République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

HAMMOUCHE Ibtihal

Titre :

Equation différentielle doublement stochastique rétrograde

Sur l'existence et l'unicité des solutions

Cas Lipschitz

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	GHERBEL Boulakhras	UMKB	Président
Pr.	CHALA Adel	UMKB	Encadreur
Dr.	ABBA Abedelmajid	UMKB	Examinateur

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce travail :

À mes parents pour leur encouragement, et qui ont cru en moi tout au long de mon parcours d'étude, que Dieu les protège.

À ma chère grand-mère.

À mon frère.

À mes sœurs.

À ma meilleure amie.

À toutes personnes qui m'ont encouragée.

REMERCIEMENTS

Qui ne remercie pas les gens ne remercie pas Dieu.

Je voudrais dans un premier temps remercie mon directeur de mémoire le professeur CHALA Adel,

pour son encadrement et ses conseils.

Je tiens à remercier également les membres du jury le

Pr.GHERBEL Boulakhras et **Dr.ABBA Abedelmajid**

qui nous ont fait l'honneur de bien

vouloir étudier attentivement notre mémoire.

Table des matières

Introduction

Equations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (notée EDDSR) sont des nouveaux formes d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) fondé par E.Pardoux et S.Peng [5] en 1994, ces équations impliquent à la fois un intégrale stochastique d'Itô progressive par rapport à dW_t et un intégrale d'Itô rétrograde par rapport à $d\overleftarrow{B}_t$, et ont écrites sous la forme suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

où $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^k)$ est une condition terminale.

Ils ont prouvé l'existence et l'unicité des solutions sous la condition de Lipschitz. Dans notre travail on va concentrer sur l'étude de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (EDDSR) dans le cas Lipschitz, plus précisément, on va démontrer sous quelles conditions une EDDSR possède une solution unique et continue sur un intervalle donné.

On a diviser ce travaille en 3 chapitres :

Chapitre 01 : Initiation des processus stochastiques

Dans ce chapitre, on va présenter les concepts fondamentaux des processus stochastiques, qu'on a besoin dans la suite de ce mémoire comme les processus stochastique, Mouvement Brownien, EDS,...etc.

Chapitre 02 : Equations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans ce chapitre on va introduire la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR), et présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions dans le cas Lipschitz, voir [1].

Chapitre 03 : Equations différentielles doublements stochastiques rétrogrades

Dans ce chapitre on va introduire la notion d'équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades (EDDSR), et on va présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions dans le cas Lipschitz, voir [5].

Chapitre 1

Initiation des processus stochastiques

Dans ce chapitre, on va présenter les concepts fondamentaux des processus stochastiques, qu'on a besoin, et on a utilisé les références suivant [1, 2, 3, 4].

1.1 Rappel

1.1.1 Tribu

Définition 1.1.1 ***(Tribu)*** *Soit Ω un ensemble non vide est $\mathcal{F}$ une classe de partie de Ω, on dit que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω si :*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$.
3. *Si* $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.2 ***(Tribu engendrée)*** *Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ on appelle tribu engendrée par A l'intersection de toutes les tribus contenant A, notée $\sigma(A)$.*

1.1.2 Espace probabilité

Définition 1.1.3 *Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$, on appelle probabilité toutes application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$, vérifiant :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. *Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles (ie : $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$), alors*
$$\mathbb{P}(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité (où espace probabilisé).

Propriétés 1.1.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, A et B deux évènements quelconque (ie : $A, B \in \mathcal{F}$), alors :*

1. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $\mathbb{P}(\phi) = 0$.
3. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$, *alors* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

1.1.3 Espérance conditionnelle

Définition 1.1.4 *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, on définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}-$mesurable sur Ω tel que :*

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Propriétés 1.1.2 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité donné, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, et X et Y deux v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid G) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ *(linéairité).*

2. *$X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ (croissance).*

3. *Si X est $\mathcal{G}-$mesurable, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.*

4. *Si Y est $\mathcal{G}-$mesurable, alors $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.*

5. *$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.*

6. *Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.*

7. *Si X une v.a telle que $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\forall p \geq 1$, alors :*

$$\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \leq \|X\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}.$$

8. *Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribu telle que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors :*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X| \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X| \mathcal{H}).$$

9. *Si ϕ est une application convexe et mesurable,*

$$\mathbb{E}(\phi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \phi(\mathbb{E}(X| \mathcal{G})) \text{ Inégalité de Jansen.}$$

1.2 Processus stochastique

Définition 1.2.1 ***(Processus stochastique)*** *Un processus stochastique est une famille de variable aléatoire $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$*

$$X_t = X(\omega, t) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

X_t est une variable aléatoire dépend d'un paramètre t.

•Si on fixe $t, \omega \longrightarrow X_t(\omega), \forall \omega \in \Omega$ est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}$.

•Si on fixe $\omega, t \longrightarrow X_t(\omega), \forall t \in \mathbb{R}_+$ est appelé trajectoire.

Définition 1.2.2 ***(Processus indistinguable)*** *Soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *deux processus stochastique dans* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *les processus* X *et* Y *soit dit indistinguable si et seulement si :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, t \in \mathbb{R}_+) = 1.$$

Définition 1.2.3 ***(Modification)*** *Soit* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *et* $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *deux processus stochastique dans* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *les processus* X *et* Y *sont dit modification l'un de l'autre si :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.2.4 ***(Processus mesurable)*** *Le processus* X *est mesurable si l'application* $(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.2.5 ***(Processus progressivement mesurable)*** *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* $t \geq 0$, *l'application* $(s, \omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ *de* $[0, t] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.2.6 ***(Processus adapté)*** *Un processus* X *est adapté par rapport à la filtration* $\mathcal{F}$ *si pour tout* t, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.2.7 ***(Processus de Gauss)*** *Un processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est Gaussienne si toute combinaison linéaire* $a_1X_{t_1} + a_2X_{t_2} + \ldots a_nX_{t_n}$ *suit une loi gaussienne pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, *et* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 ***(Mouvement Brownien standard)*** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique, le processus stochastique* B *est appelé mouvement Brownien standard si :*

i) $B_0 = 0$.

ii) *Pour tout* $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n < t < \infty$ *la variable aléatoire* $B_t - B_s$ *est indépendante de* $(B_{s_1}, B_{s_2}, \ldots, B_{s_n})$ *(accroissements indépendante).*

iii) *Pour tout* $0 \leq s < t < +\infty$ *on a* $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ *(accroissement stationnaires).*

iv) *Les trajectoires* $t \mapsto B_t(\omega)$ *sont continues.*

Remarque 1.3.1 *Le mouvement Brownien* B_t *n'est pas dérivable en aucun point* $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. *La démonstration est porté du [2]. On dit que* f *est dérivable en* x_0 *si :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe, } h > 0.$$

En effet, pour $h > 0$, *la v.a* $Y = \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \sim (0, \frac{1}{h})$.

Par conséquent, pour tout $M > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|Y| > M\} &= \mathbb{P}\{\left|\frac{B_{t+h} - B_t}{h}\right| > M\} \\ &= \mathbb{P}\{|B_{t+h} - B_t| > Mh\} \\ &= \mathbb{P}\{\,|B_h| > Mh\} = \mathbb{P}\{\,\left|\frac{B_h}{\sqrt{h}}\right| > M\sqrt{h}\}, \end{aligned}$$

d'où, puisque $B_t/\sqrt{h}$ *est de loi* $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$\mathbb{P}\{\,|Y| > M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|Y| > M\sqrt{h}} e^{-y^2/2} dy,$$

une expression qui tend vers 1 *lorsque* h *tend vers* 0, *d'où le résultat,* M *étant arbitraire.* ■

Proposition 1.3.1 *Soit* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *un processus stochastique tel que toutes les trajectoire sont continue et tel que* $X_0 = 0$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Le processus* X *est un mouvement Brownien standard.*

ii) *Le processus X est un processus Gaussien avec espérance $m(t) = 0$, est covariance $\Gamma(s,t) = \min\{s,t\}$.*

1.4 Martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$

Définition 1.4.1 ***(Martingale à temps continue)***

1. *Une famille de variable aléatoire $(X_t, t \in [0,\infty[)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :*

   a) $\forall t \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\,|X_t| < \infty$.

   b) *X est $\mathbb{F}-$adapté (ie :$\forall t \in \mathbb{N}, X_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable).*

   c) $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s, \forall s \leq t$.

2. *X est $\mathbb{F}-$sous martingale si elle vérifié :*

   a) $\forall t \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\,|X_t| < \infty$.

   b) *X est $\mathbb{F}-$adapté (ie :$\forall t \in \mathbb{N}, X_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable).*

   c) $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s, \forall s \leq t$.

3. *X est $\mathbb{F}-$sur martingale si elle vérifié :*

   a) $\forall t \in \mathbb{N} : \mathbb{E}\,|X_t| < \infty$.

   b) *X est $\mathbb{F}-$adapté (ie :$\forall t \in \mathbb{N}, X_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable).*

   c) $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s, \forall s \leq t$.

Remarque 1.4.1 *Le martingale est à la fois un sous martingale et un sur martingale.*

Définition 1.4.2 ***(Martingale locale)*** *Un processus M adapté càglàd est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts τ_n telle que $\tau_n \longrightarrow \infty$ et $(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ est une martingale pour tout n.*

1.5 Intégrale stochastique

Définition 1.5.1 ***(Bon processus)*** *On dit que* $\{\theta_s, t \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $(\mathcal{F}_t^B)-$*adapté, càglàd et si :*

$$\mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^2 ds] < +\infty, \textit{ pour tout } t > 0.$$

1.5.1 Cas des processus étagés

On appelle processus étagés les processus du type :

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{P_n} \theta_i 1_{]t_i, t_{i+1}[}(t),$$

où $P_n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{P_n}$ et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on voit immédiatement que θ^n est un "bon processus" on définit alors :

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{P_n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

On vérifie que $\forall i \neq j, \mathbb{E}(\theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) = 0$,

et que :$\mathbb{E}(I_t(\theta^n)) = 0, Var(I_t(\theta^n)) = \mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^n ds)]$.

1.5.2 Cas générale

Le principe est le même que pour l'intégrale de wiener, si θ est un " bon processus" on montre qu'il existe $\{\theta^n, n \geq 0\}$ une suite des processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}[\int_0^t |\theta_s^n - \theta_s|^2 ds] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On pose : $I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s, \forall t \geq 0$, par l'indépendance on a :

$$\mathbb{E}(I_t(\theta^n)) = \sum_{i=0}^{P_n} \theta_i \mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0.$$

On posant à la limite que $\mathbb{E}(I_t(\theta)) = 0$,

de même :

$$\begin{aligned} Var(I_t(\theta)) &= \lim_{n\to\infty} var(I_t(\theta^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_t(\theta^n))^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{P_n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &= \mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^2 ds]. \end{aligned}$$

Propriétés 1.5.1 *:*

•*Linéarité :* $\forall t \geq 0,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *et* θ^1, θ^2 *des bon processus*

$$I_t(a_1\theta^1 + a_2\theta^2) = a_1 I_t(\theta^1) + a_2 I_t(\theta^2).$$

•*Propriété des martingales : pour tout "bon processus"* θ *les processus*

$$t \longmapsto I_t(\theta)\ \ et\ t \longmapsto I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds,$$

sont des $(\mathcal{F}_t^B)-$*martingales continue.*

•*Propriété d'isométrie : pour tout "bon processus"* θ, φ *et tout* $s, t \geq 0$ *on a :*

$$\mathbb{E}[I_s(\varphi) I_t(\theta)] = \mathbb{E}[\int_0^{s\wedge t} \theta_u \varphi_u du.$$

De plus le processus :

$$I_s(\varphi)I_t(\theta) - \int_0^t \theta_u \varphi_u du,$$

est une martingales.

1.6 Processus d'Itô

Un processus X est un processus d'Itô si :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \tag{1.1}$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s| \, ds < \infty \; p.s, \forall t \geq 0$, et σ un "bon processus locale" (ie : càglàd, $(\mathcal{F}_t^B)-$adapté et $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty, p.s, \forall t \geq 0$).

On utilisant la notion sous la forme d'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

X_0 : Condition initiale.

b_t : Le coefficient de dérivé (drift) du processus.

σ_t : Le coefficient de diffusion.

On appelle aussi le processus $t \longmapsto x + \int_0^t b_s ds$ la partie a variation finie du processus X, et le processus $\int_0^t \sigma_s dB_s$ est la partie martingale du processus X.

1.6.1 Formule d'Itô

Soit X un processus d'Itô donnée par la formule (1.1)

Théorème 1.6.1 ***(1ère formule d'Itô)*** *Supposons f est de classe C^2, alors :*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Cette formule s'écrit sous la forme différentielle :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X\rangle_t.$$

Théorème 1.6.2 ***(2ème formule d'Itô)*** *Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Cette formule s'écrit sous la forme différentielle :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X\rangle_t.$$

Théorème 1.6.3 ***(3ème formule d'Itô)*** *Soient X et Y deux processus d'Itô, et f une fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées on a :*

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) = f(x, y) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s)d\langle X\rangle_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s)d\langle Y\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)d\langle X, Y\rangle_s. \end{aligned}$$

1.7 Equation différentielle stochastique (EDS)

Soit $d, m \in \mathbb{N}, b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ deux fonction mesurable bornées ($b(x) = \{b_i(x), 1 \leq i \leq d\}$ et $\sigma(x) = \{\sigma_{ij}(x), 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m\}$).

Définition 1.7.1 *Soit $x \in \mathbb{R}^d$ une condition initiale.*

Une solution de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.2}$$

est constituée par :

a) *Un espace probabilité filtrée* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

b) *Un* $(\mathcal{F}_t)$*-Mouvement Brownien* $B = (B_1, B_2, ..., B_m)$ *à valeur dans* $\mathbb{R}^m$.

c) *Un processus* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *continue* $\mathcal{F}_t-$*adapté tel que les intégrales :*

$$\int_0^t b(s, X_s)ds, \text{ et } \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

ont un sens, et tel que l'égalité :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{1.3}$$

Théorème 1.7.1 ***(Théorème d'existence)*** *Soit* b *et* σ *deux fonctions continues on suppose qu'il existe une constante* K *telle que, pour tout* $t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n$ *:*

1. *Condition de Lipschitz :*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y| .$$

2. *Croissance linéaire :*

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2).$$

Alors, il existe une unique solution forte de (1.3) $\forall t \geq 0$ *cette solution appartient à* S_c^2*, telle que :*

$$\mathcal{S}_c^2 = \{(X_t)_{0\leq t\leq T} \text{ continue } \mathcal{F}_t - \text{adapté}, \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X|^2) < \infty\}.$$

1.8 Inégalités et théorèmes utile

Cette partie est prendre à partir des références suivante [1, 3].

Théorème 1.8.1 ***(Théorème de représentation des martingales)*** *Soit X un $(\mathcal{F}_t^B)-$martingale telle que* $\sup\limits_{t\geq 0}\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$, *alors il existe un unique processus prévisible Z tel que* $\mathbb{E}(\int_0^t |Z_s|^2 ds) < +\infty$, *et tel que :*

$$\forall t \in [0,T], X_t = X_0 + \int_0^t Z_s dB_s.$$

Lemme 1.8.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds, \quad a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors, pour tout t,

$$g(t) \leq aexp(bt).$$

Proposition 1.8.1 ***(Inégalité de Doob)*** *Si X est une martingale continue,*

$$\mathbb{E}(\sup_{s\leq T} X_s^2) \leq 4\mathbb{E}(X_T^2).$$

Proposition 1.8.2 ***(Inégalité de Bulkhoder-Davis-Gundy (BDG))*** *Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,*

$$c_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0}|X|^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{P}{2}}].$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR), et de présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions dans le cas Lipschitz, voir [1].

2.1 Formulation du problème et Estimation des solutions

Considérons un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, ξ et variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable, nous cherchons à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{dY_t}{dt} = f(Y_t), \quad t \in [0, T] \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

En imposant que, pour tout instant t, le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}$-adapté.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$ et $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe la meilleure approximation disons dans L^2-adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$.

Si $\mathcal{F}_t$ est la filtration naturelle d'un mouvement Brownien, le théorème de représentation des martingales nous permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Un calcule élémentaire montre alors que :

$$\begin{cases} Y_t = \xi - \int_0^t Z_s dW_s, \quad ie : dY_t = -\int_0^t Z_s dW_s \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

On a :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s, \quad \text{et} \quad Y_T = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T Z_s dW_s.$$

Alors :

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T &= \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s - \mathbb{E}(\xi) - \int_0^T Z_s dW_s \\ &= -\int_0^t Z_s dW_s - \int_0^T Z_s dW_s \\ &= -\int_t^T Z_s dW_s, \quad \text{avec } Y_T = \xi. \end{aligned}$$

Donc :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s.$$

On a :

$$Y_t - Y_T = -\int_t^T Z_s dW_s.$$

Alors :

$$-(Y_T - Y_t) = -\int_t^T Z_s dW_s$$
$$-dY_t = -Z_t dW_t \text{ avec } Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z, l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Notation 2.1.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité complet et* W *un MB d-dimensionnel définie sur cet espace. On notera* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *la filtration naturelle du MB* W*. Dans notre étude, nous travaillons avec deux espaces de processus :*

•$\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ *est l'espace vectoriel formé des processus* Y, *progressivement mesurable, à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$, *tel que :*

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 = \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2] < \infty.$$

$\mathcal{S}_c^2$ *est le sous espace formé par les processus continue.*

•$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *est l'espace vectoriel formé des processus* Z *progressivement mesurable à valeurs dans* $\mathbb{R}^{k\times d}$ *tel que :*

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 = \mathbb{E}[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt < \infty.$$

Si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}, \|Z_t\|^2 = trace(zz^*)$.

Nous donnons une application aléatoire f *définie sur* $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$ *telle que pour tout* $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *le processus* $\{f(t, \omega, y, z)_{0\leq t\leq T}\}$ *soit progressivement* *mesurable, et une v.a* ξ $\mathcal{F}_T-$*mesurable à valeur dans* $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte on veut résoudre l'EDSR suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad 0 \le t \le T \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

où sous forme intégrale, on a :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad 0 \le t \le T.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_t^T -dY_t &= \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \\ -(Y_T - Y_t) &= \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \textit{avec } Y_T = \xi \\ Y_t - Y_T &= \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \textit{avec } Y_T = \xi. \end{aligned}$$

Donc :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall t \in [0, T], \tag{2.1}$$

f : *Le générateur de l'EDSR.*

ξ : *La condition terminale.*

Définition 2.1.1 *Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)_{0 \le t \le T}\}$ *vérifiant :*

1. Y *et* Z *sont progressivement mesurable à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k \times d}$.
2. $\mathbb{P}-$*p.s* $\int_0^T \{|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\}ds < \infty$.
3. $\mathbb{P}-$*p.s on a :* $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \quad, \forall t \in [0, T]$.

Proposition 2.1.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0\le t\le T}$, *positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R}^k)$ *et une constante positive* λ *tels que :*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \quad |f(t,y,z)| \le f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)_{0\le t\le T}\}$ *est une solution de l'EDSR* (2.1) *telle que* $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *alors* Y *appartient à* $\mathcal{S}^2_c$.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}
Y_t &= \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \quad ,t\in[0,T]\\
&= \xi + \int_t^0 f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \left(\int_t^0 Z_s dW_s + \int_0^T Z_s dW_s\right)\\
&= \xi + \int_0^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s\\
&= Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s \quad ,t\in[0,T],
\end{aligned}$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur f,

$$\begin{aligned}
|Y_t| &= \left|Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^t Z_s dW_s\right|\\
&\le |Y_0| + \left|\int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds\right| + \left|\int_0^t Z_s dW_s\right|\\
&\le |Y_0| + \left|\int_0^t f(s,Y_s,Z_s)\right| ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Z_s dW_s\right|\\
&\le |Y_0| + \int_0^t (f_s + \lambda\,|Y| + \lambda\,\|Z\|)ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Z_s dW_s\right|\\
&\le |Y_0| + \int_0^t (f_s + \lambda\,\|Z_s\|)ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Z_s dW_s\right| + \lambda\int_0^t |Y_s|\,ds.
\end{aligned}$$

Posons :

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^t (f_s + \lambda\,\|Z_s\|)ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Z_s dW_s\right|.$$

Alors :

$$|Y_t| \leq \zeta + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds.$$

Par hypothèse, Z appartient à $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ et donc, via l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t Z_s dW_s\right|^2) = \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \|Z_s\|^2\, ds) \leq 4 \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}(\int_0^t \|Z_s\|\, ds).$$

Alors, le troisième terme est de carré intégrable, il en de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable, il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable.Comme Y est un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité :

$$|Y_t| \leq \zeta \exp(\lambda t),$$

telle que $t \in [0, T]$, donc :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|) \leq \zeta \exp(\lambda t).$$

On a :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2) \leq \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|) \leq \zeta \exp(\lambda t) < \infty,$$

qui montre que Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$. ■

Lemme 2.1.1 *Soit $Y \in \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, alors $\{\int_0^t Y_s Z_s dW_s, t \in [0, T]\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Etape01 *: On a $Y \in \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ sont $\mathcal{F}_t-$adapté par définition, alors l'intégrale stochastique $X_t = \int_0^t Y_s Z_s dW_s$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.*

Pour montrer que :

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right| < \infty.$$

On a par l'inégalité d'Itô isométrique :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \|Y_s Z_s\|^2 ds\right].$$

On a $Y \in \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$, *alors*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \|Y_s\|^2 ds\right] < \infty,$$

et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, *alors*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \|Z_s\|^2 ds\right] < \infty.$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \|Y_s Z_s\|^2 ds\right] < \infty.$$

Ce qui implique que

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right| < \infty.$$

Après on va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t Y_u Z_u dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s Y_u Z_u dW_u.$$

Par les propriétés des intégrales stochastiques et l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t Y_u Z_u dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] = 0.$$

Comme l'intégrales stochastique sur $[s,t]$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *et a une espérance nulle donc :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^t Y_u Z_u dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] &= \int_0^s Y_u Z_u dW_u + \mathbb{E}\left[\int_s^t Y_u Z_u dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \int_0^s Y_u Z_u dW_u.\end{aligned}$$

Alors $\{\int_0^t Y_s Z_s dW_s, t \in [0,T]\}$ *est une martingale.*

Etape02 *: Pour démontrer que* $\{\int_0^t Y_s Z_s dW_s, t \in [0,T]\}$ *est une martingale uniformément intégrable*

on va montrer que :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right| < \infty.$$

On a :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|^2] = \mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t |Y_s|^2 \|Z_s\|^2 ds.$$

Alors, l'inégalité de BDG donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|] &\le c\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}(\int_0^T |Y_s|^2 \|Z_s\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}] \\ &\le c\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|\,(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}],\end{aligned}$$

et par suite, comme $ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ *:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|] &\le c(\frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2] + \mathbb{E}\int_0^T \frac{\|Z_s\|^2}{2}ds) \\ &\le c'(\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2] + \mathbb{E}\int_0^T \|Z_s\|^2 ds).\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est finie par hypothèse, d'où :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|] < \infty.$$

Alors $\{\int_0^t Y_s Z_s dW_s, t \in [0,T]\}$ *est une martingale uniformément intégrable.* ■

2.2 Cas Lipschitz (Résultat de Pardoux-Peng)

Dans cette section nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité, ce résultat attribué à E.Pardoux et S.Peng c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR lorsque le générateur est non linéaire.

On a f est définie sur l'intervalle $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeur dans $\mathbb{R}^k$ ($f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$), telle que pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ le processus $\{f(t,y,z)_{0\leq t\leq T}\}$ est progressivement mesurable, ξ est une v.a $\mathcal{F}_T-$mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler :

Hyphotèse(L)

Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\mathbb{P}-p.s$:

1. Condition de Lipschitz en (y,z) : pour tout t, y, y', z, z',

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq \lambda(|y-y'| + \|z-z'\|).$$

2. Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}[\,|\xi|^2 + \int_0^T |f(r,0,0)|^2\, dr] < \infty.$$

Cas où f ne dépend ni de y ni de z :

On se donne ξ de carré intégrable, un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$, et on veut trouver une solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *Soient $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$ et $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$. L'EDSR (2.2) possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.*

Preuve. Existence : Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement :

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r \mid \mathcal{F}_t).$$

On a $\int_0^T Z_r dW_r$ est un intégrale d'Itô, alors $\int_0^T Z_r dW_r$ est martingale (ie : $\mathbb{E}(\int_t^T Z_r dW_r) = 0$), puisque F est de carré intégrable on a alors, pour tout $t \in [0, T[$:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}(\xi + \int_0^T F_r dr - \int_0^t F_r dr \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\int_t^T Z_r dW_r) \\ &= \mathbb{E}(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t) - \int_0^t F_r dr \\ &= M_t - \int_0^t F_r dr, \text{ avec } M_t = \mathbb{E}(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

M_t est une martingale carré intégrable, d'après la théorème de représentation des martingales, on construit un processus Z appartenant à $M(\mathbb{R}^{k\times d})$ tel que :

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r \\ Y_t &= M_t - \int_0^t F_r dr \\ Y_t &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr. \end{aligned}$$

On vérifiant facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T = Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - (M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr) \\ = (\int_0^T F_r dr - \int_0^t F_r dr) - (\int_0^T Z_r dW_r - \int_0^t Z_r dW_r) \\ = \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Unicité :

Soient (Y_t, Z_t) et $(Y_t^{'}, Z_t^{'})$ deux solution de l'EDSR (2.2), et $y_t = Y_t - Y_t^{'}$, $z_t = Z_t - Z_t^{'}$ alors :

$$\begin{aligned} y_t &= \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r - \xi - \int_t^T F_r dr + \int_t^T Z_r^{'} dW_r \\ &= -\int_t^T Z_r dW_r + \int_t^T Z_r^{'} dW_r = -\int_t^T (Z_r - Z_r^{'}) dW_r \\ &= -\int_t^T z_r dW_r, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que $y = z = 0$ $d\mathbb{P} \times dt - p.s$ on a :

$$y_t = -\int_0^T z_r dW_r + \int_0^t z_r dW_r, \quad t \in [0, T].$$

On applique l'inégalité martingale de Doob :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}[\,|M_T|^p],$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |y_t|^2] &\leq 4\mathbb{E}[\,|y_T|^2] \\ &\leq 2 \int_0^T |z_r|^2 \, dr < \infty. \end{aligned}$$

Nous appliquons la formule d'Itô à $g(y_t) = |y_t|^2$ de t à T, on obtient :

$$\begin{aligned} dg(y_t) &= g^{'}(y_t) dy_t + \frac{1}{2} g^{''}(y_t) d\langle y_t, y_t \rangle \\ d\,|y_t|^2 &= 2 y_t dy_t + 2 \times \frac{1}{2} \|z_t\|^2 \, dt \\ &= 2 y_t dy_t + \|z_t\|^2 \, dt. \end{aligned}$$

On applique l'intégrale et comme $y_T = 0$, Alors :

$$\int_t^T |dy|^2 = 2\int_t^T y_r dy_r + \int_t^T \|z_r\|^2 dr$$
$$0 - |y_t|^2 = 2\int_t^T y_r dy_r + \int_t^T \|z_r\|^2 dr,$$

où :

$$y_r dr = -y_r z_r dW_r.$$

Donc :

$$-|y_t|^2 = -2\int_t^T y_r z_r dW_r + \int_t^T \|z_r\|^2 dr$$
$$2\int_t^T y_r z_r dW_r = |y_t|^2 + \int_t^T \|z_r\|^2 dr.$$

Comme $\int_t^T y_r z_r dW_r$ est un intégrale d'Itô donc :

$$\mathbb{E}[\int_t^T y_r z_r dW_r] = 0.$$

Alors :

$$\mathbb{E}[|y_t|^2 + \int_t^T \|z_r\|^2 dr] = 0.$$

Par conséquent on trouve :

$$\begin{cases} |y_t|^2 = 0 \text{ alors } y_t = 0 \ d\mathbb{P} - p.s \\ \int_t^T \|z_r\|^2 dr] = 0, \text{ alors } z_r = 0 \ d\mathbb{P} \times dt - p.s. \end{cases}$$

Alors $d\mathbb{P} \times dt - p.s$

$$\begin{cases} y_t = y_t' \\ z_t = z_t'. \end{cases}$$

■

Cas où f dépend de y et de z :

Théorème 2.2.1 *Sous l'hypothèse (L), l'EDSR (2.1) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.*

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2. soit ψ une application de B^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de l'EDSR (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de ψ, pour (U, V) élément de B^2, on définit $(Y, Z) = \psi(U, V)$ une solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

On pose : $F_r = f(r, U_r, V_r) \in M^2(\mathbb{R}^k)$,

puisque f est λ-Lipschitz, on a :

$$\begin{aligned}\left|f(r, U_r, V_r) - f(r, U_r', V_r')\right| &\leq \lambda(\left|U_r - U_r'\right| + \left\|V_r - V_r'\right\|) \\ &\leq \lambda\left|U_r - U_r'\right| + \lambda\left\|V_r - V_r'\right\|.\end{aligned}$$

Soit $U_r' = V_r' = 0$, alors :

$$\begin{aligned}|f(r, U_r, V_r)| - |f(r, 0, 0)| &\leq |f(r, U_r, V_r) - f(r, 0, 0)| \\ &\leq \lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|.\end{aligned}$$

Donc :

$$|f(r, U_r, V_r)| \leq f(r, 0, 0)\lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|.$$

C'est trois processus sont de carré intégrable, alors par suite nous pouvons appliquer 2.2.1 pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. L'intégrabilité de Z est obtenue par le Théorème de représentation des martingales et d'après 2.1.1 $Y \in S_c^2$.

Soit (U_r, V_r) et $(U_r', V_r') \in B^2$ et $(Y, Z) = \psi(U, V), (Y', Z') = \psi(U', V')$

Notons : $y = Y - Y^{'}$ et $z = Z - Z^{'}$,

on obtient :

$$\begin{aligned} dy_t &= dY_t - dY_t^{'} \\ &= [-f(t, U_t, V_t)dt + Z_t dW_t] - [-f(t, U_t^{'}, V_t^{'})dt + Z_t^{'} dW_t] \\ &= [-f(t, U_t, V_t) + f(t, U_t^{'}, V_t^{'})]dt + (Z_t - Z_t^{'})dW_t \\ &= [-f(t, U_t, V_t) + f(t, U_t^{'}, V_t^{'})]dt + z_t dW_t. \end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $\exp(\alpha t) \left| y_t \right|^2$,on obtient :

$$\begin{aligned} d(\exp(\alpha t) \left| y_t \right|^2) &= \alpha \exp(\alpha t) \left| y_t \right|^2 dt + 2\exp(\alpha t) \left| y_t \right| dy_t + \exp(\alpha t) d\langle y_t \rangle \\ &= \alpha \exp(\alpha t) \left| y_t \right|^2 dt + 2\exp(\alpha t) \left| y_t \right| dy_t + \exp(\alpha t) \left\| z_t \right\|^2 dt \\ &= \alpha \exp(\alpha t) \left| y_t \right|^2 dt + \exp(\alpha t) \left\| z_t \right\|^2 dt \\ &- 2\exp(\alpha t) \left| y_t \right| [f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t^{'}, V_t^{'})]dt \\ &+ 2\exp(\alpha t) \left| y_t \right| z_t dW_t. \end{aligned}$$

En intégrant entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_t^T d(\exp(\alpha r) \left| y_r \right|^2) = &\int_t^T \alpha \exp(\alpha r) \left| y_r \right|^2 dr \\ &- 2\int_t^T \exp(\alpha r) \left| y_r \right| [(f(r, U_r, V_r) - f(r, U_r^{'}, V_r^{'})]dr \\ &+ 2\int_t^T \exp(\alpha r) \left| y_r \right| z_r dW_r + \int_t^T \exp(\alpha r) \left\| z_r \right\|^2)dr. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\exp(\alpha T)\left|y_T\right|^2-\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2 &= \int_t^T \alpha\exp(\alpha r)\left|y_r\right|^2 dr+\int_t^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr\\ &-2\int_t^T \exp(\alpha r)\left|y_r\right|[f(r,U_r,V_r)-f(r,U_r^{'},V_r^{'})]dr\\ &+2\int_t^T \exp(\alpha r)\left|y_r\right| z_r dW_r].\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}&\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2+\int_t^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr\\ &=\exp(\alpha T)\left|y_T\right|^2+2\int_t^T \exp(\alpha r)\left|y_r\right|[f(r,U_r,V_r)-f(r,U_r^{'},V_r^{'})]dr\\ &-2\int_t^T \exp(\alpha r)\left|y_r\right| z_r dW_r]+\exp(\alpha T)\left|y_T\right|^2-\int_t^T \alpha\exp(\alpha r)\left|y_r\right|^2 dr.\end{aligned}$$

Comme f est $\lambda-$Lipschitzienne et on note $u=U-U^{'}$ et $v=V-V^{'}$:

$$\begin{aligned}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2+\int_t^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr &\leq \int_t^T \exp(\alpha r)(-\alpha\left|y_r\right|^2+2\lambda\left|y_r\right|\left|u_r\right|+2\lambda\left|y_r\right|\left\|v_r\right\|)dr\\ &-\int_t^T 2\exp(\alpha r)y_r z_r dW_r.\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon>0$, on a $2ab\leq\frac{a^2}{\varepsilon}+\varepsilon b^2$, et donc l'inégalité précédente donne :

$$\begin{aligned}&\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2+\int_t^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr\\ &\leq\int_t^T \exp(\alpha r)(-\alpha+\frac{2\lambda^2}{\varepsilon})\left|y_r\right|^2 dr-\int_t^T 2\exp(\alpha r)y_r z_r dW_r\\ &+\varepsilon\int_t^T \exp(\alpha r)(\left|u_r\right|^2+\left\|v_r\right\|^2)dr.\end{aligned}$$

Prenant $\alpha=\frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$ et $R_\varepsilon=\varepsilon\int_t^T \exp(\alpha r)(\left|u_r\right|^2+\left\|v_r\right\|^2)dr$, donc $\forall t \in [0,T]$

$$\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2 + \int_t^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r.$$

Alors :

$$\begin{cases} \exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2 \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r \\ \int_t^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r. \end{cases}$$

D'après 2.2.1 la martingale locale $\{\int_0^t \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r\}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque $Y, Y' \in \mathcal{S}^2$ et $Z, Z' \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ donc pour $t = 0$:

$$\mathbb{E}[\int_0^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon). \tag{2.3}$$

On applique l'inégalité de Doob :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2)) &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\int_t^T \exp(\alpha r) y_r z_r dW_r] \\ &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + c\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\int_t^T \exp(\alpha r)\left|y_r\right|^2\left\|z_r\right\|^2 dr] \\ &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + c\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2\int_t^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr] \\ &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2] + \frac{c^2}{2}\mathbb{E}[\int_t^T \exp(\alpha r)\left\|z_r\right\|^2 dr].\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2)] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2)] &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{c^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon) \\ \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2)] &\leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + \frac{c^2}{2}\mathbb{E}(R_\varepsilon).\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2)] \leq 2\mathbb{E}(R_\varepsilon) + c^2\mathbb{E}(R_\varepsilon). \tag{2.4}$$

De plus (2.3) + (2.4) donne :

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(\alpha t)\,|y_t|^2)] + \mathbb{E}[\int_0^T \exp(\alpha r)\,\|z_r\|^2\,dr] \leq \mathbb{E}(R_\varepsilon) + 2\mathbb{E}(R_\varepsilon) + c^2\mathbb{E}(R_\varepsilon)$$
$$\leq (3+c^2)\mathbb{E}(R_\varepsilon),$$

et par suite d'après la définition de R_ε on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(\exp(\alpha t)\,|y_t|^2)] + \mathbb{E}[\int_0^T \exp(\alpha r)\,\|z_r\|^2\,dr] \\
&\leq (3+c^2)\mathbb{E}[\varepsilon\int_0^T \exp(\alpha r)(|u_r|^2 + \|v_r\|^2)dr] \\
&\leq \varepsilon(3+c^2)\mathbb{E}[\int_0^T \exp(\alpha r)\,|u_r|^2\,dr + \int_0^T \exp(\alpha r)\,\|v_r\|^2\,dr] \\
&\leq \varepsilon(3+c^2)\mathbb{E}[\exp(\alpha t)\,|u_t|^2\int_0^T dr + \int_0^T \exp(\alpha r)\,\|v_r\|^2\,dr] \\
&\leq \varepsilon(3+c^2)\mathbb{E}[\exp(\alpha t)\,|u_t|^2\,T + \int_0^T \exp(\alpha r)\,\|v_r\|^2\,dr] \\
&\leq \varepsilon(3+c^2)(1\vee T)\mathbb{E}[\exp(\alpha t)\,|u_t|^2 + \int_0^T \exp(\alpha r)\,\|v_r\|^2\,dr].
\end{aligned}$$

Prenons ε tel que $\varepsilon(3+c^2)(1\vee T) = \frac{3}{4}$ de sorte que l'application ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme :

$$\|(U,V)\|_\alpha = \mathbb{E}[\exp(\alpha t)\,|u_t|^2 + \int_0^T \exp(\alpha r)\,\|v_r\|^2\,dr]^{\frac{1}{2}}.$$

Le cas que $\alpha = 0$, alors ψ possède donc un unique point fixe, ce qui démontre l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans B^2. On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ puisque 2.1.1 implique qu'un telle solution appartient à B^2. ■

Remarque 2.2.1 *Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_s dW_s$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.*

Chapitre 3

Equations différentielles doublements stochastiques rétrogrades(EDDSR)

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (EDDSR), et de présenter le résultat d'existence et d'unicité des solutions dans le cas Lipschitz, voir [5].

3.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilités, et $0 < T < \infty$.

$\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ deux processus de mouvement Brownien standard et indépendantes avec des valeurs respective en $\mathbb{R}^d$ et en $\mathbb{R}^l$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère les filtrations :

$\mathcal{F}_t^W = \sigma(\{W_t, 0 \leq t \leq T\})$ et $\mathcal{F}_{t,T}^B = \sigma(\{B_s - B_t, t \leq s \leq T\})$,

complétées par les ensembles $P-$négligeables.

La $\sigma-$algèbre $\mathcal{F}_t$ est définie par :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B.$$

Pour tout processus $\{\eta_t\}$, on a :

$$\mathcal{F}^{\eta}_{s,t} = \sigma(\{\eta_r - \eta_s; s \leq r \leq t\}) \vee \mathcal{N}, \quad \text{et } \mathcal{F}^{\eta}_{t} = \mathcal{F}^{\eta}_{0,t}.$$

Notez que la collection $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ n'est ni croissante ni décroissante, et ne constitue donc pas une filtration.

On définit les espaces des processus suivants :

•$M^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des processus aléatoire à n-dimension $\{\varphi_t, t \in [0,T]\}$ mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

i) $\|\varphi\|^2_{M^2} = \mathbb{E}[\int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt] < \infty.$

ii) φ_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable, $\forall t \in [0,T]$.

•$\mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des processus aléatoire continue à $n-$dimension $\{\varphi_t, t \in [0,T]\}$ mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui satisfait :

i) $\|\varphi\|^2_{\mathcal{S}^2} = \mathbb{E}[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^2] < \infty.$

ii) φ_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable, $\forall t \in [0,T]$.

On considère les deux fonctions :

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k,$$
$$g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times l},$$

qui sont mesurables et pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$

$$f(.,y,z) \in M^2([0,T];\mathbb{R}^k),$$
$$g(.,y,z) \in M^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times l}),$$

et $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^k)$.

On cherche à résoudre l'EDDSR suivant :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.1}$$

ξ : Condition terminale.

$\triangleleft$ L'intégrale par rapport à $\{B_t\}$ est " l'intégrale d'Itô rétrograde ".

$\triangleleft$ L'intégrale par rapport à $\{W_t\}$ est " l'intégrale d'Itô progressive ".

Hypothèse :

Il existe des constants $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$, tel que :

Pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T], (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times l}$

$$\begin{cases} |f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 \leq c(|y_1 - y_2|^2 + \|z_1 - z_2\|^2) \\ \|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)\|^2 \leq c\,|y_1 - y_2|^2 + \alpha\,\|z_1 - z_2\|^2 . \end{cases} \tag{3.2}$$

Il existe c tel que pour tout $(t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$

$$\Big\{ gg^*(t, y, z) \leq zz^* + c(\|g((t, 0, 0)\|^2 + |y|^2)I. \tag{3.3}$$

3.2 Existence et unicité des solutions

L'objectif principal de cette section est de prouver :

Théorème 3.2.1 *Sous l'hypothèse ci-dessus (3.2), l'équation (3.1) possède unique solution tel que :*

$$(Y, Z) \in \mathcal{S}^2([0, T]; \mathbb{R}^k) \times M^2([0, T]; \mathbb{R}^{k \times d}).$$

• Avant de commencer à prouver le Théorème, nous établissons le même résultat dans le cas où f et g ne dépend pas ni de Y ni de Z.

Etant donné $f \in M^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et $g \in M^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times l})$ et $\xi \in L(\Omega,\mathcal{F}_T)$, considérons L'EDDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.4}$$

Proposition 3.2.1 *Il existe un unique couple :*

$$(Y,Z) \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k) \times M^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d}),$$

qui résoudre l'équation (3.4).

Preuve.

Existence : On définit la filtration $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq T}$ par :

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_T^B.$$

Posons :

$$M_t = \mathbb{E}(\xi + \int_0^T f(s)ds + \int_0^T g(s)d\overleftarrow{B}_s \mid \mathcal{G}_t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

une martingale de carré intégrable.

Par le Théorème de représentation des martingales il existe un processus $\{Z_t\}$, $\mathcal{G}_t-$progressivement mésurable à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que :

$$\mathbb{E}(\int_0^T |Z_t|^2 dt < \infty,$$

et :

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Par conséquent :

$$M_T = M_t + \int_0^T Z_s dW_s. \tag{3.5}$$

Par définition, on a :

$$
\begin{aligned}
M_t &= \mathbb{E}(\xi + \int_0^T f(s)ds + \int_0^T g(s)d\overleftarrow{B}_s \mid \mathcal{G}_t) \\
&= \mathbb{E}(\xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)d\overleftarrow{B}_s \mid \mathcal{G}_t) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)d\overleftarrow{B}_s.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, de l'égalité (3.5), on obtient

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s \\
Y_t &\triangleq \mathbb{E}(\xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)d\overleftarrow{B}_s \mid \mathcal{G}_t).
\end{aligned}
$$

Il reste à montrer que $\{Y_t\}$ et $\{Z_t\}$ sont $\mathcal{F}_t-$adaptés.

Pour Y_t est évident puisque pour chaque t,

$$
Y_t = \mathbb{E}(\theta \mid \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^B),
$$

où θ est $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^B$ mesurable puisque $\mathcal{F}_t^B$ est indépendante de $\mathcal{F}_T \vee \sigma(\theta)$ et :

$$
Y_t = \mathbb{E}(\theta \mid \mathcal{F}_t).
$$

Maintenant :

$$
\int_t^T Z_s dW_s = \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)d\overleftarrow{B}_s - Y_t,
$$

et le côté droit est $\mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ mesurable ainsi, d'après le Théorème de représentation des martingales d'Itô $\{Z_t, t < s < T\}$ est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ adapté. Par conséquent Z_s est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ mesurable pour tout $t < s$, donc il est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$ mesurable.

Unicité : Soient (Y, Z)et $(Y^{'}, Z^{'})$ deux solution de l'équation(3.4), alors

$$\begin{aligned}
Y_t - Y_t^{'} &= \xi + \int_t^T f(s)ds + \int_t^T g(s)d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s \\
&- \xi - \int_t^T f(s)ds - \int_t^T g(s)d\overleftarrow{B}_s + \int_t^T Z_s^{'} dW_s \\
&= - \int_t^T Z_s dW_s + \int_t^T Z_s^{'} dW_s \\
&= - \int_t^T (Z_s - Z_s^{'}) dW_s.
\end{aligned}$$

Alors :

$$Y_t - Y_t^{'} + \int_t^T (Z_s - Z_s^{'}) dW_s = 0.$$

Supposons que $y_t = Y_t - Y_t^{'}$ et $z_t = Z_t - Z_t^{'}$, alors :

$$y_t + \int_t^T z_s dW_s = 0.$$

Par orthogonalité on obtient que :

$$\mathbb{E}(\,|y_t|^2) + \mathbb{E}(\int_t^T Tr[z_s z_s^*]ds) = 0.$$

Par conséquent on trouve :

$$\begin{cases} |y_t|^2 = 0 \text{ alors } y_t = 0 \ d\mathbb{P} - p.s \\ \int_t^T Tr[z_s z_s^*]ds = 0 \ d\mathbb{P} - p.s \text{ alors } z_t = 0 \ d\mathbb{P} \times dt - p.s. \end{cases}$$

Alors $Y = Y'$, $Z = Z'$, d'où l'unicité. ■

Formule générale d'Itô :

Lemme 3.2.1 *Soit* $\alpha \in \mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k), \beta \in M^2([0,T];\mathbb{R}^k), \gamma \in M^2([0,T];\mathbb{R}^k), \delta \in M^2([0,T];\mathbb{R}^{k\times d})$, *tel que :*

$$\alpha_t = \alpha_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s d\overleftarrow{B}_s + \int_0^t \delta_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors :

$$|\alpha_t|^2 = |\alpha_0|^2 + 2\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)ds + 2\int_0^t (\alpha_s, \gamma_s d\overleftarrow{B}_s) + 2\int_0^t (\alpha_s, \delta_s dW_s) + \int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds - \int_0^t \|\delta_s\|^2 ds,$$

et :

$$\mathbb{E}\,|\alpha_t|^2 = \mathbb{E}\,|\alpha_0|^2 + 2\mathbb{E}\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)ds + \mathbb{E}\int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds - \mathbb{E}\int_0^t \|\delta_s\|^2 ds.$$

Plus généralement, si $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}\phi(\alpha_t) = \phi(\alpha_0) &+ \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \beta_s)ds + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \gamma_s d\overleftarrow{B}_s) + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \delta_s dW_s) \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t Tr[\phi''(\alpha_s)\,\gamma_s\gamma_s^*]ds + \frac{1}{2}\int_0^t Tr[\phi''(\alpha_s)\,\delta_s\delta_s^*]ds.\end{aligned}$$

Preuve. de 3.2.1

Unicité : Soit (Y_t, Z_t) et (Y_t', Z_t') deux solution de L'EDDR (3.1), on suppose que :

$$\tilde{Y}_t = Y_t - Y_t', \tilde{Z}_t = Z_t - Z_t', \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t &= \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s dW_s \\ &- \xi - \int_t^T f(s, Y_s', Z_s')ds - \int_t^T g(s, Y_s', Z_s')d\overleftarrow{B}_s + \int_t^T Z_s' dW_s \\ &= \int_t^T [f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s', Z_s')]ds + \int_t^T [g(s, Y_s, Z_s) - g(s, Y_s', Z_s')]d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T \tilde{Z}_s dW_s.\end{aligned}$$

Et par suite, on applique Lemme **??** à $\tilde{Y}_t$ on trouve :

$$\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t\right|^2) = 2\mathbb{E}\int_t^T [f(s,Y_s,Z_s) - f(s,Y_s',Z_s'),\tilde{Y}_s]ds - \mathbb{E}\int_t^T \left\|\tilde{Z}_s\right\|^2 ds$$

$$\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t\right|^2) + \mathbb{E}\int_t^T \left\|\tilde{Z}_s\right\|^2 ds = 2\mathbb{E}\int_t^T [f(s,Y_s,Z_s) - f(s,Y_s',Z_s'),\tilde{Y}_s]ds + \mathbb{E}\int_t^T \left\|g(s,Y_s,Z_s) - g(s,Y_s',Z_s')\right\|^2 ds.$$

D'après (3.2) et l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}a^2 + \frac{1-\alpha}{2}b^2$:

$$\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t\right|^2) + \mathbb{E}\int_t^T \left\|\tilde{Z}_s\right\|^2 ds \leq c(\alpha)\mathbb{E}[\int_t^T \left|\tilde{Y}_s\right|^2 ds] + \frac{1-\alpha}{2}\mathbb{E}[\int_t^T \left\|\tilde{Z}_s\right\|^2 ds] + \alpha\mathbb{E}\int_t^T \left\|\tilde{Z}_s\right\|^2 ds.$$

Avec $0 < \alpha < 1$ est la constante dans (3.2) par conséquent :

$$\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t\right|^2) + \frac{1-\alpha}{2}\mathbb{E}[\int_t^T \left\|\tilde{Z}_s\right\|^2 ds] \leq c(\alpha)\mathbb{E}[\int_t^T \left|\tilde{Y}_s\right|^2 ds].$$

Par Lemme de Gronwall, il vient que $\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t\right|^2) = 0, 0 \leq t \leq T$ et donc $\mathbb{E}\int_t^T \left\|\tilde{Z}_s\right\|^2 ds = 0$, alors :

$$\begin{cases} \left|\tilde{Y}_t\right|^2 = 0, \text{ alors } \tilde{Y}_t = 0 \ d\mathbb{P} - p.s \\ \int_t^T \left\|\tilde{Z}_s\right\|^2 ds = 0 \ d\mathbb{P} - p.s, \text{ alors } \tilde{Z}_t = 0 \ d\mathbb{P}\times dt - p.s \end{cases}$$

Existence : On définit une suite récursive $\{(Y_t^i, Z_t^i)\}_{i=0,1,\ldots}$ comme suite $Y_t^0 = 0, Z_t^0 = 0$ étant donné $\{(Y_t^i, Z_t^i)\}, \{(Y_t^{i+1}, Z_t^{i+1})\}$ l'unique solution de L'EDDSR suivante :

$$Y_t^{i+1} = \xi + \int_t^T f(s,Y_s^i,Z_s^i)ds + \int_t^T g(s,Y_s^i,Z_s^i)d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s^{i+1}dW_s.$$

Soient $\tilde{Y}_t^{i+1} = Y_t^{i+1} - Y_t^i, \tilde{Z}_t^{i+1} = Z_t^{i+1} - Z_t^i, \quad 0 \leq t \leq T,$

par un calcule on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t^{i+1} &= Y_t^{i+1} - Y_t^{i} = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^i, Z_s^i)ds + \int_t^T g(s, Y_s^i, Z_s^i)d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s^{i+1}dW_s \\
&\quad - [\xi + \int_t^T f(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})ds + \int_t^T g(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})d\overleftarrow{B}_s - \int_t^T Z_s^i dW_s] \\
&= \int_t^T [f(s, Y_s^i, Z_s^i) - f(s, Y_s^i, Z_s^i)]ds + \int_t^T [g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})]d\overleftarrow{B}_s \\
&\quad - \int_t^T [Z_s^{i+1} - Z_s^i]dW_s \\
\tilde{Y}_t^{i+1} &= \int_t^T [f(s, Y_s^i, Z_s^i) - f(s, Y_s^i, Z_s^i)]ds + \int_t^T [g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})]d\overleftarrow{B}_s \\
&\quad - \int_t^T \tilde{Z}_t^{i+1} dW_s.
\end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $\tilde{Y}_t^{i+1}$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2) &= 2\mathbb{E}\int_t^T (f(s, Y_s^i, Z_s^i) - f(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}), \tilde{Y}_t^{i+1})ds \\
&\quad + \mathbb{E}\int_t^T \left\|g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})\right\|^2 ds - \mathbb{E}(\int_t^T \left\|\tilde{Z}_t^{i+1}\right\|^2 ds)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2) + \mathbb{E}(\int_t^T \left\|\tilde{Z}_t^{i+1}\right\|^2 ds) &= 2\mathbb{E}\int_t^T (f(s, Y_s^i, Z_s^i) - f(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}), \tilde{Y}_t^{i+1})ds \\
&\quad + \mathbb{E}\int_t^T \left\|g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$, par l'intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2)\exp(\beta t) + \beta\mathbb{E}\int_t^T \left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2 \exp(\beta s)ds + \mathbb{E}(\int_t^T \left\|\tilde{Z}_t^{i+1}\right\|^2 \exp(\beta s)ds) \\
&= 2\mathbb{E}\int_t^T (f(s, Y_s^i, Z_s^i) - f(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}), \tilde{Y}_t^{i+1})\exp(\beta s)ds \\
&+ \mathbb{E}\int_t^T \left\|g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1})\right\|^2 \exp(\beta s)ds.
\end{aligned}$$

Il existe $c, \gamma > 0$ tel que :

$$\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2)\exp(\beta t) + (\beta-\gamma)\mathbb{E}\int_t^T \left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2 \exp(\beta s)ds + \mathbb{E}(\int_t^T \left\|\tilde{Z}_t^{i+1}\right\|^2 \exp(\beta s)ds)$$
$$\leq \mathbb{E}\int_t^T (c\left|\tilde{Y}_s^i\right|^2 + \frac{1+\alpha}{2}\left\|\tilde{Z}_s^i\right\|^2)\exp(\beta s)ds,$$

où $\beta = \gamma + \tilde{c}$ et $\tilde{c} = \frac{2c}{1+\alpha}$

$$\mathbb{E}(\left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2)\exp(\beta t) + \mathbb{E}\int_t^T (\tilde{c}\left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2 + \left\|\tilde{Z}_s^{i+1}\right\|^2)\exp(\beta s)ds$$
$$\leq \frac{1+\alpha}{2}\mathbb{E}\int_t^T (\tilde{c}\left|\tilde{Y}_s^i\right|^2 + \left\|\tilde{Z}_s^i\right\|^2)\exp(\beta s)ds,$$

et par suite :

$$\mathbb{E}\int_t^T (\tilde{c}\left|\tilde{Y}_t^{i+1}\right|^2 + \left\|\tilde{Z}_s^{i+1}\right\|^2)\exp(\beta s)ds \leq \frac{1+\alpha}{2}\mathbb{E}\int_t^T (\tilde{c}\left|\tilde{Y}_s^i\right|^2 + \left\|\tilde{Z}_s^i\right\|^2)\exp(\beta s)ds.$$

Et comme $\frac{1+\alpha}{2} < 1, \{(Y_t^i, Z_t^i)\}_{i=0,1,\ldots}$ est une suite de Cauchy dans $M^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et donc $\{Y_t^i\}_{i=0,1,\ldots}$ est de Cauchy dans $\mathcal{S}^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et que :

$$\{(Y_t, Z_t)\} = \lim_{i\to\infty}\{(Y_t^i, Z_t^i)\},$$

est la solution de l'équation (3.1) ■

Théorème 3.2.2 *Supposons, en plus des conditions du 3.2.1, que cela est vérifié et pour un certain* $p > 2$, $\xi \in L^P(\Omega, \mathcal{F}_T, P, \mathbb{R}^k)$ *et*

$$\mathbb{E}\int_0^T |f(t,0,0)|^p + \|g(t,0,0)\|^p)dt < \infty.$$

Alors :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p + (\int_0^T \|Z_t\|^2 dt)^{\frac{P}{2}}) < \infty.$$

Preuve. On applique **??** avec $\varphi(x) = |x|^p$,

$$\begin{aligned}
&|Y_t|^p + \frac{p}{2}\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|Z_s\|^2 ds + \frac{p}{2}(p-2)\int_t^T |Y_s|^{p-4} (Z_s Z_s^* Y_s, Y_s) ds \\
&= |\xi|^p + p\int_t^T |Y_s|^{p-2} (f(s, Y_s, Z_s), Y_s) ds + p\int_t^T |Y_s|^{p-2} (Y_s, g(s, Y_s, Z_s) d\overleftarrow{B}_s) \\
&+ \frac{p}{2}\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|g(s, Y_s, Z_s)\|^2 ds \\
&+ \frac{p}{2}(p-2)\int_t^T |Y_s|^{p-4} (gg^*(s, Y_s, Z_s) Y_s, Y_s) ds - p\int_t^T |Y_s|^{p-2} (Y_s, Z_s dW_s).
\end{aligned}$$

De plus, nous ne savons pas a priori que les intégrales stochastiques ci-dessus ont zéro attente, en argumentant comme dans la preuve du lemme **??** dans [5], on obtient que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|Y_t|^p) + \frac{p}{2}\mathbb{E}\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|Z_s\|^2 ds + \frac{p}{2}(p-2)\mathbb{E}\int_t^T |Y_s|^{p-4} (Z_s Z_s^* Y_s, Y_s) ds \\
&\leq \mathbb{E}(|\xi|^p) + p\mathbb{E}\int_t^T |Y_s|^{p-2} (f(s, Y_s, Z_s), Y_s) ds + \frac{p}{2}\mathbb{E}\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|g(s, Y_s, Z_s)\|^2 ds \\
&+ \frac{p}{2}(p-2)\int_t^T |Y_s|^{p-4} (gg^*(s, Y_s, Z_s) Y_s, Y_s) ds.
\end{aligned}$$

Notons que l'on peut conclure de (3.2) que pour tout $\alpha < \alpha' < 1$, il existe $c(\alpha')$ tel que

$$\|g(t, y, z)\|^2 \leq c(\alpha')(|y|^2 + \|g(t, 0, 0)\|^2 + \alpha' \|z\|^2.$$

A partir des deux dernières inégalités, (3.2) et (3.3), et en utilisant les inégalités de Hôlder et de Young, on en déduit qu'il existe $\theta > 0$ et c tels que, pour $0 \leq t \leq T$

$$\mathbb{E}(|Y_t|^p) + \theta\mathbb{E}\int_t^T |Y_s|^{p-2} \|Z_s\|^2 ds \leq \mathbb{E}(|\xi|^p) + c\mathbb{E}\int_t^T (|Y_s|^p + |f(s, 0, 0)|^p + \|g(s, 0, 0)\|^p) ds.$$

Ensuite en utilisant Lemme de Gronwall,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|Y_t|^p) + \mathbb{E}\int_0^T |Y_t|^{p-2} \|Z_t\|^2 dt < \infty.$$

En applique les mêmes inégalités que nous avons déjà utilisées à la première identité de cette preuve, on en déduit que :

$$\begin{aligned}|Y_t|^p \leq |\xi|^p + c\int_t^T (|Y_s|^p + |f(s,0,0)|^p + \|g(s,0,0)\|^p)ds + p\int_t^T |Y_s|^{p-2}\,(Y_s, g(s,Y_s,Z_s)d\overleftarrow{B}_s)\\ - p\int_t^T |Y_s|^{p-2}\,(Y_s, Z_s dW_s).\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de l'inégalité de BDG :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p) \leq \mathbb{E}(|\xi|^p) + c\mathbb{E}\int_0^T (|Y_t|^p + |f(t,0,0)|^p + \|g(t,0,0)\|^p)dt\\ + c\mathbb{E}(\int_0^T |Y_t|^{2p-4}\,(gg^*(t,Y_t,Z_t)Y_t, Y_t)dt)^{\frac{1}{2}}\\ + c\mathbb{E}(\int_0^T |Y_t|^{2p-4}\,(Z_t Z_t^* Y_t, Y_t)dt)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Nous estimons le dernier terme comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\int_0^T |Y_t|^{2p-4}\,(Z_t Z_t^* Y_t, Y_t)dt)^{\frac{1}{2}} &\leq \mathbb{E}\left(Y_t^{\frac{p}{2}}(\int_0^T |Y_t|^{p-2}\,\|Z_t\|^2\,dt)^{\frac{p}{2}}\right)\\ &\leq \frac{1}{3}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p) + \frac{1}{4}\mathbb{E}\int_0^T |Y_t|^{p-2}\,\|Z_t\|^2\,dt.\end{aligned}$$

L'avant-dernier terme de l'inégalité ci-dessus peut être traité de manière analogue, et on en déduit que :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p) < \infty.$$

Maintenant nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|Z_t\|^2\,dt = |\xi|^2 - |Y_0|^2 + 2\int_0^T (f(t,Y_t,Z_t), Y_t)dt + 2\int_0^T (Y_t, g(t,Y_t,Z_t))d\overleftarrow{B}_t\\ + \int_0^T \|g(t,Y_t,Z_t)\|^2\,dt - 2\int_0^T (Y_t, Z_t dW_t).\end{aligned}$$

Donc pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}(\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt)^{\frac{p}{2}} &\leq (1+\delta)(\int_0^T \left\|g(t,Y_t,Z_t)\right\|^2 dt)^{\frac{p}{2}} + c(\delta,p)[|\xi|^p + |Y_0|^p \\ &+ \left|\int_0^T (f(t,Y_t,Z_t),Y_t)dt\right|^{\frac{p}{2}} + \left|\int_0^T (Y_t, g(t,Y_t,Z_t))d\overleftarrow{B}_t\right|^{\frac{p}{2}} + \left|\int_0^T (Y_t, Z_t dW_t)\right|^{\frac{p}{2}}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt)^{\frac{p}{2}} &\leq (1+\delta)^2\alpha\mathbb{E}(\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt)^{\frac{p}{2}} + c'(\delta,p) \\ &+ c(\delta,p)\mathbb{E}(\int_0^T |Y_t| \left\|Z_t\right\| dt)^{\frac{p}{2}} + c(\delta,p)\mathbb{E}(\int_0^T |Y_t|^2 \left\|Z_t\right\|^2 dt)^{\frac{p}{4}} \\ &\leq (1+\delta)^2\alpha\mathbb{E}(\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt)^{\frac{p}{2}} + c'(\delta,p) \\ &+ c(\delta,p)\mathbb{E}\{(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^{\frac{p}{2}})[(\int_0^T \left\|Z_t\right\| dt)^{\frac{p}{2}} + (\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt)^{\frac{p}{4}}]\} \\ &\leq [(1+\delta)^2\alpha + (1+\delta)]\mathbb{E}(\int_0^T \left\|Z_t\right\|^2 dt)^{\frac{p}{2}} + c''(\delta,p).\end{aligned}$$

La deuxième partie du résultat suit maintenant, si l'on choisit $\delta > 0$ suffisamment petit tel que

$$(1+\delta)^2\alpha + (1+\delta) < 1.$$

Rappelons que $\alpha < 1$. ■

Conclusion

C*e mémoire* s'intéresse aux équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (EDDSR) ce qui sont un type d'équations différentielles stochastiques. Dans ce mémoire nous avons présenté l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (EDDSR) dans le cas où le générateur est Lipschitzien, ce mémoire ouvre la voie à plusieurs perspectives de recherche future comme Étendre les résultats à des cas plus généraux où le générateur n'est pas Lipschitzien, aussi faire une application dans le problème des contrôles stochastiques, physique des fluides...

Bibliographie

[1] Briand, P. Mars (2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Université Savoie Mont Blanc. Available at https ://www.researchgate.net/publication/260293362.

[2] Foata, D., & Fuchs, A. (2002). Processus stochastiques : Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales. Dunod. Pages 236.

[3] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[4] Labed, B. (2023/2024). Cours Mouvement Brownien et calcul stochstique. Université Mohamed Khider Biskra. Available at http ://elearning.univ-biskra.dz/moodle/course/view.php ?id=14604.

[5] Pardoux, É., & Peng, S. (1994). Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs. Probability Theory and Related Fields, 98(2), 209-227.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{E}(.)$	:	Espérance mathématique.
$Var(.)$	:	Variance mathématique.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
$EDSR$	:	Equation différentielle stochastique rétrograde.
$EDDSR$	:	Equation différentielle doublement stochastique rétrograde.
L^2	:	l'espace des processus carré intégrable.
$\mathbb{P}-p.s$	:	La notation presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$p.s$	:	La notation presque sûrement.
$\langle X\rangle_t$	:	Variation quadratique de X sur $[0,t]$.
C^1	:	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continue.
$v.a$	:	variable aléatoire
MB	:	Mouvement Brownien

ملخص:

في هذا العمل، نقدم نوعًا جديدًا من المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية، تُعرف بالمعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية المزدوجة. تشمل هذه المعادلات نوعين من التكاملات العشوائية: أحدهما تقدمي والآخر تراجعي. أولاً، استعرضنا النتائج الرئيسية لحساب العشوائية وعرّفنا التكاملات العشوائية التقدمية والتراجعية. ثم درسنا المعادلات التفاضلية العشوائية العكسية. وأخيرًا، اختتمنا العمل بدراسة وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية المزدوجة ذات المعاملات الليبشيتزية.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية عشوائية تراجعية, تكامل عشوائي, وجود ووحدانية الحلول, مارتنغال.

Abstract:

In this work, we present a new type of backward stochastic differential equations, known as Backward doubly stochastic differential equations. These equations include two types of stochastic integrals: one forward and the other backward. First, we recalled the main results of stochastic calculus and defined the progressive and backward stochastic integrals. Then, we studied the BSDEs. Finally, we concluded the work with the study of the existence and uniqueness of the solutions of the BDSDE with Lipschitz coefficients.

Key words: backward stochastic differential equations, Stochastic Integral, Martingale, Existence and Uniqueness of Solutions.

Résumé :

Dans ce travail nous présentons un nouveaux type des équations différentielles stochastique rétrograde ce sont les équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades, c'est équations incluent deux type d'intégrale stochastique l'un progressive et l'autre rétrograde.

Tout d'abord nous avons rappelé les principaux résultats du calcul stochastique et défini les intégrales stochastiques progressives et rétrogrades. Ensuite, nous avons étudié les EDSR. Enfin, nous avons terminé le travail par l'étude d'existence et d'unicité des solutions des EDDSR à coefficients Lipschitziens.

Mots clé: Equations différentielles stochastique rétrograde, Intégrale stochastique, Martingale, Existence et Unicité des solutions