République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques – Option : **Statistique**

Par KABOT Asma

Titre :

Modèles de Risques Individuels

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	BRAHIMI Brahim	Université de Biskra	Président
Pr.	YAHIA Djabrane	Université de Biskra	Rapporteur
Dr.	ZOUAOUI Nour Elhouda	Université de Biskra	Examinatrice

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce humble travail

À mes chers parents SALAH et **FATIMA** *: Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect,mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.*

Qu'Allah les protèges.

*À mon unique et adorable frère **ABDELGHANI**.*

*À mes chères et adorable sœurs : **KHADIJA** et **FARDOUS** et les deux belles **NOURELHOUDA** et **SALSABIL**.*

À Toutes mes amies .

À tous mes professeurs et tous ceux qui ont contribué à mon éducation.

À tous ceux que j'aime.

$\int$ **ASMA** $\int$

REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** de m'avoir donné le courage,*

la patience et la santé pour accomplir ce Modeste travail.

*Je remercie mon encadreur : Le **Pr. YAHIA Djabrane**, pour ses efforts et surtout ses conseils précieux et aussi pour sa guidance avec ses encouragements lors des moments de difficulté et sa patience pendant la durée de ce modeste travail.*

*Je remercie les membres de jury : Le **Pr BRAHIMI Brahim** et le **Dr*** **ZOUAOUI Nour Elhouda** *d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce travail.*

*Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous **mes familles*** et ***amies,*** *qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce travail.*

Merci à tous pour leurs aides et leurs encouragements.

Table des matières

Table des figures

Introduction

L'évolution et la complexité du monde d'aujourd'hui lui rend de plus en plus dépassé par des petits et des grands risques : accidents, maladies, fraudes, pertes, vols, incendies, intempéries... L'assurance est ainsi, la solution la plus efficace pour se prémunir des conséquences de ces risques et se simplifier la vie.

La notion d'assurance remonte aux temps anciens, avec des preuves retrouvées en Mésopotamie, en Égypte et en Rome antique. Dans le secteur maritime au 16eme siècle, les marchands ont fait appel à des banquiers pour financer leurs voyages maritimes coûteux. Lorsque le bateau serait perdu, le banquier serait remboursé et bénéficierait d'une compensation financière importante. Le financier italien Lorenzo Tonti a créé la forme tontine du contrat d'assurance en 1652, qui était un modèle d'opération similaire à celui de l'assurance vie. Tontines étaient des groupes de personnes qui partageaient des fonds pendant une période donnée. Les incendies de Londres de 1666 ont conduit à l'introduction de la sécurité sociale en 1676, et les premiers contrats de sécurité sociale ont été proposés à Londres en 1698.

Le développement de l'assurance se poursuivit au cours des 16ème et 17ème siècles grâce à l'utilisation de moyens mathématiques tels que les calculs des probabilités, qui permettent de mesurer les paramètres d'assurance. Le 20ème siècle a connu une croissance significative des compagnies d'assurance, notamment les assurances mutuelles contre les maladies, les accidents et la vol. L'évolution économique des sociétés et la complexité des échanges ont conduit à une augmentation de l'importance de l'assurance dans ces sociétés, ce qui en fait un acteur majeur dans les économies et les sociétés aujourd'hui.

D'une façon générale, il existe deux façons de formuler un modèle mathématique pour un portefeuille d'assurance : le modèle avec des risques individuels et le modèle avec des risques collectifs. Ces deux modèles aient des caractéristiques et propriétés différentes, forment un excellent outil mathématique permettent d'expliquer, contrôler et gérer les risques avec précision et clarté.

Notre objectif dans ce mémoire est de donner un aperçu général sur les risques en assurance, nous étudions en particulier les propriétés et caractéristiques du cas d'un modèle de risques individuels et nous rappelons les principales notions et définitions nécessaires pour la détermination de ce modèle.

Ce mémoire est composé en deux chapitres, comme suit : Le premier chapitre de ce mémoire, se divise en deux sections, dans la première section nous présenterons quelques concepts fondamentaux de la théorie des probabilités utilisés dans le deuxième chapitre, et dans la deuxième parties, nous allons formuler les définitions et les notions de base, afin de donner un aperçu du domaine des risques en assurances. Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter le modèle individuel de risque et ses propriétés essentiels. Nous allons exposer aussi la notion de probabilité de ruine et ces approximations normale et gamma. Des exemples par simulation en R, sont donnés pour illustrer les différents résultats théoriques.

Chapitre 1

Concepts de base en assurance

Le contenu de ce chapitre est principalement basé sur les livres [4], [8] et le polycopié du cours [13].

1.1 Rappels de probabilités

L'utilisation de moyens mathématiques tels que les calculs des probabilités, permettent de mesurer les différentes paramètres d'assurance et assure ainsi la poursuite de développement de la théorie d'assurance. Dans cette section, quelques concepts fondamentaux de la théorie des probabilités sont exposés, lesquels seront utilisés pour la modélisation et l'évaluation des risques en assurance.

1.1.1 Variables aléatoires

On definit une variable aléatoire (v.a) comme étant Ie résultat d'une experience ou d'un phénomene aléatoire :

- Une v.a X est une fonction, souvent à valeurs réelles, définie sur un espace échantillonal. Cet espace correspond à l'ensemble des resultats possibles d'une experience ou d'un phénomene aléatoire.
- En assurance, une v.a X peut représenter : Ie montant à verser à la suite d'un accident

de voiture, les pertes liées à un investissement, les pertes encourues par tous les assureurs d'une region spécifique à la suite d'une catastrophe naturelle.

Définition 1.1.1 *Une v.a positive est une v.a qui ne peut prendre que des valeurs positives. En d'autres termes, elle représente une quantité qui ne peut être négative.*

Exemple 1.1.1 *Par exemple, le montant d'une réclamation pour des dommages matériels suite à un accident automobile ou le coût d'un traitement médical couvert par une police d'assurance santé.*

Définition 1.1.2 *On definit la fonction de répartition de la v.a. X par F_X où :*

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Propriétés 1.1.1 *Une fonction de répartition F_X possède les propriétés suivantes :*

• F_X *est non décroissante (croissante au sens large) ;*

•F_X *est semi-continue à droite (c'est-à-dire que pour tout point x_0, la valeur limite de $F_X(x)$ lorsque x s'approche de x_0 par la droite est $F_X(x_0)$) ;*

• $F_X(-\infty) = 0$ *et* $F_X(\infty) = 1$;

• $0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad , x \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.1.1 *Le complement de F_X, noté $\overline{F}_X(x)$, est appele la fonction de survie de X et il est defini par :*

$$\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x).$$

Il y a deux classes importantes de v.a : **les v.a. discretes et les v.a. absolument continues :**

a) Une v.a X est dite discréte (v.a.d) ssi elle est valeurs dans un ensemble E fini ou dénombrable on note $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. La loi de probabilité d'une (v.a.d) est :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \in E} P(X = x_i).$$

On definit sa fonction de denisité par

$$f_X(x) = P(X = x), \quad x \in E$$

avec $0 \leq f_X(x) \leq 1, \; x \in E \quad et \quad \sum_{x_i \in E} f_X(x) = 1.$

b) Une v.a X est dite continue (v.a.c) s'il existe une fonction $f_X(x) \geq 0$, definie sur $\mathbb{R}$, de telle sorte que

$$P(X \in A) = \int\limits_A f_X(x)dx$$

où A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $P(X \in \mathbb{R}) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$

1.1.2 Variables aléatoires i.i.d

Dans la suite, on note par (i.i.d) toute suite de v.a indépendantes et identiquement distribuées.

Définition 1.1.3 *Deux v.a's X et Y sont dites indépendantes, notées $X \perp Y$, si quelles que soient les valeurs x et y prises par X et Y , on a :*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Définition 1.1.4 *Les v.a's sont dites identiquement distribuées si elles suivent la* ***même distribution*** *de probabilité.*

Définition 1.1.5 *L'esperance d'une v.a. X designe la valeur espérée que peut prendre cette v.a.*

Propriétés 1.1.2 *Si X est une v.a.discrète, on définit l'espérance $\mathbb{E}(X)$ par la formule*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \epsilon E} x_i P(X = x_i).$$

Si X est une v.a.continue avec fonction de densite f_X, l'esperance de X est definie par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \ f_X(x) dx.$$

Définition 1.1.6 *Soit une v.a. X dont Ie moment d'ordre 2 existe, on appelle variance de X notée $\mathbb{V}(X)$ définie par :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Définition 1.1.7 (Produit de convolution) *Soient Y et Z sont deux v.a's réelles indépendantes de fonctions de répartition respectives F_Y et F_Z, la v.a $Y+Z$ admet pour fonction de répartition le produit de convolution noté $F_Y * F_Z$ donné par :*

$$\begin{aligned} F_{Y+Z}(x) = F_Y * F_Z(x) &= \int_{\mathbb{R}} F_Y(x-z) dP_Z(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_Z(x-y) dP_Y(y) \ , \qquad \textit{pour } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.3 Quelques types de convergences

Soit une suite X_n , $n \in N$ des v.a's réelles définie sur un même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Les types de convergence suivants seront utilisés dans ce mémoire :

- **Convergence presque sûre (p.s) :**

$$X_n \overset{P.S}{\to} X \quad si \quad \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

- **Convergence en probabilité (P) :**

$$X_n \overset{P}{\to} X \quad \textit{si pour tout } \varepsilon \in]0,\varepsilon[: \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

• **Convergence en loi ($\mathcal{L}$) :** $Xn \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ Si pour tout point de x de $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n} = F_X(x).$$

1.1.4 Lois des grands nombres

Dans la suite on note par $S_n = X_1 + ... + X_n$, la somme de n terms d'une suite de v.a. On a les résultats fondamentals suivants :

Théorème 1.1.1 (loi faible des grands nombres) *Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable, deux à deux non corrélées. Alors,*

$$\frac{1}{n}\left[Sn - \mathbb{E}(Sn)\right] \quad \textbf{\textit{converge en probabilité}} \text{ \textit{vers} } 0.$$

Autrement dit,

$$\frac{S_n}{n} \text{ \textit{converge en probabilité vers} } \mathbb{E}(X_1).$$

Théorème 1.1.2 (loi forte des grands nombres) *Soit X_n,$n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes de même loi, alors si $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$,*

$$\frac{S_n}{n} \text{ \textit{converge presque sûrement vers} } \mathbb{E}(X_1)$$

Réciproquement :

$$\text{Si } \frac{S_n}{n}, n \in \mathbb{N} \text{ \textit{converge presque sûrement alors} } \mathbb{E}(|X_1|) < \infty$$

Remarque 1.1.2 *L'énoncé complet de la loi forte des grands nombres fournit une équivalence pour la **convergence presque sûre** de $\frac{S_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, vers la valeur moyenne pour une suite de variables aléatoires iid.*

Théorème 1.1.3 (de la limite centrale) *Pour une suite $X_1, X_2, ..., X_n$ de v.a.i.i.d réelles, d'espérence μ et de variance σ^2 finies, la suite $\frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma}$ converge en loi vers la loi normale centré* *et réduite $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque n augmente indéfinement , nous avons alors :*

$$\frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite suivante a lieu :

$$P(\frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \leq x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x),$$

où Φ est la fonction de répartition de loi normale centré et réduite.

1.1.5 Quelques lois de probabilités continues

Loi normale

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit la loi normale de paramètres μ et σ, notée $N(\mu, \sigma^2)$ si la densité de probabilité de X est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}), \quad x \in R$$

μ une constante réelle, σ une constante réelle strictement positive.

• La fonction de répartition est donnée par la fonction

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

• L'espérance et la variance d'une variable normale sont respectivement données par :

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Propriétés 1.1.3 *1- Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, la variable normale X est appelée variable normale centrée réduite où standard et est notée $\mathcal{N}(0,1)$.*

2- Si X suit la loi $N(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$ d'après (T.C.L).

3- Si X_1 et X_2 sont deux v.a indépendantes et si X_1 suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et X_2 la loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

La figure 1.1 suivante donne une présentation la densité de loi normale, pour différentes valeurs de μ et σ

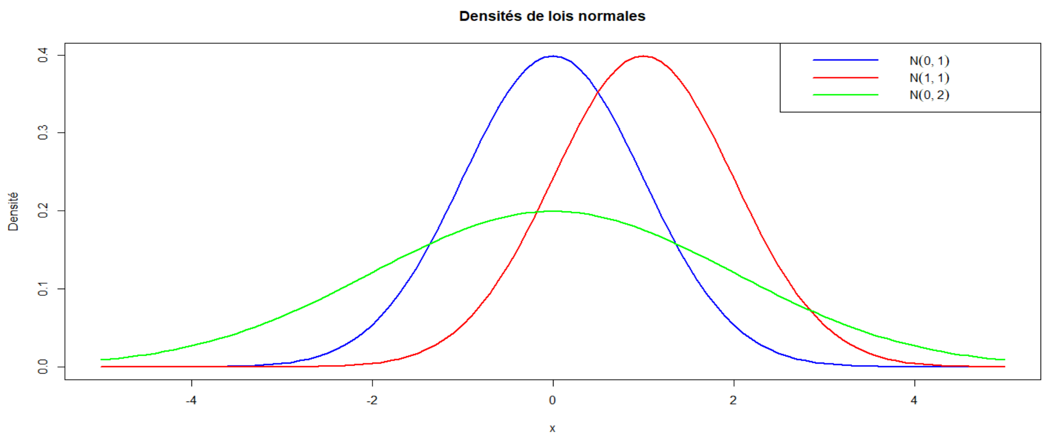

FIG. 1.1 – Densités d'une v.a normale.

Loi log normale

Une variable aléatoire X est dite suivre une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 notée $Log - \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si la variable aléatoire $Y = ln(X)$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Une v.a, $Log - \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ admet une densité de probabilité :

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}) = \frac{1}{x} f_Y(\ln(x); \mu, \sigma), \quad x \geq 0.$$

et une fonction de répartition :

$$F_X(x; \mu, \sigma) = \Phi(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma})$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard.

•L'espérance et la variance d'une variable lognormale sont respectivement données par :

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

La figure 1.2 suivante donne une présentation la densité de loi **lognormale**, pour différentes valeurs de μ et σ.

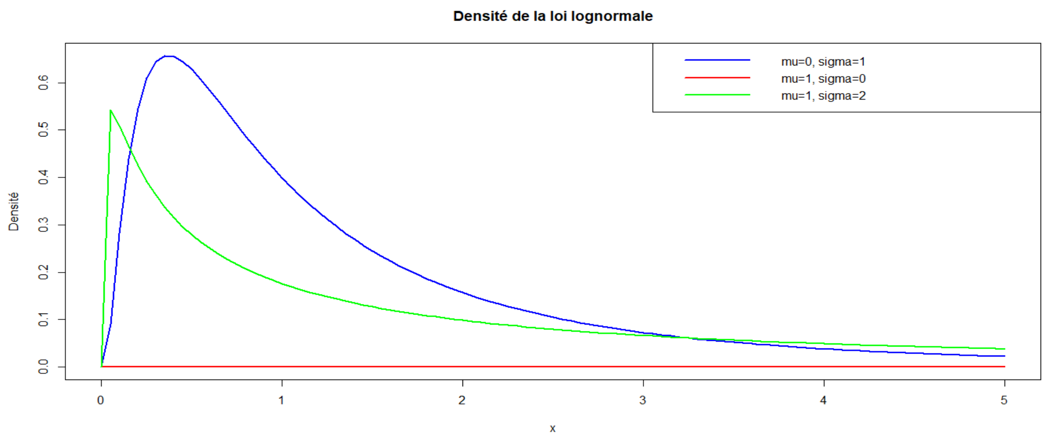

FIG. 1.2 – Densités d'une v.a lognormale.

Loi Exponentielle

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ , et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$ si X possède la densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

• Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

• L'espérance et la variance d'une variable exponentielle sont respectivement données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La figure 1.3 suivante donne une présentation de la densité de loi exponentielle, pour différentes valeurs de λ.

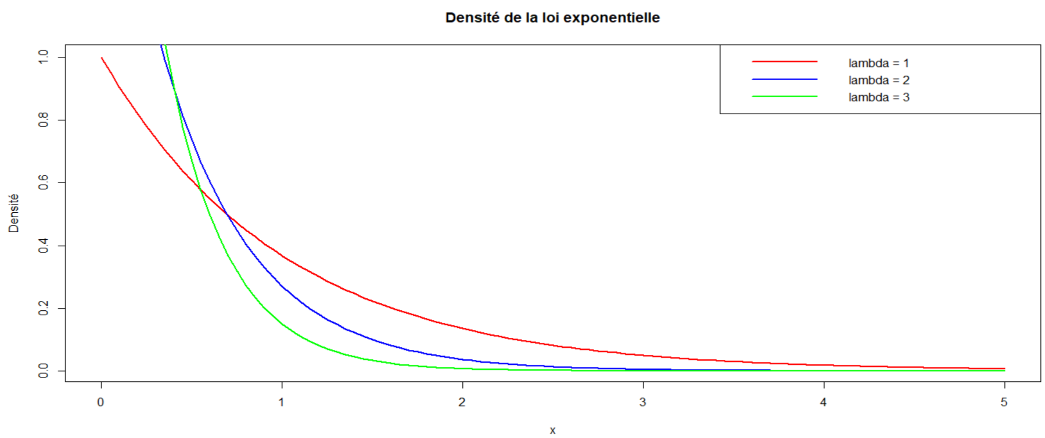

FIG. 1.3 – Densités d'une v.a exponentielle.

Loi Gamma

Soient a et b deux réels strictement positifs. Une v.a X suit une loi Gamma de paramètres a et b, ce que l'on note aussi $X \sim \gamma(a, b)$, si sa fonction de densité de probabilité peut se mettre sous la forme :

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy \text{ , pour } a \in]0, \infty[$$

L'espérance et la variance d'une variable de loi gamma sont respectivement données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{a}{b^2}.$$

La figure 1.4 suivante donne une présentation de la densité de loi Gamma, pour différentes valeurs de a et b.

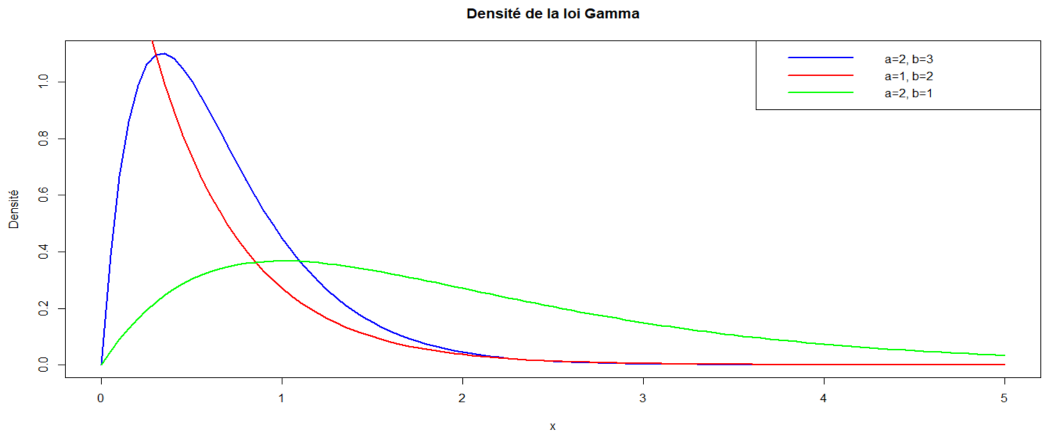

FIG. 1.4 – Densités d'une v.a gamma.

1.2 Généralitées sur les risques en assurance

L'objectif de cette section est de donner un aperçu sur le secteur des assurances, et définir la notion du risque lié à ce domaine.

1.2.1 L'assurance : notions et exemples

Nous allons tout d'abord définir l'assurance sous deux aspects différents : le premier est juridique, le second est technique, pour plus de détailles, voir [7].

Définition 1.2.1 (jurdique de l'assurance) *L'assurance est le contrat par lequel un souscripteur se fait promettre par un assureur une prestation en cas de réalisation d'un risque, moyennant le paiement d'une prime ou cotisation.*

Définition 1.2.2 (technique de l'assurance) *L'assurance est l'opération par laquelle un assureur organise en mutualité une multitude d'assurés exposés à la réalisation de certains risques et indemnise ceux d'entre eux qui subissent un sinistre grâce à la masse commune des primes collectées.*

D'après [11], il existe deux grandes catégories d'assurances : celles qui couvrent une personne physique et celles qui couvrent les biens. Ainsi et en fonction de leur objet et de leur portée, les opérations d'assurances peuvent être classées selon deux grandes familles :

Assurances de dommages (assurance nom vie)

L'assurance des dommages permet d'obtenir une indemnisation en cas de sinistre. Elle regroupe à la fois la protection de responsabilité (responsabilité civile, responsabilité civile familiale ou responsabilité professionnelle) et celle de biens (dommages causés au véhicule, protection des biens meubles ou immeubles). Elles englobent les deux catégories suivantes :

– **Assurances de biens :** elles garantissent l'indemnisation des préjudices subis par l'assuré suite à des dommages et pertes causés aux biens lui appartenant.

– **Assurances de responsabilité :** Elles garantissent les conséquences pécuniaires de la responsabilité civile que l'assuré peut encourir à raison de dommages corporels, matériels ou immatériels causés aux tiers.

Assurances de personnes (assurance vie)

Une assurance de personnes a pour objet de couvrir les risques relatifs aux individus comme les accidents corporels, la maladie, le décès ou encore l'invalidité. L'assurance de personnes peut être souscrite soit à titre individuel soit à titre collectif. Ces assurances peuvent être classées comme suit :

– **Assurances vie :** qui ont pour objet la couverture des risques dont la survenance dépend de la survie ou du décès de l'assuré.

– **Assurances des accidents corporels et maladie/maternité :** dont l'objet est la couverture des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne assurée, des risques liés à la maladie ou à la maternité ou des risques d'incapacité et d'invalidité.

– **La capitalisation :** qui a pour objet de constituer une épargne avec un rendement minimum garanti.

Définition 1.2.3 (L'assureur) *est la société d'assurance ou la personne physique auprès de laquelle le contrat d'assurance est souscrit, et qui s'engage à fournir les prestations prévues en cas de réalisation du risque.*

Définition 1.2.4 (L'assuré) *est la personne qui souscrit à un contrat d'assurance avec un assureur pour se protéger contre certains risques. En payant une prime, l'assuré bénéficie d'une couverture d'assurance. En cas de survenance d'un événement prévu dans le contrat, l'assuré a le droit de recevoir une indemnisation de l'assureur selon les termes convenus.*

Définition 1.2.5 (Le souscripteur) *est la personne qui souscrit un contrat d'assurance, c'est à dire qui signe les différents documents du contrat d'assurance et qui s'engage à payer les primes dues à l'assureur. Le souscripteur n'est pas obligatoirement l'assuré : il peut souscrire un contrat d'assurance pour son propre compte, ou pour celui d'autres personnes indiquées aux conditions particulières.*

1.2.2 Risque et mesure de risques

Le risque est l'éventualité de la survenue d'un fait dommageable tel que le vol, la perte, l'incendie, l'accident. etc. Un risque prend un sens légèrement différent : c'est un phénomène aléatoire pouvant générer un sinistre pour un souscripteur, sinistre qui engendre un coût qui correspond à l'indemnisation du souscripteur par l'assureur.

Définition 1.2.6 (Prestation de l'assureur) *Il s'agit du montant touché par l'assuré en cas de la survenance du risque pris en charge.*

Définition 1.2.7 (Contrat d'assurance) *Il s'agit d'un accord par lequel une compagnie d'assurance s'engage, en cas de survenance du risque ou à l'échéance définie dans le contrat,* *à verser une somme d'argent à l'assuré en échange d'une rémunération appelée prime ou cotisation.*

Définition 1.2.8 (Prime de risques) *Il s'agit du montant versé par l'assuré à l'assureur en contre partie du risque spécifiés dans le contrat d'assurance.*

Définition 1.2.9 (Sinitre) *Il s'agit de la réalisation d'un risque entrant dans l'objet du contrat d'assurance.*

Mutualisation des risques

La mutualité est le fondement de l'assurance, où les cotisations modestes versées par chaque membre d'un groupe (les assurés) sont utilisées pour indemniser ceux qui subissent un événement assuré. L'assureur a pour rôle de mutualiser les risques en les regroupant, les répartissant et les compensant grâce à des calculs statistiques basés sur les données collectées.[1]

La reassurance [12] : La réassurance pourrait se définir de façon simpliste comme «l'assurance des assureurs». En réalité, il s'agit d'un contrat par lequel une société spécialisée (le réassureur ou le cessionnaire) prend en charge une partie des risques souscrits par un assureur auprès de ses assurés. Par cette opération, le réassureur s'engage à rembourser à l'assureur en cas de réalisation du risque, une partie des sommes versées au titre des sinistres et perçoit en contrepartie une portion des primes originales versées par le ou les assurés.

Remarque 1.2.1 *Le réassureur ne traite en principe qu'avec des assureurs, c'est pour cette raison que cette activité est souvent méconnue du grand public. De même qu'un assuré doit protéger son patrimoine (maison, automobile. . . .) et ses proches contre toutes sortes d'aléatoires, une compagnie d'assurance doit également mesurer et limiter l'exposition de ses fonds propres afin de protéger sa marge de solvabilité. Ainsi, elle doit chaque année estimer les risques auxquels elle s'expose, selon quelle fréquence et quelle probabilité. Une fois ce travail préalable effectué, elle peut alors mieux évaluer ses besoins de protection en réassurance.*

Mesure de risques

Dans ce qui suit nous donnons la définition, les propriétés et quelques exemple sur les mesures de risque (pour les détailles, voir les références [2] ,[3] et [9]). On peut définir une mesure de risque de la manière suivante :

Définition 1.2.10 *Une mesure constitue un outil important, il s'agit d'une fonctionlle φ définie sur l'espace des v.a's X, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et notée $\varphi[X]$. Cette fonction peut être finie ou infini.*

L'idée est que φ quantifie le niveau de danger inhérent au risque X : de grandes valeurs de $\varphi[X]$ indiqueront que X est "dangereux"

(dans un sens à préciser). Plus précisément, tant que φ est normalisée, c'est-à-dire que :

$$\varphi[0] = 0;$$

$\varphi[X]$ réprésente le montant minimum qui, ajouté à la perte X en début de période, rend la couverture de X "acceptable". La compagnie d'assurance devra donc disposer du montant $\varphi[X]$, constitué en partie par les primes payées par l'assuré et pour le reste par l'apport en capital des actionnaires.

Propriétés 1.2.1 *Soient X et Y deux v.a's représentant la perte, et φ est une mesure de risque :*

1. Invariance en loi *: $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y \Rightarrow \varphi(X) = \varphi(Y)$.*

2. Monotonie : *$X \geq Y \Rightarrow \varphi(X) \geq \varphi(Y)$.*

3. Invariance par translation *: $\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(X + k) = \varphi(X) + k$.*

4. Homogénéité positive *: $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(\lambda X) = \lambda \varphi(X)$.*

5. Sous additivité *: $\varphi(X + Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$*

6. Convexité *: $\forall \beta \in [0, 1]$, $\varphi(\beta X + (1 - \beta)Y) \leq \beta.\varphi(X) + (1 - \beta).\varphi(Y)$.*

Définition 1.2.11 (Value-at-Risk) *La Value at Risk, ou la VaR, est une mesure statistique utilisée par les gestionnaires pour évaluer et quantifier le niveau de risque global sur une période donnée.*

Remarque 1.2.2 *La VaR prend en compte le montant potentiel de perte, la probabilité de cette perte, et l'intervalle de temps. En conséquence, la VaR peut être utilisée pour définir l'appétit au risque de l'entreprise, c'est-à-dire le niveau de risque que l'entreprise est prête à accepter.*

Etant donné un risque X et un niveau de probabilité $\alpha \in]0,1[$, la VaR correspondante, notée $VaR[X,\alpha]$, est le quantile d'ordre α de X. Formellement,

$$\varphi_\alpha(X) = VaR[X,\alpha] = x_\alpha \text{ où } \mathbb{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha$$

On notera que :

$$VaR[X,\alpha] = \inf\{x,\ \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

où F_X^{-1} désigne la fonction quantile de la v.a X.

Remarque 1.2.3 *$\varphi_\alpha(X)$ est une fonction croissante en α et elle n'est pas sous-additive.*

Définition 1.2.12 (Tail value at Risk) *La "Tail Value-at-Risk" (TVaR) au niveau α est une mesure de risque qui s'intéresse aux pertes extrêmes, c'est-à-dire aux scénarios où les pertes dépassent un certain seuil défini par le niveau de confiance α. La TVaR au niveau α est donnée par :*

$$TVaR\,[X,\alpha] = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR(X,t)dt = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(t)dt.$$

Elle apparaît comme la moyenne des VaR de niveaux supérieurs à α, et elle est sous-additive.

Chapitre 2

Modèle de risques individuels

Dans ce deuxième chapitre nous présentons le modèle de risques individuels, ses propriétés principales, et présentés aussi la probabilité de ruine et sont approximation normale et gamma. Ce chapitre est principalement basé sur les références [4]–[5]–[6] et [10].

2.1 Présentation du modèle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'assurés, aussi appelé l'effectif du portefeuille d'assurances, ou encore le nombre de polices.

2.1.1 Définition et exemple

Définition 2.1.1 ***Le modèle de risques individuels*** *est une suite finie $X_1, ..., X_n$ de va's i.i.d, qui sont positives. Le montant cumulé des sinistres S est alors défini par :*

$$S = X_1 + ... + X_n = \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i.$$

Dans ce modèle la v.a X_i représente le cumul des indemnisations allouées pour les sinistres affectant l'assuré i pendant la période d'observation.

Remarque 2.1.1 *1) Le modèle est dit «individuel» car le risque global se décompose comme* *la somme finie des risques individuel.*

2) Si n est une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors le modéle est dite ***modèle collectif de risque,*** *dont le montant cumulé des sinistres S est défini par :*

$$S = X_1 + ... + X_n = \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i, \quad n \text{ est une v.a.}$$

En utilisons logiciel **R,** pour des risques log-normales ($X \sim Log - \mathcal{N}(0,1)$), nous présentons dans la figure 2.1 suivante, la réalisation d'un modèle S en fonction de la taille de l'échantillon $(n = 1 : 200)$.

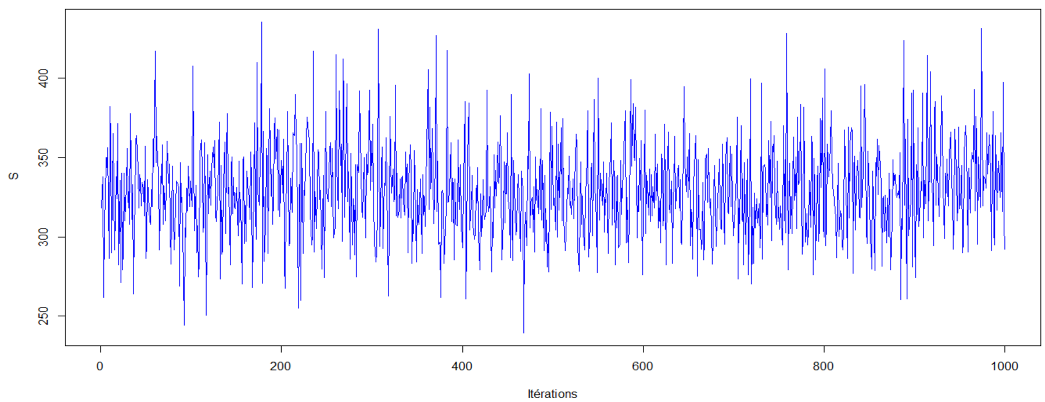

FIG. 2.1 – Réprésentation du montant cumulé des sinistres log-normales.

2.1.2 Propriétés d'un modèle de risque individuel

Définition 2.1.2 (Prime pure) *La prime pure d'un ensemble des risques est égal $\mathbb{E}[S]$ du montant cumulé des sinistres S de cet ensemble, elle appartient à $[0, \infty]$.*

Définition 2.1.3 (Prime chargée) *La prime chargée pour un ensemble de risques est définie comme la prime pure de cet ensemble, à laquelle s'ajoute un chargement proportionnel. Si le montant total des sinistres de cet ensemble est représenté par S et que le taux de chargement* *est noté η, $\eta \in]0, \infty[$, alors la prime chargée Π est calculée selon l'équation :*

$$\Pi = (1 + \eta)\mathbb{E}[S]$$

En d'autres termes, la prime chargée est équivalente à la prime pure, augmentée d'un montant proportionnel au taux de chargement η.

Propriété 2.1.1 (Espérance mathémathique) *Lorsque les variables $X_1, ..., X_n$ sont d'espérance finie, alors*

$$\mathbb{E}(S) = n\mathbb{E}(X_1).$$

Preuve. Pour démontrer cela, nous utilisons la linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}(X_i))$$

Puisque les variables aléatoires sont identiquement distribuées, nous avons :

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = ... = \mathbb{E}(X_n)$$

Donc,

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1)$$

Alors,

$$\mathbb{E}(S) = n\mathbb{E}(X_1).$$

■

Propriété 2.1.2 (Variance mathémathique) *Quand les variables $X_1, ..., X_n$ sont de varince finie, la variance de S est finie et égale à :*

$$\sigma^2(S) = n\sigma^2(X_1).$$

Preuve. Considérons la variance de la somme des variables aléatoires X_i :

$$\sigma^2(S) = \sigma^2(\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

Comme les X_i sont indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances :

$$\sigma^2(S) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i)$$

Puisque les X_i sont identiquement distribuées, leurs variances sont les mêmes, donc :

$$\sigma^2(S) = n\sigma^2(X_1).$$

■

Remarque 2.1.2 *Dans le modéle individuel de risque $X_1, ..., X_n$ avec $S = X_1 + ... + X_n$,Si $\sigma^2(X_1) = 0$, on dit que le modèle est un modèle déterministe.*

Exemple 2.1.1 (Assurance Automobile) *Dans le secteur de l'assurance automobile, les compagnies doivent évaluer les risques financiers associés aux sinistres. Un modèle de risque individuel est un outil crucial pour estimer ces risques. une compagnie d'assurance souhaite comprendre les coûts potentiels liés aux sinistres dans une année. Nous allons utiliser une distribution continue pour modéliser les coûts des sinistres,* ***en supposant un nombre fixe d'accidents par an.***

Pour simplifier, supposons que le propriétaire aura exactement $n = 4$ accidents (sinistres) dans l'année.

Les montants des sinistres X_1, X_2, X_3, X_4 suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, avec des paramètres μ,σ^2. Supposons que chaque sinistre X_i suit une loi normale $\mathcal{N}(1000,200^2)$. Ce qui signifie que :

- *L'espérance $\mathbb{E}(X_i) = 1000$, donc $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{E}(X_i) = 4\mathbb{E}(X_1) = 4000$, représente le montant total moyen des sinistres que l'assureur peut s'attendre à payer pour les 4 sinistres.*

• *La variance* $\sigma^2(X_i) == 200^2 = 40000$, *donc* $\sigma^2(S) = \sum_{i=1}^{4} \sigma^2(X_i) = 4\sigma^2(X_1) = 160000$, *indique la variabilité attendue autour de cette moyenne.*

Propriété 2.1.3 (Fonction de répartition) *Dans le modèle individuel de risque* $X_1, ..., X_n$ *avec sinistre cumulé* $S = X_1 + \cdots + X_n$, *nous avons*

$$F(S) = F_X^{*n} = F_X^{*(n-1)} * F_X = F_X * ... * F_X \qquad (n \text{ fois})$$

tq : F_S la fonction de répartition de S et F_X la fonction de répartition des variables X_i. F_X^{*n} est le produit de convolution donné par l'équation (1.1) de la définition 1.1.7.

Preuve. Quand $X_1, ..., X_n$ sont des v.a's,.i.i.d de fonction de répatition F_X , par récurrence :

• Pour $n = 2$: le montant cumulé des sinistres $S = X_1 + X_2$ est alors

$$F_S = F_X * F_X = F_X^2$$

• Maintenant , pour $n > 2$: il est supposé que $F_{X_1+...+X_{n-1}} = F_X^{*(n-1)}$. Ainsi , en posant $Y = X_1 + ... + X_{n-1}$, par (1.1), puis d'aprés l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$F_{X_1+...+X_n} = F_{Y+X_n} = F_Y * F_X = (F_X^{*(n-1)}) * F_X = F_X^{*n}.$$

Ce qui fait démontrer le résultat. ■

Remarque 2.1.3 *La connaissance de la fonction de répartition* F_S *permet de nombreuses applications. En effet,*

1- F_S *permet de calculer les probabilités de ruine annuelles.*

2- F_S *permet de calculer les primes relatives à des traités de réassurance globaux.*

3- F_S *permet de fixer le taux de chargement de sécurité* η *lorsque l'assureur cherche a calculer la prime nette et désire limiter la probabilité de ruine.*

2.2 Probabilité de ruine

Nous examinons maintenant la probabilité de ruine notée P_{ruine}. Considérons le cas où le risque cumulé de sinistre est une variable aléatoire noté S d'espérance finie. Le montant cumulé des primes chargées est défini par :

$$\Pi = (1+\eta)\mathbb{E}(S), \qquad \text{avec un taux de chargement } \eta > 0.$$

Définition 2.2.1 *La probabilité de ruine est la probabilité que la charge totale des sinistres dépasse les encaissements correspondants sur une période donnée, se qui définit alors, la probabilité de ruine de la manière suivante :*

$$P_{ruine} = \mathbb{P}(S > \Pi) = 1 - F_S(\Pi).$$

C'est une fonction décroissante (car la quantité $\mathbb{E}(S)$ est positive et la fonction F_S étant décroissante).

Remarque 2.2.1 *Pour réduire la probabilité de ruine, il est nécessaire d'augmenter le taux de chargement de sécurité η et augmenter l'effectif n. Cependant, dans la pratique, le taux de chargement est souvent limité par la compétitivité du marché de l'assurance, tandis que le nombre n est généralement fixé. Afin d'améliorer la robustesse de l'ensemble des risques, les actionnaires fournissent à l'assureur une réserve de solvabilité, représentée par un montant R, qui s'ajoute aux primes pour fixer un niveau au-delà duquel le cumul des sinistres ne peut pas dépasser. Ainsi, dans cette configuration, la probabilité de ruine est exprimée par :*

$$P_{ruine} = \mathbb{P}(S > (1+\eta)\mathbb{E}(S) + R) = 1 - F_S((1+\eta)\mathbb{E}(S) + R). \tag{2.1}$$

Remarque 2.2.2 *L'assureur a également la possibilité de transférer une partie de son risque à un réassureur en conservant une proportion α du montant total des primes et des sinistres, et en cédant le reste au réassureur. Dans ce cas, la probabilité de ruine se définit alors de la* *manière suivante :*

Définition 2.2.2 *Pour un ensemble de risques de mantant comulé S, de fonction de répartition F_S, de prime pure $\mathbb{E}(S)$ finie et nom nule, lorsqu'un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité de montant $R > 0$ et un réassurance proportionnelle de taux de rétention $\alpha \in \,]0,1]$ sont appliqués, la probabilité de ruine est donnée par :*

$$P_{ruine} = \mathbb{P}(\alpha S > \alpha(1+\eta)\mathbb{E}(S) + R) = \mathbb{P}(S > (1+\eta)\mathbb{E}(S) + \frac{R}{\alpha}) = 1 - F_S((1+\eta)\mathbb{E}(S) + \frac{R}{\alpha}). \tag{2.2}$$

Proposition 2.2.1 *Dans le modéle individuel de risque $X_1, ..., X_n$ avec $S = X_1 + ... + X_n$, lorsque $0 < \mathbb{E}(X_1) < \infty$ et $\eta > 0$, alors la probabilité de ruine tend vers 0 lorsque n augmente indéfinement:*

$$P_{ruine}(S > (1+\eta)\mathbb{E}(S)) \to 0. \tag{2.3}$$

Preuve. La convergence (2.3) est l'expression de loi faible de grand nombre, voir (1.1.1). Comme $\eta > 0$ et $\mathbb{E}(S) = n\mathbb{E}(X_1)$, il vient d'aprés (2.2) :

$$\begin{aligned} P_{\text{ruine}} &= \mathbb{P}(S > (1+\eta)\mathbb{E}(S) + \frac{R}{\alpha}) \text{ , tq } R > 0 \text{ et } \alpha \in \,]0,1[\\ &\leq \mathbb{P}(S > (1+\eta)\mathbb{E}(S)) = \mathbb{P}(S > (1+\eta)n\mathbb{E}(X_1)) \\ &= \mathbb{P}(\frac{S}{n} > (1+\eta)\mathbb{E}(X_1)) = \mathbb{P}(\frac{S}{n} - \mathbb{E}(X_1) > \eta\mathbb{E}(X_1)) \\ &\leq \mathbb{P}(\left|\frac{S}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right|) > \eta\mathbb{E}(X_1)) \to 0 \text{ , lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Alors, la probabilité de ruine tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. ■

Remarque 2.2.3 *Lorsque la prime utilisée est la prime pure, la probabilité de ruine ne tend pas en général vers 0.pour une bonne maîtrise de cette probabilité de ruine, il suffit d'avoir un taux de chargement décroissant avec le nombre d'assurés proportionnellement à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

2.2.1 La proportion de coût en excès à la ruine

Supposons que le réassureur ne fait pas défaut lorsque l'assureur est ruiné. Étant donné que l'assureur ne prend en charge qu'une proportion α des montants des sinistres S et des primes, la proportion du coût en excès à la ruine notée (C_{ruine}) qui reste à la charge des assurés est exprimée par :

$$C_{\text{ruine}} = (\frac{\mathbb{E}(\alpha S/\alpha S > (1+\eta)\mathbb{E}(S)+R) - (\alpha(1+\eta)\mathbb{E}(S)+R)}{(1+\eta)\mathbb{E}(S)+\frac{R}{\alpha}}).$$

Après avoir été simplifiée, cette expression donne la définition suivante :

Définition 2.2.3 *En établissant un ensemble de risques de mantant comulé S, de fonction de répartition F_S, de prime pure $\mathbb{E}(S)$ finie et nom nule , lorsqu'un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité de montant $R > 0$ et un réassurance proportionnelle de taux de rétention $\alpha \in]0,1]$ sont appliqués, la proportion de coût en excès à la ruine est égale à :*

$$C_{ruine} = \alpha(\frac{\mathbb{E}(S/S > (1+\eta)\mathbb{E}(S)+\frac{R}{\alpha})}{(1+\eta)\mathbb{E}(S)+\frac{R}{\alpha}} - 1).$$

Remarque 2.2.4 *La valeur $\eta + \frac{R}{\alpha E[S]}$ est le taux de chargement total de la prime pure.*

Remarque 2.2.5 *Lorsque les valeurs ε et δ sont strictement positives (et petites) fixées à l'avance, le taux de chragement total de la prime pure est sélectionné afin de répondre aux critères suivants :*

$$P_{ruine} \leq \varepsilon \quad et \quad C_{ruine} \leq \delta$$

Proposition 2.2.2 *Dans le modéle individuel de risque $X_1, ..., X_n$ avec $S = X_1 + ... + X_n$, on suppose que que l'espérance de X_1est finie et positive $(0 < \mathbb{E}(X_1) < \infty)$ et que $\eta > 0$ alors lorsque $n \to \infty$:*

$$\frac{S}{\mathbb{E}(S)} \to 1 \quad p.s\,; \tag{2.4}$$

Preuve. La convergence (2.4) est l'expression de la loi forte des grands nombres, voir (1.1.2). Puisque celle-ci affirme que :

$$\frac{S}{n} \to \mathbb{E}(X_1) \qquad p.s \text{ lorsque } n \to \infty$$

et comme en plus, $\mathbb{E}(S) = n\mathbb{E}(X_1)$ avec $\mathbb{E}(X_1) > 0$ (par hypothése). On obtient :

$$\frac{S}{n\mathbb{E}(X_1)} \to 1 \qquad \text{p.s}$$

ce qui implique :$\frac{S}{\mathbb{E}(S)} \to 1$ p.s. ■

Proposition 2.2.3 *Sous les mêmes hypothèses de la Proposition précédente, on obtient :*

$$\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) \to \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

Preuve. La convergence (2.5) est l'expression du théoréme de central limite (1.1.3), qui confirme que

$$\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S)) = \mathbb{P}(\frac{S - \mathbb{E}(S)}{n\sqrt{\sigma^2(S)}} > 0) = \mathbb{P}(\frac{S - n\mathbb{E}(X_1)}{n\sqrt{\sigma^2(X_1)}} > 0) = 1 - \mathbb{P}(\frac{S - n\mathbb{E}(X_1)}{n\sqrt{\sigma^2(X_1)}} \leq 0)$$
$$\to 1 - \Phi(0) \text{ , } lorsquen \to \infty$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centré et reduite. Comme $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, alors on obtient :

$$\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S)) \to 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

lorsque $n \to \infty$. ■

Exemple 2.2.1 *A l'aide de logiciel R, considérons la réalisation de $n = 200$ v.a de la loi normale $N(0,1)$, la figure 2.4 suivante donne une ullistration de la convergence* ***(2.5).***

Proposition 2.2.4 *Sous les hypothèses précédentes, supposons que $0 < \sigma^2(X_1) < \infty$, alors*

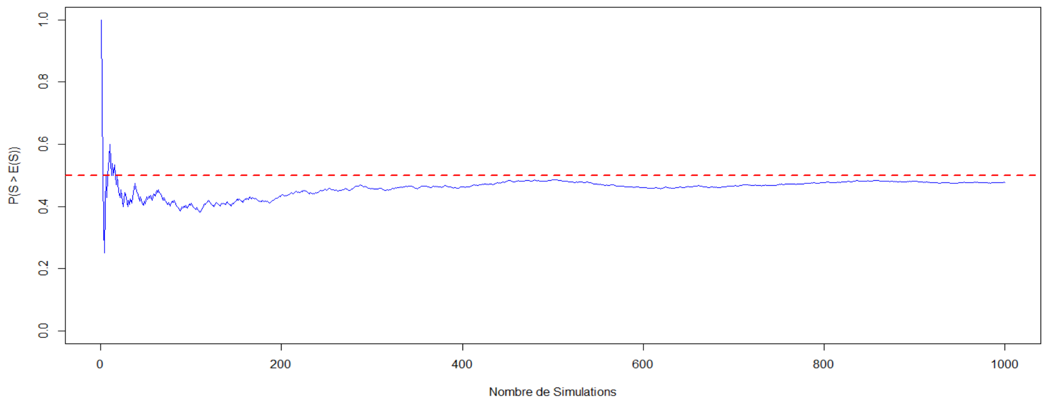

Fig. 2.2 – Convergence de $\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S))$ vers $1/2$

pour tout $\varepsilon \in \,]0,1[$:

$$\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + \sqrt{n\sigma^2(X_1)}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varepsilon, \tag{2.6}$$

où Φ *désigne la fonction de répartition de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

Preuve. La convergence (2.6) est aussi l'expression du théoréme central limite (1.1.3). En effet :

$$\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + n\sqrt{\sigma^2(X_1)}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)) = \mathbb{P}(\frac{S-\mathbb{E}(S)}{n\sqrt{\sigma^2(X_1)}} > \Phi^{-1}(1-\varepsilon))$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\frac{S-\mathbb{E}(S)}{n\sqrt{\sigma^2(X_1)}} \leq \Phi^{-1}(1-\varepsilon))$$
$$\to 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)) = 1 - 1 + \varepsilon = \varepsilon. \text{ lorsque } n \to \infty.$$

■

Exemple 2.2.2 *Pour une visualisation graphique de la convergence (**2.6**), nous reprenons le même exemple précident, et on posons*

$$s = \mathbb{E}(S) + \sqrt{n\sigma^2(X_1)}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)$$

et fixons $\varepsilon = 0.01$. *La convergence de* $P(S > s)$ *vers* $\varepsilon = 0.01$ *est donner dans la figure 2.3 suivante :*

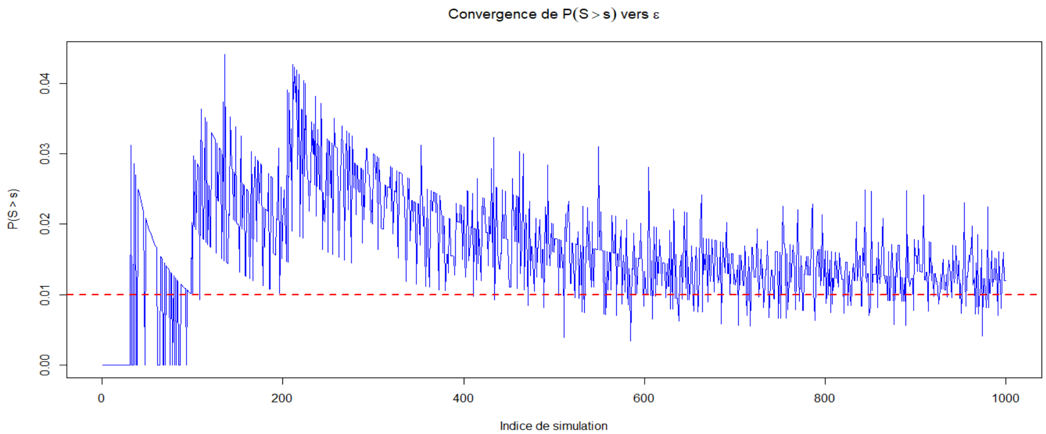

FIG. 2.3 – Convergence de $\mathbb{P}(S > s)$ vers $\varepsilon = 0.01$

Proposition 2.2.5 *Sous les mêmes hypothèses que les propositions précédentes, on trouve :*

$$\frac{\mathbb{E}(S|S > \mathbb{E}(S))}{\mathbb{E}(S)} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \tag{2.7}$$

Preuve. Pour la démonstration de la convergence (2.7), voir [5] page 59-60. ■

2.3 Approximation de la probabilité de ruine

Les assureurs ne disposent généralement pas d'une connaissance précise de la loi qui détermine leur probabilités de ruine. Ainsi, il est dans leur intérêt d'essayer d'approximer cette loi. Nous nous intéressons maintenant à deux approximations par des familles de lois particulières : les lois normale et gamma.

2.3.1 Approximation normale

Pour un réel μ et un réel strictement positif σ^2, la loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, est difinie par sa fonction de répartition donnée par :

$$F_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \quad , \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

Pour une loi de probabilité de fonction de répartition F, de moyenne μ et de variance σ^2 finie et nom nule, l'aproximation normale de la fonction de répartition F est la fonction de répartition $\Phi(\frac{\cdot \; - \; \mu}{\sigma})$,ce qui sera écrit

$$F \approx \Phi(\frac{\cdot \; - \; \mu}{\sigma}). \tag{2.8}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Cette approximation est alors utile pour approcher la probabilité de ruine.

Proposition 2.3.1 (Aproximation normale de la probabilité de ruine) *Pour un ensemble de risque de montant cumulé S, de fonction de répartition $F(S)$, d'espérence $\mathbb{E}(S)$ et variance $\sigma^2(S)$ finie et nom nule , lorsqu'un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité de montant $R > 0$ et une réassurance proportionnelle de taux de rétention $\alpha \in]0, 1[$ sont appliqués, l'aproximation normale de la probabilité de ruine est égale à :*

$$P_{ruine} \approx 1 - \Phi(\frac{\mathbb{E}(S)}{\sigma(S)}(\eta + \frac{R}{\alpha\mathbb{E}(S)})).$$

En effet , d'aprés la définition de probabilité de ruine (voir, 2.2), on trouve :

$$\begin{aligned} P_{\text{ruine}} &= \mathbb{P}(\alpha S > \alpha(1+\eta)\mathbb{E}(S) + R) = \mathbb{P}(S > (1+\eta)\mathbb{E}(S) + \frac{R}{\alpha}) \\ &= 1 - F_S((1+\eta)\mathbb{E}(S) + \frac{R}{\alpha}) \approx 1 - \Phi(\frac{(1+\eta)\mathbb{E}(S) + \frac{R}{\alpha} - \mathbb{E}(S)}{\sigma(S)}) \\ &= 1 - \Phi(\frac{\mathbb{E}(S)}{\sigma(S)}(\eta + \frac{R}{\alpha\mathbb{E}(S)})), \quad \textit{par } (2.8). \end{aligned}$$

Proposition 2.3.2 *Dans le modéle indiviuel de risque , en tant que fonction du nombre de risque n, l'approximation normale de la probabilité de ruine est une fonction* ***asymptotiquement décroissante*** *, qui tend vers 0 lorsque n augmente indéfinment.*

Preuve. Dans le modéle indiviuel de risque $X_1, ..., X_n$ avec $S = X_1 + ... + X_n$,lorsque les v.a.i.i.d $X_1, ..., X_n$ sont de variance finie et nom nule, alors $\mathbb{E}(S) = nE(X_1)$ et $\sigma^2(S) = n\sigma^2(X_1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(S)}{\sigma(S)}(\eta + \frac{R}{\alpha\mathbb{E}(S)}) &= \frac{n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}\sigma(X_1)}(\eta + \frac{R}{n\alpha\mathbb{E}(X_1)}) \\ &= \sqrt{n}\frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)}(\eta + \frac{R}{n\alpha\mathbb{E}(X_1)}) = \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)}(\sqrt{n}\eta + \frac{R}{\sqrt{n}\alpha\mathbb{E}(X_1)}).\end{aligned}$$

La fonction $\sqrt{n} \to \sqrt{n}\eta + \frac{R}{\sqrt{n}\alpha\mathbb{E}(X_1)}$ étant asymptotiquement croissante de limite ∞ au voisinage de l'ifini dès que $\eta > 0$. Il en résulte que l'aproximation normale de la probabilité de ruine :

$$P_{\text{ruine}} \approx 1 - \Phi(\frac{\mathbb{E}(S)}{\sigma(S)}(\eta + \frac{R}{\alpha\mathbb{E}(S)}))$$

est asymptotiquement décroissante et tend vers 0 lorsque n augmente indéfinment . ■

Exemple 2.3.1 *On suppose que $X_{i;i=1...n}$ v.a suit une loi lognormale, avec $S = X_1 + ... + X_n$ et $\eta > 0$, $R > 0$,$\alpha \in]0, 1[$. Nous étudions (en utilisant le logiciel R) trois cas pour l'approximation normale de la probabilité de ruine :*

1- *P_{ruine}en fonction de $R > 0$: pour $\alpha = 0.05$ et $\eta = 0.01$.*

2-P_{ruine} *en fonction de $0 < \alpha < 1$: pour $R = 10$ et $\eta = 0.01$.*

3-P_{ruine} *en fonction de $\eta > 0$: pour $\alpha = 0.05$ et $R = 10$.*

La Répresentation graphique 2.4 suivante, montre clairement la décroissance de la probabilité de ruine en fonction de la réserve de solvabilité de montant R et en fonction du chargement de sécurité η et sa croissance en fonction de la réassurance proportionnelle du taux de rétention α :

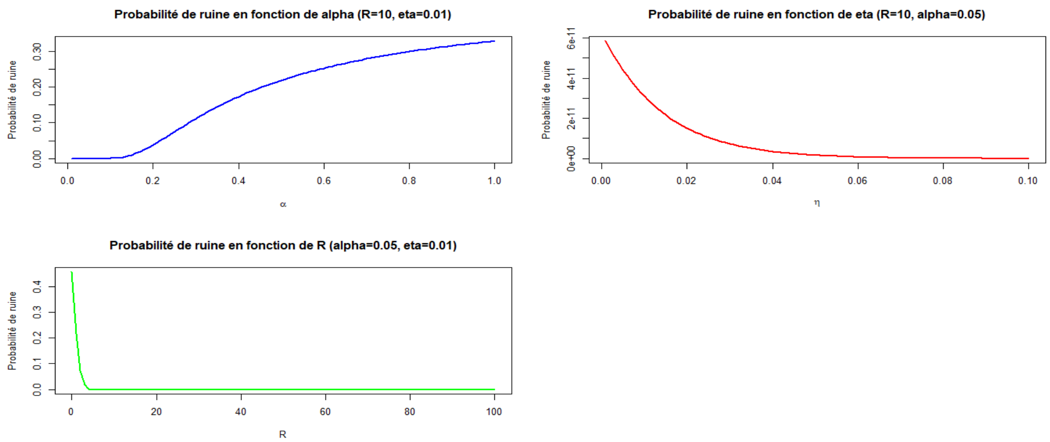

FIG. 2.4 – Approximation normale de la probabilité de ruine

2.3.2 Approximation Gamma

Rappelons que la fonction gamma notée Γ, est définie par :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}dy \quad , \text{ pour } a \in]0, \infty[$$

elle vérifie

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \text{ , } a \in]0, \infty[\quad \text{ et } \quad \Gamma(n+1) = n! \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour $a > 0$, la fonction de répartition de loi gamma notée $\Gamma(a, .)$ est vérifie :

$$\Gamma(a, x) = \begin{cases} 0 \quad , \text{ pour } x \ \in]-\infty, 0[\\ \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a)} y^{a-1}e^{-y}dy \text{ , pour } x \in]0, \infty[\end{cases}$$

La fonction $\Gamma(a, .)$ est appelée fonction gamma incompléte.

Lorsque $a > 0$ et $b > 0$, la loi gamma de paramètres a et b notée $\gamma(a, b)$, sa fonction de répartition est égale à :

$$\Gamma(a,bx)=\begin{cases}0 \quad , \text{pour } x \ \in \left]-\infty,0\right[\\ \int\limits_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)}y^{a-1}e^{-by}dy \ , \text{pour } x\in \left]0,\infty\right[\end{cases}$$

Elle est de moyenne égale à $\frac{a}{b}$ et de variance égale à $\frac{a}{b^2}$.

Pour une loi de probabilité de fonction de répartition F, de moyenne μ strictement positive et de variance σ^2 finie et nom nule, l'aproximation gamma de la fonction de répartition F est la fonction de répartition $\Gamma(\frac{\mu^2}{\sigma^2},(\frac{\mu}{\sigma^2})\ .)$ ce qui sera écrit

$$F\approx\Gamma(\frac{\mu^2}{\sigma^2},(\frac{\mu}{\sigma^2}).) \tag{2.9}$$

Proposition 2.3.3 (Aproximation gamma de la probabilité de ruine) *Pour un ensemble de risque de montant cumulé S , de fonction de répartition $F(S)$, d'espérence $\mathbb{E}(S)$ et variance $\sigma^2(S)$ finie et nom nule, lorsqu'un chargement de sécurité $\eta>0$, une réserve de solvabilité de montant $R>0$ et une réassurance proportionnelle de taux de rétention $\alpha\in\left]0,1\right[$ sont appliqués,* ***l'aproximation gamma de la probabilité de ruine*** *est donnée par :*

$$P_{ruine}\approx 1-\Gamma(\frac{(\mathbb{E}(S))^2}{\sigma^2(S)},\frac{\mathbb{E}(S)}{\sigma^2(S)}((1+\eta)\mathbb{E}(S)+\frac{R}{\alpha})).$$

Preuve. D'après (2.2), on obtient la probabilité de ruine :

$$P_{\text{ruine}}=1-F_S((1+\eta)\mathbb{E}(S)+\frac{R}{\alpha})$$

Donc, par (2.9), on trouve :

$$P_{\text{ruine}}\approx 1-\Gamma(\frac{(\mathbb{E}(S))^2}{\sigma^2(S)},\frac{\mathbb{E}(S)}{\sigma^2(S)}((1+\eta)\mathbb{E}(S)+\frac{R}{\alpha})).$$

■

Proposition 2.3.4 *Dans le modéle indiviuel de risque , en tant que fonction du nombre de risque n , l'approximation gamma de la probabilité de ruine est une fonction asymptotiquement décroissante, qui tend vers 0 lorsque n augmente indéfinment.*

Preuve. Dans le modéle indiviuel de risque $X_1, ..., X_n$, avec $S = X_1 + ... + X_n$,lorsque les v.a.i.i.d $X_1, ..., X_n$ sont de variance finie et non nule, alors $\mathbb{E}(S) = n\mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2(S) = n\sigma^2(X_1)$. Ainsi, l'approximation gamma de la probabilité de ruine est :

$$\begin{aligned} P_{\text{ruine}} &\approx 1 - \Gamma(\frac{(\mathbb{E}(S))^2}{\sigma^2(S)}, \frac{\mathbb{E}(S)}{\sigma^2(S)}((1+\eta)\mathbb{E}(S) + \frac{R}{\alpha})) \\ &\leq 1 - \Gamma(\frac{(\mathbb{E}(S))^2}{\sigma^2(S)}, (1+\eta)\frac{(\mathbb{E}(S))^2}{\sigma^2(S)}) = 1 - \Gamma(\frac{n^2(\mathbb{E}(X_1))^2}{n\sigma^2(X_1)}, (1+\eta)\frac{n^2(\mathbb{E}(X_1))^2}{n\sigma^2(X_1)}) \\ &= 1 - \Gamma(\frac{n(\mathbb{E}(X_1))^2}{\sigma^2(X_1)}, (1+\eta)\frac{n(\mathbb{E}(X_1))^2}{\sigma^2(X_1)}) \end{aligned}$$

En posons $\beta = \frac{(\mathbb{E}(X_1))^2}{\sigma^2(X_1)}$, on obtient :

$$P_{\text{ruine}} = 1 - \Gamma(n\beta, (1+\eta)n\beta).$$

Soit alors $Y_1, ..., Y_n$ une suite de v.a.i.i.d de loi $\gamma(\beta, \beta)$, la v.a $Y_1 + ... + Y_n$ suit la loi $\gamma(n\beta, \beta)$. En conséquence :

$$\begin{aligned} 1 - \Gamma(n\beta, (1+\eta)n\beta) &= \mathbb{P}(Y_1 + ... + Y_n > (1+\eta)n) \\ &= \mathbb{P}(\frac{(Y_1 + ... + Y_n)}{(1+\eta)} > n) \leq \mathbb{P}(\left|\frac{(Y_1 + ... + Y_n)}{(1+\eta)}\right| > n), \end{aligned}$$

avec, par la loi faible des grands nombres (1.1.1), le dernier majorant tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, ce qui complète la preuve de la proposition. ■

Exemple 2.3.2 *Reprennons l'exemple précident. Nous étudions (en utilisant le logiciel R) les trois cas pour l'approximation gamma de la probabilité de ruine :*

1- P_{ruine} *en fonction de* $R > 0$ *: pour* $\alpha = 0.05$ *et* $\eta = 0.01$.

2-P_{ruine} *en fonction de* $0 < \alpha < 1$ *: pour* $R = 10$ *et* $\eta = 0.01$.

3-P_{ruine} *en fonction de* $\eta > 0$ *: pour* $\alpha = 0.05$ *et* $R = 10$.

La Répresentation graphique 2.5 suivante, montre clairement la décroissance de la probabilité de ruine en fonction de la réserve de solvabilité de montant R et en fonction du chargement de sécurité η et sa croissance en fonction de la réassurance proportionnelle du taux de rétention α :

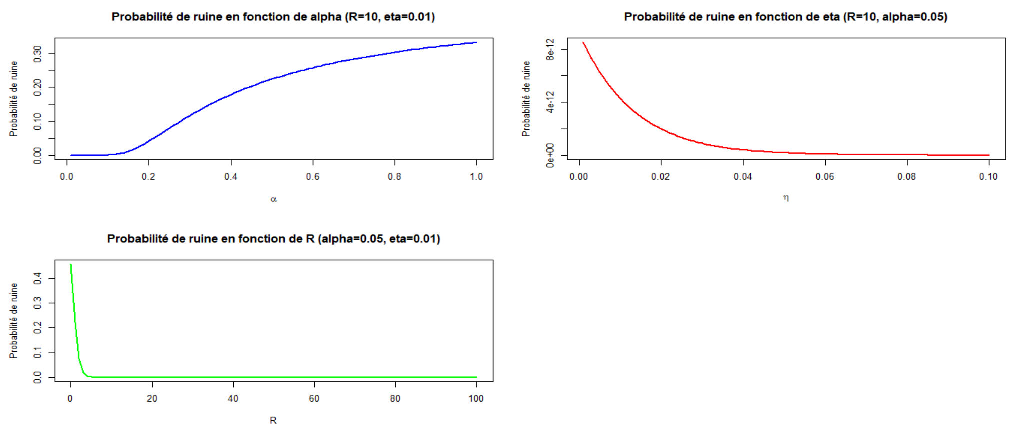

FIG. 2.5 – Approximation gamma de la probabilité de ruine

Conclusion

Ce mémoire donne une aidé générale sur les modèles de risque individuel dans le domaine de l'assurance, il met l'accent sur leurs définitions, propriétés, exemples et importance. En appliquant les principes de la théorie des probabilités à des domaines particuliers de l'assurance, nous avons montré comment ces modèles peuvent être employés afin d'évaluer et de gérer les risques de manière efficace.

En conclusion, dans le modèle de risque individuel, le total des sinistres ou des réclamations est modélisé comme la somme de tous les sinistres sur les polices individuelles. Ce modèle permet de donne le montant total des sinistres à payer par la compagnie d'assurances sur une période donnée (généralement une année) en sommant assuré par assuré les montants des sinistres subis par chaque individu sur cette période.

Nous concluions aussi, la probabilité de ruine peut être contrôlée en augmentant le taux de chargement η, le nombre d'assurés n, la réserve de solvabilité R, ou en utilisant un réassurance proportionnelle avec un taux de rétention α. Toutefois, il est essentiel d'équilibrer ces paramètres pour conserver des primes abordables et assurer la durabilité à long terme de la compagnie d'assurance.

Grâce aux caractéristiques et aux techniques exposées, les assureurs disposent d'outils solides pour améliorer la précision de leurs prévisions et la gestion de leurs réserves de capital. Ce modèle pourra non seulement améliorer la précision et l'efficacité de la gestion des risques, mais aussi renforcer la confiance et la satisfaction des assurés.

Bibliographie

[1] Bekkicha, A. (2016). Estimation de la prime d'assurance automobile via le modèle Poisson-Gamma : système bonus-malus. *Mémoire mastre en mathématiques, Université de Ouargla.*

[2] Bellouq, C. (2023). Mesure des risques industriels en assurance : analyse des méthodes de quantification des pertes. *International Journal of Accounting, Finance, Auditing, Management and Economics*, 4(5-2), 490-513.

[3] Charpentier, A., (2010). Mesures de risque, *Journées d'Études Statistique*, Luminy, Université Rennes 1, France.

[4] Pierre-Loti-Viaud, D., Boulongne, P. (2014). *Mathématique et assurance, premiers éléments.* Ellipse.

[5] Denuit, M., Charpentier, A. (2004). *Mathématiques de L'assurance Non-Vie.* Tome1 : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque. Ed. Economica.

[6] Kharroubi I. Actuariat Introduction,Université Paris Dauphine (https ://www.ceremade.dauphine.fr/~idris/Intro-actuariatM1.pdf).

[7] Lambert-Faivre,Y. (2002). *Droit des assurances*, Dalloz, Paris.

[8] Marceau, E., Dodge, Y. (2013). *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat : Modèles sur une période.* Paris : Springer.

[9] Therond, P.E. (2005). Mesures et comparaison de risques, Notes de cours, ISFA. (https ://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/6c3ddda0fcbc2b5dc1256f7800690677/$FILE/Mesures_risques.pdf).

[10] Loisel, S. (2002). Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine, Troisème année ISFA.

[11] https ://www.acaps.ma/fr/l-acaps-et-vous/particuliers/assurance/types-dassurance.

[12] https ://www.apref.org/la-reassurance/.

[13] https ://perso.math.univ-toulouse.fr/ledoux/files/2022/01/Le%C3%A7on-19.pdf.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

(Ω, F, P)	:	Espace de probabilité.
$v.a$	:	Variable aléatoire.
$v.a.d$	:	Variable aléatoire discréte.
$v.a.c$	:	Variable aléatoire continue.
$i.i.d$	:	Indépendantes et identiquement distribuées.
$f_X(x)$	:	Fonction de densité.
F_X	:	Fonction de répartition.
$\mathbb{E}(.)$	:	Espérence mathématique.
$\sigma^2(.), \mathbb{V}(.)$	:	Variance mathématique.
$\xrightarrow{P.S}$	:	Convergence presque sûre .
$\xrightarrow{P}$	:	Convergence en probabilité.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	:	Convergence en loi.
$N(\mu, \sigma^2)$	:	Loi normale de paramètres μ et σ^2.
$N(0, 1)$	:	Loi normale centré et réduite.

Φ	:	Fonction de répartition de loi normale centré et réduite.
$Log - N(\mu, \sigma^2)$	:	Loi log-normale de paramètres μ et σ^2.
$\mathcal{E}(\lambda)$	:	Loi exponentielle de paramètre$\lambda, \lambda > 0$.
$\gamma(a, b)$	:	Loi gamma de paramètres a et b.
Γ	:	Fonction gamma d$'$Euler.
S	:	Le montant cumulé des sinistres.
η	:	Taux de chargement.
Π	:	La prime chargée.
R	:	Réserve de solvabilité de montant.
α	:	Réassurance proportionnelle de taux de rétention.
P_{ruine}	:	Probabilité de ruine.
C_{ruine}	:	La proporiont de coût en excès à la ruine.

ملخـــــص

هدفنا في هذه المذكرة هو إعطاء لمحة عامة عن مخاطر التأمين. سندرس بشكل خاص ميزات وخصائص نموذج المخاطر الفردية. كما نعطي أهم المفاهيم والنتائج الأساسية اللازمة لتحديد وتقريب احتمالية الافلاس المقابلة لهذا النموذج. سيتم إعطاء أمثلة عن طريق المحاكاة باستخدام برنامج المعالجة الإحصائية R لتوضيح مختلف النتائج النظرية المقدمة.

Résumé

Notre objectif dans ce mémoire est de donner un aperçu général sur les risques en assurance. Nous étudions en particulier les propriétés et caractéristiques d'un modèle de risques individuels. Nous donnons aussi les principales notions et résultats nécessaires pour la détermination et l'approximation de la probabilité de ruine correspondante à ce modèle. Des exemples à l'aide du logiciel de traitement statistique **R**, sont donnés pour illustrer les différents résultats théoriques.

Abstract

Our objective in this master dissertation is to give a general overview of insurance risks. We study in particular the properties and characteristics of an individual risk model. We also give the main notions and results necessary for the determination and approximation of the ruin probability corresponding to this model. Examples by simulation using the **R** statistical software are given to illustrate the different theoretical results.