République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour obtenir le diplômede :

MASTER en "Mathématiques Appliquées"

Option : Probabilités

Par :

Smatti Meriem

Titre :

Jeu différentiel stochastique à somme non nulle

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	Mansouri Badreddine	MCA	Président
Dr.	Tamer Lazhar	MCA	Encadreur
Dr.	Mezerdi Mohamed Amine	MCB	Examinateur

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce modest travail à

A la source de mon soutien et de ma patience.**Ma mère**♡ et **mon père**♡

A ma deuxième mère,**Ma grand-mère**♡

A mon frère et mon bras droit **Abd Elkader** ♡

A tous mes frères♡

A mes soeurs ,mon soutien dans la vie **sanaa**♡, **Asia**♡

A ma chère et amie d′enfance **Iman**♡

A mes amis **Aicha**♡,**Ahlem** ♡

A toutes famille **smatti**♡

A tous ceux que m'ont en couragè à pour suivre mes ètudes.

REMERCIEMENTS

A l'issue de ce modeste travail , je tenais à remercier tout d'abord **Dieu** de m'avoir offert tout ce que je possède.

Mes remerciements à ma mère et mon père pour leur patience avec moi pour mon succès et mes rêves.

Je remercier mon encadreur de monmémoire **"Dr.TAMER LAZHAR."**Qui apris tout le soin de m'orienter et de me faire part de ses précieuses remarques surtout ses encouragements et sa disponibilité qui ont grandement contribuer à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier les membres du jury : **"Dr.MANSOURI BADREDDINE."** et **"Dr.MEZERDI MOHAMED AMINE"** pour avoir a ccepté d'étudier et d'évaluer ce travail.

Je remercier aussi tous mes professeurs,ma famille et mes amis.

Merci.

Table des matières

Introduction

En raison de leurs applications dans différents domaines tels que la théorie du contrôle, des jeux, l'économie et la finance, les équations différentielles stochastiques progressives-rétrogrades (EDSPR) ont été étudiées par plusieurs chercheurs. Il existe plusieurs approches pour assurer l'existence de la solution d'une EDSPR. Les auteurs dans [1] et [14] utilisent la méthode de contraction ; [3] et [16] utilisent la méthode du Schéma en Quatre Étapes ; et dans [6], sous la condition de Monotonicité, les auteurs introduisent une autre approche qui assure l'existence et l'unicité de la solution.

Contrairement à l'abondante littérature sur les EDSPR, celles à changement de régime n'ont pas reçu l'attention nécessaire. Bien que les EDS à changement de régime aient été étudiées pour les problèmes de contrôle stochastique récursif, il n'existe pas de bons résultats de posédness pour les EDSPR à changement de régime. Un travail récent a montré que les EDSPR de type moyen à changement de régime est de type conditionnelle (aléatoire) qui résoudre un système d'EDSR de type McKean–Vlasov. Les mesures de champ moyen conditionnelles apparaissent aussi dans des problèmes comme les jeux de champ moyen et le contrôle avec bruit commun. Cette mesure conditionnelle a permis d'établir des principes de maximum pour ces systèmes de diffusion avec chagement de régime voir [11], [13].

Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur le travail de [14], qui apporte des résultats importants.. Nous commençons par utiliser la méthode de continuation et les conditions de monotonie pour examiner la posédness de la solution d'un système d'EDSPR à changement de régime, les EDSPR de type champ moyen à changement de régime, et puis les EDSPR de type champ moyen à changement de régime qui sont représentées par des distributions conditionnelles (aléatoires) des processus en fonction de l'historique d'une chaîne de Markov. Nous terminons notre mémoire en abordant les jeux de champ moyen conditionnels à somme non nulle en utilisant les résultats de posédness pour les EDSPR. Des conditions sur les coefficients du jeu différentiel stochastique linéaire-quadratique conditionnel à somme non nulle et à changement de régime et des stratégies en boucle ouverte sont fournies pour garantir un point d'équilibre de Nash.

Notre mèmoire est divisè en trois chapitre :

Dans le premier chapitre,on donne des généralité sur les processus stochastique qu'on a besion dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre on parle sur les équations différentielles stochastiques à changement de régime.

Dans le troisième chapitre,nous étudions un problème de jeu differentiel de champ moyen conditionnel à somme non nulle.

Chapitre 1

Généralité sur les processus stochastiques

Le but de ce chapitre est de donner des définitions importants et fondamentales, le contenu de ce chapitre est principalement basé sur les livre [2], [5].

1.1 Processus stochastique et filtration

Définition 1.1.1 (processus stochastique) *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est une famille de variables aléatoires* X_t *indexée par un ensemble* T*.En général* $T = \mathbb{R}_+$ *ou* $\mathbb{R}$ *et on considére que le processus est indexé par le temps* $t \in T$*.Si* T *est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.Si* $T = \mathbb{N}$ *alors le processus est une suite de variables aléatoire.Plus généralement quand* $T \subset \mathbb{Z}$ *, le processus est dit discret . Pour* $T \subset \mathbb{R}^d$*, on parle de champ aléatoire (drap quand* $d = 2$*).Un processus dépend de deux paramétres:* $X_t(w)$ *dépendde* t *(en général le temps) et de l'aléatoire* $w \in \Omega$ *:*

1. *Pour* $t \in T$ *fixé ,* $w \in \Omega \to X_t(w)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*;*

2. *Pour* $w \in \Omega$ *fixé ,* $t \in T \to X_t(w)$ *est une fonction à valeurs réelles , appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 (Ègalités de processus) *Deux processus* X *et* Y *ont méme lois s'ils ont méme lois fini-dimensionnelles :pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $t_1, ..., t_p \in T$,

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_p}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, ..., Y_{t_p})$$

On écrira $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ *.On dira que* Y *est une version (ou une modification) du processus* X *si pour tout* $t \in T$*,on a* $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$*.Deux processus* X *et* Y *sont dit indistinguables s'il existe* $N \in \mathcal{F}$ *négligeable.tels que, pour tout* $w \notin N$*, on a* $X_t(w) = Y_t(w)$ *pour tout ,on écrit :* $\mathbb{P}(X_t = Y_t : \forall t \in T\ ) = 1.$

Proposition 1.1.1 *indistinguable* $\Rightarrow$ *modification* $\Rightarrow$ *même lois fini-dimensionnelles.*

Définition 1.1.3 (Filtration) *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*,c'est-à-dire telleque* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leq s$ *.On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans* $\mathcal{F}_0$*,On parle d'hypothéses habituelles si :*

1. les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$,
2. La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \cap_{t<s}\mathcal{F}_s$.

Définition 1.1.4 (processus adapté) *Un processus stochastique* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit adapté (par rapport à une fltration* $\mathcal{F}_t$*) si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* t.

Définition 1.1.5 (processus continu) *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications* $t \longrightarrow X_t(w)$ *sont continues pour presque tout* w.

Définition 1.1.6 (processus càdlàg(resp. càglàd)) *Un processus est dit càdlàg (continu a droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite , pourvues de limites à gauche. Même défnition pour càglad.*

1.2 Martingale

1.2.1 Cas discret

On se donne une filtration, c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_n$ croissante ($\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$) et la tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 1.2.1 (Martingale) *Une suite de v.a.r.* $(X_n,n \in \mathbb{N})$ *est une* $\mathcal{F}_n$*-martingale si :*

1. X_n *est intégrable,* $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. X_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable,* $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Cas continu

On se donne une filtration , c'est-à-dire une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_t$ croissante ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$), et la tribu $\mathcal{F}_0$ contient les négligeables.

Définition 1.2.2 *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in [0,\infty[)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si:*

1. X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable et intégrable pour tout* t.
2. $E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$ $,\forall s \leq t$.

1.3 Temps d'arrêt

On travaille sur un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On note $\mathcal{F}_\infty = \delta(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

Définition 1.3.1 (Temps d'arrêt) *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire* τ *à valeur dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *telle que* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$,$\forall t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3.2 (Processus de Markov) *Soit* X *un processus et* $(\mathcal{F}_t)$ *sa filtration canonique.On dit que le processus est de Markov si ,pour tout* t*, pour toute variable bornée* $Y \in \mathcal{F}_\infty$ *l'´egalité:*

$$E(Y \circ \theta_t / \mathcal{F}_t) = E(Y \circ \theta_t / X_t)$$

où θ *est l'opérateur de translation défini sur les applications coordonnées par*

$$X_u \circ \theta_s = X_{u+s}.$$

Essayons une autre définition. Pour tout n*, pour toute fonction bornée* F *définie sur* $\mathbb{R}^n$*,pour tous* $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \cdots, X_{s+t_n})/\mathcal{F}_s) = E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \cdots, X_{s+t_n})/ X_s).$$

Ceci implique en particulier que pour toute fonction f *borélienne bornée*

$$E(f (X_t)/\mathcal{F}_s) = E(f (X_t)/X_s), \forall t > s.$$

Le processus est dit de Markov fort si la propriété précédente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finis T, S *avec* $T > S$.

1.4 Mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega\ ,\mathcal{F},P)$ et un processus $(B_t,t\geq 0)$ sur cet espace .

Définition 1.4.1 *Le processus* $(B_t,t\geq 0)$ *est un mouvement Brownien (standard) si :*

1. $P(B_0=0)=1$ *(le mouvement Brownien est issu de l'origine).*
2. $\forall s\leq t, B_t-B_s$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $(t-s)$.
3. $\forall n,\ \forall t_i, 0\leq t_0\leq t_1 ...... \leq t_n$,*les variables* $(B_{t_n}-B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1}-B_{t_0}, B_{t_0})$ *sont indépendantes.*

1.5 Intégrale stochastique

1.5.1 Cas de processus étagés

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j, 0\leq t_0\leq t_1...\leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t=\theta_j$ pour tout

$t\in]\ t_j,t_{j+1}]$,soit

$$\theta_s(w)=\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j(w)\Pi_{]t_j,t_{j+1}]}(s).$$

On définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s=\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j(B(t_{j+1})-B(t_j)).$$

On a

$$\begin{cases} E(\int_0^\infty \theta_s dB_s)=0 \\ Var(\int_0^\infty \theta_s dB_s)=E[\int_0^\infty \theta_s^2 d_s] \end{cases}$$

On obtient

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B(t_{j+1} \wedge t) - B(t_j \wedge t)).$$

1.5.2 Cas général

On peut prolonger la définition de l'intégrale deWiener à une classe plus grande de processus. On perd le caractére gaussien de l'intégrale,ce qui est déja le cas pour le cas de processus étagé. On définit les processus càglàd de carré intégrable (appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$) comme l'ensemble Γ des processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que

$$\|\theta\|^2 \overset{déf}{=} E\left[\int_0^\infty \theta_t^2 dt\right] < \infty.$$

1.6 Processus d'Itô

Définition 1.6.1 *Un processus X est un processus d'Itô si :*

$$X_t = x + \int_0^t b_s d_s + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s| ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s pour tout t,et σ un processus appartenant à Λ. On utilise la notation plus concise suivante:

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

1.7 Lemme d'Itô

1.7.1 Premiére forme

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,de classe C^2 à dérivées bornées.Alors :

$$f\ (X_t) = \ f\ (X_0) + \int\limits_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \ f''(X_s)\sigma_s^2 d_s.$$

1.7.2 Fonction dépendant du temps

Théor■me 1.7.1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t,de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées,on a*

$$f\ (t, X_t) = \ f\ (0, X_0) + \int_0^t \ f_t'(s, X_s)d_s + \int_0^t \ f_x'(s, X_s)dXs + \frac{1}{2}\int_0^t \ f_{xx}''(s, X_s)\sigma_s^2 d_s.$$

1.7.3 Cas multidimensionnel

Théor■me 1.7.2 *Soit $(X_i, i = 1, 2)$ deux processus d'Itô tels que*

$$dX_i(t) = \ b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB_t$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.On a

$$\begin{gathered} df\ (X_1(t), X_2(t)) = f_1'(X_1(t), X_2(t))dX_1(t) + f_2'(X_1(t), X_2(t))dX_2(t) \\ +\frac{1}{2}(f_{11}''\sigma_1^2(t) + 2f_{12}''\sigma_1(t)\sigma_2(t) + f_{22}''\sigma_2^2(t))(X_1(t), X_2(t))dt. \end{gathered}$$

où f_i' désigne la dérivée par rapport à $x_i, i = 1, 2$ et f_{ij}'' la dérivée seconde par rapport à x_i, x_j.

1.8 Chaines de markov a temps continu

Définition 1.8.1 $E = \{a_0, a_1, a_3, ..., a_n\}$ *ou* $\{a_n, n \in E\}$: *espace des ètats,* $X_t : \Omega \to E$ *v.a* ,$(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *chaine de markov* $\Leftrightarrow \forall\ s, t \in \mathbb{R}^+$,

$$\textit{loi de} : (X_{s+t}\ /(X_r)_{0\leq\ r\ \leq s}) = \ \textit{loi de}\ (X_{s+t}/X_s)$$

$\Leftrightarrow \forall\ x \in \mathbb{N}, \forall\ x_0, ..., x_n \in E\ \ ,\forall\ 0 < t_1 < ..... < t_n,$

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n\ /\ X_0 = x_0, X_{t_1} = x_1, .., X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$
$$= \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n\ /X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

Note : on supposera toujours les probabilitès de transition $\mathbb{P}(X_{s+t} = y/X_s = x)$ stationnaires (châine de homogène) i.e indèpendantes de s.

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_n} = x_n) =$$
$$\mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1/X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_{t_2} = x_2/X_{t_1} = x_1)....... \times \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n/X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

Notation 1.8.1

$$P_{ij}(t) = \ \mathbb{P}(X_{s+t} = a_j\ /\ X_s = a_i) = \ \mathbb{P}_{a_i}(X_t = a_j)$$

$$\mathbb{P}(X_0 = a_{i_0}, X_{t_1} = a_{i_1}, .., X_{t_n} = a_{i_n}) = \ \mathbb{P}(X_0 = a_{i_0})P_{i_0 i_1}(t_1)P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1)...P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

1.8.1 Semi-groupe

$P(t) = (P_{ij}(t))_{a_i a_j \in E}$, on pose $P(0) = I$ i.e $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$

passage de la loi de X_s à celle de X_t : soit

$$\pi_j(s) = \mathbb{P}(X_s = a_j) \quad \pi(s) = (\pi_j(s))_{a_j\in E}$$

$$\pi(t) = \pi(s)P(t-s) = \pi(0)P(t).$$

Equation de chapman-kolmogorov :

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{a_k \in E} P_{ik}(s)P_{kj}(t)$$

on encore

$$P(s+t) = P(s)P(t)$$

Exemple 1.8.1 *processus de Poisson* $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$

Définition 1.8.2 *1.* $N_t : \Omega \to \mathbb{N}$;

2. $\forall\ 0 < s < t$, $N_t - N_s : \mathcal{P}(\lambda(t-s))$;

3. $\forall\ 0 < t_1 < t_2 < .... < t_n$, $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ *sont indèpendantes.*

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une chaîne de Markov :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t_n} = x_n \ / \ N_{t_1} = x_1, ..., N_{t_{n-1}} = x_{n-1}) &= \frac{\mathbb{P}(N_{t_1}=x_1, N_{t_2}-N_{t_1}=x_2-x_1, ..., N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=x_n-x_{n-1})}{\mathbb{P}(N_{t_1}=x_1, N_{t_2}-N_{t_1}=x_2-x_1, ..., N_{t_{n-1}}-N_{t_{n-2}}=x_{n-1}-x_{n-2})} \\ &= \mathbb{P}(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}) \\ &= P(N_{t_n} = x_n \ / N_{t_{n-1}} = x_{n-1}),\end{aligned}$$

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(N_{s+t} = j \ / N_s = i) = \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = j-i) = \mathbb{P}(N_t = j-i)$$

donc

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } j \geq i \geq 0 \\ 0 & \text{si } \ 0 \leq j \leq i-1 \end{cases}$$

1.8.2 Temps de sauts

On suppose $t \ \to X_t$ continue à droite.Soit

$$T_0 = 0, T_{n+1} = \inf\{t > T_n : \ X_t \neq X_{T_n}\}, n \geq 0$$

ona $T_0 < T_1 < ... < T_n < T_{n+1} < .....$et $X_t = X_{T_n}$ sur $[T_n, T_{n+1}[$,on pose

$$q_{ij} = \mathbb{P}_{a_i}(X_{T_1} = a_j) \text{ et } \quad a_i = \tfrac{1}{\mathbb{E}_{a_i}(T_1)}; Q = (q_{ij})_{a_i,a_j \in E}.$$

On supposera toujours que $T_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ (pas d'explosion), ce qui est réalisé dès que $\sup\limits_{a_i \in E} a_i < \infty$.

Théor■me 1.8.1 $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une chaîne de Markov de matrice de transition* Q*.Les v.a.* $T_1, T_2 - T_1, ..., T_n - T_{n-1}$ *conditionnellement à* $(X_0 = \alpha_{i_0}, X_{T_1} = \alpha_{i_1}, ..., X_{Tn-1} = \alpha_{i_{n-1}})$ *sont indèpendantes de lois* $\xi(\alpha_{i_0}), \xi(\alpha_{i_1}), ..., \xi(\alpha_{i_{n-1}})$*,et* T_1 *et* X_{T_1} *sont indèpendantes.*

Idèe de la dèmonstration

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\alpha_i}(T_1 > s+t) = \mathbb{E}_{\alpha_i}(\Pi_{\{T_1>s\}}\mathbb{P}_{Xs}(T_1 > t)) = && \mathbb{P}_{\alpha_i}(T > s)\mathbb{P}_{\alpha_i}(T > t)\\
&\Rightarrow \mathbb{P}_{\alpha_i}(T_1 > t) = \exp(-\alpha_i t) && \text{pour un } \alpha_i \geq 0\\
&\begin{cases} \text{si } \alpha_i = 0 \text{ , } T_1 = +\infty \text{ p.s .}\\ \text{si } \alpha_i > 0, T_1 : \xi(\alpha_1) \text{ et } \alpha_1 = \frac{1}{\mathbb{E}_{a_i}(T_1)}. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\alpha_i}(T_1 > t, X_{T_1} = \alpha_j) = \quad & \mathbb{E}_{\alpha_i}\left[\ \Pi_{\{T_1>t\}}\mathbb{P}_{X_t}(X_{T_1} = \alpha_j)\right] = \mathbb{P}_{\alpha_i}(T_1 > t)\mathbb{P}_{\alpha_i}(X_{T_1} = \alpha_j) =\\
\exp(-\alpha_i t)q_{ij} \Rightarrow \quad & T_1, X_{T_1} \text{ indèpendantes sous } \mathbb{P}_{\alpha_i}.
\end{aligned}$$

Interprètation :arrivé en α_i ,$(X_t)_{t\geq 0}$ attend un temps $\xi(\alpha_i)$ indépendant de ce qui précède puis saute en α_j avec prdoa q_{ij}, et ainsi de suite.

1.8.3 Générateur infinitèsimal

Définition 1.8.3 $A = (A_{ij})_{\alpha_i,\alpha_j \in E}$,

$$A_{ij} = \begin{cases} \alpha_i q_{ij} & si \ a_i \neq a_j \\ -\alpha_i & si \ a_i = a_j \end{cases}$$

ona $q_{ii} = 0$ *donc*

$$\sum_{\alpha_j \in E} A_{ij} = \quad \alpha_i [\sum_{\alpha_j \in E/\{a_i\}} q_{ij} - 1] = 0.$$

Equations de Kolmogorov

1. $\frac{dp(t)}{dt} = \begin{cases} Ap(t) & \text{(backword ou rètropective)} \\ p(t)A & \text{(forward ou progressive} \end{cases} \underset{\Rightarrow}{\text{siunicètè}}\ P(t) = \exp(tA)$

2. $A = \left. \frac{dp(t)}{dt} \right|_{t=0^+}$ i.e $A_{ij} = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{P_{ij}(t) - P_{i\ j}(0)}{t}$ on core

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \alpha_i q_{ij} t + o(t) & \text{si } a_i \neq a_j \\ 1 - \alpha_i t + o(t) & \text{si } \ a_i = a_j \end{cases}$$

Idée de la démonstration : an admettant que $A = \left. \frac{dp(t)}{dt} \right|_{t=0^+}$,on trouve à l'aide de Chapman-Kolmogorov :

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h) &= \sum_{a_k \in E} P_i k(t) P k_j(h) = \sum_{a_k \in E} P_i k(t) [\delta_{kj} + h\ A_{kj} + o(h)] \\ &= P_{ij}(t) + h \sum_{a_k \in E} P_i k(t)\ A_{kj} + o(h) \Rightarrow P'(t) = P(t)\ A, \end{aligned}$$

et

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{a_k \in E} P_i k(h) P_{k\ j}(t) = P_{ij}(t) + h \sum_{a_k \in E} A_i k P_{k\ j}(t) + o(h) \Rightarrow \quad P'(t) = A\ P(t).$$

1.8.4 Classification des états, ergodicité

soit

$$\tau_{a_j} = \inf\{t > T_1 : X_t = a_j\} \to \begin{cases} 1^{er} \text{ instant d'atteinte de } a_j \text{ sous } \ \mathbb{P}_{a_i} \ \text{ si } a_i \neq a_j \\ 1^{er} \text{ instant de retour en } a_j \text{ sous } \mathbb{P}_{a_j} \text{(après sant)} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
F_{ij}(t) = &\ \mathbb{P}_{\alpha_i}(T_{a_j} < t), \\
f_{ij}^* = &\ \lim_{t \to +\infty} F_{ij}(t) = \mathbb{P}_{\alpha_i}(T_{a_j} < \infty)
\end{aligned}
$$

Définition 1.8.4 *1. a_i récurrent $\Leftrightarrow f_{ii}^* = 1$; a_i transitoire $\Leftrightarrow f_{ii}^* < 1$,*

2. soit a_i rècurrent ,$v_i = \mathbb{E}_{a_i}(\tau_{a_i}) = \int_0^{+\infty} t \ d \ F_{ii}(t)$ (temps moyen de retour);

$$
\begin{cases}
si\ v_i < +\infty, a_i & récurrent\ positif \\
si\ v_i = +\infty, a_i & récurrent\ null
\end{cases}
$$

Critère de récunence :

$$
a_i \ \text{récurrent} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} P_{ii}(t)dt = +\infty
$$

Remarque 1.8.1 $\int_0^{\infty} P_{ij}(t)dt = \mathbb{E}_{a_i}(\int_0^{\infty} \Pi_{\{X_t = a_j\}} dt)$ *: temps de séjour moyen dans l'état a_j depuis a_i.*

Définition 1.8.5 *1. a_j accessible depuis a_i $(a_i \Rightarrow a_j) \Leftrightarrow \exists\ t \geq 0,\ P_{ij}(t) > 0$;*

2. a_i et a_j communiquant $(a_i \leftrightarrow a_j) \Leftrightarrow (a_i \to a_j$ et $a_j \to a_i)$ [on pose $a_i \leftrightarrow a_i$].La chaîne $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est inèductible $\Leftrightarrow$tous les états communiquant.

Proposition 1.8.1 *1. $a_i \leftrightarrow a_j$ (resp a_i récurrent nul ,a_i récurrent positif) pour $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \Leftrightarrow a_i \leftrightarrow a_j$ (resp a_i récurrent nul ,a_i récurrent positif) pour $(X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$*

Thérème ergodique

Soit une chaîne irréductible récurrente .Alors :

1. si récurrence positive :

   $\forall a_i \in E, \lim\limits_{t\to+\infty} P_{ij}(t) \equiv \pi_j \frac{1}{\alpha_j v_j}$ i.e $P(t) \underset{t\to+\infty}{\to} \pi$

   π est l'enique probabilité talle que $\pi A = 0$ ($\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, \pi P(t) = \pi$

   $X_t \underset{t\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} X$ v.a de loi π

2. si récurrence nulle :

$$\forall a_i \in E, \lim_{t\to+\infty} P_{ij}(t) = 0.$$

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques à changement de régime

Dans cette section, nous travaillons sur les équations différentielles stochastiques rétrospectives à changement de regime et dériver des estimations utiles pour l'éxistence de la solution. Ensuite on concentre sur les équations différentielles stochastiques progrssive-rétrograde et fournir des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions.

2.1 EDSR à changement de régime

On désigne par $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^d$,et $x^\intercal$ la transposée de x et $[A, B] = \sum_{i=1}^{d} \langle A_i, B_i\rangle$ pour les matrices A et B de type $d \times d$, notons ,où A_i et $B_i, i = 1, 2, ..., d$,sont respectivement la i -ème colonne de A et B.Pour la suite nous ,les valeurs de la constante $C > 0$ peuvent changer selon de leur apparences. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré complet satisfaisant les conditions habituelles. Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, nous considérons un Brownien $W(\cdot) = (W_1(\cdot), W_2(\cdot), ..., W_d(\cdot))^\intercal$ et une chaîne de Markov en temps continu $\alpha(\cdot)$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ avec un espace d'états fini $\mathcal{M} = \{1, 2, ..., m_0\}$ et un générateur $Q = (q_{i_0 j_0})_{i_0, j_0 \in \mathcal{M}}$ satisfaisant $q_{i_0 j_0} \geq 0$ pour $i_0 \neq j_0 \in \mathcal{M}$ et $\sum_{j_0 \in \mathcal{M}} q_{i_0\ j_0} = 0$ pour chaque $i_0 \in \mathcal{M}$ .Notons par $\mathcal{F}_t^\alpha = \sigma\{\alpha(s) : 0 \leq s \leq t\}, \mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$,et $\mathcal{F}_t^{W,\alpha} = \sigma\{W(s), \alpha(s) : 0 \leq s \leq t\}$.Pour la simplification, nous mettons $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{W,\alpha}$.Notons

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) &= \{\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d, \mathcal{F} - \text{mesurable}, \mathbb{E}|\xi|^2 < \infty\}, \\
S^2(0,T;\mathbb{R}^d) &= \left\{\varphi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d, \text{proc càdlàg adapté à } \mathcal{F}, \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq\ t \leq T} |\varphi_t|^2\right] < \infty\right\}, \\
\mathcal{L}^{\ 0}(0,T,\mathbb{R}^d) &= \left\{\psi : [0,T] \times \Omega\ \to \mathbb{R}^d, \mathcal{F} - \text{proc pro- mes}\right\}, \\
\mathcal{L}^2(0,T,\mathbb{R}^d) &= \left\{\psi \in \mathcal{L}^{\ 0}(0,T,\mathbb{R}^d) : \|\ \psi\|_2^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\psi_t|^2 dt\right] < \infty\right\}.
\end{aligned}
$$

On associé à chaque couple $(i_0, j_0) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ (de l'état de la chaîne de Markov $\alpha(\cdot)$) satisfaisant $i_0 \neq j_0$:

$$
\begin{aligned}
\left[M_{i_0\ j_0}\right](t) &= \sum_{0 \leq\ s\ \leq t} \Pi_{(\alpha(s_-) = i_0)} \Pi_{(\alpha(s) = j_0)}, \\
\langle M_{i_0\ j_0}\rangle(t) &= \int_0^t q_{i_0\ j_0} \Pi_{(\alpha(s-) = i_0)} ds,
\end{aligned}
$$

où Π désigne la fonction indicatrice Il résulte de [4] que le processus $M_{i_0\ j_0}(t)$,défini par

$$
M_{i_0 j_0}(t) = \left[M_{i_0 j_0}\right](t) - \langle M_{i_0\ j_0}\rangle(t)
$$

est une martingale purement discontinue et de carrée intégrable par rapport à $\mathcal{F}_t^\alpha$,qui est nul à l'origine. Les processus $\left[M_{i_0\ j_0}\right](t)$ et $\langle M_{i_0\ j_0}\rangle(t)$ sont les variations optionelle et quadratiques prévisible ,et $M_{i_0\ j_0}(t) = \left[M_{i_0\ j_0}\right](t) = \langle M_{i_0\ j_0}\rangle(t) = 0$ pour tout $i_0 \in \mathcal{M}$.De la définition de la covariation quadratique nous avons la relation d'orthogonalité suivante :

$$[M_{i_0\,j_0}, W] = 0, [M_{i_0\,j_0}, M_{p_0\,q_0}] = 0, \quad ,\text{lorsque } (i_0, j_0) \neq (p_0, q_0),$$

où $[M_{i_0\,j_0}, W]$ et $[M_{i_0\,j_0}, M_{p_0\,q_0}]$ sont les covariations quadratiques optionnelles du paires $(M_{i_0\,j_0}, W)$ et $(M_{i_0\,j_0}, M_{p_0\,q_0})$, respectivement ; voir [4], [8]. On définie :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^d) = \quad & \{\lambda = (\lambda_{i_0 j_0} : i_0 j_0 \in \mathcal{M} \text{ telque } \lambda_{i_0,j_0} \in \mathcal{L}^0(0,T;\mathbb{R}^d) \text{ prévisible },\\ & \lambda_{i_0\,j_0} \equiv 0 \text{ et} \sum_{i_0\,,\,j_0\,\in\mathcal{M}} \mathbb{E}\int_0^T \mid \lambda_{i_0 j_0}(t) \mid^2 d\ \ [M_{i_0\,j_0}](t) < \infty\}. \end{aligned}$$

Pour les processus $\lambda_t = (\lambda_{i_0\,j_0}(t))_{i_0\,j_0 \in\, \mathcal{M}}$, $\mathcal{F}$-prévisibles ,on note par :

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda_s \bullet\ dM_s = \quad & \sum_{i_0,j_0 \in\, \mathcal{M}} \int_0^t \lambda_{i_0 j_0}(s) dM_{i_0 j_0}(s) \text{ et}\\ \lambda_t \bullet\ dM_t = \quad & \sum_{i_0,j_0 \in\, M} \lambda_{i_0 j_0}(t) dM_{i_0 j_0}(t) \end{aligned}$$

Soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathcal{M} \times \Omega \ \to \mathbb{R}^d$ et $\xi \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R}^d)$.Un triple des processus $(Y_t, Z_t, \Lambda_t) \in \mathcal{S}^2(0,T,\mathbb{R}^d) \times\ \mathcal{L}^2(0,T,\mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^d)$ sont appelées une solution du EDSR :

$$\begin{cases} dY_t = F(t, Y_t, Z_t, \alpha_t)dt + Z_t dW_t + \Lambda_t \bullet dM_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

s'ils satisfont l'équation suivante :

$$Y_t = \xi - \int_t^T F(s, Y_s, Z_s, \alpha_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \Lambda_s \bullet dM_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Nous avons l'estimation suivante pour les solutions d'une EDSR à changement de régime 2.1.

Lemme 2.1.1 *Soit* $F_i : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathcal{M} \times \Omega \to \mathbb{R}^d, i = 1,2,$ *satisfaisant :*

$$\mid F_i(t, y_1, \boldsymbol{z}_1, i_0) - F_i(t, y_2, \boldsymbol{z}_2, i_0) \mid \leq \quad C(|y_1 - y_2| + \parallel \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2 \parallel), \ \mathbb{P}.s.$$

pour tout $t \in [0,T], y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbb{R}^{d\times d}$, *et* $i_0 \in \mathcal{M}$.*De plus pour tout* $i = 1,2 \quad, y \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{d\times d},\ i_0 \in \mathcal{M},\ F_i(\cdot, 0, 0, i_0) \in L^2(0,T,\mathbb{R}^d)$ *et* $F_i(t, y, \boldsymbol{z}, i_0)$ *est* $\mathcal{F}$*-adapté .Soit* $\xi_i \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R}^d)$ *et* $(Y_i, Z_i, \Lambda_i), i = 1,2,$ *les solutions des EDSR*

$$Y_i(t) = \quad \xi_i - \int_t^T F_i(s, Y_i(s), Z_i(s), \alpha_i(s))ds - \int_t^T Z_i(s)dWs - \int_t^T \Lambda_i(s) \bullet dMs, t \in [0,T].$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq\ t\ \leq T} \mid Y_1(t) - Y_2(t) \mid^2 + \int_0^T \parallel Z_1(t) - Z_2(t) \parallel^2 dt + \int_0^T \mid \Lambda_1(t) - \Lambda_2(t) \mid^2 \bullet d[M]_t\right) \\
&\leq C\left(\mathbb{E} \mid \xi_1 - \xi_2 \mid^2 + \mathbb{E}\int_0^T \mid F_1(t, Y_1(s), Z_1(s), \alpha(s)) - F_2(t, Y_1(s), Z_1(s), \alpha(s)) \mid^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Notons par

$$\begin{aligned}
\widehat{Y}(\cdot) &= Y_1(\cdot) - Y_2(\cdot), \\
\widehat{Z}(\cdot) &= Z_1(\cdot) - Z_2(\cdot), \\
\widehat{\xi} &= \xi_1 - \xi_2
\end{aligned}$$

et

$$\widehat{F}(\cdot) = \quad F_1(\cdot, Y_1(\cdot), Z_1(\cdot), \alpha(\cdot)) - F_2(\cdot, Y_1(\cdot), Z_1(\cdot), \alpha(\cdot)).$$

On utilise la formule d'Itô pour $|\widehat{Y}(\cdot)|^2$, on a

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{Y}(t)|^2+\int_t^T \parallel \widehat{Z}(s) \parallel^2 ds+\int_t^T \mid \widehat{\Lambda}(s) \mid^2 \bullet d[M]_s \\
&=|\widehat{\xi}|^2-2\int_t^T \left\langle \widehat{Y}(s), F_1(s,Y_1(s),Z_1(s),\alpha(s))-F_2(s,Y_2(s),Z_2(s),\alpha(s))\right\rangle ds \\
&-2\int_t^T \left\langle \widehat{Y}(s),\widehat{Z}(s)dWs\right\rangle-2\int_t^T \left\langle \widehat{Z}(s),\widehat{\Lambda}(s)\bullet dM_s\right\rangle \\
&\leq |\widehat{\xi}|^2+2\int_t^T \left[|\widehat{Y}(s)||\widehat{F}(s)|+C|\widehat{Y}(s)|\left(|\widehat{Y}(s)|+\parallel \widehat{Z}(s)\parallel\right)\right] ds \\
&-2\int_t^T \left\langle \widehat{Y}(s),\widehat{Z}(s)dWs\right\rangle-2\int_t^T \left\langle \widehat{Y}(s),\widehat{\Lambda}(s)\bullet dM_s\right\rangle,
\end{aligned}
$$

ceci implique que :

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{Y}(t)|^2+\frac{1}{2}\int_t^T \parallel \widehat{Z}(s) \parallel^2 ds+\int_t^T \mid \widehat{\Lambda}(s) \mid^2 \bullet d[M]_s \\
&\leq |\widehat{\xi}|^2+\int_t^T \left[(1+2C+2C^2)\,|\widehat{Y}(s)|^2+|\widehat{F}(s)|^2\right] ds \\
&-2\int_t^T \left\langle \widehat{Y}(s),\widehat{Z}(s)dWs\right\rangle-2\int_t^T \left\langle \widehat{Y}(s),\widehat{\Lambda}(s)\bullet dM_s\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

En prenant l'espérence dans les deux côtes de l'inégalité , nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|\widehat{Y}(t)|^2 &\leq \mathbb{E}\left(|\widehat{Y}(t)|^2+\frac{1}{2}\int_t^T \parallel \widehat{Z}(s) \parallel^2 ds+\int_t^T \mid \widehat{\Lambda}(s) \mid^2 \bullet d[M]_s\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(|\widehat{\xi}|^2+\int_0^T |\widehat{F}(s)|^2 ds\right)+(1+2C+2C^2)\int_t^T \mathbb{E}|\widehat{Y}(s)|^2 ds.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Par l'inégalité de Growall,

$$
\mathbb{E}|\widehat{Y}(t)|^2 \leq \quad K_1\mathbb{E}\left(|\widehat{\xi}|^2+\int_0^T |\widehat{F}(s)|^2 ds\right), \forall t\in[0,T]. \tag{2.4}
$$

En utilisant cette inégalité et 2.3 (avec $t=0$) on obtient

$$
\mathbb{E}\left(\int_0^T \parallel \widehat{Z}(s) \parallel^2 ds+\int_0^T \mid \widehat{\Lambda}(s) \mid^2 \bullet d[M]_s\right) \;\leq K_2\mathbb{E}\left(|\widehat{\xi}|^2+\int_0^T |\widehat{F}(s)|^2 ds\right). \tag{2.5}
$$

Ensuite, en utilisant $\int\limits_t^T = \int\limits_0^T - \int\limits_0^t$ pour les intégrales stochastiques dans 2.2, on obtient

$$\begin{aligned}
&|\widehat{Y}(t)|^2 + \tfrac{1}{2}\int\limits_t^T \parallel \widehat{Z}(s) \parallel^2 ds + \int\limits_t^T \mid \widehat{\Lambda}(s) \mid^2 \bullet d[M]_s \\
&\leq |\widehat{\xi}|^2 + \int\limits_t^T \left[(1+2C+2C^2)\,|\widehat{Y}(s)|^2 + |\widehat{F}(s)|^2)\right] ds \\
&-2\int\limits_0^T \left\langle \widehat{Y}(s), \widehat{Z}(s)dWs \right\rangle - 2\int\limits_0^T \left\langle \widehat{Y}(s), \widehat{\Lambda}(s) \bullet dM_s \right\rangle \\
&+2\int\limits_0^t \left\langle \widehat{Y}(s), \widehat{Z}(s)dWs \right\rangle + 2\int\limits_0^t \left\langle \widehat{Y}(s), \widehat{\Lambda}(s) \bullet dM_s \right\rangle .
\end{aligned}$$

Par la suite par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, l'inégalité de Holder et l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}(t)|^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\widehat{\xi}|^2 + (1+2C+2C^2)\int\limits_0^T |\widehat{Y}(s)|^2 ds + \int\limits_0^T |\widehat{F}(s)|^2 ds\right] \\
&+4\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\int\limits_0^t \left\langle \widehat{Y}(s), \widehat{Z}(s)dWs \right\rangle\right|\right] + 4\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\int\limits_0^t \left\langle \widehat{Y}(s), \widehat{\Lambda}(s) \bullet dM_s \right\rangle\right|\right] \\
&\leq K\mathbb{E}\left(|\widehat{\xi}|^2 + \int\limits_0^T |\widehat{F}(s)|^2 ds\right) + \tfrac{1}{4}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}(t)|^2\right] + K^2\mathbb{E}\int\limits_0^T \parallel \widehat{Z}(s) \parallel^2 ds \\
&+\tfrac{1}{4}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}(t)|^2\right] + K^2\mathbb{E}\int\limits_0^T \mid \widehat{\Lambda}(s) \mid^2 \bullet d[M]_s .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\widehat{Y}(t)|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left(|\widehat{\xi}|^2 + \int\limits_0^T |\widehat{F}(s)|^2 ds + \int\limits_0^T \parallel \widehat{Z}(s) \parallel^2 ds + \int\limits_0^T \mid \widehat{\Lambda}(s) \mid^2 \bullet d[M]_s\right) \\
&\leq C\mathbb{E}\left(|\widehat{\xi}|^2 + \int\limits_0^T |\widehat{F}(s)|^2 ds\right) .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Notons que nous avons utilisé 2.5 dans la dernière inégalité. Encore on combinant

2.5 avec 2.6 qui donne

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\hat{Y}(t)|^2+\int_0^T \parallel \hat{Z}(s)\parallel^2 ds+\int_0^T |\hat{\Lambda}(s)|^2 \bullet d[M]_s\right)$$
$$\leq C\mathbb{E}\left(|\hat{\xi}|^2+\int_0^T|\hat{F}(s)|^2ds\right).$$

Ceci termine la preuve. ■

2.2 EDSPR à changement de régime

Dans cette section, nous présentons quelques résultats auxiliaires. Ces résultats serviront à prouver, les principaux théorèmes dans la sous-section suivante.Plus précisément, nous concentrons sur les équations progressives-rétrogrades à changement de régime sans la présence de termes de champ moyen et fournissions des conditions qui garantissent l'existence et l'unicité des solutions. Soient :

$$\begin{aligned}
f_0: &\quad [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d\times d}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^d,\\
g_0: &\quad [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d\times d}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^d,\\
\sigma_0: &\quad [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d\times d}\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{d\times d},\\
h_0: &\quad \Omega\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^d,
\end{aligned}$$

des fonctions mesurables par rapport a la tribu de Borel. On considère un processus mesurable $(X_t,Y_t,Z_t,\Lambda_t)\in\mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{L}^2(0,T,\mathbb{R}^d)\times\mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^d)$ qui est la solution du problème

$$\begin{cases}
X_t &= \xi+\int_0^t f_0(s,X_s,Y_s,Z_s,\alpha_s)ds+\int_0^t\sigma_0(s,X_s,Y_s,Z_s,\alpha_s)dWs,\\
Y_t &= h_0(X_T,\alpha_T)\\
&-\int_t^T g_0(s,X_s,Y_s,Z_s,\alpha_s)ds-\int_t^T Z_s\,dWs-\int_t^T\Lambda_s\bullet dMs, t\in[0,T].
\end{cases}\tag{2.7}$$

Pour la suite de cette section, nous supposons l'hypothèse suivante.

Hypothèse $\mathbf{A}_0$

($\mathbf{A}_0$1) Pour tout $i_0 \in \mathcal{M}$,les fonctions $f_0(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,i_0), g_0(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,i_0)$,et $\sigma_0(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,i_0)$ sont $\mathbb{F}$-progressivement mesurables et Lipschitz par rapport aux $(x,y,\boldsymbol{z})$ et uniformément en (t,w).Autrement dit,pour $\varphi_0 = f_0, g_0$ ou σ_0,il existe une (déterministe) constante C_θ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $i_0 \in \mathcal{M}$,et $\theta_1 = (x_1,y_1,\boldsymbol{z}_1), \theta_2 = (x_2,y_2,\boldsymbol{z}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}$ on a

$$|\varphi_0(t,\theta_1,i_0) - \varphi_0(t,\theta_2,i_0)| \quad \leq C_\theta \parallel \theta_1 - \theta_2 \parallel, \ \mathbb{P}.s.$$

où $\parallel \theta_1 - \theta_2 \parallel = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\|$.

($\mathbf{A}_0$2) Pour chaque $(x,i_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}$ la fonction $h_0(\cdot,x,i_0)$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.De plus ,$h_0(w,\cdot,i_0)$ est uniformément en (w,i_0).Autrement dit, pour tout $i_0 \in \mathcal{M}$,et $x_1,x_2 \in \mathbb{R}^d$,il existe une constante (déterministe) c telle que

$$|h_0(x_1,i_0) - h_0(x_2,i_0)| \quad \leq c\,|x_1 - x_2|\,, \mathbb{P}.s.$$

Pour $t \in [0,T], i_0 \in \mathcal{M}$,et $\theta_1 = (x_1,y_1,\boldsymbol{z}_1), \theta_2 = (x_2,y_2,\boldsymbol{z}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}$, notons par :

$$\begin{aligned} \Psi_0(t,\theta_1,\theta_2,i_0) \quad &= \langle\ f_0(t,\theta_1,i_0) - f_0(t,\theta_2,i_0)\,, y_1 - y_2\rangle \\ &+ \langle\ g_0(t,\theta_1,i_0) - g_0(t,\theta_2,i_0)\,, x_1 - x_2\rangle \\ &+ [\sigma_0(t,\theta_1,i_0) - \sigma_0(t,\theta_2,i_0)\,, \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2] \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour obtenir l'éxistence et l'unicité de la solution de notre système EDSPR à changement de régime 2.7 on suppose l'hypothèse suivante.

Hypothèse $\mathbf{H}_0$

(H$_0$1) Il existe une constante positive K_h telle que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ et $i_0 \in \mathcal{M}$,

$$\langle h_0(x_1, i_0) - h_0(x_2, i_0), x_1 - x_2 \rangle \geq K_h |x_1 - x_2|^2, \mathbb{P}\text{.s.}$$

(H$_0$2) Il existe une constante positive K_Ψ telle que pour tout $t \in [0,T], \theta_1 = (x_1, y_1, \boldsymbol{z}_1), \theta_2 = (x_2, y_2, \boldsymbol{z}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}$,et $i_0 \in \mathcal{M}$,

$$\Psi_0(t, \theta_1, \theta_2, i_0) \leq -K_\Psi \left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + \|\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2\|^2 \right), \mathbb{P}\text{.s.}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses (A_0) et (H_0), il existe un unique quadruple de processus (X, Y, Z, Λ) qui résoudre le système d'EDSPR à changement de régime 2.7..*

Afin de donner la démonstration du théorème 2.2.1 nous présentons quelques résultats préliminaires sur les EDSPR à changement de régime.Tout d'abord, nous considérons dans le lemme suivant les EDSPR linéaires.

Lemme 2.2.1 *Supposons que $(\overline{f_0}(\cdot), \overline{\sigma}_0(\cdot), \overline{g}_0(\cdot)) \in \mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$ et $\overline{h}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, alors l'EDSPR linéaire suivante*

$$\begin{cases} X_t = & x + \int_0^t \left(-Y_s + \overline{f}_0(s)\right) ds + \int_0^t \left(-Z_s + \overline{\sigma}_0(s)\right) dWs, \\ Y_t = & \left(X_T + \overline{h}_0\right) - \int_t^T \left(-X_s + \overline{g}_0(s)\right) ds - \int_t^T Z_s dWs - \int_t^T \Lambda_s \bullet dMs \end{cases} \tag{2.9}$$

a une unique solution (X, Y, Z, Λ).

Preuve. On considère l'edsr suivante :

$$\overline{Y}_0 = \overline{h}_0 - \int_t^T \left(\overline{Y}_s + \overline{g}_0(s) - \overline{f_0}(s)\right) ds - \int_t^T \left(2\overline{Z}_s - \overline{\sigma}_0(s)\right) dWs - \int_t^T \overline{\Lambda}_s \bullet dMs.$$

D'après théorème (3.4) de [11], l'équation ci-dessus a une unique solution adaptée $(\overline{Y}, \overline{Z}, \overline{\Lambda})$. Ensuite, on résoudre l'équation progressive suivante :

$$X_t = \quad x + \int_0^t \left(-X_s - \overline{Y}_s + \overline{f}_0(s)\right) ds + \int_0^t \left(-\overline{Z}_s + \overline{\sigma}_0(s)\right) dWs$$

et posons $Y = X + \overline{Y}, Z = \overline{Z}$ et $\Lambda = \overline{\Lambda}$.On voit que (X, Y, Z, Λ) est une solution de l'équation 2.9.L'existence est donc assuré et de même l'unicité est similaire à celle du théorème 2.2.1 .Ensuite, pour $y \in \mathbb{R}$, définissons

$$\begin{aligned}
f_0^y(t, x, y, z, i_0) = &\quad y\ f_0(t, x, y, \boldsymbol{z}, i_0) + (1-y)(-y), \\
\sigma_0^y(t, x, y, z, i_0) = &\quad y\ \sigma_0(t, x, y, \boldsymbol{z}, i_0) + (1-y)(-\boldsymbol{z}), \\
g_0^y(t, x, y, z, i_0) = &\quad y g_0(t, x, y, \boldsymbol{z}, i_0) + (1-y)(-x), \\
h_0^y(x, i_0) = &\quad y h_0(x, i_0) + (1-y)x.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

et considérons le système d'équations suivant

$$\begin{cases}
X_t = & x + \int_0^t \left(f_0^y(s, \Theta_s, \alpha_s) + \overline{f}_0(s)\right) ds + \int_0^t (\sigma_0^y(s, \Theta_s, \alpha_s + \overline{\sigma}_0(s)) dWs, \\
Y_t = & \left(h_0^y(X_T, \alpha_T) + \overline{h}_0\right) - \int_t^T (g_0^y(s, \Theta_s, \alpha_s) + \overline{g}_0(s))\, ds \\
& -\int_t^T Z_s dWs - \int_t^T \Lambda_s \bullet dM_s,
\end{cases} \tag{2.11}$$

où $\Theta = (X, Y, Z)$. ■

Lemme 2.2.2 *Supposons que les hypothèses (A_0) et (H_0) sont vérifions. De plus, supposons que pour*$y_0 \in [0, 1)$ *donné et pour tout* $\left(\overline{f}_0(\cdot), \overline{\sigma}_0(\cdot), \overline{g}_0(\cdot), \overline{h}_0\right) \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, *le système 2.11 à une solution adaptée. Alors il existe une constante* $\delta_0 \in (0, 1)$ *dépend uniquement de* C_θ, c, K_h, K_Ψ *et* T , *tels que pour tout* $y \in [y_0, y_0 + \delta_0]$ *et pour tout* $\left(\overline{f}_0(\cdot), \overline{\sigma}_0(\cdot), \overline{g}_0(\cdot), \overline{h}_0\right) \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *,le système.2.11 à une solution* $(X, Y, Z, \Lambda) \in \mathcal{S}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}^2(0, T; \mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{M}^2(0, T, \mathbb{R}^d)$.

Preuve. Au vu de 2.10,

$$
\begin{aligned}
f_0^{y_0+\delta}(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0) &= f_0^{y_0}(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0)+\delta\left(y+f_0(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0)\right),\\
\sigma_0^{y_0+\delta}(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0) &= \sigma_0^{y_0}(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0)+\delta\left(\boldsymbol{z}+\sigma_0(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0)\right),\\
g_0^{y_0+\delta}(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0) &= g_0^{y_0}(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0)+\delta\left(x+g_0(t,x,y,\boldsymbol{z},i_0)\right),\\
h_0^{y_0+\delta}(x,i_0) &= h_0^{y_0}(x,i_0)+\delta\left(-x+h_0(x,i_0)\right)
\end{aligned}
$$

Mettons $(X^0,Y^0,Z^0,\Lambda^0)=(0,0,0,0)$ et $\Theta^n=(X^n,Y^n,Z^n)$ pour $n=0,1,2,$......Selon l'hypothèse,le système récursive suivant à toujours une solution : solutions.

$$
\left\{
\begin{aligned}
X_t^{n+1} = &\; x+\int_0^t\left[f\,{}_0^{y_0}(s,\Theta_s^{n+1},\alpha_s)+\delta(Y_s^n+f_0(s,\Theta_s^n,\alpha_s))+\overline{f}_0(s)\right]ds\\
&+\int_0^t\left[\sigma_0^{y_0}(s,\Theta_s^{n+1},\alpha_s)+\delta(Z_s^n+\sigma_0(s,\Theta_s^n,\alpha))+\overline{\sigma}_0(s)\right]dWs,\\
Y_t^{n+1} = &\left[h_0^{y_0}(X_T^{n+1},\alpha_T)+\delta(-X_T^n+h_0(X_T^n,\alpha_T))+\overline{h}_0\right]\\
&-\int_t^T\left[g_0^{y_0}(s,\Theta_s^{n+1},\alpha_s)+\delta(X_s^n+g_0(s,\Theta_s^n,\alpha_s))+\overline{g}_0(s)\right]ds\\
&-\int_t^T Z_s^{n+1}dWs-\int_t^T\Lambda_s^{n+1}\bullet dMs.
\end{aligned}
\right. \tag{2.12}
$$

On défine $\widehat{\Theta}_t^{n+1}=\Theta_t^{n+1}-\Theta_t^n$ De plus ;

$$
\begin{aligned}
\widehat{X}_t^{n+1} &= X_t^{n+1}-X_t^n, \quad ,\widehat{Y}_t^{n+1} = Y_t^{n+1}-Y_t^n,\\
\widehat{Z}_t^{n+1} &= Z_t^{n+1}-Z_t^n, \quad \widehat{\Lambda}_t^{n+1} = \Lambda_t^{n+1}-\Lambda_t^n.
\end{aligned}
$$

$$
\widehat{h}_0^n(t) := h_0(X_t^n,\alpha_t)-h_0(X_t^{n-1},\alpha_t), \quad \widehat{h}_0^{n,y}(t) := h_0^y(X_t^n,\alpha_t)-h_0^y(X_t^{n-1},\alpha_t),
$$

et, pour $\varphi=f_0,g_0,\sigma_0,$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi}^{n+1}(t) &= \varphi(t,\Theta_t^{n+1},\alpha_t)-\varphi(t,\Theta_t^n,\alpha_t)\\
\widehat{\varphi}^{n+1,y}(t) &= \varphi^{\,y}(t,\Theta_t^{n+1},\alpha_t)-\varphi^y(t,\Theta_t^n,\alpha_t)
\end{aligned}
$$

Applicons la formule d'Itô à $\left\langle \widehat{X}_t^{n+1}, \widehat{Y}_t^{n+1} \right\rangle$ et en prenant l'espérance nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\langle \widehat{X}_T^{n+1}, \widehat{h}_0^{n+1,y_0}(T)\right\rangle &= \delta\mathbb{E}\left\langle \widehat{X}_T^{n+1}, \widehat{X}_T^{n} - \widehat{h}_0^{n}(T)\right\rangle + \mathbb{E}\int_0^T (\left\langle \widehat{X}_s^{n+1}, \widehat{g}_0^{n+1,y_0}(s)\right\rangle \\ &+ \left\langle \widehat{Y}_s^{n+1}, \widehat{f}_0^{n+1,y_0}(s)\right\rangle + \left[\widehat{Z}_s^{n+1}, \widehat{\sigma}_0^{n+1,\, y_0}(s)\right])ds \\ &+\delta\mathbb{E}\int_0^T (\left\langle \widehat{X}_s^{n+1}, \widehat{X}_s^{n} + \widehat{g}_0^{n}(s)\right\rangle + \left\langle \widehat{Y}_s^{n+1}, \widehat{Y}_s^{n} + \widehat{f}_0^{n}(s)\right\rangle \\ &+ \left[\widehat{Z}_s^{n+1}, \widehat{Z}_s^{n} + \widehat{\sigma}_0^{n}(s)\right])ds.\end{aligned}$$

De les hypothèses (A_0) et (H_0), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\left|\widehat{X}_T^{n+1}\right|^2 + \int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n+1}\right\|^2 ds\right) \\ &\leq \tfrac{\delta(1+C)}{K}\mathbb{E}\left(\left|\widehat{X}_T^{n+1}\right|\left|\widehat{X}_T^{n}\right| + \int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n+1}\right\|\left\|\widehat{\Theta}_s^{n}\right\| ds\right).\end{aligned}$$

où $K = \min(1, K_h, K_\Psi)$ et $C = \max(c, C_\theta)$ .L'inégalité de Young implique

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\left|\widehat{X}_T^{n+1}\right|^2 + \int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n+1}\right\|^2 ds\right) \\ &\leq (\tfrac{\delta(1+C)}{K})^2\mathbb{E}\left(\left|\widehat{X}_T^{n}\right|^2 + \int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n}\right\|^2 ds\right).\end{aligned}$$

Rappelons que $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\widehat{X}_T^{n} = &\int_0^T \left[\widehat{f}^{n,y_0}(s) + \delta\left(\widehat{Y}_s^{n-1} + \widehat{f}_0^{n\ -1}(s)\right)\right] ds \\ &+\int_0^T \left[\widehat{\sigma}_0^{n\ ,y_0}(s) + \delta\left(\widehat{Z}_s^{n-1} + \widehat{\sigma}_0^{n\ -1}(s)\right)\right] dWs.\end{aligned}$$

On peut en déduire qu'il existe une constante $c_1 > 0$ qui dépend uniquement de C et T tel que

$$\mathbb{E}\left|\widehat{X}_T^{n}\right|^2 \leq c_1\mathbb{E}\left(\int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n}\right\|^2 ds + \int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n-1}\right\|^2 ds\right), \forall n \geq 1$$

Il existe donc une constante $c_2 > 0$ qui dépend uniquement de C, K et T telle que

$$\mathbb{E}\int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n+1}\right\|^2 ds \leq \ c_2\delta^2\mathbb{E}\left(\int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n}\right\|^2 ds + \int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n-1}\right\|^2 ds\right), \forall n \geq 1.$$

Il existe donc un $\delta_0 \in (0,1)$ qui dépend uniquement de C, K et T tel que lorsque , $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$\mathbb{E}\int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n+1}\right\|^2 ds \leq \ \tfrac{1}{4}\mathbb{E}\int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n}\right\|^2 ds + \tfrac{1}{8}\mathbb{E}\int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n-1}\right\|^2 ds, \forall n \geq 1.$$

Vu au Lemme (4.1) de [[6] ,,il existe une constante $\widehat{c} > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\int_0^T \left\|\widehat{\Theta}_s^{n}\right\|^2 ds \leq \ \widehat{c}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \forall n \geq 0.$$

Ceci implique que $(X_T^n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $(X^n)_{n\geq 0}$,$(Y^n)_{n\geq 0}$ et $(Z^n)_{n\geq 0}$ sont des suites de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$,$\mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^{d\times d})$, respectivement. De plus, comme 2.30 dans la preuve du théorème 2.3.1, $(\Lambda^n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$. Nous désignons respectivement leurs limites par (X,Y,Z,Λ). En passant à la limite dans les équations 2.12, lorsque $0 < \delta \leq \delta_0$, (X,Y,Z,Λ) résout les équations 2.11 pour $y = y_0 + \delta$. Par des estimations standard, nous pouvons montrer que $X, Y \in \mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$. Nous sommes maintenant prêts à prouver le théorème 2.2.1. ■

Preuve du théorème 2.2.1

L'unicité : Supposer que et (X, Y, Z, Λ).et (X', Y', Z', Λ'), sont deux solutions de 2.7 Applicons la formule d'Itô et prenons l'espérence on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\langle X_T' - X_T, h_0(X_T', \alpha_T) - h_0(X_T, \alpha_T)\right\rangle \\
&= \mathbb{E}\int_0^T (\langle X_s{}' - X_s, g_0\left(s, X_s', Y_s', Z_s', \alpha_S\right) - g_0\left(s, X_s, Y_s, Z_s, \alpha_s\right)\rangle \\
&+ \langle Y_s' - Y_s,\ f_0\left(s, X_s', Y_s', Z_s', \alpha_S\right) - f_0\left(s, X_s, Y_s, Z_s, \alpha_s\right)\rangle \\
&+ [Z_s' - Z_s\ ,\ \sigma_0\left(s, X_s', Y_s', Z_s', \alpha_s\right) - \sigma_0\left(s, X_s, Y_s, Z_s, \alpha_s\right)])ds.
\end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse (H_0), on obtient

$$K_h\ \mathbb{E}\left[\left|X_T' - X_T\right|^2\right] + K_\Psi\ \mathbb{E}\int_0^T \left(\left|X_s' - X_s\right|^2 + \left|Y_s' - Y_s\right|^2 + \left\|Z_s' - Z_s\right\|^2\right) ds \leq 0$$

ce qui implique $X_T' = X_T, X' \ = X, Y' = Y$, et $Z' = Z$.De plus, par le Lemme 2.1.1, hypothèse $(\mathrm{A}_0 2)$, et le fait que $X_T' = X_T$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T \left|\Lambda_s' - \Lambda_s\right|^2 \bullet d[M]_s \quad &\leq C\mathbb{E}\left|h_0\left(X\ '_T, \alpha_T\right) - h_0\left(X\ _T, \alpha_T\right)\right|^2 \\
&\leq C\mathbb{E}\left|X_T' - X_T\right|^2 = 0.
\end{aligned}$$

qui imlpique que $\Lambda' = \Lambda$ dans $\mathcal{M}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$.

L'existence : D'après le lemme 2.2.1, lorsque $y = 0$, pour tout $\left(\overline{f}_0(.), \overline{\sigma}_0(.), \overline{g}_0(.)\right) \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ et $\overline{h}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ le système progressive-rétrograde 2.11 à une solution adaptée. Selon le lemme 2.2.2, pour tout $\left(\overline{f}_0(.), \overline{\sigma}_0(.), \overline{g}_0(.)\right) \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ et $\overline{h}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, on peut résoudre successivement le système 2.11 pour le cas $y \in [0, \delta_0], [\delta_0, 2\delta_0], ...$,il s'avère que,lorsque $y = 1$,pour tout $\left(\overline{f}_0(.), \overline{\sigma}_0(.), \overline{g}_0(.)\right) \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ et $\overline{h}_0 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$, la solution de 2.11, existe, alors on en déduit immédiatement que la solution de 2.7 existe.

2.3 EDSPR de champ moyen conditionnelle à changement de régime

Motivé par les problèmes de contrôle et la théorie de jeu pour les systèmes à grande échelle sous environnements aléatoires, dans cette section,nous considérerons les systèmes stochastiques prog-rétro de champ moyen conditionnelle et à changement de régime où les termes du champ moyen sont représentés par des mesures aléatoires,conditionnée par l'historie de la chaîne de Markov. Des conditions d'existence et d'unicité des solutions sont obtenues,qui peuvent être considérées comme des généralisations des résultats de la section précédente.

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu(dx) < \infty \right\}.$$

Soit $W_2(\cdot,\cdot)$ la distance de 2-Wasserstein sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$W_2(\mu, v) = \inf \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^2 \, y\,(dx, dy) \right)^{\frac{1}{2}} : y \in \Gamma(\mu, v) \right\}, \text{pour } \mu, v \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$$

où

$$\Gamma(\mu, v) = \left\{ y \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{2d}) : y(\cdot, \mathbb{R}^d) = \mu, y(\mathbb{R}^d, \cdot) = v \right\}$$

notons que

$$W_2(\mu, v) = \inf \left\{ \left(\mathbb{E} |\xi - \zeta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} : \xi, \zeta \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_\xi = \mu, \mathbb{P}_\zeta = v \right\},$$

ce que implique que

$$W_2\left(\mathbb{P}_\xi, \mathbb{P}_\zeta\right) \leq \left(\mathbb{E} |\xi - \zeta|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, il résulte que pour tout sous-σ-algèbre $\boldsymbol{F}$ de $\mathcal{F}$ et $r \geq 2$,nous avons

$$W_2\left(\mathbb{P}_{(\xi/F)}, \mathbb{P}_{(\zeta/F)}\right) \leq \left[\mathbb{E}(\left|\xi - \zeta\right|^r / F)\right]^{\frac{1}{r}}, \mathbb{P}.\mathrm{s} \tag{2.13}$$

Soit

$$\begin{aligned}
f:&\quad [0,T\ ] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d}) \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^d,\\
g:&\quad [0,T\ ] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d}) \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^d,\\
\sigma:&\quad [0,T\ ] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d}) \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d},\\
h:&\quad \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

des fonctions mesurables par rapport aux σ-algèbre de Borel. On considère le système d'edspr de McKean-Vlasov conditionnel :

$$\begin{cases}
X_t &= \xi + \int\limits_0^t f(s, X_s, Y_s, Z_s, \mathbb{P}_{(X_s, Y_s\ /\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s) ds\\
&+ \int\limits_0^t \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s, \mathbb{P}_{(X_s, Y_s,\ /\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s) dWs,\\
Y_t &= h\left(X_T, \mathbb{P}_{(X_T/\mathcal{F}_T^\alpha)}, \alpha_T\right)\\
&- \int\limits_t^T g(s, X_s, Y_s, Z_s, \mathbb{P}_{(X_s, Y_s, /\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s) ds\\
&- \int\limits_t^T Z_s dWs - \int\limits_t^T \Lambda_s \bullet dM_s \quad , t \in [0,T].
\end{cases} \tag{2.14}$$

Un quadruplet de processus mesurable $(X_t, Y_t, Z_t, \Lambda_t)$ est appelé une solution de 2.14 si $(X_t, Y_t, Z_t, \Lambda_t) \in \mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^{d\times d}) \times \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^d)$ et satisfait 2.14.

Hypothèse A

(A1) Pour tout $i_0 \in \mathcal{M}$ fixe, les fonctions $f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,i_0)$, $g(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,i_0)$,et $\sigma(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,i_0)$ sont $\mathbb{F}$ progressivement-mesurables et Lipschitz par rapport aux (x,y,z,μ) uniformément en (t,w). Autrement dit, pour $\varphi = f, g$ ou σ, il existe des constantes (déterministes) C_θ et C_v tels que pour tout $t \in [0,T\ ], i_0 \in \mathcal{M}, \theta_1 =$

$(x_1, y_1, z_1), \theta_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}$,et $v_1, v_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$:

$$|\varphi(t, \theta_1, v_1, i_0) - \varphi(t, \theta_2, v_2, i_0)| \leq \ C_\theta \|\theta_1 - \theta_2\| + C_v W_2(v_1, v_2), \mathbb{P}\text{.s.}$$

(A2) Pour tout $(x, \mu, i_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}$ fixe, la fonction $h(\cdot, x, \mu, i_0) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$.De plus, $h(w, \cdot, \cdot, i_0)$ est uniformément Lipschitz en (w, i_0).Alors pour tout $i_0 \in \mathcal{M}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$,et $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, il existe des constantess (déterministe) c et C_μ telles que

$$|h(x_1, \mu_1, i_0) - h(x_2, \mu_2, i_0)| \leq \ c\,|x_1 - x_2| + C_\mu W_2(\mu_1, \mu_2), \mathbb{P} - p.s.$$

Pour $t \in [0, T\ ], i_0 \in \mathcal{M}, \theta_1 = (x_1, y_1, \boldsymbol{z}_1), \theta_2 = (x_2, y_2, \boldsymbol{z}_2) \in \mathbb{R}^d \times\ \mathbb{R}^d \times\ \mathbb{R}^{d\times d}$,et $v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$,on note

$$\begin{aligned}\Psi(t, \theta_1, \theta_2, v, i_0) \ &= \langle\ f\ (t, \theta_1, v, i_0) - f\ (t, \theta_2\ , v, i_0), y_1 - y_2\rangle \\ &+ \langle\ g(t, \theta_1, v, i_0) - g(t, \theta_2\ , v, i_0), x_1 - x_2\rangle \\ &+ [\sigma(t, \theta_1, v, i_0) - \sigma(t, \theta_2, v, i_0), z_1 - z_2]\end{aligned} \tag{2.15}$$

Comme dans l'hypothèse (H_0), nous considérons l'hypothèse suivante :

Hypoyhèse H

(H1) Il existe une constante positive K_h telle que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, et $i_0 \in \mathcal{M}$:

$$\langle h(x_1, \mu, i_0) - h(x_2, \mu, i_0), x_1 - x_2\rangle \geq \ K_h\,|x_1 - x_2|^2, \mathbb{P}\text{.s.}$$

(H2) Il existe une constante positive K_Ψ telle que pour tout $t \in [0, T], \theta_1 = (x_1, y_1, z_1), \theta_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}$,et $v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$,et $i_0 \in \mathcal{M}$:

$$\Psi(t, \theta_1, \theta_2, v, i_0) \leq \ -K_\Psi \left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + \|z_1 - z_2\|^2\right), \mathbb{P}\text{.s.}$$

Le théorème suivant peut être considéré comme une extension du théorème 2.2.1.

Théor■me 2.3.1 *Supposons que les hypothèses* (A) *et* (H) *sont vérifions. Si la constante*

$$C_v, C_\mu < \min\left\{\left(\sqrt{3}-1\right)K_h, K_\Psi/\sqrt{3}\right\} \tag{2.16}$$

alors il existe un processus unique (X,Y,Z,Λ) *qui résoudre le système 2.14 d'EDSPR de champ moyen conditionnelle et à changement de régime*

Pour la simplification on suppose que σ ne dépend pas de $\mathbb{P}_{(Xs,Ys/\mathcal{F}_s^\alpha)}$.Par suite notre système 2.14.devient :

$$\begin{cases} X_t = & \xi + \int_0^t f\ (s, X_s, Y_s, Z_s, \mathbb{P}_{(Xs,Ys/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, Y_s, Z_s, \alpha_s)dWs, \\ Y_t = & h(X_T, \mathbb{P}_{(X_T/\mathcal{F}_T^\alpha)}, \alpha_T) - \int_t^T g(s, X_s, Y_s, Z_s, \mathbb{P}_{(Xs,Ys/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s)ds \\ & -\int_t^T Z_s dWs - \int_t^T \Lambda_s \bullet dM_s, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.17}$$

Preuve. Dans cette section, nous prouverons que sous les hypothèses (A) et (H), le système 2.14 de champs moyen conditionnel à changement de régime à une solution unique.La preuve est divisée en deux parties.Tout d'abord,nous prouvons l'existence de la solution. ■

(1) **Existence** : Soit δ un nombre positif fixe. Nous définissons récursivement la suite des processus $(X^n, Y^n, Z^n, \Lambda^n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^{d\times d})\times \mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^d)$ comme suit :$(X^0,Y^0,Z^0,\Lambda^0)\equiv(0,0,0,0)$ et, pour $n\geq 0$,

$(X^{n+1}, Y^{n+1}, Z^{n+1}, \Lambda^{n+1}) \in \mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^{d\times d})\times\mathcal{M}^2(0,T,\mathbb{R}^d)$

qui satisfait l'EDSPR

$$\begin{cases} X_t^{n+1} & = \xi + \int\limits_0^t (f\ (s, X_s^{n+1}, Y_s^{n+1}, Z_s^{n+1}, v_s^n, \alpha_s) - \delta Y_s^{n+1} + \delta Y_s^n) ds \\ & + \int\limits_0^t (\sigma(s, X_s^{n+1}, Y_s^{n+1}, Z_s^{n+1}, v_s^n, \alpha_s) - \delta Z_s^{n+1} + \delta Z_s^n) dWs, \\ Y_t^{n+1} & = h\left(X_T^{n+1}, \mu_T^n, \alpha_T\right) - \int\limits_t^T g(s, X_s^{n+1}, Y_s^{n+1}, Z_s^{n+1}, v_s^n, \alpha_s) ds \\ & - \int\limits_t^T Z_s^{n+1} dWs - \int\limits_t^T \Lambda_s^{n+1} \bullet dM_s, 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{2.18}$$

où $v_s^n := \mathbb{P}_{(X_s^n, Y_s^n / \mathcal{F}_s^\alpha)}$ et $\mu_T^n := \mathbb{P}_{(X\ {}_T^n\ / \mathcal{F}_T^\alpha)}$ Compte tenu du théorème 2.2.1, ce système a une solution unique. Pour $n \geq 0$ et $t \in [0, T]$, notons

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t^{n+1} = X_t^{n+1} - X_t^n, \quad \widehat{Y}_t^{n+1} := Y_t^{n+1} - Y_t^n \\ \widehat{Z}_t^{n+1} := Z_t^{n+1} - Z_t^n, \quad \widehat{\Lambda}_t^{n+1} := \Lambda_t^{n+1} - \Lambda_t^n \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\widehat{h}^n(t) := h(X_t^n, \mu_t^{n-1}, \alpha_t) - h(X_t^{n-1}, \mu_t^{n-2}, \alpha_t)$$

et pour $\Theta^n = (X^n, Y^n, Z^n)$ et $\varphi = f, g, \sigma$,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}^{n+1}(t) := & \quad \varphi(t, \Theta_t^{n+1}, v_t^n, \alpha_t) - \varphi(t, \Theta_t^n, v_t^{n-1}, \alpha_t), \\ \overline{\varphi}^n(t) := & \quad \varphi(t, \Theta_t^n, v_t^n, \alpha_t) - \varphi(t, \Theta_t^n, v_t^{n-1}, \alpha_t). \end{aligned} \tag{2.20}$$

il résulte de 2.13 que

$$W_2^2(v_t^n, v_t^{n-1}) \leq \ \mathbb{E}\left(\left|\widehat{X}_t^n\right|^2 + \left|\widehat{Y}_t^n\right|^2 / \mathcal{F}_t^\alpha\right). \tag{2.21}$$

D'après la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widehat{X}_T^{n+1}, \widehat{Y}_T^{n+1} \right\rangle - \left\langle \widehat{X}_0^{n+1}, \widehat{Y}_0^{n+1} \right\rangle \\
&= \int_0^T \left\langle \widehat{Y}_s^{n+1}, \widehat{f}^{n+1}(s) - \delta \widehat{Y}_s^{n+1} + \delta \widehat{Y}_s^{n} \right\rangle ds \\
&+ \int_0^T \left\langle \widehat{Y}_s^{n+1}, (\widehat{\sigma}^{n+1}(s) - \delta \widehat{Z}_s^{n+1} + \delta \widehat{Z}_s^{n}) dWs \right\rangle \\
&+ \int_0^T \left\langle \widehat{X}_s^{n+1}, \widehat{g}^{n+1}(s) \right\rangle ds + \int_0^T \left\langle \widehat{X}_s^{n+1}, \widehat{Z}_s^{n+1} dWs \right\rangle + \int_0^T \left\langle \widehat{X}_s^{n+1}, \widehat{\Lambda}_s^{n+1} \bullet dM_s \right\rangle \\
&+ \int_0^T \left[\widehat{Z}_s^{n+1}, \widehat{\sigma}^{n+1}(s) - \delta \widehat{Z}_s^{n+1} + \delta \widehat{Z}_s^{n} \right] ds.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

En appliquant les estimations standard des EDSPR et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy,il est facile de voir que les intégrales stochastiques de 2.22 sont des vraies martingales. En prenant l'espérence on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left\langle \widehat{X}_T^{n+1}, h(X_T^{n+1}, \mu_T^{n}\ , \alpha_T) - h(X_T^{n}, \mu_T^{n-1}, \alpha_T) \right\rangle + \delta \mathbb{E} \int_0^T (\left| \widehat{Y}_s^{n+1} \right|^2 + \left\| \widehat{Z}_s^{n+1} \right\|^2) ds \\
&= \delta \mathbb{E} \int_0^T \left(\left\langle \widehat{Y}_s^{n+1}, \widehat{Y}_s^{n} \right\rangle + \left[\widehat{Z}_s^{n+1}, \widehat{Z}_s^{n} \right] \right) ds \\
&+ \mathbb{E} \int_0^T \left(\left\langle \widehat{Y}_s^{n+1}, \widehat{f}^{n+1}(s) \right\rangle + \left\langle \widehat{X}_s^{n+1}, \widehat{g}^{n+1}(s) \right\rangle + \left[\widehat{Z}_s^{n+1}, \widehat{\sigma}^{n+1}(s) \right] \right) ds.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

En utilisant la continuité lipschitzienne de h (hypothèse (A2)), l'inégalité de Young, 2.13 et (H1), nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left\langle \widehat{X}_T^{n+1}, h(X_T^{n+1}, \mu_T^{n}\ , \alpha_T) - h(X_T^{n}, \mu_T^{n-1}, \alpha_T) \right\rangle \\
&= \mathbb{E} \left\langle \widehat{X}_T^{n+1}, h(X_T^{n+1}, \mu_T^{n}, \alpha_T) - h(X_T^{n}, \mu_T^{n}, \alpha_T) \right\rangle + \mathbb{E} \left\langle \widehat{X}_T^{n+1}, h(X_T^{n}, \mu_T^{n}, \alpha_T) - h(X_T^{n}, \mu_T^{n-1}, \alpha_T) \right\rangle \\
&\geq K_h \mathbb{E} \left| \widehat{X}_T^{n+1} \right|^2 - C_\mu \mathbb{E} \left[\left| \widehat{X}_T^{n+1} \right| W_2(\mu_T^{n}, \mu_T^{n-1}) \right] \\
&\geq K_h \mathbb{E} \left| \widehat{X}_T^{n+1} \right|^2 - \tfrac{C_\mu \epsilon}{2} \mathbb{E} \left| \widehat{X}_T^{n+1} \right|^2 - \tfrac{C_\mu}{2\epsilon} \mathbb{E} W_2^2(\mu_T^{n}, \mu_T^{n-1}) \\
&\geq (K_h - \tfrac{C_\mu \epsilon}{2}) \mathbb{E} \left| \widehat{X}_T^{n+1} \right|^2 - \tfrac{C_\mu}{2\epsilon} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\left| \widehat{X}_T^{n} \right|^2 / \mathcal{F}_T^{\alpha} \right) \right] \\
&= (K_h - \tfrac{C_\mu \epsilon}{2}) \mathbb{E} \left| \widehat{X}_T^{n+1} \right|^2 - \tfrac{C_\mu}{2\epsilon} \left| \widehat{X}_T^{n} \right|^2, \forall \epsilon > 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Encore une fois, par la continuité lipschitzienne de f, h, σ, l'inégalité de Young,2.13

et (H2), on a aussi

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \widehat{X}_t^{n+1}, \widehat{g}^{n+1}(t) \right\rangle + \left\langle \widehat{Y}_t^{n+1}, \widehat{f}^{n+1}(t) \right\rangle + \left[\widehat{Z}_t^{n+1}, \widehat{\sigma}^{n+1}(t) \right] \\
&= \Psi\left(t, \Theta_t^{n+1}, \Theta_t^n, v_t^n, \alpha_t\right) + \left\langle \widehat{X}_t^{n+1}, \overline{g}^n(t) \right\rangle + \left\langle \widehat{Y}_t^{n+1}, \overline{f}^n(t) \right\rangle + \left[\widehat{Z}_t^{n+1}, \overline{\sigma}^n(t) \right] \\
&\leq -K_\Psi \left(\left| \widehat{X}_t^{n+1} \right|^2 + \left| \widehat{Y}_t^{n+1} \right|^2 + \left\| \widehat{Z}_t^{n+1} \right\|^2 \right) + \left| \widehat{X}_t^{n+1} \right| \left| \overline{g}^n(t) \right| \\
&+ \left| \widehat{Y}_t^{n+1} \right| \left| \overline{f}^n(t) \right| + \left\| \widehat{Z}_t^{n+1} \right\| \left\| \overline{\sigma}^n(t) \right\| \\
&\leq -K_\Psi \left(\left| \widehat{X}_t^{n+1} \right|^2 + \left| \widehat{Y}_t^{n+1} \right|^2 + \left\| \widehat{Z}_t^{n+1} \right\|^2 \right) \\
&+ C_v W_2(v_t^n, v_t^{n-1}) \left(\left| \widehat{X}_t^{n+1} \right| + \left| \widehat{Y}_t^{n+1} \right| + \left\| \widehat{Z}_t^{n+1} \right\| \right) \\
&\leq \left(\tfrac{C_v}{2y} - K_\Psi \right) \left(\left| \widehat{X}_t^{n+1} \right|^2 + \left| \widehat{Y}_t^{n+1} \right|^2 + \left\| \widehat{Z}_t^{n+1} \right\|^2 \right) \\
&+ \tfrac{3yC_v}{2} W_2^2(v_t^n, v_t^{n-1}), \forall t \in [0,T], y > 0.
\end{aligned}
$$

Or, il résulte de 2.21 que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \left(\left\langle \widehat{X}_s^{n+1}, \widehat{g}^{n+1}(s) \right\rangle + \left\langle \widehat{Y}_s^{n+1}, \ \widehat{f}^{n+1}(s) \right\rangle + \left[\widehat{Z}_s^{n+1}, \widehat{\sigma}^{n+1}(s) \right] \right) ds \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T \left(\tfrac{C_v}{2y} - K_\Psi \right) \left(\left| \widehat{X}_s^{n+1} \right|^2 + \left| \widehat{Y}_s^{n+1} \right|^2 + \left\| \widehat{Z}_s^{n+1} \right\|^2 \right) ds \\
&+ \tfrac{3yC_v}{2} \int_0^T \mathbb{E} \left(\left| \widehat{X}_s^n \right|^2 + \left| \widehat{Y}_s^n \right|^2 \right) ds
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

D'autre part, compte tenu de l'inégalité de Young, on a aussi pour tout $\rho > 0$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \left(\left\langle \widehat{Y}_s^{n+1}, \widehat{Y}_s^n \right\rangle + \left[\widehat{Z}_s^{n+1}, \widehat{Z}_s^n \right] \right) ds \\
&\leq \tfrac{1}{2} \mathbb{E}\int_0^T \left(\rho \left| \widehat{Y}_s^{n+1} \right|^2 + \rho \left\| \widehat{Z}_s^{n+1} \right\|^2 + \tfrac{1}{\rho} \left| \widehat{Y}_s^n \right|^2 + \tfrac{1}{\rho} \left\| \widehat{Z}_s^n \right\|^2 \right) ds.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

En combinant 2.24,2.25 et2.26 à 2.23 on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left(K_h-\tfrac{C_\mu\epsilon}{2}\right)\mathbb{E}\left|\widehat{X}_T^{n+1}\right|^2-\tfrac{C_\mu}{2\epsilon}\mathbb{E}\left|\widehat{X}_T^{n}\right|^2+\delta\mathbb{E}\int_0^T\left(\left|\widehat{Y}_s^{n+1}\right|^2+\left\|\widehat{Z}_s^{n+1}\right\|^2\right)ds\\
&-\mathbb{E}\int_0^T\left(\tfrac{C_v}{2y}-K_\Psi\right)\left(\left|\widehat{X}_s^{n+1}\right|^2+\left|\widehat{Y}_s^{n+1}\right|^2+\left\|\widehat{Z}_s^{n+1}\right\|^2\right)ds\\
&\leq\tfrac{3yC_v}{2}\int_0^T\mathbb{E}\left(\left|\widehat{X}_s^{n}\right|^2+\left|\widehat{Y}_s^{\,\hat{}\,n}\right|^2\right)ds\\
&+\delta\mathbb{E}\int_0^T\left(\tfrac{\rho}{2}\left|\widehat{Y}_s^{n+1}\right|^2+\tfrac{\rho}{2}\left\|\widehat{Z}_s^{n+1}\right\|^2+\tfrac{1}{2\rho}\left|\widehat{Y}_s^{n}\right|^2+\tfrac{1}{2\rho}\left\|\widehat{Z}_s^{n}\right\|^2\right)ds.
\end{aligned}
$$

En réorganisant les termes,on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left(K_h-\tfrac{C_\mu\epsilon}{2}\right)\mathbb{E}\left|\widehat{X}_T^{n+1}\right|^2+\left(K_\Psi-\tfrac{C_v}{2y}\right)\mathbb{E}\int_0^T\left|\widehat{X}_s^{n+1}\right|^2ds\\
&+\left(\delta\left(1-\tfrac{\rho}{2}\right)+K_\Psi-\tfrac{C_v}{2y}\right)\mathbb{E}\int_0^T\left(\left|\widehat{Y}_s^{n+1}\right|^2+\left\|\widehat{Z}_s^{n+1}\right\|^2\right)ds\\
&\leq\tfrac{C_\mu}{2\epsilon}\mathbb{E}\left|\widehat{X}_T^{n}\right|^2+\mathbb{E}\int_0^T\left[\tfrac{3y\,C_v}{2}\left|\widehat{X}_s^{n}\right|^2+\left(\tfrac{3y\,C_v}{2}+\tfrac{\delta}{2\rho}\right)\left|\widehat{Y}_s^{n}\right|^2+\tfrac{\delta}{2\rho}\left\|\widehat{Z}_s^{n}\right\|^2\right]ds.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

On note par : $\|\Theta\|^2=|X|^2+|Y|^2+\|Z\|^2$ et

$$
\begin{aligned}
\lambda(\epsilon,\delta,y,\rho) &\triangleq \min\left\{K_h-\tfrac{C_\mu\epsilon}{2},K_\Psi-\tfrac{C_v}{2y},\delta\left(1-\tfrac{\rho}{2}\right)+K_\Psi-\tfrac{C_v}{2y}\right\},\\
\theta(\epsilon,\delta,y,\rho) &\triangleq \max\left\{\tfrac{C_\mu}{2\epsilon},\tfrac{3yC_v}{2}+\tfrac{\delta}{2\rho}\right\}
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
\mathbb{E}\left(\left|\widehat{X}_T^{n+1}\right|^2+\int_0^T\left\|\widehat{\Theta}_s^{n+1}\right\|^2ds\right)\leq\tfrac{\theta(\epsilon,\delta,y,\rho)}{\lambda(\epsilon,\delta,y,\rho)}\mathbb{E}\left(\left|\widehat{X}_T^{n}\right|^2+\int_0^T\left\|\widehat{\Theta}_s^{n}\right\|^2ds\right)
\tag{2.28}
$$

Pour continuer, nous supposons temporairement qu'il existe des constantes ϵ, δ , y et ρ telles que

$$
\lambda(\epsilon,\delta,y,\rho)>\theta(\epsilon,\delta,y,\rho).
\tag{2.29}
$$

Alors l'inégalité 2.28 devient une contraction,ce qui implique par la suite que $(X_T^n)_{n\geq0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{P})$ et $(X^n)_{n\geq0},(Y^n)_{n\geq0}$ et $(Z^n)_{n\geq0}$

sont des suites de Cauchy dans $\mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega\ ,dt\otimes d\mathbb{P})$.

En prenant l'espérence de la formule d'itô,nous avons

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|\widehat{Y}_t^n\right|^2+\mathbb{E}\int_t^T\left\|\widehat{Z}_s^n\right\|^2ds+\mathbb{E}\int_t^T|\Lambda_s^n|^2\bullet d[M]_s\\&=\mathbb{E}\left|\widehat{h}^n(T)\right|^2-2\mathbb{E}\int_t^T\left\langle\widehat{Y}_s^n,\widehat{g}^n(s)\right\rangle ds\longrightarrow 0\end{aligned}\tag{2.30}$$

dès que $(X_T^n)_{n\geq 0},(X^n)_{n\geq 0},(Y^n)_{n\geq 0}$ et $(Z^n)_{n\geq 0}$ sont de Cauchy. Ainsi, $(\Lambda^n)_{n\geq 0}$ est aussi un suite de Cauchy. Cela donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\ \leq\ T}\left(|X_s^n-X_s^m|^2+|Y_s^n-Y_s^m|^2\right)\right]\longrightarrow 0,\text{comme } n,m\to\infty.$$

D'après le théorème du point fixe de Banach,il existe des processus càdlàg $\mathbb{F}$-adaptés X,Y et $\mathcal{F}$-progressivement mesurable processus Z, et une collection de $\mathcal{F}$-mesurables progressivement Λ fonctions telles que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\sup_{s\ \leq\ T}(|X_s^n-X_s|^2+|Y_s^n-Y_s|^2)\\&+\int_0^T\|Z_s^n-Z_s\|^2ds+\int_0^T|\Lambda_s^n-\Lambda_s|^2\bullet d[M]_s]\longrightarrow 0,\text{comme},n\longrightarrow\infty\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\ \leq\ T}(|X_s|^2+|Y_s|^2)+\int_0^T\|Z_s\|^2ds+\int_0^T|\Lambda_s|^2\bullet d[M]_s\right]<\infty.$$

De plus, en prenant les limites de l'équation 2.18 on obtient que (X,Y,Z,Λ) est une solution de 2.14 .Pour compléter la preuve, on montre que y,ϵ,δ et ρ existent lorsque la condition 2.16 est satisfaite.En fait,pour que la contraction ait un sens, nous supposons $K_h-\frac{C_\mu\epsilon}{2},K_\Psi-\frac{C_v}{2y}$,et $1-\frac{\rho}{2}$ sont positifs.Puisque $(1-\frac{\rho}{2})\leq\frac{1}{2\rho}$ avec égalité si et seulement si $\rho=1$,on prendra $\rho=1$ Posons

$$\theta^*(\epsilon,y)=\lim_{\delta\longrightarrow 0}\theta(\epsilon,\delta,y,1)=\max\left\{\frac{C_\mu}{2\epsilon},\frac{3yC_v}{2}\right\}$$

et

$$\lambda^*(\epsilon, y) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \lambda(\epsilon, \delta, y, 1) = \min\left\{K_h - \frac{C_\mu \epsilon}{2}, K_\Psi - \frac{C_v}{2y}\right\}.$$

$\lambda^*(\epsilon, y) > \theta^*(\epsilon, y)$ pour certains ϵ et y,alors il existe δ assez petit tel que 2.29 est satisfait. Notons que $\lambda^*(\epsilon, y) > \theta^*(\epsilon, y)$, équivalent à avoir l'inégalités :

$$\begin{aligned} K_h &> \max\left\langle \tfrac{C_\mu}{2\epsilon} + \tfrac{C_\mu \epsilon}{2}, \tfrac{3yC_v}{2} + \tfrac{C_\mu \epsilon}{2} \right\rangle \\ K_\Psi &> \max\left\{ \tfrac{C_\mu}{2\epsilon} + \tfrac{C_v}{2y}, \tfrac{3yC_v}{2} + \tfrac{C_v}{2y} \right\}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

Pour minimiser $\frac{C_\mu \epsilon}{2} + \frac{C_\mu}{2\epsilon}$ et $\frac{C_v}{2y} + \frac{3yC_v}{2}$on prend $\epsilon = 1$ et $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Soit $\eta_1, \eta_2 > 0$ tel que

$$C_v, C_\mu < \min\{\eta_1 K_h, \eta_2 K_\Psi\}.$$

Sans perte la généralité, on peut supposer $\eta_1 K_h \leq \eta_2 K_\Psi$. Alors 2.31 est vrai si les inégalités suivantes sont vraies

$$K_h > C_\mu, \quad K_h > \tfrac{\eta_1 K_h}{2}(\sqrt{3}+1), \quad K_\Psi > \tfrac{\eta_1 K_h}{2}(\sqrt{3}+1), \quad K_\Psi > \sqrt{3} C_v \tag{2.32}$$

De la deuxième inégalité, on obtient $\eta_1 < \sqrt{3} - 1$. La troisième inégalité dans 2.32 est valable si la prochaine inégalité

$$\frac{\eta_1 K_h}{2}(\sqrt{3}+1) < \frac{\eta_1 K_h}{\eta_2}$$

est vérifier. Cela implique que $\eta_2 < \sqrt{3} - 1$. À partir de la quatrième inégalité de 2.32, nous avons $C_v < \frac{\sqrt{3}}{3} K_\Psi$. Notons que $\frac{\sqrt{3}}{3} < \sqrt{3} - 1$.En les combinant, nous obtenons la condition suffisante

$$C_v, C_\mu < \min\left\{(\sqrt{3}-1)K_h, \tfrac{\sqrt{3}}{3} K_\Psi\right\}$$

pour lequel $\lambda(\epsilon, \delta, \alpha, \rho) > \theta(\epsilon, \delta, \alpha, \rho)$ lorsque $\epsilon = \rho = 1, y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\delta > 0$ suffisamment petits.

(2) **Unicité** : Soit (X', Y', Z', Λ') une autre solution de 2.14. Soient $\Theta = (X, Y, Z)$ et $\Theta' = (X', Y', Z')$. Application la formule d'Itô au produit $\langle X'_T - X_{T,} Y'_T - Y_T \rangle$ et prenant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E} \langle X'_T - X_{T,} Y'_T - Y_T \rangle \quad = \Gamma_T \tag{2.33}$$

où

$$\begin{aligned}
\Gamma_T \quad &\triangleq \mathbb{E}\int_0^T (\big\langle X_s{}' - X_s, g(s, \Theta'_s, \mathbb{P}_{(X'_s,\ Y'_s\ /\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s) - g(s, \Theta_s, \mathbb{P}_{(X_s,\ Y_s/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s)\big\rangle \\
&+ \big\langle Y_s{}' - Y_s,\ f\ (s, \Theta'_s, \mathbb{P}_{(X'_s,\ Y'_s/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s) - f\ (s, \Theta_s, \mathbb{P}_{(X_s,\ Y_s\ /\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s)\big\rangle \\
&+ \big[\sigma(s, \Theta'_s, \mathbb{P}_{(X'_s,\ Y'_s/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s) - \sigma(s, \Theta_s, \mathbb{P}_{(X_s,\ Y_s\ ,/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s), Z'_s - Z_s\big])ds.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (A), l'hypothèse (H1) ,2.13 et l'inégalité de Hölder, on obtient la limite inférieure suivante pour Γ_T

$$\begin{aligned}
\Gamma_T \quad &= \mathbb{E} \left\langle X'_T - X_{T,} h(X'_T, \mathbb{P}_{(X'_T/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_T) - h(X_T, \mathbb{P}_{(X_T/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_T)\right\rangle \\
&\geq K_h \mathbb{E} \left|X'_T - X_T\right|^2 - C_\mu \mathbb{E}\left(\left|X'_T - X_T\right| W_2(\mathbb{P}_{(X'_T/\ \mathcal{F}_s^\alpha)}, \mathbb{P}_{(X_T/\mathcal{F}_s^\alpha)})\right) \\
&\geq K_h \mathbb{E} \left|X'_T - X_T\right|^2 - C_\mu \mathbb{E}\left\{\left|X'_T - X_T\right| \left[\mathbb{E}(\left|X'_T - X_T\right|^2 /\mathcal{F}_T^\alpha\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= K_h \mathbb{E} \left|X'_T - X_T\right|^2 - C_\mu \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}(\left|X'_T - X_T\right| /\mathcal{F}_T^\alpha) \left[\mathbb{E}(\left|X'_T - X_T\right|^2 /\mathcal{F}_T^\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&\geq (K_h - C_\mu) \mathbb{E} \left|X'_T - X_T\right|^2.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

D'un autre côté, nous pouvons également avoir une limite supérieure pour Γ_T comme suit. D'abord, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\Gamma_T \quad &\leq \mathbb{E}\int_0^T [\Psi(s, \Theta_s, \Theta'_s, \mathbb{P}_{(X_s, Y_s\ /\mathcal{F}_s^\alpha)}, \alpha_s) \\
&+ C_v W_2(\mathbb{P}_{(X'_s, Y'_s/\mathcal{F}_s^\alpha)}, \mathbb{P}_{(X_s, Y_s/\ \mathcal{F}_s^\alpha)}) \left(\left|X'_s - X_s\right| + \left|Y'_s - Y_s\right| + \left\|Z'_s - Z_s\right\|\right)]ds.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'estimation 2.13

$$W_2(\mathbb{P}_{(X_s',Y_s'\ /\ \mathcal{F}_s^\alpha)},\mathbb{P}_{(X_s,Y_s\ /\ \mathcal{F}_s^\alpha)}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\left|X_s'-X_s\right|^2+\left|Y_s'-Y_s\right|^2/\mathcal{F}_s^\alpha)} \tag{2.35}$$

de(H2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz trois fois nous donne

$$\begin{aligned}
\Gamma_T \quad & \leq \mathbb{E}\int_0^T[-K_\Psi\left(\left|X_s'-X_s\right|^2+\left|Y_s'-Y_s\right|^2+\left\|Z_s'-Z_s\right\|^2\right) \\
& +C_v\sqrt{\mathbb{E}(\left|X_s'-X_s\right|^2+\left|Y_s'-Y_s\right|^2/\mathcal{F}_s^\alpha)}\left(\left|X_s'-X_s\right|+\left|Y_s'-Y_s\right|+\left\|Z_s'-Z_s\right\|\right)]ds \\
& \leq \mathbb{E}\int_0^T[-K_\Psi\left(\left|X_s'-X_s\right|^2+\left|Y_s'-Y_s\right|^2+\left\|Z_s'-Z_s\right\|^2\right) \\
& +\tfrac{C_v}{2}(\tfrac{1}{y}+3y)\left|X_s'-X_s\right|^2+\tfrac{C_v}{2}(\tfrac{1}{y}+3y)\left|Y_s'-Y_s\right|^2+\tfrac{C_v}{2y}\left\|Z_s'-Z_s\right\|^2]ds.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

En combinant 2.34 et 2.36,on obtient

$$\begin{aligned}
0 \quad & \leq (C_\mu-K_h)\mathbb{E}(\left|X_T'-X_T\right|^2+\mathbb{E}\int_0^T\{\left[\tfrac{C_v}{2}(\tfrac{1}{y}+3y)-K_\Psi\right]\left|X_s'-X_s\right|^2 \\
& +\left[\tfrac{C_v}{2}(\tfrac{1}{y}+3y)-K_\Psi\right]\left|Y_s'-Y_s\right|^2+(\tfrac{C_v}{2y}-K_\Psi)\left\|Z_s'-Z_s\right\|^2\}ds.
\end{aligned}$$

Notant que si $C_\mu, C_v<\min\left\{(\sqrt{3}-1)K_h, K_\Psi/\sqrt{3}\right\}$,et $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors tout les coefficients du membre de droite de l'inégalité ci-dessus sont négatifs. Cela implique ce $X_T'=X_T$, $\mathbb{P}.s.$ et pour tout $0\leq s\leq T$, $X_s'=X_s, Y_s'=Y_s$ et $Z_s'=Z_s$, $\mathbb{P}.s$.

Ensuite, nous prenons l'espérance de la formule d'itô pour $|Y'-Y|^2$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}|Y_0'-Y_0|^2+\mathbb{E}\int_0^T\left\|Z_s'-Z_s\right\|^2ds+\mathbb{E}\int_0^T\left|\Lambda_s'-\Lambda_s\right|^2\bullet d[M]_s \\
& =\mathbb{E}\left|h(X_T',\alpha_T)-h(X_T,\alpha_T)\right|^2 \\
& -2\mathbb{E}\int_0^T\left\langle Y_s'-Y_s, g(s,X_s',Y_s',Z_s',\alpha_s)-g(s,X_s,Y_s,Z_s,\alpha_s)\right\rangle ds.
\end{aligned}$$

comme $X_T'=X_T$,$\mathbb{P}.s.$ et, pour tout $0\leq s\leq T, X_s'=X_s, Y_s'=Y_s$, et $Z_s{}'=Z_s$ $\mathbb{P}.s.$, on obtient

$$\mathbb{E}\int_0^T\left|\Lambda_s'-\Lambda_s\right|^2\bullet d[M]_s=0.$$

Ainsi,$\Lambda_s'=\Lambda_s$ in $\mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$, ce qui implique l'unicité de l'équation 2.14.

Chapitre 3

Jeu différentiel à somme non nulle

Dans cette section, nous considérons un problème de jeu à somme non nulle avec N joueurs dans lequel la dynamique et les fonctionnelles de coût de chaque acteur dépendent de termes conditionnels de champ moyen et un processus de changement de régime. Soit N, $d_i, 1 \leq i \leq N$, des entiers positifs. Pour chaque $i, 1 \leq i \leq N$,soit $\mathcal{U}^i = \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^{d_i})$ l'ensemble des côntroles admissibles du joueur i et notons $\mathcal{U} = \mathcal{U}^1 \times \mathcal{U}^2 \times ... \times \mathcal{U}^N$. La dynamique du système est donnée par l'esd à champ moyen conditionnel suivante :

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 + \int_0^t \left[A(s, \alpha_s) X_s + \overline{A}(s, \alpha_s) \mathbb{E}(X_s / \mathcal{F}_s^\alpha) + \sum_{i=1}^N B^i(s, \alpha_s) u_s^i + f\ (s, \alpha_s) \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma(s, \alpha_s) X_s + g(s, \alpha_s) \right] dWs \end{aligned} \tag{3.1}$$

où pour chaque $i_0 \in \mathcal{M}$ et $1 \leq i \leq N$, $u^i \in \mathcal{U}^i$, $A(\cdot, i_0), \overline{A}(\cdot, i_0), B^i(\cdot, i_0), f\ (\cdot, i_0)$,et $g(\cdot, i_0)$ sont des fonctions continues bornées prenant des valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbb{R}^{d \times di}, \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^d$,respectivement. De plus, $\sigma(\cdot, i_0)$ est une fonction continue prenant des valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times d}$.

Notons que l'eds du champ moyen 3.1 est obtenu comme une limite en moyenne quadratique lorsque $n \to \infty$ d'un système des joueurs en interaction de la forme :

$$\begin{aligned} X_t^{k,n} &= x_0 + \int_0^t \left[A(s,\alpha_s) X_s^{k,n} + \tfrac{1}{n}\overline{A}(s,\alpha_s)\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n} X_s^{j,n} + \sum_{i=1}^{N} B^i(s,\alpha_s) u_s^{i,k,n} + f\ (s,\alpha_s) \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma(s,\alpha_s) X_s^{k,n} + g(s,\alpha_s) \right] dWs, 1 \le k \le n. \end{aligned}$$

où $(W^k, k \geq 1)$ est une collection de mouvements browniens standards indépendants.Dans 3.1, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_s/\mathcal{F}_s^\alpha)$ apparaît à la place de $\mathbb{E}(X_s)$ en raison de l'effet du processus $\alpha(t)$ à tous les joueurs.Par la simlpification on suppose que W_s est de dimension 1 Étant donné un contrôle $\mathbf{u} = (u^1, u^2, ..., u^N) \in \mathcal{U}$,la fonctionnelle de coût du joueur i est donnée par :

$$\begin{aligned} J_i(\mathbf{u}) &= \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\{\int_0^T [X_s^\intercal M^i(s,\alpha_s) X_s + \mathbb{E}(X_s^\intercal/\mathcal{F}_s^\alpha)\overline{M}^i(s,\alpha_s)\mathbb{E}(X_s/\mathcal{F}_s^\alpha) \\ &+ (u_s^i)^\intercal N^i(s,\alpha_s) u_s^i] ds \\ &+ X_T^\intercal R^i(\alpha_T) X_T + \mathbb{E}(X_T^\intercal/\mathcal{F}_T^\alpha)\overline{R}^i(\alpha_T)\mathbb{E}(X_T/\mathcal{F}_T^\alpha)\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où pour tout $i_0 \in \mathcal{M}$ et $1 \leq i \leq N$, $M^i(\cdot, i_0)$ et $\overline{M}^i(\cdot, i_0)$ sont des matrices symétriques bornés, continus et positives à valeurs en $\mathbb{R}^{d\times d}$, $N^i(\cdot, i_0)$ et son inverse $(N^i(\cdot, i_0))^{-1}$ sont des matrices positives symétriques continues bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^{di\times di}$, et $R^i(i_0)$ et $\overline{R}^i(i_0)$ sont des matrices symétriques non négatives à valeurs dans $\mathbb{R}^{d\times d}$. Un contrôle admissible $\mathbf{u}^* = (u^{*,1}, u^{*,2}, ..., u^{*,N}) \in \mathcal{U}$ est appelé un point d'équilibre de Nash si pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$J_i(\mathbf{u}^*) \leq J_i(\mathbf{u}^{*,-i}, u^i), \forall u^i \in \mathcal{U}^i$$

où $(\mathbf{u}^{*,-i}, u^i) = (u^{*,1}, u^{*,2}, ..., u^{*,i-1}, u^i, u^{*,i+1}, ..., u^{*,N})$.Nous sommes intéressés de trouver le point d'équilibre de Nash pour notre problème de jeu.

Pour tout $(t, x, \overline{x}, u^1, u^2, ..., u^N, p^i, q^i, i_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times ... \times \mathbb{R}^{d_N} \times$

$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{M}, 1 \leq i \leq N$, le Hamiltonien associé au joueur i est défine comme suit :

$$\begin{aligned}
&H_i(t, x, \overline{x}, u^1, u^2, ..., u^N, p^i, q^i, i_0) \\
&= (p^i)^\intercal \left[A(t, i_0)x + \overline{A}(t, i_0)\overline{x} + \sum_{j=1}^{N} B^{\,j}(t, i_0) + f\ (t, i_0) \right] \\
&+ \tfrac{1}{2} \left[x^\intercal M^i(t, i_0)x + \overline{x}^\intercal \overline{M}^i(t, i_0)\overline{x} + (u^i)^\intercal N^{\,i}(t, i_0)u^i \right] \\
&+ (\sigma^\intercal (t, i_0)x + g(t, i_0))^\intercal q^i.
\end{aligned}$$

De plus, nous définissons la fonction $\widehat{u^i}$ par

$$\widehat{u}^i(t, p^i) = -(N^i(t, \alpha_t))^{-1}(B^i(t, \alpha_t))^\intercal p^i, 0 \leq t \leq T.$$

Il est facile de vérifier que les fonctions $\widehat{u}^i, 1 \leq i \leq N$,satisfont

$$\begin{aligned}
&H_i(t, x, \overline{x}, \widehat{u}^1(t, p^1), \widehat{u}^2(t, p^2), ..., \widehat{u}^N(t, p^N), p^i, q^i, i_0) \\
&\leq H_i(t, x, \overline{x}, \widehat{u}^1(t, p^1), \widehat{u}^2(t, p^2), ..., \widehat{u}^{i-1}(t, p^{i-1}), u^i, \widehat{u}^{i+1}(t, p^{i+1}) \\
&, ..., \widehat{u}^N(t, p^N), p^i, q^i, i_0)
\end{aligned}$$

pour tout $u^i \in \mathbb{R}^{d_i}, p^i, q^i \in \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq N$.On a la proposition suivante.

Proposition 3.0.1 *Le processus* $(X_t, (p_t^1, q_t^1), ..., (p_t^N, q_t^N), \lambda_t^1, ..., \lambda_t^N)$ *résoudre le* *système suivant (EDSPR de champ moyen conditionnel à changement de régime) :*

$$\begin{cases} X_t & = x_0 + \int\limits_0^t [A(s,\alpha_s)X_s + \overline{A}(s,\alpha_s)\mathbb{E}(X_s/\mathcal{F}_s^\alpha) \\ & + \sum\limits_{i=1}^N B^i(s,\alpha_s)\widehat{u}^i(s,p_s^i) + f(s,\alpha_s)]ds \\ & + \int\limits_0^t [\sigma(s,\alpha_s)X_s + g(s,\alpha_s)]\, dWs, \\ p_t^i & = \left[R^i(\alpha_T)X_T + \overline{R}^i(\alpha_T)\mathbb{E}(X_T\ /\mathcal{F}_s^\alpha)\right] \\ & + \int\limits_t^T [A(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i + \mathbb{E}(\overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i/\mathcal{F}_s^\alpha) \\ & + M^i(s,\alpha_s)X_s + \overline{M}^i(s,\alpha_s)\mathbb{E}(X_s/\mathcal{F}_s^\alpha) + \sigma(s,\alpha_s)^\intercal q_s^i]ds \\ & - \int\limits_t^T q_s^i dWs - \int\limits_t^T \lambda_s^i \bullet dMs, i = 1, ..., N. \end{cases} \tag{3.3}$$

si et seulement si le contrôle admissible $\widehat{\mathbf{u}} = (\widehat{u}^1, \widehat{u}^2, ..., \widehat{u}^N) = (\widehat{u}^1(t,p_t^1), \widehat{u}^2(t,p_t^2), ..., \widehat{u}^N(t,p_t^N))$ *est un point d'équilibre de Nash de jeu différentiel stochastique du champ moyen conditionnelle à somme non nulle quadratique.*

Preuve. Tout d'abord, nous montrerons que la condition est suffisante. Supposons que $(X_t,(p_t^1,q_t^1),.....,(p_t^N,q_t^N),\lambda_t^1,.....,\lambda_t^N)$ est une solution de 3.3. Fixons $i, 1 \leq i \leq N$. Soit $u^i \in \mathcal{U}^i$ et $\mathbf{u}^i = (\widehat{\mathbf{u}}^{-i}, u^i) = (\widehat{u}^1, ..., \widehat{u}^{i-1}, u^i, \widehat{u}^{i+1}, ..., \widehat{u}^N)$. Soit X_t^i la dynamique d'état correspondant au contrôle $\mathbf{u}^i$.Pour la simplification on note par $\widehat{u}^i(s) = \widehat{u}^i(s,p_s^i), \overline{X}_s = \mathbb{E}(X_s/\mathcal{F}_s^\alpha), \overline{X}_s^i = \mathbb{E}(X_s^i/\mathcal{F}_s^\alpha), \overline{P}_s^i = \mathbb{E}(p_s^i/\mathcal{F}_s^\alpha)$ $, \overline{X}_s^\intercal = \mathbb{E}(X_s^\intercal/\mathcal{F}_s^\alpha)$ et $(\overline{X}_s^i)^\intercal = \mathbb{E}[(X_s^i)^\intercal/\mathcal{F}_s^\alpha]$.It suffit de montrer que $J_i(\mathbf{u}^i) \geq J_i(\overline{\mathbf{u}})$. ■

On remarque que pour toute matrice $n\times\ n$ symétrique non négative S et $v^1, v^2 \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned} (v^1)^\intercal S v^1 - (v^2)^\intercal S v^2 &= (v^1 - v^2)^\intercal S(v^1 - v^2) + 2(v^1 - v^2)^\intercal S v^2 \\ &\geq 2(v^1 - v^2)^\intercal S v^2 \end{aligned}$$

Notez que $M^i(s,\alpha_s), \overline{M}^i(s,\alpha_s), N^i(s,\alpha_s), R^i(\alpha_T)$ et $\overline{R}^i(\alpha_T)$ sont tous des matrices symétriques non négatifs . Par conséquent, en utilisant la définition de $J_i(\cdot)$ et l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$
\begin{aligned}
&J_i(\mathbf{u}^i) - J_i(\widehat{\mathbf{u}}) = J_i(\widehat{u}_1, ..., \widehat{u}_{i-1}, u^i, \widehat{u}_{i+1}, ..., \widehat{u}_N) - J_i(\widehat{u}) \\
&= \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\{\int_0^T [(X_s^i)^\intercal M^i(s,\alpha_s) X_s^i - X_s^\intercal M^i(s,\alpha_s) X_s \\
&+ (\overline{X}_s^i)^\intercal \overline{M}^i(s,\alpha_s)\overline{X}_s^i - \overline{X}_s^\intercal \overline{M}^i(s,\alpha_s)\overline{X}_s \\
&+ (u_s^i)^\intercal N^i(s,\alpha_s) u_s^i - (\widehat{u}_s^i)^\intercal N^i(s,\alpha_s)\widehat{u}_s^i] ds \\
&+ (X_T^i)^\intercal R^i(\alpha_T) X_T^i - X_T^\intercal R^i(\alpha_T) X_T + (\overline{X}_T^i)^\intercal \overline{R}^i(\alpha_T)\overline{X}_T^i - \overline{X}_T^\intercal \overline{R}^i(\alpha_T)\overline{X}_T\} \\
&\geq \mathbb{E}\{\int_0^T \left[(X_s^i - X_s)^\intercal M^{\,i}(s,\alpha_s) X_s + (\overline{X}_s^i - \overline{X}_s)^\intercal \overline{M}^i(s,\alpha_s)\overline{X}_s + (u_s^i - \widehat{u}_s^i)^\intercal N^{\,i}(s,\alpha_s)\widehat{u}_s^i\right] ds \\
&+ (X_T^i - X_T)^\intercal R^i(\alpha_T) X_T + (\overline{X}_T^i - \overline{X}_T)^\intercal \overline{R}^i(\alpha_T)\overline{X}_T\}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Ensuite, nous montrons que le terme droite de 3.4 est égal à 0.Notons que

$$
\begin{aligned}
X_t^i - X_t \quad &= \int_0^t \left[A(s,\alpha_s)(X_s^i - X_s) + \overline{A}(s,\alpha_s)(\overline{X}_s^i - \overline{X}_s) + B^i(s,\alpha_s)(u_s^i - \widehat{u}^i(s,p_s^i))\right] ds \\
&+ \int_0^t \sigma(s,\alpha_s)(X_s^i - X_s) dWs
\end{aligned}
$$

et $p_T^i = \left[R^i(\alpha_T) X_T + \overline{R}^i(\alpha_T)\mathbb{E}(X_T/\ \mathcal{F}_T^\alpha)\right]$. Donc, par la formule Itô et l'edsr de 3.3 nous avons

$$
\begin{aligned}
&(X_T^i - X_T)^\intercal p_T^i \\
&= -\int_0^T (X_s^i - X_s)^\intercal [A(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i + \overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal \overline{p}_s^i + M^{\,i}(s,\alpha_s) X_s \\
&+ \overline{M}^i(s,\alpha_s)\overline{X}_s + \sigma(s,\alpha_s)^\intercal q_s^i] ds + \int_0^T [(X_s^i - X_s)^\intercal A(s,\alpha_s)^\intercal \\
&+ (\overline{X}_s^i - \overline{X}_s)^\intercal \overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal + (u_s^i - \widehat{u}^i(s,p_s^i))^\intercal B^i(s,\alpha_s)^\intercal]\ p_s^i ds \\
&+ \int_0^T (X_s^i - X_s)^\intercal \sigma(s,\alpha_s)^\intercal q_s^i ds + \int_0^t (X_s^i - X_s)^\intercal q_s^i dWs \\
&+ \int_0^t (X_s^i - X_s)^\intercal \sigma(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i dWs + \int_0^t (X_s^i - X_s)^\intercal \lambda_s^i \bullet dM_s.
\end{aligned} \tag{3.5a}
$$

comme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(\overline{X}_s^i-\overline{X}_s)^\intercal\overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i\right] &=\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[(\overline{X}_s^i-\overline{X}_s)^\intercal\overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i/\ \mathcal{F}_s^\alpha\right]\right\}\\ &=\mathbb{E}\left[(\overline{X}_s^i-\overline{X}_s)^\intercal\overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal\overline{p}_s^i\right]\\ &=\mathbb{E}[(X_s^i-X_s)^\intercal\overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal\overline{p}_s^i],\end{aligned}$$

en simplifiant le membre de droite de 3.5a et en prenant l'espérence de ses deux côtés, nous obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X_T^i-X_T)^\intercal p_T^i\right] &=\mathbb{E}\left\{(X_T^i-X_T)^\intercal\left[R^i(\alpha_T)X_T+\overline{R}^i(\alpha_T)\overline{X}_T\right]\right\}\\ &=\int_0^T\{-(X_s^i-X_s)^\intercal\left[M^i(s,\alpha_s)X_s+\overline{M}^{\,i}(s,\alpha_s)\overline{X}_s\right]+(u_s^i-\widehat{u}_s^i)^\intercal B^i(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i\}ds.\end{aligned}$$

L'équation $\widehat{u}_s^i=-(N^i(s,\alpha_s))^{-1}B^i(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i$ implique que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left\{(X_T^i-X_T)^\intercal\left[R^i(\alpha_T)X_T+\overline{R}^i(\alpha_T)\overline{X}_T\right]\right\}\\ &=-\mathbb{E}\int_0^T\left\{(X_s^i-X_s)^\intercal\left[M^i(s,\alpha_s)X_s+\overline{M}^{\,i}(s,\alpha_s)\overline{X}_s\right]+(u_s^i-\widehat{u}_s^i)^\intercal N^i(s,\alpha_s)^\intercal\widehat{u}_s^i\right\},\end{aligned}$$

ce qui prouve ensuite que le membre le plus à droite de 3.4 est égal à 0. Par conséquent, il résulte de 3.4 que

$$J_i(\mathbf{u}^i)-J_i(\widehat{\mathbf{u}})\ \ \geq 0$$

Pour compléter la preuve, on montre que la condition est nécessaire. Supposons que $\widehat{\mathbf{u}}=(\widehat{u}_1,\widehat{u}_2,...,\widehat{u}_N)$ est un point d'équilibre de Nash du jeu. Désignons le trajectoire correspondan par $\widehat{X}$.alors si nous fixons le contrôle $\widehat{u}^j$ pour $j=i,1\leq i,j\leq N$,$\widehat{u}^i$ est un contrôle optimal pour le joueur i et le trajectoire optimale correspondante est $\widehat{X}$.Comme le problème de contrôle pour le joueur i est de type champ moyen conditionnel à changement de régime nous pouvons appliquer le principe du maximum dans [11].pour obtenir la condition nécessaire d'optimalité. L'équation adjointe associée au problème de contrôle du joueur i est

$$\begin{aligned} p_t^i &= \left[R^i(\alpha_T)X_T + \overline{R}^i(\alpha_T)\overline{X}_T\right] + \int_t^T [A(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i + \overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal \mathbb{E}(p_s^i/\mathcal{F}_s^\alpha) \\ &+ M^{\,i}(s,\alpha_s)X_s + \overline{M}^i(s,\alpha_s)\overline{X}_s + \sigma(s,\alpha_s)^\intercal q_s^i]ds - \int_t^T q_s^i dWs - \int_t^T \lambda_s^i \bullet dM_s. \end{aligned}$$

qui admet toujours une solution unique (voir [11], Théorème 3.4). Par le théorème (3.7) , [11], pour tout vecteur $v^i \in \mathbb{R}^{d_i}$:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{du_i} H_i(t, X_t, \overline{X}_t, \widehat{u}_t^1, ..., \widehat{u}_t^{i-1}, \widehat{u}_t^i, u_t^{i+1}, ..., u^N(t), p_t^i, q_t^i, \alpha_t -) \\ &(v^i - \widehat{u}_t^i) \geq 0 \end{aligned}$$

ou équivalent,

$$\left[B^i(t,\alpha_t)^\intercal p_t^i + N^i(t,\alpha_t)\widehat{u}_t^i\right](v^i - \widehat{u}_t^i) \geq 0,$$

Puisque l'inégalité est vraie pour tout $v^i \in \mathbb{R}^{d_i}$, nous devons avoir $B^i(t,\alpha_t)^\intercal p_t^i + N^i(t,\alpha_t)\widehat{u}_t^i = 0$. Par conséquent, $\widehat{u}_t^i = -(N^i(t,\alpha_t))^{-1}B^i(t,\alpha_t)^\intercal p_t^i$.Remplacer cette valeur de $\widehat{u}_t^i$ dans l'équation adjointe au-dessus, nous déduisons que $(X_t, (p_t^1, q_t^1), ..., (p_t^N, q_t^N), \lambda_t^1, ...,$ une solution de l'edspr 3.3, ceci termine la preuve.

Ensuite, nous présentons des conditions sur les coefficients tel que le point d'équilibre de Nash de notre problème de jeu différentiel existe. Pour cela, nous avons d'abord besoin des hypothèses suivantes.

Hypothèse K

(K1) Pour $1 \leq i \leq N$, les matrices $B^i(t,i_0) \equiv B^i$ et $N^i(t,i_0) \equiv N^i$ sont indépendantes de t et i_0. Notons que $K^i = B^i(N^i)^{-1}(B^i)^\intercal$.

(K2) il existe des constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $0 \leq t \leq T$,

$$x^\intercal \left[\sum_{i=1}^N K^i R^i(i_0)\right] x \geq \beta_1 |x|^2, \quad x^\intercal \left[\sum_{i=1}^N K^i M^i(t,i_0)\right] x \geq \beta_2 |x|^2.$$

(K3) Pour $1 \leq i \leq N$ et $0 \leq t \leq T$, $\mathbb{P}$-a.s.

$$\begin{aligned}
&K^i A^\intercal(t,i_0) = A^\intercal(t,i_0)K^i, \quad K^i \overline{A}^\intercal(t,i_0) = \overline{A}^\intercal(t,i_0)K^i \\
&K^i\, \sigma^\intercal(t,i_0) = \sigma^\intercal(t,i_0)K^i
\end{aligned}$$

Pour $(t,i_0) \in [0,T] \times \mathcal{M}$, notons

$$M(t,i_0) = \sum_{i=1}^{N} K^i M^i(t,i_0) \quad , R(i_0) = \sum_{i=1}^{N} K^i R^i(i_0)$$

et, de même,

$$\overline{M}(t,i_0) = \sum_{i=1}^{N} K^i \overline{M}^i(t,i_0), \overline{R}(i_0) = \sum_{i=1}^{N} K^i \overline{R}^i(i_0)$$

Considérons l'edspr de champ moyen conditionnel à changement de régime suivante :

$$\begin{aligned}
X_t &= x_0 + \int_0^t \left[A(s,\alpha_s)X_s + \overline{A}(s,\alpha_s)\overline{X}_s - Y_s + f\ (s,\alpha_s)\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(s,\alpha_s)X_s + g(s,\alpha_s)\right] dWs, \\
Y_t &= (R(\alpha_T)X_T + \overline{R}(\alpha_T)\overline{X}_T - \int_t^T Z_s dWs - \int_t^T \Lambda_s \bullet dMs \\
&+ \int_t^T [A(s,\alpha_s)^\intercal Y_s + \overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal_s \overline{Y} + M(s,\alpha_{s-})X_s \\
&+ \overline{M}(s,\alpha_{s-})\overline{X}_s + \sigma(s,\alpha_s)^\intercal Z_s] ds,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où $X, Y \in \mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d), Z \in \mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^{d\times d}), \Lambda \in \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$.

Notons que si $(X_t,(p_t^1,q_t^1),...,(p_t^N,q_t^N),\lambda_t^1,...,\lambda_t^N)$ est une solution de3.3 et L'hypothèse (K) est vérifiée, alors en appliquant la formule d'Itô on obtient

$$
\begin{aligned}
K^i p_t^i &= \Big[K^i R^i(\alpha_T) X_T + K^i \overline{R}^i(\alpha_T)\mathbb{E}(X_T/\mathcal{F}_T^\alpha)\Big] \\
&+ \int_t^T [A(s,\alpha_s)^\intercal K^i p_s^i + \mathbb{E}(\overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal K^i p_s^i/\mathcal{F}_s^\alpha) \\
&+ K^i M^{\,i}(s,\alpha_s) X_s + K^i \overline{M}^i(s,\alpha_s)\overline{X}_s + \sigma(s,\alpha_s)^\intercal K^i q_s^i] ds \\
&- \int_t^T K^i q_s^i dW_s - \int_t^T K^i \lambda_s^i \bullet dM_s.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

En prenant la somme dans 3.7 où $i = 1, 2, ..., N$, on voit facilement que le processus $(X_t, Y_t = \sum_{i=1}^N K^i p_t^i, Z_t = \sum_{i=1}^N K^i q_t^i\ , \Lambda_t = \sum_{i=1}^N K^i \lambda_t^i)$ est une solution de l'edspr 3.6

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les coefficients de 3.6 satisfont à toutes les conditions de Section 3. Pour tout $t, x, y, \boldsymbol{z}, i_0$ et $v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d}), \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$,

$$
\begin{aligned}
f\ (t,x,y,z,v,i_0) &= A(t,i_0)x + \overline{A}(t,i_0)\int_{\mathbb{R}^{d+d}} \zeta_1 v(d\zeta_1, d\zeta_2) - y + f\ (t,i_0), \\
g(t,x,y,z,v,i_0) &= -A(t,i_0)^\intercal y - \overline{A}(t,i_0)^\intercal \int_{\mathbb{R}^{d+d}} \zeta_2 v(d\zeta_1, d\zeta_2) \\
&\quad - M(t,i_0)x - \overline{M}(t,i_0)\int_{\mathbb{R}^{d+d}} \zeta_1 v(d\zeta_1, d\zeta_2) - \sigma(t,i_0)^\intercal \boldsymbol{z}, \\
\sigma(t,x,y,z,v,i_0) &= \sigma(t,i_0)x + g(t,i_0), \\
h(x,\mu,i_0) &= R(i_0)x + \overline{R}(i_0)\int_{\mathbb{R}^d} \zeta\mu(d\zeta).
\end{aligned}
$$

Comme $\overline{A}(s,i_0)$ est borné, f est uniformément lipschitzienne par rapport à v La linéarité implique que f satisfait l'hypothèse (A1). De même, on obtient que g et σ satisfont à l'hypothèse (A1) et h satisfont l'hypothèse (A2). Plus précisément, on peut montrer qu'on peut prendre $C_\theta = \max_{t,i_0}\{1, \|A(t,i_0)\|, \|M(t,i_0)\|, \|\sigma(t,i_0)\|\}$et $C_v = \sqrt{2}\max_{t,i_0}\left\{\left\|\overline{A}(t,i_0), \overline{M}(t,i_0)\right\|\right\}$, dans(A1) et $c = \max_{i_0}\|R(i_0)\|$

et $C_\mu = \max_{i_0}\left\|\overline{R}(i_0)\right\|$en(A2). De la linéarité, il est trivial de vérifier les constantes C_θ et c.Pour C_v, il suffit de vérifier pour $\varphi = g$ dans l'hypothèse (A1). Si $v_1 = \mathbb{P}_{(\Upsilon_{1,1},\Upsilon_{1,2})}$ et $v_2 = \mathbb{P}_{(\Upsilon_{2,1},\Upsilon_{2,2})}$, alors

$$\begin{aligned}
&|g(t,x,y,\boldsymbol{z},v_1,i_0)-g(t,x,y,\boldsymbol{z},v_2,i_0)|\\
&=\left|\overline{A}(t,i_0)^{\intercal}(\mathbb{E}\Upsilon_{1,2}-\mathbb{E}\Upsilon_{2,2})-\overline{M}(t,i_0)^{\intercal}(\mathbb{E}\Upsilon_{1,1}-\mathbb{E}\Upsilon_{2,1})\right|\\
&\leq\sqrt{2}\max\left\{\left\|\overline{A}(t,i_0),\overline{M}(t,i_0)\right\|\right\}\left(\mathbb{E}\left|\Upsilon_{1,2}-\Upsilon_{2,2}\right|^2+\mathbb{E}\left|\Upsilon_{1,1}-\Upsilon_{2,1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\sqrt{2}\max\left\{\left\|\overline{A}(t,i_0),\overline{M}(t,i_0)\right\|\right\}\left(\mathbb{E}\left|\Upsilon_1-\Upsilon_2\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&|g(t,x,y,\boldsymbol{z},v_1,i_0)-g(t,x,y,\boldsymbol{z},v_2,i_0)|\\
&\leq\sqrt{2}\max\left\{\left\|\overline{A}(t,i_0),\overline{M}(t,i_0)\right\|\right\}W_2(v_1,v_2)
\end{aligned}$$

De la même manière, on peut vérifier $C_\mu\leq\max_{i_0}\left\|\overline{R}(i_0)\right\|$ en (A2).

De plus, dans ce cadre l'opérateur défini en 2.15, lié à 3.6,devient

$$\Psi(t,\theta,\theta',v,i_0)=-\left|y-y'\right|^2-M(t,i_0)\left|x-x'\right|^2.$$

Dans la proposition 3.0.2 ci-dessous, nous montrons que si l'hypothèse (K) est vraie alors Ψ et h satisfont Hypothèse (L) avec les constantes $K_\Psi=\min\{1,\beta_2\}$ et $K_h=\beta_1$.

Proposition 3.0.2 *Supposons que l'hypothèse (K) soit vérifiée et*

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{A}(t,i_0)\right\|,\left\|\overline{M}(t,i_0)\right\| &<\min\left\{(2-\sqrt{2}-1)\beta_1,\tfrac{1}{2}\beta_2\right\}\\
\left\|\overline{R}(i_0)\right\| &<\min\left\{2(\sqrt{2}-1)\beta_1,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\beta_2\right\}
\end{aligned}\tag{3.8a}$$

Alors les l'edspr de champ moyen 3.3 ont une unique solution $(X_t,(p_t^1,q_t^1),...,(p_t^N,q_t^N),\lambda_t^1,...,\lambda_t^N)$,où $X,p^i\in\mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$, $q^i\in\mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$,et $\lambda^i\in\mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$ pour tout $i=1,...,N$.

Preuve. Puisque l'hypothèse(K) est vraie,

$$\Psi(t,\theta,\theta',v,i_0)=-\left|y-y'\right|^2-M(t,i_0)\left|x-x'\right|^2\leq-|y-y'|^2-\beta_2|x-x'|^2\tag{3.9}$$

Cela implique que $K_\Psi = \min\{1, \beta 2\}$. De plus, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^d$ et $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$,

$$\langle h(x,\mu,i_0) - h(x',\mu,i_0), x - x'\rangle = (x-x')^\intercal R(i_0)(x-x') \geq \beta_1 |x-x'|^2, \quad (3.10)$$

ce qui implique que $K_h = \beta_1$. En conséquence ,3.8a et les inégalités

$$C_v \leq \sqrt{2} \max_{t\in[0,T], i_0\in\mathcal{M}} \left\{ \left\|\overline{A}(t,i_0)\right\|, \left\|\overline{M}(t,i_0)\right\| \right\} \quad , C_\mu \leq \max_{i_0\in\mathcal{M}} \left\|\overline{R}(i_0)\right\|$$

impliquent que les hypothèses (A) et (L) sont satisfaites. On peut donc appliquer le théorèmeprécedentpour déduire l'existence d'un processus unique (X, Y, Z, Λ) qui résout le système edspr de champ moyen conditionnel à changement de régime 3.6 .

■

Ensuite, d'après [11], Théorème 3.4, pour $i = 1, ..., N$, il existe $(p^i, q^i, \lambda^i) \in \mathcal{S}^2(0,T;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^2(0,T;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{M}^2(0,T;\mathbb{R}^d)$ une solution unique de l'edsr suivante :

$$\begin{aligned} p_t^i &= (R^i(\alpha_T)X_T + \overline{R}^i(\alpha_T)\overline{X}_T) + \int_t^T [A(s,\alpha_s)^\intercal p_s^i + \overline{A}(s,\alpha_s)^\intercal \mathbb{E}(\ p_s^i / \ \mathcal{F}_s^\alpha) \\ &+ M^{\ i}(s,\alpha_s)X_s + \sigma(s,\alpha_s)^\intercal q_s^i]ds - \int_t^T q_s^i dW_s - \int_t^T \lambda_s^i \bullet dM_s, t \in [0,T]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Par conséquent, les processus $(X, Y = \sum_{i=1}^N K^i p^i, Z = \sum_{i=1}^N K^i q^i, \Lambda = \sum_{i=1}^N K^i \lambda^i)$ est une solution de 3.6 Puisque la solution de 3.11 est unique, alors $Y = \sum_{i=1}^N K^i p^i$, $Z = \sum_{i=1}^N K^i q^i$ et $\Lambda = \sum_{i=1}^N K^i \lambda^i$. En remplaçant Y, Z et Λ dans 3.6 nous obtenons que $(X_t, (p_t^1, q_t^1), ..., (p_t^N, q_t^N), \lambda_t^1, ..., \lambda_t^N)$ est une solution de 3.3, ceci complète le preuve .En combinant les propositions 3.0.1 et 3.0.2 , on obtient le résultat suivant.

Théor■me 3.0.2 *Supposons que l'hypothèse* (K) *soit vérifiée et*

$$\begin{aligned} &\left\|\overline{A}(t,i_0)\right\|, \left\|\overline{M}(t,i_0)\right\| < \min\left\{(2-\sqrt{2})\beta_1, \tfrac{1}{2}\beta_2\right\} \\ &\left\|\overline{R}(i_0)\right\| < \min\left\{2(\sqrt{2}-1)\beta_1, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\beta_2\right\} \end{aligned}$$

Alors le contrôle admissible $\widehat{\mathbf{u}} = (\widehat{u}^1, \widehat{u}^2, ..., \widehat{u}^N)$, *où* $\widehat{u}_t^i = -(N^i)^{-1} B^i(\alpha_{t-})^\intercal p_t^i, 0 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq N$, *et* $(X_t, (p_t^1, q_t^1), ..., (p_t^N, q_t^N), \lambda_t^1, ..., \lambda_t^N)$ *qui est la solution de l'edspr 3.1 est un point d'équilibre de Nash de notre problème de jeux.*

Bibliographie

[1] Antonelli, F., (1993). Backward-forward stochastic differential equations. Ann. Appl. Probab. 3, 777–793.

[2] Breton, J.C., (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.

[3] Delarue, F., (2002). On the existence and uniqueness of solutions to FBSDEs in a non-degenerate case. Stoch.Process. Appl. 99, 209–286 .

[4] Donnelly, C., Heunis, A.J., (2012). Quadratic risk minimization in a regime-switching model with portfolio constraints. SIAM J. Control. Optim. 50, 2431–2461.

[5] Jeanblanc, M., (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, Uni-versity of evry.

[6] Hu, Y., Peng, S., (1995). Solution of forward-backward stochastic differential equations. Probab. Theory Relat.Fields 103, 273–283.

[7] Lasry, J.M., Lions, P.L., (2006). Jeux à champ moyen. I. Le cas stationnaire. C.R. Math. Acad. Sci. Paris 343,619–625.

[8] Li, Y., Zheng, H., (2015). Weak necessary and sufficient stochastic maximum principle forMarkovian regimeswitching diffusion models. Appl. Math. Optim. 71, 39–77.

[9] Mao, X., Yuan, C., (2006). Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. Imperial College Press, London.

[10] Nguyen, S.L., Huang, M., (2012). Linear-quadratic-Gaussian mixed games with continuum-parametrized minor players. SIAM J. Control. Optim. 50, 2907–2937.

[11] Nguyen, S.L., Nguyen, D.T., Yin, G., (2020). Stochastic maximum principle for switching diffusions using conditional mean-field and applications to control problems. ESAIM Contr. Optim. Calc.Var. 26, Paper No. 69.

[12] Nguyen, S.L., Yin, G., Hoang, T.A., (2020). Laws of large numbers for systems with mean-field interactions and Markovian switching. Stoch. Process. Appl. 130, 262–296.

[13] Nguyen, S.L., Yin, G., Nguyen, D.T., (2021). A general stochastic maximum principle for mean-field controls with regime switching. Appl. Math. Optim. 84, 3255–3294.

[14] Pardoux, E., Tang, S., (1999). Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs. Probab. Theory Relat. Fields 114, 123–150.

[15] ROLÓN GUTIÉRREZ, Esteban J., NGUYEN, Son Luu, et YIN, George. Markovian-Switching Systems : Backward and Forward-Backward Stochastic Differential Equations, Mean-Field Interactions, and Nonzero-Sum Differential Games. Applied Mathematics & Optimization, 2024, vol. 89, no 2, p. 33.

[16] Yong, J., (2013). A linear-quadratic optimal control problem for mean-field stochastic differential equations.SIAM J. Control. Optim. 51, 2809–2838.

[17] Zhang, J., (2006). The wellposedness of FBSDEs. Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. B 6, 927–940.

Chapitre 4

Abréviations et symbols

Les différentes abréviations et symbols utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Ω	:	Un ensemble fondamentale.
$\mathbb{P}$	:	Une mesure de probabilité sur Ω.
$\mathcal{F}$	:	La tribu sur Ω.
$(\mathcal{F}_t)_{t>0}$	:	La filtration naturelle du mouvement brownien.
$\mathbb{E}[.]$	:	Espérance mathématique.
$\mathbb{E}[./.]$	:	Espérance conditionnelle.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P)$	:	Espace de probabilité filtré.
$v.a$	:	Variable aléatoire.
$i.e$	:	C'est-à-dire.
$P.s$	:	Presque sûrement.
C^1, C^2	:	L′espace des fonctions continues intégrables.
EDS	:	Équation différentielle stochastique.
$EDSR$	:	Équation différentielle stochastique rètrograds.
$EDSPR$	:	Équation différentielle stochastique progressives-rétrogrades

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à un problème de jeu différentiel stochastique à somme non nulle basé sur les équations différentielles stochastiques de type champ moyen. Premièrement, nous rappelons quelques notions de base sur le calcul stochastique, ensuite, on donne le théorème d'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique progressif-rétrograde de type champ moyen conditionnelle à changement de régime, enfin, on montre l'existence d'un point d'équilibre de Nash pour un jeu différentiel stochastique linéaire-quadratique à somme non nulle avec coefficients aléatoires.

Mots-clés : Equations différentielles stochastiques progressives-rétrogrades, champs moyen, jeu à somme non nulle, point d'équilibre de Nash

Abstract

In this paper, we focus on a problem of nonzero-sum stochastic differential game based on mean-field stochastic differential equations. Firstly, we recall some basic notions of stochastic calculus, then we provide the theorem of existence and uniqueness of the solution to a progressive-retrograde meanfield stochastic differential equation conditional on regime switching. Finally, we demonstrate the existence of a Nash equilibrium point for a nonzero-sum linear-quadratic stochastic differential game with random coefficients.

Key -words: Forward-backward stochastic differential equations, mean-field, nonzero-sum , Nash equilibrium point

ملخص

في هذا البحث ، نركز على مشكلة اللعبة التفاضلية العشوائية ذات المجموع غير الصفري بناءً على المعادلات التفاضلية العشوائية ذات المجال المتوسط. أولا ، نذكر بعض المفاهيم الأساسية لحساب التفاضل والتكامل العشوائي ، ثم نقدم نظرية الوجود والتفرد للحل لمعادلة تفاضلية عشوائية متوسطة المجال تقدمية ورجعية مشروطة بتبديل النظام. وأخيرًا ، أثبتنا وجود نقطة توازن ناش للعبة تفاضلية عشوائية ذات مجموع خطي وتربيعي غير معدوم مع معاملات عشوائية

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية التقدمية الرجعية، الحقل المتوسط ، لعبة تفاضلية عشوائية ذات مجموع غير معدوم، التوازن لـ ناش.