République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Statistique

Par
TAGUIOUS Yasmine

Titre :

Sur la famille des copules Archimédienne

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	CHERFAOUI Mouloud	UMKB	Président
Dr.	ABDELLI Jihane	UMKB	Encadreur
Dr.	TOUBA Sonia	UMKB	Examinatrice

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce travail À

Ma chère mère, la raison de ma force et de mon courage, **"Driss Zahra"**.

À mes chères sœurs.

À mes frères.

Aux enfants de ma sœur (**Maram Maria** et **Walid**),

et mes amis avec qui j'ai partagé beaucoup de beaux souvenirs et des rires inoubliables.

Mes sept inspirations.

À mon père.

Tous ceux que j'aime.

.

REMERCIEMENTS

Je remercie **Allah** le tout puissant pour m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail, que nous implorons à son aide pour nous aider à atteindre nos aspirations.

Je tiens d'abord à remercier **Dr. ABEDELLI Jihane** pour son écoute et ses conseils précieux ainsi que pour l'attention portée à ce tavail.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury :
Pr. CHERFAOUI Mouloud et **Dr. TOUBA Sonia**,
qui ont accepté de discuter mon travail.

Merci **Maman** pour tout ce que tu as fait pour moi et pour tes priéres, sans toi, je ne serais pas là.

Enfin, merci à mes sœurs et amies pour leurs encouragements et leur aide constants.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Le terme copule « copula » vient effectivement du latin « copŭlæ », qui représente, au sens figuré, connexion, lien ou union. Dans certains travaux de Fréchet [9], Féron et Dall'Aglio [7], on retrouve cette notion sous d'autres noms dans l'étude des tables de contingence et des lois multivariées à structures marginales fixées. Abe Sklar en 1959 [18], a cependant été le premier à formuler rigoureusement le concept de copule après le problème de probabilité énoncé par Fréchet.

La copule est un outil utilisé pour relier les distributions multivariées à leurs marginales. Elle permet de capturer la dépendance entre les différentes variables aléatoires d'un système. Les copules sont des méthodes efficaces pour étudier la relation entre variables aléatoires. Selon Fisher (1997) [8], il existe deux raisons principales pour lesquelles les copules suscitent l'intérêt des statisticiens : « Tout d'abord, en tant que moyen d'étudier des mesures de dépendance sans échelle, et ensuite, en tant que point de départ pour élaborer des familles de distributions bivariées. » Elles sont particulièrement bénéfiques dans les domaines où la dépendance entre les variables ne peut pas être facilement modélisée à l'aide de méthodes classiques, comme la corrélation. Les copules offrent la possibilité de saisir et de représenter des liens plus complexes entre les variables aléatoires, et elles sont employées dans divers secteurs tels que la finance, l'assurance, l'ingénierie et l'hydrologie.

Il y a deux chapitres dans ce travail :

Chapiter 1. Sur la théorie des copules : Dans ce chapitre, les concepts fondamentaux des copules sont expliqués, y compris les bases théoriques essentielles telles que le théorème de Sklar, qui lie les distributions multivariées à leurs marges univariées. Les copules sont classifiées en différentes familles, chacune ayant des propriétés uniques qui peuvent être utilisées pour modéliser divers types de dépendance entre variables aléatoires. Les principales familles de copules paramétriques discutées dans ce chapitre comprennent les copules elliptiques, les copules Archimédienne et les copules des valeurs extrêmes, chacune offrant des approches différentes pour capturer la dépendance. En plus de cela, des mesures d'association comme le rho de Spearman et le tau de Kendall sont également introduites, permettant de quantifier la relation entre les variables en termes de copules.

Chapiter 2. Les copules Archimédiennes : Les copules archimédiennes constituent une famille importante de copules, qui sont des fonctions utilisées pour modéliser la dépendance entre des variables aléatoires dans la théorie des probabilités et les statistiques. Les copules archimédiennes offrent une grande flexibilité dans la modélisation des dépendances et sont largement utilisées dans les domaines de la finance, de l'assurance et de l'ingénierie.

Dans ce chapitre, nous aborderons les concepts de base de cette famille et les copules archimédiennes les plus courantes, telles que la copule de Gumbel, la copule de Clayton et la copule de Frank. En plus, ses propriétés les plus importantes.

Chapitre 1

Sur la théorie des copules

Dans ce premier chapitre, nous abordons quelques définitions qui nous permettront de présenter clairement le concept de copule. Nous étudions également les propriétés importantes de la fonction copule et son rôle dans l'étude de la dépendance entre variables aléatoires. Nous nous concentrons plus particulièrement sur l'étude des copules bivariées, et nous étendrons notre analyse aux cas multivariés.

1.1 Définitions et propriétés d'une copule

La copule est un outil statistique qui modélise la dépendance entre des variables aléatoires, permettant ainsi de considérer de manière distincte la structure de dépendance décrite par la fonction de distribution conjointe et le comportement marginal des variables considérées.

Définition 1.1.1 *Soit un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ ..., \ X_d)$ de dimension d. La fonction de répartition conjointe de X est la fonction de d-variables donnée par :*

$$H(x_1, ..., x_d) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_d \leq x_d).$$

1. *H est continue à droite.*
2. *H est croissant..*
3. $\lim\limits_{x_i \to -\infty} H(x_1, \ ..., \ x_d) = 0$ *et* $\lim\limits_{x_i \to +\infty} H(x_1, \ ..., \ x_d) = 1$, *pour* $i = 1, \ ..., \ d$.
4. *Si H a des dérivées d'ordre d, alors cette condition est équivalente à :*

$$\frac{\partial H}{\partial x_1 ... \partial x_d} \geq 0.$$

Définition 1.1.2 ***(Copule) :*** *Une copule est une fonction de répartition notée C, définie sur $\mathbf{I}^d = [0, 1]^d$, dont les lois marginales sont uniformes sur $\mathbf{I}$*

$$C(u_1, ..., u_d) = P(U_1 \leq u_1, ..., U_d \leq u_d), \tag{1.1}$$

Ayant les propriétés suivantes :

1. $\forall\ u_i \in [0,1]^d$, *on a* $C(u_1, ..., u_d) = 0$, *si au moins une cordonnée de* u_i *est égale à* 0.
2. $\forall\ u_i \in [0,1]$, *on a* $C(1, ...1, u_i, 1, ..., 1) = u_i$, *pour* $i = 1, ..., d$.
3. *La copule est croissante en chaque composante.*

Définition 1.1.3 *Une copule bivariée (2-dimensionnelle) est une fonction* $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $C(u,\ 0) = C(u,\ 0) = 0,\ \forall u \in \mathbf{I}$.
2. $C(u,\ 1) = u$ *et* $C(1,\ v) = v,\ u,\ v \in \mathbf{I}$.
3. C *est 2-croissante, i.e* $\forall\ u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2$ *dans* $\mathbf{I}$ *telque* $u_1, \leq u_2$, *et* $v_1 \leq v_2$ *on a :*

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

La continuité :
Soit C une copule bivariée pour tout $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2 \in [0,1]$ avec $u_1 \leq u_2,\ v_1 \leq v_2$ on a :

$$|C(u_2,\ v_2) - C(u_1,\ v_1)| \leq |u_2 - u_1| - |v_2 - v_1|\ .[16] \tag{1.2}$$

Différentiabilité :
1. Soit C une copule $\forall u_1,\ ...,\ u_d \in \mathbf{I}^d$ les dérivées partielles de C par rapport à u_i existant et vérifiant :

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial u_i}(u_1,\ ...,\ u_d) \leq 1. \tag{1.3}$$

2. Soit C une copule bivariée, $\forall u, v \in \mathbf{I}$:
2.1 Les dérivées partielles de C existent :

$$0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq 1.$$

2.2 Les fonctions $u \to \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ et $v \to \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ sont bien définies et non décroissantes $p.p$ sur $\mathbf{I}$.

1.2 Théorèm de Sklar

Le théorème de Sklar, publié en 1959 par Abe Sklar [18], est un résultat fondamental dans la théorie des copules. Il établit la relation entre la fonction de répartition conjointe d'une distribution multivariée et les fonctions de répartition marginale de ses composantes.

Théorème 1.2.1 ***(Théorème de Sklar)*** *Si* H *est une fonction de répartition d-dimensionnelle de marges* $F_1,\ ...,\ F_d$, *alors il existe une copule* $C : [0{,}1]^d \to [0{,}1]$, *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *:*

$$H(x_1,\ ...,\ x_d) = C\{F_1(x_1),\ ...,\ F_d(x_d)\}. \tag{1.4}$$

De plus, cette copule est unique lorsque les marges F_i*,* $i = 1,\ ...,\ d$ *sont continues.*

Pour $d = 2$, F est une fonction de répartition de marges F_1 et F_2 alors $C : [0{,}1]^2 \rightarrow [0{,}1]$ telle que pour tout $(x_1{,}x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x_1{,}x_2) = C\{F_1(x_1){,}F_2(x_2)\}. \tag{1.5}$$

Ce théorème permet d'associer à chaque distribution multidimensionnelle une copule.

Proposition 1.2.1 *Soit* F *une fonction de répartition conjointe de marges continues* F_1 *et* F_2 *et* C *la copule associée à* F*. Alors, pour* $(u, v) \in \mathbf{I}^2$ *on a :*

$$\begin{aligned} C(u,v) &= C(F_1(x_1),\ F_2(x_2)) \\ &= F(F_1^{-1}(u),\ F_2^{-1}(v)), \end{aligned}$$

avec F_1^{-1} *et* F_2^{-1} *ses inverses généralisés respectivement,*

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\},\ t \in [0, 1].$$

(Ces fonctions sont également appelées fonctions quantiles empiriques).

Définition 1.2.1 ***(Densité d'une copule)***

La densité c d'une copule C, si elle existe, est définie comme suit :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial(u, v)} C(u, v), \tag{1.6}$$

Si la distribution bivariée F est absolument continue, alors elle admet une densité f :

$$\begin{aligned} f(x_1{,}x_2) &= \frac{\partial^2 C(F_{X_1}(x_1){,}F_{X_2}(x_2))}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= c(F_{X_1}(x_1){,}F_{X_2}(x_2)) \times f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2). \end{aligned}$$

Pour une fonction de densité multivariée, $f(x_1,\ ...,\ x_d)$ est donnée par :

$$f(x_1,\ ...,\ x_d) = c(F_{X_1}(x_1){,}...{,}F_{X_2}(x_2)) \prod_{i=1}^{d} f_{X_i}(x_i),$$

$f_{X_1}(x_1), ..., f_{X_d}(x_d)$ sont les densités marginales.

1.3 Bornes de Fréchet-Hoeffding

Les bornes de Fréchet-Hoeffding jouent un rôle important dans la théorie des copules. Elles établissent des bornes supérieures et inférieures pour la fonction de copule C d'une copule bivariée, ce qui permet de caractériser la dépendance entre deux variables aléatoires.

Définition 1.3.1 *Soit C la copule d'une variable aléatoire bivariée (X, Y) avec des marges F_1 et F_2. Les bornes de Fréchet-Hoeffding sont définies comme suit :*
La borne supérieure de Fréchet (Copule min*) :*

$$M(u,v) = \min(u,v).$$

La borne inférieure de Fréchet (Copule max*) :*

$$W(u,v) = \max(u+v-1,0).$$

Théorème 1.3.1 *Soit H une fonction de répartition conjointe d'un couple aléatoire (X, Y) de fonctions de répartition marginales F et G.*

Pour toute copule bivariée C associée à H et $\forall (u, v) \in \mathbf{I}^2$, on a :

$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v). \tag{1.7}$$

1.4 Copule et variable aléatoire

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartition conjointe H et de fonctions de répartition marginales F et G. On définit alors la copule du vecteur aléatoire (X, Y) par :

$$C_{XY}(F(x),G(y)) = H(x,y)$$

Définition 1.4.1 ***(Copule indépendance)***

La copule d'indépendance (copule produit) est la fonction $\Pi : \mathbf{I}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ donnée par :

$$\Pi(u,v) = uv.$$

Le vecteur de variables aléatoires X_1,..., X_d sont indépendante avec une copule C si et seulement si $C = \Pi^d$.

Théorème 1.4.1 ***(Théorème d'invariance)***

Soient deux variables aléatoires continues X et Y de marges F et G et de copule C_{XY}, si α_1 et α_2 sont deux fonctions strictement croissantes, alors

$$C_{XY} = C_{\alpha_1(X)\alpha_2(Y)}.$$

1.5 Copule de survie

Soit (X, Y) une paire aléatoire de fonction de répartition H et de fonction de survie $\overline{H}$. Soient F et G les fonctions de répartition marginale de X et Y. Alors pour tous $x,\, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\overline{H}(x,y) = P(X > x, Y > y) &= 1 - P(X \leq x) - P(Y \leq y) + P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= 1 - F(x) - G(y) + H(x,y) = 1 - F(x) - G(y) + C\{F(x), G(y)\} \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C\{1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)\}.\end{aligned}$$

En définissant :

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(l - u, 1 - v)\ \forall u,\, v \in \mathbf{I},$$

on peut alors écrire :

$$\overline{H}(x,y) = \hat{C}\left(\overline{F}(x), \overline{G}(y)\right).$$

La fonction $\hat{C}$ est une copule appelée la copule de survie du couple aléatoire (X, Y). Elle permet de lier la fonction de survie jointe aux fonctions de survie marginales.

1.6 Familles de copules

Les copules sont largement utilisées dans plusieurs domaines. Les familles de copules regroupent différentes catégories de ces fonctions, chacune ayant des propriétés distinctes adaptées à divers types de dépendance. Les plus importantes de ces familles sont :

1.6.1 Copules elliptiques

Les copules elliptiques constituent en effet une catégorie de copules basées sur la distribution elliptique multivariée. Elles servent à modéliser la dépendance entre différentes variables aléatoires et se distinguent par leur aptitude à représenter diverses formes d'association. Parmi les membres de cette famille, on retrouve notamment la copule gaussienne et la copule de Student.

Copule Gaussienne (Normale)

Une copule gaussienne, également appelée copule normale, est une mesure de la dépendance entre deux variables. Cette dépendance est décrite de manière similaire à la distribution normale.

Définition 1.6.1 *Soit Φ la fonction de répartition de la distribution normale standard univariée et Ψ la fonction de distribution normale bivariée avec un paramètre* *de corrélation* ρ.

La copule gaussienne bivariée est donnée par

$$C_\rho(u,\, v) = \Psi(\Phi^{-1}(u),\, \Phi^{-1}(v))$$

et, exprime de la façons suivante :

$$C_\rho(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left[\frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)}\right] dsdt. \tag{1.8}$$

Φ^{-1} est la fonction quantile standard de la loi normale $N(0,\, 1)$.
La figure (1.1) la densité de copule gaussienne [5].

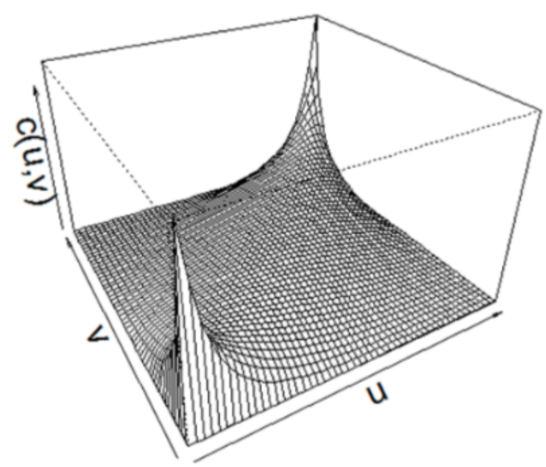

FIG. 1.1 – Densité d'une copule gaussienne bivariée ($\rho = 0.75$)

Par limites, on obtient les cas suivantes :

$$\begin{aligned} C_{-1}(u,v) &= W(u,v), \\ C_0(u,v) &= \Pi(u,v), \\ C_1(u,v) &= M(u,v). \end{aligned}$$

Copule de Student (t-copula)

La copule de Student, également connue sous le nom de t-copula, est une variante de copule qui repose sur la distribution de Student. Contrairement à la copule gaussienne qui est liée à la distribution normale, la copule de Student est associée à la distribution de Student. La formule générale de la copule de Student bivariée est la suivante :

$$C_{\rho,\,v}(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(v)} \exp\left[1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{v(1-\rho^2)}\right]^{-(v+d)/2} dsdt.$$

où T_v^{-1} est la fonction inverse de la distribution standard de Student $T_{\rho,\,v}$ à v degrés de liberté et matrice de corrélation ρ.
La figure (1.2) la densité de la copule Student leur valeur de $\rho = 0$ [5].

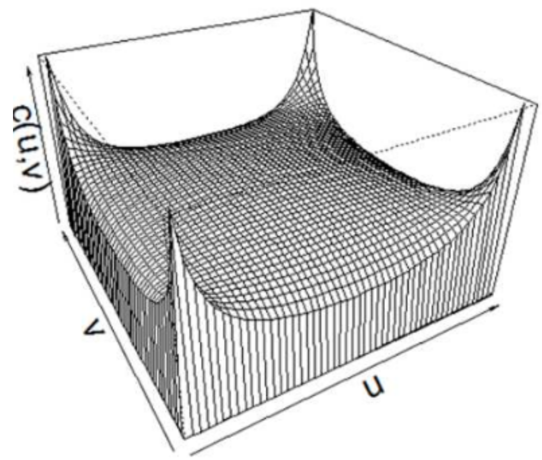

FIG. 1.2 – Densité d'une copule Student bivariée ($\rho = 0$)

1.6.2 Copules archimédiennes

Une classe importante de copules est celle des copules archimédiennes, utilisées pour modéliser la dépendance entre variables aléatoires. Ces copules reposent sur les familles de fonctions archimédiennes, qui sont des fonctions symétriques, décroissantes et continues sur l'intervalle $[0, 1]$. Elles sont définies à l'aide d'une fonction génératrice convexe et décroissante, appelée générateur d'Archimédienne, notée φ. Ainsi, la copule archimédienne est définie comme suit :

$$C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)). \tag{1.9}$$

Cette notion de copule archimédienne a été introduite par Genest et Mackay [11].

Les copules archimédiennes sont particulièrement populaires en raison de leur simplicité, de leur flexibilité et de la variété de copules qu'elles englobent, telles que la copule de Clayton, la copule de Frank et la copule de Gumbel, que nous détaillerons dans le deuxième chapitre.

1.6.3 Copule de valeur extrême

Les copules de valeurs extrêmes sont dérivées de la structure de dépendance des distributions multivariées des valeurs extrêmes généralisées (GEV). Ces copules sont spécifiquement conçues pour modéliser la dépendance entre les valeurs extrêmes de différentes variables aléatoires. Elles sont particulièrement utiles dans les domaines où la corrélation entre les valeurs extrêmes est prédominante.

Définition 1.6.2 *Une copule C_* est appelée copule de valeur extrêmes s'il existe une copule C telle que :*

$$C_*(u,v) = \lim_{n\to\infty} C^n(u^{1/n}, v^{1/n}),\ \forall u,\ v \in [0,1]. \tag{1.10}$$

Théorème 1.6.1 *Soit C une copule des valeurs extrêmes, la fonction $A : [0,1] \to [1/2,1]$ donnée par*

$$A(t) = -\ln C(e^{-(1-t)}, e^{-t}),$$

est appelée la fonction de dépendance de la copule des valeurs extrêmes C_*.

Ainsi, la copule de valeurs extrêmes est définie comme suit :

$$C_*(u,v) = \exp\left\{\ln(uv) A\left(\frac{\ln v}{\ln(uv)}\right)\right\}. \tag{1.11}$$

La fonction A est convexe et satisfait $\max\{t, 1-t\} \le A(t) \le 1$.

Exemple 1.6.1 *La copule de Gumbel-Hougaard est une copule de valeurs extrêmes, en effet*

$$\begin{aligned} C(u^t,\, v^t) &= \exp\{-[(-\ln u^t)^\theta + (-\ln v^t)^\theta]^{1/\theta}\} \\ &= (\exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\})^t \\ &= C(u,v)^t. \end{aligned}$$

1.6.4 Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)

La copule FGM est définie pour un paramètre de dependance $\alpha \in [-1,\, 1]$ par :

$$C_\alpha(u,v) = uv[1 + \alpha(1-u)(1-v)]. \tag{1.12}$$

La densité est :

$$c_\alpha(u,v) = 1 + \alpha(1 - 2u - 2v + 4uv).$$

1.7 Copules concaves et convexes

Définition 1.7.1 *Soit C une copule, pour toute (a,b) et $(c,d) \in \mathbf{I}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{I}$:*

1. *C est concave si :*

$$C\left(\lambda a + (1-\lambda)\, c,\ \lambda b + (1-\lambda)\, d\right) \geq \lambda C(a,b) + (1-\lambda)\, C(c,d).$$

La copule min *est concave.*

2. *C est convexe si :*

$$C\left(\lambda a + (1-\lambda)\, c,\ \lambda b + (1-\lambda)\, d\right) \leq \lambda C(a,b) + (1-\lambda)\, C(c,d).$$

La copule max *est convexe.*

1.8 Mesure d'association

La concordance est une mesure d'association qui évalue la relation entre deux variables aléatoires. Les copules sont des outils utilisés pour étudier cette concordance. Voici une explication formelle de la concordance et quelques mesures de concordance importantes.

1.8.1 Corrélations linéaires

On définit la notion de coefficient de corrélation de Pearson pour deux variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\mathbf{r}_{X,\,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

où $Cov(X,\, Y)$ est la covariance de X et Y définie par

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1.8.2 Mesures de Concordance

Définition 1.8.1 (Notion de concordance)

Soient (X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n) un échantellon d'un couple de variables aléatoires (X,Y). Il existe C_n^2 paires distinctes de couple (X_i,Y_i) et (X_j,Y_j) qui sont concordantes ou discordantes.

Définition 1.8.2 ***Concordance :***

$$\begin{cases} (X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0, \\ i.e\ (X_i > X_j\ \text{ et } Y_i > Y_j)\ \text{ ou } (X_i < X_j\ \text{ et } Y_i < Y_j). \end{cases}$$

Discordance :

$$\begin{cases} (X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0, \\ i.e\ (X_i > X_j\ \text{ et } Y_i < Y_j)\ \text{ ou } (X_i < X_j\ \text{ et } Y_i > Y_j). \end{cases}$$

Définition 1.8.3 (Mesure de concordance)

Une mesure numérique d'association K entre deux variables aléatoires continues X et Y, dont la copule est représentée par C, est considérée comme une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes (notée $K_{X,Y}$).

Définition 1.8.4

1. *$K_{X,Y}$ est définie pour chaque couple $(X,\ Y)$ de variables aléatoires continues.*
2. *$-1 \leq K_{X,Y} \leq 1$, et $K_{X,-X} = -1$.*
3. *$K_{X,Y} = K_{Y,X}$.*
4. *$K_{X,Y} = 0$, si X et Y sont indépendants.*
5. *$K_{-X,Y} = K_{X,-Y} = -K_{X,Y}$.*
6. *Si C_1 et C_2 sont des copules telles que $C_1 < C_2$, alors $K_{C_1} \leq K_{C_2}$.*
7. *Si $(X_n,\ Y_n)$ est une suite de variables aléatoires continues de copule C_n et C_n converge vers C, alors :*
$$\lim_{n\to\infty} K_{X_n,Y_n} = K_{X,Y}.$$

1.8.3 Tau de Kendall et Rho de Spearman

Les coefficients de corrélation de Tau de Kendall et de Rho de Spearman sont deux mesures de corrélation non paramétriques utilisées pour évaluer l'association entre deux variables aléatoires. Ils revêtent une importance significative dans le domaine des statistiques non paramétriques.

Définition 1.8.5 *Le coefficient de corrélation de Kendall pour les paires $(X_1,\ Y_1)$ et $(X_2,\ Y_2)$ est défini comme suit :*

$$\tau = Q = P((X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0) - P((X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0),\ \tau \in [-1, 1]. \quad (1.13)$$

Théorème 1.8.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires continues avec une copule C. Le coefficient de corrélation de Kendall entre X et Y est défini comme suit :*

$$\begin{aligned} \tau &= 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1. \\ &= 4E(C(U,V)) - 1 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Définition 1.8.6 ***(Rho de Spearman)*** *Tout comme le tau de Kendall, la version de la mesure d'association de la population connue sous le nom de rho de Spearman repose sur la concordance et la discordance. Soient (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) trois vecteurs i.i.d, le rho de Spearman est défini par*

$$\rho = 3[P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)]. \tag{1.15}$$

Théorème 1.8.2 *Soit (X, Y) vecteur de vas continues avec copule C. Le rho de Spearman de X et Y est défini par*

$$\rho = 12\int_0^1 \int_0^1 C(u, v)dudv - 3, \ \rho \in [-1, 1]. \tag{1.16}$$

Dans le tableau 1.1 de Tau de Kendall et Rho de Spearman de quelques copules.

Copule	**tau de Kendall**	**rho de Spearman**
Produit	0	0
Normal	$\frac{2}{\pi}\arcsin\theta$	$\frac{6}{\pi}\arcsin(\theta/2)$
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	Pas de forme fermée
FGM	$\frac{2\theta}{9}$	$\frac{1\theta}{3}$

TAB. 1.1 – Tau de Kendall et Rho de Spearman de quelques copules.

1.8.4 Dépendance de queue

La dépendance de queue est une mesure locale qui évalue la dépendance au niveau des queues de distribution. Cette mesure revêt une importance significative dans le contexte des copules de valeurs extrêmes. Deux coefficients de dépendance de queue sont définis comme suit :

Soient X et Y deux *vas* continues avec des fonctions de répartition respectives F et G.

Le coefficient de dépendance de queue inférieure (lower tail dependence coefficient) de (X, Y) est défini par :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \to 0^-} P(X \leq F^{-1}(u) \backslash Y \leq G^{-1}(u)).$$

Le coefficient de dépendance de queue supérieure (upper tail dependence coefficient) de (X, Y) est défini par :

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \to 1^+} P(X > F^{-1}(u) \backslash Y > G^{-1}(u)).$$

La dépendance de la queue inférieure peut être exprimée en utilisant la notion de copule :

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0^-} \frac{C(u,\, u)}{u}, \tag{1.17}$$

où C est une copule bivariée.

La dépendance de la queue supérieure peut être définie de manière analogue à la variable λ_L :

$$\lambda_U = \lim_{u \to 0^-} \frac{1 - C(u,\, u)}{1 - u} = \lim_{u \to 1^+} \frac{1 - 2u + C(u,\, u)}{1 - u}. \tag{1.18}$$

Pour la preuve, voir [16] page. 214.

Remarque 1.8.1
1. *$\lambda_L \in [0,\, 1] \Longrightarrow C$ a une dépendance de queue inférieure.*
2. *$\lambda_U \in [0, 1] \Longrightarrow C$ a une dépendance de queue supérieure.*
3. *$\lambda_L = 0 \Longrightarrow C$ n'a pas de dépendance de queue inférieure.*
4. *$\lambda_U = 0 \Longrightarrow C$ n'a pas de dépendance de queue supérieure.*

Dans la table (1.2), les coefficients de dépendance de queues de quelques copules :

Copule $C(u,v)$	λ_L	λ_U
Gaussienne	0	0
Frank	0	0
Gumbel	0	$2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}$
Clayton	$2^{\frac{1}{\alpha}}$	0

Tab. 1.2 – Dépendance de la queue de quelque copules.

Chapitre 2

Copules Archimédiennes

Les copules archimédiennes représentent une classe de copules paramétriques extrêmement importantes et populaires en statistiques. Elles ont été largement étudiées par les statisticiens canadiens Christian Genest et Louis-Paul Rivest [13]. De plus, certaines copules archimédiennes spécifiques, comme la copule de Gumbel et la copule de Clayton, avaient déjà été examinées par des auteurs tels que E.J. Gumbel et D.G. Clayton avant les travaux de Sklar. Ces copules archimédiennes sont souvent utilisées dans divers domaines, notamment la finance, l'assurance, la météorologie et d'autres domaines où la modélisation de la dépendance entre variables aléatoires est nécessaire.

Ces copules possèdent des propriétés mathématiques et statistiques intéressantes et sont relativement simples à construire, étant définies grâce à un générateur φ (Genest et Mackay, 1986) [10].

Définition 2.0.7 $\varphi : \mathbf{I} \to \mathbb{R}_+^*$ *une fonction continue et strictement décroissante où* $\varphi(1) = 0$, $\varphi^{[-1]}$ *le pseudo inverse de* φ *est défini comme suit :*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & si \quad 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & si \quad \varphi(0) \leq t \leq +\infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

$\varphi^{[-1]}$ *est continue, non croissante sur* $[0,\infty]$ *et strictement décroissante sur* $[0,\varphi(0)]$.

En plus, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ sur $[0,1]$ et

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & si \quad 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0) & si \quad \varphi(0) \leq t \leq +\infty. \end{cases} \tag{2.2}$$
$$= \min(t, \varphi(0)).$$

Ainsi, si $\varphi(0) = \infty$, alors $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Considérons une fonction de distribution bivariée $H(x,y)$ avec les marginales $F(x)$ et $G(y)$. Elle est dite générée par une copule archimédienne si elle peut être exprimée sous la forme

$$H(x, y) = \varphi^{[-1]}[\varphi\{F(x)\} + \varphi\{G(y)\}]. \tag{2.3}$$

Cette copule est appelée une copule archimédienne de la forme

$$C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \tag{2.4}$$

Lemme 2.0.1 *Soit φ une fonction continue et strictement décroissante de l'intervalle $\mathbf{I}$ à $[0, \infty]$ telle que $\varphi(1) = 0$, et que $\varphi^{[-1]}$ soit le pseudo-inverse de φ défini par (2.1). Soit la fonction C de $\mathbf{I}^2$ à $\mathbf{I}$ donnée par*

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \tag{2.5}$$

Ensuite, C satisfait aux conditions aux limites (1) et (2) pour une copule.

Théorème 2.0.3 *[16] Soit φ : [0,1] $\to$ [0,∞] une fonction continue et strictement décroissante telle que $\varphi(1) = 0$, et que $\varphi^{[-1]}$ son inverse généralisée définie par (2.1). Soit la fonction C : $[0,1]^2 \to [0, 1]$ définie par (2.5). Cette fonction est une copule si et seulement si φ est convexe.*

Pour la preuve, voir [16] page 111.

Remarque 2.0.2 *La fonction φ est appelée générateur de la copule. Si $\varphi(0) = \infty$, on dit que φ est un générateur strict et $C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ est dite une copule archimédienne stricte.*

Remarque 2.0.3 *φ est dite non-stricte si $\varphi(0) < 1$.*

2.1 Propriétés d'une copule Archimédienne

Soit Φ_φ la classe des applications continues, strictement décroissantes et convexes, et φ où appartient à Φ_φ, pour φ : [0,1] $\to$ [0,∞] et $\varphi(1) = 0$.

Considérons la fonction

$$H(x,y) = \varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)] \tag{2.6}$$

où il est convenu de poser $H(x,\, y) = 0$ lorsque $\varphi(x) + \varphi(y) \geq 0$.

Théorème 2.1.1 *Soit C une copule archimédienne de générateur φ. Alors pour tous $u,\, v \in [0,1]$*

$$\varphi'(u)\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} = \varphi'(v)\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}. \tag{2.7}$$

Théorème 2.1.2 *Soit C une copule archimèdienne de générateur φ alors :*

(i) ***La symétrie :*** *pour tous $u,\, v \in [0,\, 1]$, on a*

$$C(u,v) = C(v,u).$$

(ii) ***L'associativité :*** *pour tout $u,\, v,\, w \in [0,1]$*

$$C(C(u,v),w) = C(u,C(v,w)).$$

Preuve. pour (2.5) alors

$$\begin{aligned}
C(C(u,v),w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u,v)) + \varphi(w)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + (\varphi(C(u,\, w))) = C(u{,}C(v{,}w)).
\end{aligned}$$

Donc C est associative. ■

La densité d'une copule archimédienne

La densité d'une copule archimédienne C_θ de générateur φ est deux fois différentiable, et on a

$$c_\theta(u,v) = -\frac{\varphi''\left(C_\theta(u,v)\right)\varphi'(u)\varphi'(v)}{\left[\varphi'(C_\theta(u,v))\right]^3}. \tag{2.8}$$

Remarque 2.1.1 *L'associativité des copules archimédiennes n'est pas nécessairement une propriété commune pour toutes les copules.*

Exemple 2.1.1 *[16]Soit C_α un membre de la famille des copules bivariées de Farlie Gembel-Morgestern, c'est-à-dire*

$$C_\alpha(u,v) = uv[1 + \alpha(1-u)(1-v)],$$

pour $\alpha \in [-1,\, 1]$.

$$C_\alpha\left(\frac{1}{4},\, C_\alpha(\frac{1}{2},\, \frac{1}{3})\right) \neq C_\alpha\left(C_\alpha(\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}),\, \frac{1}{3}\right)$$

Pour tout $\alpha \in [-1,1]\backslash\{0\}$ la copule FGM n'est pas archimédienne, alors le seul membre de la famille des copules bivariées de FGM qui est archimédienne est la copule Π correspondant au cas $\alpha = 0$.

Définition 2.1.1 *Une copule C induit une mesure de probabilité μ_C dite C-mesure donnée par*

$$\mu_C\left\{[0,\, u][0,\, v]\right\} = C(u,v)$$

La C-mesure d'un sous ensemble mesurable A de $\mathbf{I}^2$ est la probabilité que deux variables aléatoires uniformes $(u,\, v) \in \mathbf{I}^2$ avec une fonction de distribution conjointe C à valeur dans A.

Les ensembles de niveau pour une copule C sont donnés par

$$A_t(C) = \left\{(u,v) \in \mathbf{I}^2 \mid C(u,v) = t\right\}$$

Pour une copule d'Archimédienne et pour $t > 0$, cet ensemble de niveaux se compose des points sur la courbe de niveau $\varphi\,(u) + \varphi\,(v) = \varphi\,(t)$ dans $\mathbf{I}^2$ qui relie les points

$(1,\, t)$ et $(t,\, 1)$. Nous écrirons souvent la courbe de niveau comme $v = L_t(u)$, comme résolution pour v en fonction des rendements u,

$$v = L_t(u) = \varphi^{[-1]}\left(\varphi\left(t\right) - \varphi\left(u\right)\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi\left(t\right) - \varphi\left(u\right)\right).$$

Remarque 2.1.2 *Pour $t = 0$, nous appelons $\{(u, v) \in \mathbf{I}^2 \mid C(u, v) = 0\}$ l'ensemble zéro de C, et dénote $Z(C)$.*
Les courbes de niveau d'une copule d'Archimèdienne sont convexes.

Théorème 2.1.3 *Soit C une copule Archimédienne générée par φ. Soit $K_C(t)$ la $C-$mesure de l'ensemble $\{(u,\, v) \in \mathbf{I}^2 \,|C(u, v) \leq t\}$, ou équivalent, de l'ensemble*

$$\{(u,\, v) \in \mathbf{I}\,|\varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(t)\}\,,$$

alors $\forall t \in \mathbf{I}$

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \tag{2.9}$$

Théorème 2.1.4 *Soit C une copule Archimédienne générée par φ. Soit $K'_C(t)$ la C-mesure de l'ensemble $\{(u,\, v) \in \mathbf{I}^2 \,|u \leq s,\, C(u, v) \leq t\}$, alors $\forall t,\, s \in \mathbf{I}$*

$$K'_C(t) = \begin{cases} s, & s \leq t \\ t - \dfrac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\varphi'(t^+)}, & s > t. \end{cases} \tag{2.10}$$

Preuve. Pour la preuve voir [16] page 128. ■

Corollaire 2.1.1 *Soient U et V deux vas uniformes sur $\mathbf{I}$ dont la fonction de distribution conjointe est la copule archimédienne C générée par φ dans $\mathbf{I}$. Ensuite, la fonction K_C donnée par (2.9) est la fonction de distribution de la variable aléatoire $C(u,\, v)$. De plus, la fonction K'_C donnée par (2.10) est la fonction de distribution conjointe de U et $C(u,\, v)$.*

Le tau de Kendall

Théorème 2.1.5 ***(Corollaire 5.1.4 de [16])*** *Soient X et Y deux vas continues de copule archimédienne C et de fonction génératrice φ, alors le tau de Kendall de X et Y est donné par :*

$$\tau_\theta = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \tag{2.11}$$

Soient U et V deux vas uniformes sur dont la fonction de distribution conjointe est

C. Notons K_C la fonction de distribution de $C(U, V)$. De la formule (1.14) on a :

$$\begin{aligned}\tau = 4E(C(U,V)) - 1 &= 4\int_0^1 t dK_C(t) - 1 \\ &= 4\left([tK_C(t)]_0^1 - \int_0^1 K_C(t)dt\right) - 1 \\ &= 3 - 4\int_0^1 K_C(t)dt.\end{aligned}$$

Par le théorème (2.1.3) et le corollaire (2.1.1), on peut conclure que la fonction de distribution K_C de $C(U,V)$ est

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}.$$

Par conséquent,

$$\tau = 3 - 4\int_0^1 \left[t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}\right] dt = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt,$$

où $\varphi(t^+)$ est remplacé par $\varphi(t)$ dans le dénominateur de l'intégrale, car les fonctions concaves sont différentiables sur leur domaine de définition.

La dependance de queue

Pour une copule archimédienne, les paramètres de dépendance de la queue peuvent être exprimés en termes de limites et impliquant le générateur et son inverse.

Théorème 2.1.6 *Soit C une copule archimédienne avec générateur φ, donc la dépendance de queue donnée par*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\varphi^{-1}(2x)}{1-\varphi^{-1}(x)} = 2 - 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi^{-1'}(2x)}{\varphi^{-1'}(x)} \tag{2.12}$$

et

$$\lambda_L = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi^{-1}(2x)}{\varphi^{-1}(x)} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi^{-1'}(2x)}{\varphi^{-1'}(x)} \tag{2.13}$$

2.2 Familles à un paramètre

Les copules archimédiennes peuvent être construites à volonté à l'aide du théorème 2.0.3, il suffit de trouver des fonctions qui serviront de générateurs, c'est-à-dire des fonctions convexes, décroissantes et continues φ de $\mathbf{I}$ à $[0, \infty[$ avec $\varphi(1) = 0$.

Dans le Tableau 4.1 (voir [16] pages 116-118), nous énumérons certaines familles importantes de copules d'archimédienne à un paramètre, ainsi que leurs générateurs, la plage du paramètre et certains cas spéciaux et limitatifs. Les cas limitants sont calculés par des méthodes standard, dont la règle de l'Hôpital, et par des théorèmes.

2.2.1 Exemples de copules Archimédiennes

La famille de Clayton

La copule de Clayton, aussi appelée copule de Cook et Johnson a été introduite par Clayton (1978).Elle a ensuite été étudiée et utilisée par Cook et Johnson (1981) [6] et par Oakes (1982) [11], bien que son origine ait étudiée par Kimeldorf et Sampson (1975) [14]. La famille de Clayton est la représentation uniforme de la loi logistique du premier order (Gumbel 1961, Satterthwaite et Hutchinson 1978). Nous utilisons la copule de Clayton dans le domaine de la finance (gestion des risques, évaluation des dérivés financiers et tarification des produits financiers complexes) pour modéliser des dépendances positives entre des événements de faible intensité.
La copule de Clayton est définie par

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}},\ \theta > 0. \tag{2.14}$$

et son générateur est

$$\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1).$$

Théorème 2.2.1 *En représentant la famille de Cook et Johnson de la manière (2.14), il est observé que l'application* φ *engendre* C_θ *pour toute valeur* $\theta \geq -1$ *et que* $\lim\limits_{\theta\to 0} \varphi(t) = -\log t$ *on peut donc étendre la famille (2.14) en posant*

$$C_\theta(u,v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1{,}0)]^{-\frac{1}{\theta}},\ \theta \in [-1, \infty[\backslash\{0\}. \tag{2.15}$$

Cette généralisation présente un avantage, car la famille (2.15) possède les caractéristiques conditions (1 et 2) (voir [10] page 149) sont suggérées par Kimeldorf et Sampson [14]. En effet, $C_{-1} = W$, $\lim\limits_{\theta\to 0} C_\theta = \Pi$, $\lim\limits_{\theta\to\infty} C_\theta = M$ *et il est clair que* $\varphi_{\theta_1}/\varphi_{\theta_2}$ *est monotone croissant et pour tout* $-1 \leq \theta_1 < \theta_2 < \infty$.

La densité de la copule Clayton

La densité de la copule de Clayton est donnée par :

$$c_\theta(u,v) = (\theta+1)(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}-2} u^{-\theta-1} v^{-\theta-1}.$$

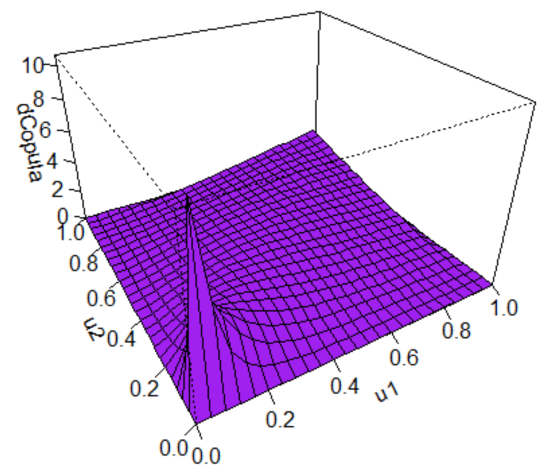

FIG. 2.1 – Densité de la copule de Clayton ($\theta = 1,6$)

Le tau de Kendall

Le tau Kendall associé à une copule Clayton de fonction génératrice $\varphi_\theta(t)$ est $\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta+2}$.

Preuve. on a

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}.$$

Pour calculer le tau de Kendall pour la famille de Clayton, nous pouvons faire appel à la relation (2.11).

$$\begin{aligned}
\tau_\theta &= 1 + 4\int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta}\left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{4}{\theta}\frac{-\theta}{2(\theta+2)} \\
&= \frac{\theta}{\theta+2}.
\end{aligned}$$

■

La dependance de queue

La copule de Clayton est asymétrique et ne détecte pas de dépendance pour de grandes valeurs, c'est-à-dire $\lambda_U = 0$ et $\lambda_L \neq 0$.

On a :

$$\varphi_\theta^{-1}(t) = (1 + \theta t)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Le coefficient de dépendance de queue inférieur est donné par

$$\begin{aligned}\lambda_L &= 2\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^{-1\prime}(2x)}{\varphi^{-1\prime}(x)} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{-(1+2\theta t)^{-\frac{1}{\theta}-1}}{-(1+\theta t)^{-\frac{1}{\theta}-1}} = 2\times 2^{-\frac{1}{\theta}-1}\\ &= 2^{-\frac{1}{\theta}}.\end{aligned}$$

La famille de Gumbel

La copule de Gumbel, nommée d'après Emil Julius Gumbel (1960), est un outil statistique utilisé pour comprendre la relation entre plusieurs variables, avec un accent particulier sur leur comportement lors d'événements extrêmes. C'est une copule basée sur la distribution de Gumbel. Elle appartient à la famille des copules archimédiennes et est particulièrement appréciée pour sa capacité à modéliser la dépendance de la queue supérieure. La copule de Gumbel est particulièrement efficace dans des scénarios comme les marchés financiers, où la compréhension de la corrélation entre les gains ou les pertes extrêmes dans différents actifs est cruciale. La copule de Gumbel est largement utilisée pour modéliser des événements extrêmes dans divers domaines, tels que la finance, l'ingénierie et l'hydrologie.
La copule de Gumbel prend la forme :

$$C_\theta(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right\},\ \theta \geq 1. \tag{2.16}$$

Les copules de Gumbel sont strictement archimédiennes avec le générateur suivant :

$$\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta.$$

Théorème 2.2.2 *Le paramètre de dépendance est limité à l'intervalle* $[0,\,1]$ *comme* $C_1 = \Pi$ *et* $C_\infty = M$*, mais cette copule n'atteint pas la borne inférieure de Fréchet pour aucune valeur de* θ*.*

Rappele : La distribution de Gumbel est un type de distribution de probabilité utilisé pour modéliser la distribution des valeurs extrêmes. C'est un membre de la famille des distributions de valeurs extrêmes, qui sont souvent utilisées dans des domaines tels que l'hydrologie, la météorologie, la finance et l'ingénierie de fiabilité pour modéliser les événements extrêmes. La distribution de Gumbel est donnée par $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$.

Remarque 2.2.1 *Les distributions de Gumbel sont les seules distributions de valeurs extrêmes max dont la fonction de dépendance est une copule archimédienne.*

Densité de la copule Gumbel

La densité de la copule de Gumbel est

$$c_\theta(u,v) = C_\theta(u,\, v)\left[\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v)\right]^{\frac{1}{\theta}-2}\left[\theta - 1 + (\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v))^{\frac{1}{\theta}}\right]\frac{\varphi_{\theta-1}(u)\varphi_{\theta-1}(v)}{uv},\ \forall u,\, v \in \left]0{,}1\right[.$$

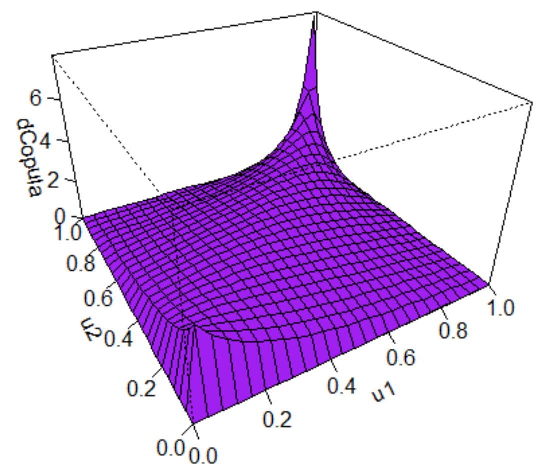

Fig. 2.2 – Densité de la copule de Gumbel ($\theta = 1,8$)

Le tau Kendall. Le tau de kendall pour la famille de Gumbel est défini par

$$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta}$$

Preuve. on a

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{t\ln t}{\theta}$$

donc ■

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt = 1 + 4\int_0^1 \frac{t\ln t}{\theta}dt = 1 + \frac{4}{\theta}\left(\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2}dt\right)\\ &= 1 + \frac{4}{\theta}\left(0 - \frac{1}{4}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{\theta}\end{aligned}$$

La dependance de queue Considérons la famille de Gumbel, rappelons que $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$ avec $\theta \geq 1$.
La fonction génératrice inverse est donnée par :

$$\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{\frac{1}{\theta}})$$

Par conséquent,

$$\varphi^{-1\prime}(t) = \frac{-t^{\frac{1}{\theta}-1}\exp(-t^{\frac{1}{\theta}})}{\theta}$$

En utilisant le théorème 2.1.6, on aura

$$\begin{aligned}\lambda_U &= 2 - 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi^{-1\prime}(2t)}{\varphi^{-1\prime}(t)} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\exp(-(2t)^{\frac{1}{\theta}})}{\exp(-t^{\frac{1}{\theta}})}\right] \\ &= 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}.\end{aligned}$$

De même on a $\lambda_L = 0$.
La queue supérieure de la copule de Gumbel ne ressent que des dépendances positives et est caractérisée par la capacité à représenter des risques dont la structure de dépendance est plus accentuée. Dans le domaine de l'assurance et de la finance, elle est particulièrement adaptée pour analyser l'effet de la survenue d'événements de grande intensité sur la dépendance entre les branches d'assurance ou les actifs financiers.

La famille de Frank

La copule a été introduite par William Frank en 1979. La copule de Frank est en effet un concept significatif en statistique et en théorie des probabilités, en particulier dans la modélisation des risques multivariés. Elle porte le nom de Frank, qui a contribué au développement des copules. Cette copule est définie par une fonction exponentielle et joue un rôle crucial dans la modélisation des structures de dépendance. La copule de Frank est utilisée dans le contexte de l'assurance et de la réassurance, où elle peut modéliser la dépendance entre différents types de risques, tels que les risques de mortalité et de morbidité, ou les risques matériels et accidentels. Elle est également utilisée dans la modélisation du risque de crédit ou l'analyse des événements extrêmes.

La forme de la copule de Frank est définie pour tous u, $v \in [0, 1]$

$$H_\theta(u, v) = C_\theta(u, v) = \log_\theta\left[1 + \frac{(\theta^u - 1)(\theta^v - 1)}{\theta - 1}\right], \theta > 0, \theta \neq 1 \tag{2.17}$$

et le générateur

$$\varphi(t) = \log\left[\frac{(1-\theta)}{(1-\theta^t)}\right], \, t \in [0,1]$$
$$= -\ln\left[\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}\right]$$

Les distributions ont été identifiées par Frank en 1979 dans le cadre des espaces métriques probabilistes et ont été employées par Klement en 1982 pour la construction de $\sigma-$algèbres et de mesures floues [12].

Remarque 2.2.2 *Chaque membre de la famille (2.17) est continu et bénéficie d'un soutien complet sur le carré de l'unité.*

Les applications (2.17) sont les seules copules archimédiennes qui sont invariantes par la transformation $(u,\, v) \to (1-U,\, 1-V)$.

Théorème 2.2.3 *Les distributions de Frank sont intéressantes en partie parce qu'elles répondent à tous les prérequis établis par Kimeldorf et Sampson (1975) [14] pour la création de familles bivariées avec des marginaux fixes. Pour tout $t \in [0,1]$. Notons que la copule d'indépendance ainsi que les bornes de Fréchet- Hoeffding s'obtiennent à partir de cette famille comme suit.*

Pour tous $u,\, v \in [0,1]$.
- $\lim\limits_{\theta \to 0} C_\theta(u,v) = uv = \Pi$,
- $\lim\limits_{\theta \to \infty} C_\theta(u,v) = M(u,v) = \min(u,v)$,
- $\lim\limits_{\theta \to -\infty} C_\theta(u,v) = W(u,v) = \max(u+v-1,\, 0)$.

Théorème 2.2.4 *Frank (1979) a démontré que les distributions (2.17) incluant leurs limites sont les seules copules archimédiennes telles que*

$$H(1-u,\, 1-v) = 1-u-v+H(u,v),$$

Cela signifie que les paires (X,Y) et $(1-X, 1-Y)$ présenteraient la même distribution Frank et que les distributions de la forme (2.18) présentent une représentation équivalente en termes de fonctions de survie, $\overline{F}$, $\overline{G}$ et $H(x,y) = P(X > x,\, Y > y)$ [12].

$$\overline{H}_\theta(u,v) = \log_\theta\left[1 + \frac{(\theta^{\overline{F}(u)} - 1)(\theta^{\overline{G}v)} - 1)}{\theta - 1}\right], \, \theta \neq 1. \tag{2.18}$$

Densité de la copule Frank

Comme indiqué précédemment, $H_\theta(u,v)$ est absolument continu et a un support complet sur le carré de l'unité, sauf lorsque $\theta = 0$ ou ∞, auquel cas $U = V$ ou $V = 1 - U$, respectivement.

Lorsque $0 < \theta < \infty$ la densité de H_θ est donnée par

$$h_\theta(u,v) = c_\theta(u,v) = \frac{(\theta-1)\log(\theta)\,\theta^{u+v}}{\{(\theta-1)+(\theta^u-1)(\theta^v-1)\}^2},\ 0 < u,\ v < 1.$$

Et quand θ approche 1, donc $h_\theta(u,v)$ tend à 1.

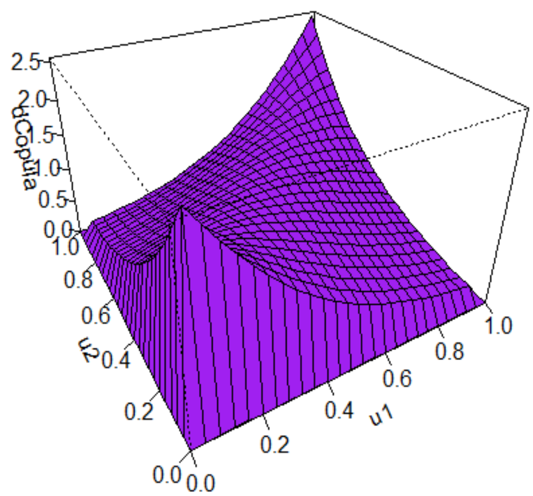

FIG. 2.3 – Densité de la copule de Frank ($\theta = 3$)

Le tau de Kendall et Rho de Spearman [15] La copule de Frank permet de modéliser les dépendances aussi bien positives que négatives. Il est à noter qu'il n'existe pas de dépendance de queue pour cette copule. Le tau de Kendall s'exprime en fonction de θ grâce à la fonction Debye.

Pour $\gamma = -\log\theta$ et $k \geq 1$, la fonction Debye, notée D_k , est définie par

$$D_k(\gamma) = \frac{k}{\gamma}\int_0^\gamma \frac{t^k}{e^t - 1}dt,$$

Ainsi, le tau de Kendall est défini comme suit :

$$\tau(\theta) = 1 + 4\gamma^{-1}\{D_1(\gamma) - 1\} = 1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta)).$$

De plus, le Rho de Spearman est donné par :

$$\rho_\theta = 1 + 12\gamma^{-1}\left\{D_2(\theta) - D_1(\theta)\right\} = 1 - \frac{12}{\theta}\left(D_1(\theta) - D_2(\theta)\right).$$

Remarque 2.2.3 *La famille de Frank n'a pas de dépendance de queue supérieure et inférieure.*

Les membres de la famille de Frank sont les copules archimédiennes qui satisfont l'équation $C_\theta(u,v) = \hat{C}(u,v)$.

En utilisant des copules comme la copule de Frank, les statisticiens peuvent mieux comprendre et modéliser les relations complexes entre les variables, ce qui permet une évaluation plus précise des risques, la modélisation financière et d'autres analyses statistiques qui exigent la saisie de dépendances complexes entre variables.

Théorème 2.2.5 *La copule de Gumbel-Hougaard est également une copule archimèdienne. En réalité, aucune autre copule archimèdienne n'est aussi une copule de valeur extrême.*

2.3 Familles à deux paramètres

2.3.1 Familles de générateurs

Dans cette section, nous examinons d'abord les techniques de génération de familles de générateurs de copules d'Archimédienne à partir d'un seul générateur φ dans Ω. Supposons que φ soit un générateur dans Ω, comme $\varphi(t) = (1/t) - 1$, ou $\varphi(t) = -\ln t$. . En utilisant un tel φ comme base, il est possible de créer des familles paramétriques de générateurs, qui peuvent ensuite être employées pour engendrer des familles de copules archimédiennes.

Théorème 2.3.1 *Soit α et β des nombres réels positifs,et φ dans Ω et défini par*

$$\varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^\alpha) \text{ et } \varphi_{1,\beta}(t) = [\varphi(t)]^\beta \tag{2.19}$$

1. *Si $\beta \geq 1$, alors, $\varphi_{1,\beta}$ est un élément de Ω.*
2. *Si α est dans l'intervalle $[0,\ 1]$, alors $\varphi_{\alpha,1}$ est un élément de Ω.*
3. *Si φ est deux fois différentiable et $t\varphi'(t)$ non décroissante sur $[0,1]$, alors $\varphi_{\alpha,1}$ est un élément de Ω pour tous $\alpha > 0$.*

En ajoutant un paramètre à l'une des familles à un paramètre du tableau 4.1 (voir [16] pages 116-118) à l'aide du théorème 2.3.1, l'exemple suivant montre à quel point il est simple de générer des familles à deux paramètres de copules archimédienne.

Exemple 2.3.1 *(Fang et al. 2000) Pour* θ *dans* $[-1, 1]$, $\varphi_\theta(t) = \ln([1-\theta(1-t)/t])$ *(avec* $\varphi_1(t) = (1/t) - 1$*) génère une copule Ali-Mikhail-Haq définie par*

$$C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}.$$

Étant donné que $t\varphi'(t)$ *non décroissante pour* θ *dans* [0,1]*, la famille de puissance intérieure générée par* φ_θ *est la famille à deux paramètres donnée par*

$$C_{\theta;\alpha,1}(u, v) = \frac{uv}{\left[1 - \theta\left(1-u^{1/\alpha}\right)\left(1-v^{1/\alpha}\right)\right]^\alpha}, \tag{2.20}$$

où $u,\ v \in [0,\ 1]$, $\alpha > 0$ *et* $\theta \in [0,\ 1]$*. Remarquez que* $C_{0;\alpha,1} = \Pi$ *et* $C_{1;\alpha,1}$ *est un membre de la famille Clayton.*

Théorème 2.3.2 *Soit* φ *en* Ω*, et soient* $\varphi_{\alpha,1}$ *et* $\varphi_{1,\beta}$ *donnés par (2.19). Supposez en outre que* $\varphi_{\alpha,1}$ *et* $\varphi_{1,\beta}$ *génèrent respectivement des copules* $C_{\alpha,1}$ *et* $C_{1,\beta}$*.*

Il s'ensuit que $\beta \geq 1$ et α est un élément d'un sous-ensemble A de $(0,\ \infty)$, qui comprend $]0, 1]$.

1. Si $1 \leq \beta_1 \leq \beta_2$, alors $C_{1,\beta_1} \prec C_{1,\beta_2}$.
2. Si $\varphi\left(\left[\varphi^{[-1]}(t)\right]^\theta\right)$ est sous-additif pour tout θ dans $(0,\ 1)$, et si α_1, α_2 sont dans A, alors $\alpha_1 \leq \alpha_2$ implique $C_{\alpha_1,1} \prec C_{\alpha_2,2}$.

Corollaire 2.3.1 *Selon les hypothèses du théorème 2.3.2, si* $\varphi'_\alpha/\varphi_\alpha$ *non décroissante en* α *puis* $\alpha_1 < \alpha_2$ *implique* $C_{\alpha_1,1} \prec C_{\alpha_2,1}$*.*

Théorème 2.3.3 *Soit* φ *en* Ω*, et soient* $\varphi_{\alpha,1}$ *et* $\varphi_{1,\beta}$ *donnés par (2.19). Supposez en outre que* $\varphi_{\alpha,1}$ *et* $\varphi_{1,\beta}$ *génèrent respectivement des copules* $C_{\alpha,1}$ *et* $C_{1,\beta}$*, où* $\beta \geq 1$ *et* α *est un élément d'un sous-ensemble* A *de* $(0,\ \infty)$*, qui comprend* $(0,\ 1]$*.*

Si φ est continuellement différentiable et $\varphi'(1) \neq 0$, alors

1.

$$C_{0,1}(u, v) = \lim_{\alpha \to 0^+} C_{\alpha,1}(u, v) = \Pi(u, v).$$

2.

$$C_{1,\infty}(u, v) = \lim_{\beta \to \infty} C_{1,\beta}(u, v) = M(u, v).$$

2.3.2 Copules Archimédienne rationnelles

On peut facilement trouver dans le tableau 4.1 (voir [16] pages 116-118) des familles de copules archimédiennes qui sont des fonctions rationnelles sur $\mathbf{I}^2 \backslash Z(C)$, c'est-à-dire des copules $C(u, v)$ telles que si $C(u, v) > 0$, alors $C(u, v) = P(u, v)/Q(u, v)$ où P et Q sont des polynômes.

Théorème 2.3.4 *Soit R une fonction réelle rationnelle à é places réduite aux termes les plus plus faible, i.e.,*

$$R(u, v) = \tfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

Où P et Q ssont des polynômes relativement premiers, dont aucun n'est identiquement nul. Alors R est symétrique et associatif si et seulement si

$$R(u, v) = \frac{a_1 uv + b_1(u+v) + c_1}{a_2 + b_2(u+v) + c_2 uv}$$

où

$$\begin{aligned} b_1 b_2 &= c_1 c_2, \\ b_1^2 + b_2 c_1 &= a_1 c_1 + a_2 b_1, \\ b_2^2 + b_1 c_2 &= a_2 c_2 + a_1 b_2. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.5 *La fonction $C_{\alpha,\beta}$ définie sur $\mathbf{I}^2$ par*

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \max\left(\frac{uv - \beta(1-u)(1-v)}{1 - \alpha(1-u)(1-v)}, 0\right) \tag{2.21}$$

est une copule (rationnelle d'archimédienne) si et seulement si $0 \leq \beta \leq 1 - |\alpha|$, et pour $\alpha = b_2/(a_2 + b_2)$ et $\beta = b_1/(a_1 + b_1)$.

Notons que $C_{0,0} = \Pi$, $C_{0,1} = W$.

Corollaire 2.3.2 *Une copule d'archimédienne rationnelle est stricte si et seulement si $\beta = 0$ dans (2.21), si et seulement si elle est un membre de l'Ali-Mikhaïl-Haq famille.*

2.4 La copule archimédienne multivariée

Nous nous intéressons à présent à la construction des copules archimédiennes de dimension n.

L'expression d'une copule de produit, Π peut être formulée ainsi :

$$\Pi(u, v) = uv = \exp(-[(-\ln u) + (-\ln v)])$$

La formule de copule produit de dimension n (Π^n) est obtenue en généralisant le cas à plusieurs dimensions :

$$\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 u_2 \cdots u_n = \exp(-[(-\ln u_1) + (-\ln u_2) + \cdots + (-\ln u_n)])$$

où $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$. Cela conduit naturellement à la généralisation suivante de la formule (2.5).

$$C^n(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_n)) \tag{2.22}$$

Dans le cas 3-dimensionnel,

$$C^3(u_1, u_2, u_3) = \varphi^{[-1]}\left(\varphi \circ \varphi^{[-1]}\left(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\right) + \varphi(u_3)\right) = C(C(u_1, u_2), u_3),$$

Dans le cas 4-dimensionnel,

$$\begin{aligned} C^4(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \varphi^{[-1]}\left(\varphi \circ \varphi^{[-1]}(\varphi \circ \varphi^{[-1]}\left(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\right) + \varphi(u_3)\right) + \varphi(u_4)) \\ &= C(C^3(u_1, u_2, u_3), u_4) = C(C(C(u_1, u_2), u_3), u_4) \end{aligned}$$

Dans le cas général, pour $n \geq 3$,

$$C^n(u_1, u_2, ..., u_n) = C(C^{n-1}(u_1, u_2, ..., u_{n-1}), u_n)$$

La copule de produit est une copule archimédienne. Cependant, la copule n'est pas définie par l'expression (2.22) pour n'importe quelle fonction φ. Par exemple, en prenant $\varphi(t) = (1 - t)$ dans (2.22), on trouve que $C = W$, qui n'est pas une copule pour $n \geq 3$. Il faut donc se demander dans quelles conditions la formule (2.22) donne une copule pour tout n. Des propriétés supplémentaires devront donc être imposées à φ et à φ^{-1}. En réponse à cette question, nous utilisons la notion de fonction complètement monotone telle qu'elle est définie ci-dessous (voir Widder (1941)) [19].

Définition 2.4.1 ***(Widder 1941)*** *Une fonction $g(t)$ est complétement monotone sur un intervalle J si elle est continue sur J et si toutes ses dérivées, d'ordre quelconque, alternent en signe sur J. Autrement dit, pour tout $t \in J$ et $k = 0, 1, 2, \ldots$*

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$$

Définition 2.4.2 *Soit φ une fonction complétement monotone définie de $(0, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$ avec $\varphi(1) = 0$. La fonction $C_\varphi : [0, 1]^n \to [0, 1]$ donnée par :*

$$C_\varphi(u_1, \cdots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_n)) \tag{2.23}$$

est appelée une copule archimédienne n-dimensionnelle de générateur φ.

Widder (1941) a montré que si g est complètement monotone et s'il existe un nombre fini $t > 0$ tel que $g(t) = 0$, alors $g \equiv 0$ sur.$[0\ \infty)$. Par conséquent, si l'inverse généralisé φ^{-1} du générateur de copule d'archimédienne est complètement monotone, il générera nécessairement une copule. De plus, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un générateur strict génère une copule d'archimédienne de dimension n sont données par le théorème suivant.

Théorème 2.4.1 *Soit φ une fonction continue strictement décroissante définie de $[0,\ 1] \to [0,\ 1[$ telle que $\varphi(0) = \infty$ et $\varphi(1) = 0$, et notons φ^{-1} l'inverse de φ. Si C^n est la fonction définie de $[0,\ 1]^n \to [0,\ 1]$ par (2.22), alors C^n est un $n-$copule pour tous $n \geq 2$ si et seulement si φ^{-1} est complètement monotone sur $[0,\ \infty)$.*

Corollaire 2.4.1 *Si l'inverse d'un générateur strict φ d'une copule Archimédienne C est complètement monotone, alors*

$$C \succ \Pi,\ i.e,\ C(u,v) \geq uv \qquad \forall\ u,\ v \in [0,\ 1].$$

Exemple 2.4.1 *Nous pouvons généraliser les familles des copules archimédiennes de $2-$copules à une famille de $n-$copules pour $\theta > 0$ et tout $n \geq 2$:*

La famille de Clayton :

$$C_\theta^n(\mathbf{u}) = \left(u_1^\theta + u_2^\theta + \cdots + u_n^\theta - n + 1\right)^{-1/\theta}.$$

La famille de Frank

$$C_\theta^n(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u_1} - 1\right)\left(e^{-\theta u_2} - 1\right)\cdots\left(e^{-\theta u_n} - 1\right)}{\left(e^{-\theta} - 1\right)^{n-1}}\right).$$

La famille de Gumbel

$$C_\theta^n(\mathbf{u}) = \exp\left(-\left[\sum_{i=1}^{n}\left(-\ln u_i\right)^\theta\right]^{1/\theta}\right).$$

La densité d'une copule archimédienne multivariée :

La densité d'une copule archimédienne est exprimée de la façon suivante.

$$c_\theta^n(u_1,\ ...,\ u_n) = \left(\varphi^{-1}\right)^{(n)}\left(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_n)\right)\prod_{i=1}^{n}\varphi'\left(u_i\right)$$

d'aprés Savu et Trede [17].

Conclusion

Les copules constituent un outil puissant et flexible pour modéliser les structures de dépendance entre variables aléatoires. Grâce à leur capacité à séparer les lois marginales des relations de dépendance, elles permettent de construire des modèles multivariés riches et réalistes, tout en conservant une interprétation intuitive, et c'est ce dont nous avons parlé dans le premier chapitre.

Parmi les différentes familles de copules, les copules archimédiennes se distinguent par leur forme simple et leur propriété de symétrie, ce qui facilite leur utilisation et leur interprétation. Elles offrent une grande flexibilité pour capturer une large gamme de dépendances. Et c'est ce que notre cas était dans le chapitre deux.

Bien que les copules soient devenues un outil incontournable en statistique multivariée, leur développement et leur application restent un domaine de recherche actif.

En particulier les copules archimédiennes, constituent un cadre élégant et puissant pour modéliser les dépendances multivariées, offrant à la fois une flexibilité mathématique et une interprétation intuitive des structures de dépendance.

Bibliographie

[1] Anne-lise, C., Christophe, D., Véronique, L. M., & Triet, N. (2008). Copule de Gumbel.

[2] Benelmir,I. (2018). Modélisation de la dépendance par les copules, Thèse de-doctorat, Universitéde Biskra, Algérie.

[3] Bettaka, S. (2017). Les valeurs extrêmes bivariees, Thèse dedoctorat, Université de Biskra, Algérie.

[4] Cadoux, D., & Loizeau, J. M. (2004). Copules et dépendances : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie. Astin Bulletin.

[5] Chapot, M. (2012). Concepts de dépendance et copules. Université de Sherbrooke, CaMUS 4, 48-71.

[6] Cook, R. D., & Johnson, M. E. (1981). A family of distributions for modeling non-elliptically symmetric multivariate data. J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 43, 210-218.

[7] Dall'Aglio, G. (1956). Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche, 10(1-2), 35-74.

[8] Fisher, N. I. (1997). Copulas. In Encyclopedia of Statistical Sciences (Vol. 1, pp. 159-163).

[9] Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Ann. Univ. Lyon, 3e série, Sciences, Sect. A, 14, 53-77.

[10] Genest, C., & MacKay, R. J. (1986). Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. Canadian Journal of Statistics, 14(2), 145-159.

[11] Genest, C., & MacKay, R. J. (1986). The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform margins. The American Statistician, 40(4), 280-283.

[12] Genest, C. (1987). Frank's family of bivariate distributions. Biometrika, 74(3), 549-555.

[13] Genest, C., & Rivest, L. P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. Journal of the American Statistical Association, 88(423), 1034-1043.

[14] Kimaldorf, G., & Sampson, A. (1975). One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals. Communications in Statistics-Theory and Methods, 4(3), 293-301.

[15] Nelsen, R. B. (1986). Properties of a one-parameter family of bivariate distributions with specified marginals. Communications in Statistics-Theory and Methods, 15(11), 3277-3285.

[16] Nelsen, R. B. (2006). An introduction to copulas (2nd ed.). Springer, New York.

[17] Savu, C., & Trede, M. (2010). Hierarchies of Archimedean copulas. Quantitative Finance, 10(3), 295-304.

[18] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8, 229-231.

[19] Widder, D. V. (1941). The Laplace transform. Princeton University Press, H. Milford, Oxford University Press.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$E(.)$	:	Espérence mathématique.
$V(.)$	:	Variance mathématique.
$Cov(X,Y)$	:	Covariance mathématique du couple (X, Y)
va	:	Variable aléatoire.
$P(A)$	:	Probabilité d'un évènement A.
fds	:	Fonction de distribution.
H	:	Distribution jointe
h	:	Densité de distribution jointe.
F, G	:	fds des lois marginales.
$\mathbf{I}$	:	Intervalle [0, 1]
C	:	Distribution de la copule.
c	:	Densité de la copule.
$\overline{F}$, $\overline{G}$	:	Fonction de survie.
f, g	:	Densités des loi marginales.
F^{-1}	:	Fonction quantile de F.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
X, Y	:	vas réelles.
W	:	Copules maximum.
M	:	Cpules minimum.
$\hat{C}$	:	La copule de survie.
C_*	:	Copule de valeurs extrêmes.
C_ρ	:	Copule Gaussienne (Normale).
φ	:	Fonction génératrice de la copule Archimédienne.
φ^{-1}	:	Fonction quantile de φ.
$\Phi(x)$	:	fd de la va x qui suit la loi normale.
Φ^{-1}	:	La fonction quantile standard de la loi normale.
K	:	Mesure de concordance.
τ	:	Tau de Kendall.
ρ	:	Rho de Spearmen.
$\mathbf{r}_{X,\,Y}$	:	Coefficients de corrélation linéaire.

λ_U, λ_L	:	Dépendance de queue supérieure, inférieure.
$p.s$	:	Prèsque sur.
p.p	:	Prèsque partout.
Φ_φ	:	la classe des applications continues, strictement décroissantes et convexes.
C^n	:	La copule Archimédienne multivariée.
Ω	:	Ensemble de générateurs pour copules d'Archimédienne.
C_α	:	La famille des copules de FarlieGembel-Morgestern.
$i.e.$	:	c'est-à-dire.
$i.i.d$	:	indépendantes identiquement distribuées.
$Z(C)$	:	L'ensemble zéro de C.
Q, P	:	Des polynômes.

الملخص

تستخدم كوبولا لنمذجة بنية التبعية بين اثنين أو أكثر من المتغيرات العشوائية. يناقش هذا العمل مفهوم كوبولا وخصائصه والعائلات المختلفة. يركز على العائلة الأكثر أهمية وشعبية عائلة كوبولا الأرخميدية، والتي تضم العديد من الكوبولا وتغطي مجالات مختلفة.

الكلمات الرئيسية: كوبولا ، التبعية، قياس الارتباط، كوبولا الأرخميدية.

Résumé

La copule est utilisée pour modéliser la structure de dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires. Ce travail discute le concept de copule, ses propriétés et diverses familles. Il se concentre sur la famille la plus importante et la plus populaire, la famille des copules d'Archimédiennes, qui comprend de nombreuses copules et couvre divers domaines.

Mots-clés : copule, dépendance, mesure d'association, copule Archimédienne.

Abstract

Copula is used to model the dependency structure between two or more random variables. This work discusses the concept of copula, its properties and various families. It focuses on the most important and popular family, the Archimedean copula family, which includes many copulas and covers various fields.

Keywords: copula, dependence, association measure, Archimedean copula.