudions un problème d'optimisation stochastique, où le contrôleur dispose d'informations incomplètes. Plus précisément; les informations dont dispose le responsable du traitement sont peut-être inférieures à la totalité des informations (complètes). Nous établissons un ensemble de conditions nécessaires pour un contrôle stochastique optimal des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques sous la forme du principe du maximum stochastique. Les informations incomplètes signifient que les informations dont dispose le responsable du traitement sont éventuellement inférieures à l'ensemble des informations (complètes). C'est-à-dire que tout contrôle admissible est adapté à une sous-filtration. Ce type de problème de contrôle qui a des applications potentielles en finance mathématique devient naturel, car il peut ne pas parvenir à obtenir un contrôle admissible avec des informations complètes dans des applications du monde réel. Dans ce travail, le domaine de contrôle est supposé convexe.

Abstract

In our work, we study a stochastic optimization control problem, where the controller has incomplete information's. More precisely; the information available to the controller is possibly less than the whole (full) information. We establish a set of necessary conditions for optimal stochastic control of systems driven by stochastic differential equations in the form of stochastic maximum principle. The incomplete information's means that the information available to the controller is possibly less than the whole (full) information. That is, any admissible control is adapted to a sub filtration. This type of control problems which has potential applications in mathematical finance becomes naturally, because it may fail to obtain an admissible control with complete information in real world applications. In this work, the control domain is assumed to be convex.