République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilités**

Par

**Sagouma Aicha**

Titre :

# Contrôle optimal stochastique via les équations de Kolmogorov

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | **CHIGHOUB Farid** | UMKB | Président |
| Dr. | **LABED Boubakeur** | UMKB | Encadreur |
| Dr. | **KORICHI Fatiha** | UMKB | Examinatrice |

10 Juin 2024

## Dédicace

♠

*Je dédie ce humble travail à :*

♠

*Ma mère et mon père*

♠

*Mes frères*

♠

*A tout ma famille : Sagouma*

♠

*A tout mes amies*

♠

*A toute la promotion de mathématiques*

## Remerciements

♣♣

*Au terme de cette étude ,je voudrais d'abord remercier mon*

*encadreur le Dr :*♣ **LABED Boubakeur**♣ *pour ses précieux conseils,ses lectures*

*attentives.*

Je remercie également les membres de jury

Dr. **CHIGHOUB Farid** et Dr. **KORICHI Fatiha**

de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail

*Ensuite, je tiens à remercier mes mes enseignants du département de*

*mathématiques, pour l'intéret qu'ils nous ont accordé.*

*Enfin, mes remerciements s'adressent également à ma soeur et*

*mes parents qui m'ont procuré leur aide au cours de ces années d'étude.*

# Table des matières

# Introduction

Le mémoire concerne l'étude du contrôle optimal stochastique de type feedback Markovien pour des équations différentielles stochastiques, le probléme de contrôle stochastique est réduit à un probléme de contrôle déterministe pour une équation de Kolmogorov où le contrôle optimal est de type open-loop. Un principe de maximum et des condition d'optimalité de $1^{er}$ ordre sont données.

Le contrôle stochastique est un domaîne des mathématiques qui s'intéresse à l'optimisation de systémes dynamiques soumis à des incertitudes aléatoires, les systémes sont modelisés par des équations differéntielles stochastique(EDS)

L'objectif du contrôle stochastique est de trouver une stratégie de contrôle optimale qui minimise (ou maximise) un certain critére de performace, tel que l'espérance mathématique du coût.

Deux méthodes principales sont utilisées pour résoudre les problémes de contrôle stochastique.

- Le principe de maximum stochastique (PMS) : Cette méthode fournit une condition nécessaire d'optimalite sous la forme d'un équation différentielle stochastique rétrograde. La solution de cette équation donne la stratége de contrôle optimal.

- La programmation dynamique stochastique (PDS) : Cette méthode est basée sur l'idée de décomposer le probléme de contrôle en sous-problémes plus simples. La solution de ces sous-problèmes est ensuite utilisé pour construire la strategé de contrôle optimale.

Les applications du contrôle stochastique des équations différentielles stochastiques sont nombreuses notamment dans les domaines

- **Finance** : Gestion de potefeuille, tarification d'options, optimisation des contrats d'assurance.
- **Economie :** Modélisation des machés financiers, contrôle des stocks,allocation des ressources
- **Ingénerie** : Contrôle des systémes robotiques, optimisation des trajectoires d'avions, gestion du trafic.
- **Science du vivant** : Modélisation des populations biologiques, optimisation des traitements médicaux, conception des médicaments

L'équation de Kolmogorov, également connue sous le nom d'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov, est une équation aux dérivées partielles qui décrit l'équation de la densité de probabilité d'un processus stochastique regi par une EDS. En d'autres termes, elle permet de déterminer la probabilité pour que le processus se trouve dans un certain état donné à un certain instant.

La dérivation des équations de Kolmogorov peut être effectueé de différentes manières.Une approche courante consiste à utiliser la méthode d'Itô.

Soit une EDS de la forme

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

oū $B_t$ est un mouvement Brownier et $b$ et $\sigma$ sont des fonctions déterministes.

L'équation de Kolmogorov (rètrograde) ou équation de Fokker-Planck) décrit l'évolution de la densité de probabilité $p(t, x)$ de $X_t$ :

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[b(t,x)p(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}(\sigma^2(t,x)p)\right]$$

Cette équation est une équation aux dérivées partielles parabolique du second ordre.

Le mémoire est divisé en trois chapitres

– Le premier chapitre est un chapitre introductif, où on rappelle les notions des équations differentielles stochastiques, théoréme d'éxistence et d'unicité des solutions, propriétés des solutions anisi que l'équation de Kolmogorov.
– Dans le deuxième, on donne la formulation d'un problème de contrôle stochastique, et la méthode du principe de maximum stochastique.
– Dans le troisième chapitre, on donne un principe de maximum stochastique pour un problème de contrôle stochastique en utilisant les équations de Kolmogorov

# Chapitre 1

# Equations différentielles stochastiques

On présente dans ce chapitre la notion d'équations différentielles stochastiques (EDS) brownien. On commence par en donner une motivation en tant que généralisation des équations différentielles ordinaires dans un contexte d'incertitude représentée par un bruit aléatoire, les principaux résultats d'existence et d'unicité des solutions ainsi que leurs propriétés. On donne aussi un aperçu sur les équations de Kolmogorov associées au processus de diffusion.

## 1.1 Définitions

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_S)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{1.1}$$

ou sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{E(b,$\sigma$)}$$

l'inconnue est le processus $X$. Le probléme est comme pour une équation différentielle ordinaire,de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients,l'équation differentielle a une unique solution.

**Définition 1.1.1** *Soit $b$ et $\sigma$ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. on se donne également un espace de probabilté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F})$ et un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien $B$ sur cet espace. Une soultion 1.1 est un processus $X$ continu $(\mathcal{F}_t)$ adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ ont un sens et l'égalité*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

*est satisfaite $\mathbf{P} - p.s.$*

## 1.2 Existence et unicite des solutions

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS $E(b, \sigma)$.

**Définition 1.2.1** *On appelle **solution forte** de l'équation différentielle stochastique toute fonction aléatoire $X = (X(t); t \geq 0)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :*

*1) $X$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ;*

*2)* $\int_0^t [b(X(s))^2 + \sigma(X(s))^2]ds < \infty$ *p.s. pour tout* $t$, *et on a* $\mathbf{P} - p.s.$

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

*La condition d'intégrabilité finie dans le point 2 de la définition est que les intégrants dans 1.1 sont dans* $M_{loc}^2$, *si bien que* $X$ *est un processus d'Itô.*

**Théorème 1.2.1** *(Existence et unicite) On suppose que :*

*a- les fonctions* $b$ *et* $\sigma$ *sont continues.*

*b- il existe* $K$ *telque pour tout* $t \in [0, T]$ $x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$

*i)* $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$

*ii)* $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|)$

*c- La condition initiale* $X_0$ *est indépendante de* $(B_t, t \geq 0)$ *et est de carré integrable.*

*Alors il existe une unique solution à trajectoires continues pour* $t \leq T$ *de plus de plus cette solution vérifie*

$$E(\sup \mid X_t \mid^2) < \infty$$

## 1.3 Propriétés de Markov

**Théorème 1.3.1** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité et* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *une filtration sur cet espace,et* $X = (X(t), t \geq 0)$ *un processus adapté à* $\mathcal{F}$, *que nous supposons à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ *pour simplifier soit l'équation (Eq) supposons que (Eq) ait une unique solution forte* $\{X_t(x), t \geq 0\}$. *Par linéarité de líintégrale on voit que* $\forall s, t \geq 0$

$$X_{t+s} = X_s(x) + \int_0^{t+s} b(u, X_u(x))du + \int_0^{t+s} \sigma(u, X_u(x))dB_u$$

*comme la variable* $X_s(x)$ *est* $\mathcal{F}_s^B$*-mesurable, elle est indépendante du processus des* *accroissements* $\{B_u - B_s, u \geq s\}$ *qui est lui même un brownien* $B'$ *partant de* 0*. On peut donc écrire*

$$X_{t+s} = X_s(x) + \int_0^t b(s+u, X_{u+s}(x))du + \int_0^t \sigma(s+u, X_{u+s}(x))dB'_u$$

*et par unicité, ceci entraine*

$$X_{t+s}(x) = X_t^s(X_s(x)), \forall t \geq 0$$

*où* $X_t^s$ *est la solution unique de (Eq) par le Brownien* $B'$ $\forall s, t \geq 0$ *et pour toute fonction borelienne* $f$*, on déduit alors de l'indépendance de* $B'$*et* $\mathcal{F}_t^B$ *que*

$$\begin{aligned} E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s^B) &= E(f(X_{t+s}) \mid X_s) \\ &= \phi_t(s, X_s) \end{aligned}$$

*où*

$$\phi_t(s, X_s) = E(f(X_t^s(x)))$$

$\Longrightarrow X$ *vérifie la propriété de markov inhomogène dans le cas ou les coefficients* $b$ *et* $\sigma$ *ne dépendent pas du temps,* $X$ *vérifie de plus la propriété de Markov homogène*

$$\begin{aligned} E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s^B) &= E(f(X_{t+s}) \mid X_s) \\ &= \phi_t(s, X_s) \end{aligned}$$

*où*

$$\phi_t(s, X_s) = E(f(X_t^s(x))).$$

**Théorème 1.3.2** *(Propriété de Markov forte) soit* $X$ *l'unique solution forte de (Eq) avec* $b$ *et* $\sigma$*ne dependent pas du temps. Soit* $T$ *un temps d'arrêt fini p.s. pour la* *filtration naturelle du Mouvement brownien porteur. Alors pour tout $T \geq 0$ et toute fonction $f$ mesurable bornée*

$$E(f(X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T^B) = E(f(X_{T+t}) \mid X_T) = \phi_t(X_T)$$

*où*

$$\phi_t(x) = E(f(X_t(x)))$$

*Dans le cas inhomogène*

$$E(f(T+t, X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T^B) = E(f(T+t, X_{T+t}) \mid T, X_T) = \phi_t(T, X_T)$$

*où*

$$\phi_t(s,x) = E(f(s+t, X_t^s(x)))$$

## 1.4 Equation de Kolmogorov pour des diffusion d'Itô

**Théorème 1.4.1** *(Formule d'Itô)*

$$u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(t,x) \to u(t,x),$$

*Une fonction continument differentiable par rapport à $t$, et deux fois continument* *differentiable par rapport à $x$. Alors $u(t, X_t)$ satisfait l'équation :*

$$u(t, X_t) = u(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)b_s(X_s)ds$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)\sigma_s(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, X_s)\sigma_s^2(X_s)ds$$

### 1.4.1 Diffusion

On appelle diffusion un processus stochastique obéissant à une équation différentielle stochastique de la forme 1.1 Le terme $b(t, x)$ peut s'interpréter comme la force déterministe agissant sur une particule dans un fluide au point $x$, et s'appelle donc le coefficient de dérive. Le terme $\sigma(t, x)$ mesure l'effet de l'agitation thermique des molécules du fluide en $x$, et s'appelle le coefficient de diffusion.

**Définition 1.4.1** *(Processus de diffusion) On appelle processus de diffusion un processus vérifiant la propriété de Markov forte et a' trajectoires continues de type considéré dans le Théorème de propriété de Markov forte pour EDS homogène*

**Définition 1.4.2** *(Diffusion d'Itô) Une diffusion d'Itô homogéne dans le temps est un processus stochastique$\{X_t(w)\}_{t\geq 0}$satisfaisant une équation différentielle stochastique de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, t \geq s > 0 \\ X_s = x \end{cases} \tag{1.2}$$

*ou $B_t$ est un mouvement Brownien standard de dimension $m$, et le coefficient de dérive $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et le coefficient de diffusion $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sont tels que l'EDS 1.2 admette une unique solution en tout temps.*

**Proposition 1.4.1** *(Equation de Kolmogorov pour les diffusion d'Itô )*
*Soit $f \in D_A$ et $D_A$l'ensemble des fonctions on a :*

*1)* $\forall t \geq 0, P_t \ f \in D_A$

*2) Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,lafonction* $t \rightarrow P_t$*est dérivable,la fonction* $\frac{d}{dt}P_t f : x \rightarrow \frac{d}{dt}P_t f(x)$ *dans* $C_0(E)$*,et on a :*

$$\frac{d}{dt}P_t f = (AP_t)f = (P_t A)f$$

*de plus on a :*

$$P_t f - f = \int_0^t AP_s f \ ds = \int_0^t P_s A f \ ds$$

## 1.5 Formule de Dynkin

**Théorème 1.5.1** *Soit* $X_t$ *une diffusion I'tô*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

*si* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ *alors* $f \in D_A$ *et*

$$Af(x) = \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^t)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Nous allons maintenant examiner la formule de Dynkin,cette formule est fréquemment utilsée en analyse stochastique elle nous donne la valuer attendue diffusion d'Itô à an temps d'arrêt,pour avoir une idée du fonctionnement de la formule ,on peut faire des analogies avec le deuxiéme théorémè fondamental du calcul

**Théorème 1.5.2** *(Formule de Dynkin) Soit* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ *supposons que* $\tau$ *est un temps d'arrêt et que* $E^x[\tau] < \infty$ *alors*

$$E^x[f(X_\tau)] = f(x) + E^x\left[\int_0^\tau Af(X_s)ds\right]$$

## 1.6 Equations de Kolmogorov

Dans cette section,nous allons énoncer et prouver l'équation de Kolmogorov. La raison pour laquelle nous voulons ces équations est qu'elles constituent un pont entre les équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles, ce pont nous donne une plus grande boîte à outils pour résoudre à la fois, les équations différetielles partielles.l'équation de Kolmogorov progressive est une équation de la densité de probabilité d'un processus stochastique.

### 1.6.1 Èquation de Kolmogorov rètrograde (ÉKR)

Le thèorème suivant et sa preuve sont tirées de [8]

**Théorème 1.6.1** *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois continûment differentiable à support compact* (*i.e.* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ )*avec le générateur* $\mathcal{A}$

*1) La fonction* $u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)]$ *satisfait le probléme aux valeurs initiales :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{A}u(t,x), t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x); x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.3}$$

*2) Si* $w(t,x)$ *est une fonction bornée, continûment differentiable en* $t$ *et deux fois continûment differentiable en* $x$*,satisfait le probléme 1.3, alors*

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)]$$

**Remarque 1.6.1** *L'équation aux dérivées partielles est ici écrite avec une condition initiale, le plus souvent on voit l'équation de Kolmogorov rètrograde avec une condition et un signe négatif devant la dérivée temporelle, nous obtenons ces deux* *changements si nous changeons la variable $t$ en $T - t$ l'équation ressemblerait dans ce cas à*

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u, t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(T, x) = f(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

**Remarque 1.6.2** *Si nous utilisons l'équation obtenue dans la remarque 1 et que nous modifions légèrement la condition relative en temps terminal, nous obtenons l'équation suivante*

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u, t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(T, y) = \mathbf{I}_B(y), x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

*où $I_B$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $B$, nous pouvons constater que*

$$u(r, y) = \mathbb{E}_{r,y}[\mathbf{I}_B(X_T)] = \mathbb{P}(X_T \in B \backslash X_r = y)$$

*Ceci nous montre que nous pouvons en fait écrire l'équation de Kolmogorov rètrograde pour les probabilités de transition*

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial r}(y, r; B, t) = Ap(y, r; B, t), 0 < s < t, y \in \mathbb{R}^n \\ P(y, r; B, t) = \mathbf{I}_B(y) \end{cases}$$

*A partir de là on peut voir que l'équation peut également être écrite en termes de densités de probabilité de transition, dans ce cas nous obtenons l'équation suivante*

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial r}(y, r; B, t) = Ap(y, r; x, t), 0 < s < t, y \in \mathbb{R}^n \\ p(y, r; B, t) \to \delta_x \text{ quand } s \to t \end{cases}$$

*La raison pour laquelle nous voulons considérer l'équation de cette manière est qu'elle est de la même forme que l'équation de Kolmogorov progressive , lorsque vous comparez les deux équations sous cette forme, il devient évident que l'équation rètrograde utilise les variables rètrograde alors que l'équation progressive utilise les variables* *progressive .*

**Preuve.** 1) Posons $g(x) = u(t,x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n, g$ est dérivable, et on a pour tout $t < r$

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}^x[g(X_r)] - g(x)}{r} &= \frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^{X_r}[f(X_t)] - \mathbb{E}^x[f(X_t)]\right] \\ &= \frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^x[f(X_{t+r})/\mathcal{F}_r] - \mathbb{E}^x[f(X_t)/\mathcal{F}_r]\right] \\ &= \frac{1}{r}\mathbb{E}^x\left[f(X_{t+r}) - f(X_t)\right] \\ &= \frac{1}{r}(u(t+r,x) - u(t,x)) \to \frac{\partial u}{\partial t}, \text{comme } r \to 0\end{aligned}$$

On aura alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u &= \lim_{r\to 0}\frac{\mathbb{E}^x[g(X_r)] - g(x)}{r} \text{ existe et :} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{A}\end{aligned}$$

dans cette ligne de pensée, nous avons d'abord utilisé que $g(x) = u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)]$ nous avons ensuite utilisé la propriété de Markov et le résultat pour les espérances conditionnelles

2) Unicité : Pour montrer l'unicité supposons qu'il existe une fonction $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ qui satisfait 1.3, alors :

$$\tilde{A}w = -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = 0, \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

On défnit le processus $Y = (Y_{t\in T})$de $\mathbb{R}^2$par $Y_t = (s-t, X^{0,x})$ comme le montre le lemme précédent, le processus $Y$ a $\tilde{A}$ comme générateur infnitésimale. Soit$\tau_R = \inf\{t > 0; \|X_t\| \geq R\}$en appliquant la formule de Dynkin pour $Y$, et comme$\tilde{A}w = 0$,on obtient :

$$\mathbb{E}^{s,x}[w(Y_{t\wedge\tau_R})] = w(s,x) + \mathbb{E}^{s,x}\left[\int_0^{t\wedge\tau_R}\tilde{A}w(Y_t)dr\right] = w(s,x)$$

En faisant tendre $R$ vers $+\infty$,on obtient ,

$$w(s,x) = \mathbb{E}^{s,x}[w(Y_t)]$$

En particulier pour $t = s$, on aura :

$$w(s,x) = \mathbb{E}^{s,x}[w(Y_s)] = \mathbb{E}[w(0, X_s^{0,x})] = \mathbb{E}[f(X_s^{0,x})] = \mathbb{E}[f(X_s)]$$

D'où l'unicité. ■

### 1.6.2 Èquation de Kolmogorov progressive (ÈKP)

Nous allons prouver I'ÈKP à l'aide l'ÈKR, supposons que $X_t$ est un diffusion d'Itô sur $\mathbb{R}^n$ qui a une densité de transition $p(y,t/x,0)$ qui simplifer par $p(y,x)$

Le théorème et la preuve sont inspirés de [8]

**Théorème 1.6.2** *Si $X_t$ posséde une densité de transition régulière $p_t(x,y)$ alors celle-ci satisfait l'équation*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y) = A^* p_t(x,y) \\ \underset{t\to 0}{Lim} p_t(x,y) = \sigma(x-y) \end{cases}$$

*où l'opérateur $A^*$est défini par*

$$A^* f = -\sum_i (b_i \frac{\partial}{\partial x_i} f) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j} (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}) f$$

*où*

$$a_{i,j} = \sum_k \sigma_{i,k}(t,x)\sigma_{j,k}(x)$$

*on ne peut pas ici dire que par rapport au produit scalaire de $L^2$, $A^*$ soit le dual (opérateur adjoint) de$A$*

**Preuve.** Soit $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. D'aprés les propriétés de l'espérance conditionnelle on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_t)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_t)/X_0 = x,]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}^x[f(X_t)]]\end{aligned}$$

Comme $u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)]$,alors

$$\mathbb{E}[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)p_t(x,y)dx$$

Si on dérive par rapport à $t$ les deux membres, on trouve :

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \left[u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) + p_t(x,y)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right] dx$$

Comm $u$ satisfait I'ÈKR 1.3 ceci implique que :

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y)dx + \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x,y)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y)dx - \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x,y)\mathcal{A}u(t,x)dx \\ 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y)dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\mathcal{A}_y^* p_t(x,y)dx \\ &\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\left[\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y) - \mathcal{A}_y^* p_t(x,y)\right] dx\end{aligned}$$

Maintenant, si nous choisissons $t = T$, nous obtenons

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) - \mathcal{A}_y^* p_t(x, y) \right] dx$$

Comme $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ est une fonction arbitraire alors

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) - \mathcal{A}_y^* p_t(x, y) = 0$$

Donc la preuve est terminée. ■

# Chapitre 2

# Principe de Maximum en contrôle stochastique

## 2.1 Problème de contrôle stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ un espace de probabileté filtré avec un mouvement Brownien de dimension $m$, $B_t$ l'objet fondameutal de la théorie du contrôle stochastique est une équation différentelle stochastique avec une entrée contrôle : c'est-à-dire que l'état du systéme contrôlé est décrit par

$$\begin{cases} dX_t^u = b(t, X_t^u, u_t)dt + \sigma(t, X_t^u, u_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

ici $b$ et $\sigma$ sont des fonctions $b : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ , $\sigma : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}$ oū $\mathbb{U}$ est l'ensemble des contrôles

**Définition 2.1.1** *Le contrôle $u = \{u_t\}$ est dit admissible si*

*1) $u_t$ est un processus $\{\mathcal{F}_t\}$ adapté*

*2) $u_t(\omega) \in U$ pour tout $(t, \omega)$*

*3) l'équation pour $X_t^u$ admet une solution unique*

**Définition 2.1.2** *Un contrôle admissible $u$ est appelé un contrôle Markovien s'il est de la forme $u_t = \alpha(t, X_t^u)$ pour une fonction*

$$\alpha : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times U$$

**Définition 2.1.3** *Fonction coût :*

$$J(u) = E\left[\int_0^T w(s, X_s^u, u_s)ds + z(X_T^u)\right]$$

*oū $w : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ (coût fonctionnel et $z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (le coût Terminal)*

*le but est de trouver si possible le contrôle optimal $u^*$ qui minimie (maximse) la fonctionnelle coût.*

## 2.2 Le principe du maximum

Nous considérons le problème de contrôle suivant

$$\begin{cases} dy_t = g(y_t, u_t)dt + \sigma(y_t)dW_t \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

le coût associé est donné par

$$J(u) = E(\int_0^T l(y_t, u_t)dt + h(y_T)) \tag{2.2}$$

Et le but est de minimiser ce coût sur un ensemble des processus admissibles ,ici $U$,ensemble de processus intégrables adaptés qui prennent des valeurs dans un ensmble $U_a \subset \mathbb{R}^d$.

La fonction $l$ est supposée continue en $(x, u)$ ,continûement différentiable en $x$.

$h$ est continûement différentiable en $x$.

Nous supposons également que $g$ (resp. $\sigma$) est Lipschitzienne en $x$ et $u$ (resp. en $x$),continue en $(x, u)$ (resp. en $x$) et continûment différentiable en $x$.

Soit $u$ un contrôle optimal et soit $t_0 \in [0, T[$,fixons $v \in L^2(\mathcal{F}_{t_0}) \cap U_a$.

Pour $\theta$ "petit",on peut définir le contrôle modifié par

$$u_\theta(t) = \begin{cases} u(t), \;\; t \in [0, t_0[ \\ v, \;\; t \in [t_0, t_0 + \theta[ \\ u(t), \;\;\; t \in [t_0 + \theta, T[ \end{cases}$$

le contrôle $u_\theta$ est évidemment admissible.

On désigne par $y_t^\theta$ la trajectoire correspodante.

**Lemme 2.2.1** *On a quand $\theta \to 0$*

$$E(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |y_\theta(t) - y(t)|^2) \to 0 \tag{2.3}$$

**Preuve.** Pour $t_0 \leq t \leq t_0 + \theta$

$$y_\theta(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} [g(y_\theta(s), v) - g(y(s), (s))]ds + \int_{t_0}^{t} [\sigma(y_\theta(s)) - \sigma(y(s))]dW_s$$

d'où l'on déduit,en utilisant les hypothèses de Lipchitz et le lemme de Gronwall

$$E(\int_{t_0}^{t_0+\theta} |y_\theta(t) - y(t)|^2 \, dt) \leq K \int_{t_0}^{t_0+\theta} E(|v - u(t)|^2)dt$$

où $K$ est une constante qui change d'une ligne à l'autre. En utilisant l'inégalité de

Doob-Kolmogorov, on obtient

$$E(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+\theta} \int_{t_0}^{t_0+\theta} |y_\theta(t) - y(t)|^2 \, dt) \leq K \int_{t_0}^{t_0+\theta} E(|v - u(t)|^2) dt \tag{2.4}$$

maintenant, pour $t_0 + \theta \leq t \leq T$, on a

$$y_\theta(t) - y(t) = y_\theta(t_0 + \theta) - y(t_0 + \theta) + \int_{t_0+\theta}^{t} [g(y_\theta(s), u(s)) - g(y(s), u(s))] ds + \int_{t_0+\theta}^{t} [\sigma(y_\theta(s)) - \sigma(y(s))] dW_s$$

ce qui donne par le lemme de Gronwall et 2.4

$$E(\int_{t_0+\theta}^{T} |y_\theta(t) - y(t)|^2 \, dt) \leq K \; E(|y_\theta(t_0 + \theta) - y(t_0 + \theta)|^2) \leq K' E(\int_{t_0}^{t_0+\theta} |v - u(t)|^2 \, dt$$

Par inégalité de Doob-kolmogorov encore,

$$E(\sup_{t_0+\theta \leq t \leq T} \int_{t_0}^{t_0+\theta} |y_\theta(t) - y(t)|^2 \, dt) \leq K'' \int_{t_0}^{t_0+\theta} E(|v - u(t)|^2 \, dt$$

et ainsi

$$E(\sup_{t_0 \leq t \leq T} \int_{t_0}^{t_0+\theta} |y_\theta(t) - y(t)|^2 \, dt) \leq K''' \int_{t_0}^{t_0+\theta} E(|v - u(t)|^2 \, dt$$

et cette derniére expression tend vers 0 avec $\theta$. ■

Choisissons $t_0$tel que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^{t_0+\theta} E[|g(y(s)), u(s)) - g(y(t_0), u(t_0))|^2] ds = 0$$

(cette convergence est vraie pour presque tous les $t_0$)

Nous introduisons les équations linéarisées suivantes :

$$\begin{cases} dz_t = g'_x(y_t, u_t)z_t dt + \sigma'_x(y_t)z_t dW_t, t_0 \leq t \leq T \\ z(t_0) = g(y(t_0, v) - g(y(t_0), u(t_0)) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d\varsigma_t = l'_x(y(t), u(t))z_t dt, t_0 \leq t \leq T \\ \varsigma(t_0) = l(y(t_0), v - l(y(t_0), u(t_0)) \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir les résultats de"différentiabilté" suivantes

**Lemme 2.2.2** *(i)*

$$\lim_{\theta \to 0} E([\frac{y_\theta(T) - y(T)}{\theta} - z(T)]^2) = 0$$

*(ii)*

$$\lim_{\theta \to 0} E(\left|\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{T}[l(y_\theta(t), u_\theta(t)) - l(y(t), u(t))]dt - \varsigma(T)\right|) = 0$$

**Preuve.** Désignons

$$\tilde{y}_\theta(t) = \frac{y_\theta(t) - y(t)}{\theta} - z(t)$$

on a alors, pour $t \in [t_0, t_0 + \theta]$,

$$\begin{aligned} d\tilde{y}_\theta(t) = \frac{1}{\theta}[g(y(t) + \theta(z(t) + \tilde{y}_\theta(t)), v) - g(y(t), v) \\ - \theta g'_x(y(t), u)z(t)]dt + \frac{1}{\theta}[\sigma(y(t) + \theta(z(t) + \\ \tilde{y}_\theta(t))) - \sigma(y(t), t) - \theta\sigma'_x(y(t))z(t)]dW_t \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{y}_\theta(t) = -[g(y(t_0), v - g(y(t_0), u(t_0))]$$

où encore

$$\tilde{y}_\theta(t_0+\theta) = \int_{t_0}^{t_0+\theta} g(y(s)+\theta(z(s)+\tilde{y}_\theta(s)),v)$$
$$- g(y(s),v)]ds + \frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta} g(y(s),v) - g(y(t_0),v)]ds-$$
$$\frac{1}{\theta}\int_{t_0}^{t_0+\theta} [\sigma(y(s)+\theta(z(s)+\tilde{y}_\theta(s))) - \sigma(y(s))]dW_s-$$
$$\int_{t_0}^{t_0+\theta} g'_x(y(s),u(s))z(s)ds - \int_{t_0}^{t_0+\theta} \sigma'_x(y(s))z(s)dW_s$$

de ceci on peut déduire

$$E(|\tilde{y}(t_0+\theta)|^2 \leq K[E(\sup_{t_0\leq t\leq t_0+\theta} |y_\theta(t)-y(t)|^2) + E(\sup_{t_0\leq t\leq t_0+\theta} |y(t)-y_0(t)|^2 +$$
$$E(\int_{t_0}^{t_0+\theta} |z(t)|^2\, dt) + \frac{1}{\theta}E(\int_{t_0}^{t_0+\theta} |g(y(t),u)-g(y(t_0),u(t_0))|^2\, dt]$$

et le terme entre parenthéses tend vers 0, en fonction du choix de $t_0$ et de lemma 2.1.

Maintenant, pour $t_0+\theta \leq t \leq T$,

$$d\tilde{y}_\theta(t) = \frac{1}{\theta}[g(y(t)+\theta(z(t)+\tilde{y}_\theta(t)),u(t))$$
$$- \theta g'_x(y(t),u(t))z(t)]dt + \frac{1}{\theta}[\sigma(y(t)+\theta(z(t)+\tilde{y}_\theta(t)))$$
$$- \sigma(y(t)) - \theta\sigma'_x(y(t))z(t)]dW_t$$

ce qui est également le cas aprés un developpement de Taylor de premier ordre

$$\begin{aligned}
d\tilde{y}_\theta(t) &= \int_0^1 d\lambda g'_x(y(t)+\lambda\theta(z(t)+\tilde{y}_\theta(t)), u(t))\tilde{y}_\theta(t)dt \\
&+ \int_0^1 d\lambda\sigma'_x(y(t)+\lambda\theta(z(t)+\tilde{y}_\theta(t)))\tilde{y}_\theta(t)dW_t \\
&+ \int_0^1 d\lambda[g'_x(y(t)+\lambda\theta(z(t)+\tilde{y}_\theta(t), u(t)) - g'_x(y(t))]z(t)dt \\
&+ \int_0^1 d\lambda[\sigma'_x(t)(y(t)+\lambda\theta(z(t)+\tilde{y}_\theta(t)) - \sigma'_x(t)(y(t))]z(t)dW_t
\end{aligned}$$

par censéquent

$$\begin{aligned}
E(\left|\tilde{y}_\theta(t)\right|^2) &\leq E(\left|\tilde{y}_\theta(t_0+\theta)\right|^2 + K\cdot E(\int_{t_0+\theta}^T \left|\tilde{y}_\theta(s)\right|^2 ds) \\
&+ E(\left\{\int_{t_0}^T |z(s)|^2\cdot\left|\int_0^1 d\lambda[g'_x(y(s)+\lambda(y_\theta(s)), u(s)) - g'_x(y(s), u(s))]ds\right|\right\}^2) \\
&+ E\int_{t_0}^T |z(s)|^2\cdot\left|\int_0^1 d\lambda[\sigma'_x(y(s)+\lambda(y_\theta(s)-y(s))) - \sigma'_x(y(s))]\right|^2 ds
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité et la bornitude du $\sigma'_x$, lemma 2.1 et du lemme de Gronwall, on obtient

$$\lim_{\theta\to 0}\sup_{t_0+\theta\leq t\leq T} E(\left|\tilde{y}_\theta(t)\right|^2) = 0$$

et (i) s'ensuit.

(ii) peut être démontré d'une manière similaire. ■

On déduit du lemma 2.2 une première expression de la dérivée du coût

**Corollaire 2.2.1**

$$\frac{d}{d\theta}J(u_\theta)\mid_{\theta=0} = E[h'_x(y(T))z(T) + \zeta(T)]$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}[J(u_\theta)-J(u)] &= \frac{1}{\theta}E[h(y_\theta(T))-h(y(T))+\int_{t_0}^{T}l(y_\theta(t),u_\theta(t))dt-\int_{t_0}^{T}l(y(t),u(t))dt \\ &= E(\int_0^1 h'_x(y(T)+\lambda(y_\theta(T)-y(T))\frac{y_\theta(T)-y(T)}{\theta}d\lambda+ \\ &\frac{1}{\theta}[\int_{t_0}^{T}l(y_\theta(t),u_\theta(t))dt-l(y(t),u(t))dt])\end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 2.2 pour obtenir le résultat Cherché. ■

Maintenant voyons une autre expression de cette dérivée. Introduisons les équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} d\phi_t = g'_x\phi_t dt + \sigma'_x\phi_t dW_t \\ \phi_0 = 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d\psi_t = (\psi_t\sigma_x'^2 - \psi_t g'_x)dt - \psi_t\sigma_x' dW_t \\ \psi_0 = 1 \end{cases}$$

on vérifie facilement $\forall t$, $\phi_t\psi_t = 1$ et que

$$\eta_t = \psi_t z_t = \psi_{t_0} z_{t_0=}\psi_{t_0}[g(y_{t_0},v)-g(y_{t_0},u_{t_0})]$$

Introduisons

$$\pi_t = \phi_T h'_x(y_T) + \int_t^T \phi_x l'(y_s,u_s)ds$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}J(u_\theta)\mid_{\theta=0} &= E(h'_x(y_T)z_T+\varsigma_T = E(\pi_T\eta_T+\varsigma_T) = E(\pi_{t_0}\eta_{t_0}) \\
&= E(\int_{t_0}^{T}\frac{d\pi}{dt}\eta_{t_0}dt)+E(\varsigma_T) = E(\pi_{t_0}\eta_{t_0}) - E(\int_{t_0}^{T}\phi_x l'(y_s,u_s,s)ds\eta_{t_0})+E(\varsigma_T) \\
&= E(\pi_{t_0}\eta_{t_0})+E(\varsigma_T-\int_{t_0}^{T}l'_x(y_s,u_s)z_s ds) \\
&= E(\pi_{t_0}\eta_{t_0}+\varsigma_{t_0}) = E(l(y_s,,v)+\varphi_{t_0}\pi_{t_0}g(y_{t_0},v)-l(y_{t_0},u_{t_0})-\varphi_{t_0}\pi_{t_0}g(y_{t_0},u_{t_0}))
\end{aligned}$$

si on note $p_t=\psi_t E(\pi_t/\mathcal{F}_t)$(ce processus est appelé processus adjoint), on peut définir le principe du maximum

**Théorème 2.2.1** *Avec probabilité* $1$,$\forall v\in U_a$,*on a*

$$H(y_t,v,p_t)=l(y_t,v)+p_t g(y_t,v)\geq H(t,y_t,p_t)=l(y_t,u_t)+p_t g(y_t,u_t)$$

**Preuve.** Prenons $t=t_0$.Comme $\frac{d}{d\theta}J(u_\theta)\mid_{\theta=0}\geq 0$ comme $u$ est optimal, on a

$$E(l(y_t,v)+p_t g(y_t,v)-l(y_t,u_t)+p_t g(y_t,u_t))\geq 0$$

$\forall v\in L^2(\mathcal{F}_t)$.

On en déduit facilement que $\forall v\in U_a$, $\forall A\in\mathcal{F}_t$

$$E(\mathbf{I}_A[l(y_t,v)+p_t g(y_t,v)-l(y_t,u_t)+p_t g(y_t,u_t)])\geq 0$$

et cela donne le résultat souhaité. ■

On cherche maintenant une équation satisfaite par $p_t$ .on a

$$E(\pi_t/\mathcal{F}_t)=-\int_0^t\phi_s l'_x(y(s),u(s))ds+E(\phi_T h'_x(y_T)+\int_0^T\phi_s l'_x(y(s),u(s))ds\,/\mathcal{F}_t)$$

Le second terme, qui est une $\mathcal{F}_t-$martingale de carré intégrable peut être représentée de la manière suivante

$$E(\phi_T h'_x(y_T) + \int_0^T \phi_s l'_x(y(s), u(s))ds + \int_0^T G_s dW_s$$

où $G$ est un processus adapté.

On obtient alors

$$-dp_t = (\sigma'_x p_t - \psi_t G_t)dW_t + (g'_x p_t + l'_x - \sigma'_x(\sigma'_x p_t - \psi_t G_t))dt$$

c'est-à-dire aussi, ce qui $K_t = \sigma'_x p_t - \psi_t G_t$ indique que $p_t$ est la solution de l'équation différentielle stochastique rétrogarde linéaire

$$\begin{cases} -dp_t = (g'_x p_t + l'_x - \sigma'_x K_t)dt + k_t dW_t \\ p_T = h'_x(y_T) \end{cases}$$

il n'est pas difficile via le théorème de Riesz d'interpréter le couple $(p, K)$ comme la représentation de la fonctionnelle linéaire sur $L^2 \times L^2$

$$I(\phi, \psi) = E(\int_0^T l'_x \zeta(t)dt + h'_x(T)\zeta(T))$$

où

$$\begin{cases} d\zeta(t) = (g'_x \zeta(t) + \phi(t))dt + (\sigma'_x \zeta(t) + \psi(t))dW_t \\ \zeta(0) = 0 \end{cases}$$

c'est à dire que $\forall \phi, \psi$,

$$I(\phi, \psi) = E(\int_0^T [p(t)\phi(t) + K(t)\psi(t)]dt)$$

Cela se déduit en écrivant $E(p_T z_T) = E(\int_0^T d(p_z)_t)$ et en appliquant la formule d'Itô.

# Chapitre 3

# Contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques et l'équation de Kolmogorov

## 3.1 Formulation du problème

Considérons le probléme de contrôle optimal stochastique suivant avec contrôle feedback

$$(\mathbf{P}\mathrm{s}) \qquad \underset{u \in \mathcal{M}_c}{Minimiser} \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(X^u(t,x), u(X^u(t,x)))d\nu(x)dt\right] \\ +\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{G}(X^u(T,x))d\nu(x)\right] \end{array} \right\}$$

où $X^u$ est la solution pour

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t), u(X(t)))dt + \sigma(X(t))dW(t) \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.1}$$

Ici $T \in (0, +\infty), d, n, m \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est un processus de Wiener (Mouvement brownien),et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est la filtration naturelle correspondante.

$$\mathcal{M}_c = \left\{ v \in C_b^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m); v(x) \in U_0, \forall x \in \mathbb{R}^d \right\}$$

est l'ensemble des contrôls, et $U_0$ est un sous-ensemble convexe et fermé borné de $\mathbb{R}^m$ avec $0_m \in U_0$ ici et tout au long de ce chapitre nous désignons par $|\cdot|_k$la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ par $\nabla$ le gradient par rapport à $x \in \mathbb{R}^d$ par $\nabla_u$ le gradient par rapport à $u \in \mathbb{R}^m$ et par $\|\cdot\|_\infty$ la norme $L^\infty$ pour toute matrice $A$ que nous désignons par $A^T$ sa transposée.

Supposons que

(**H1**) $\nu$ est une mesure finie sur $\mathbb{R}^d$ avec une densité $\rho$ qui satisfait

$$\rho \in C_b^1(\mathbb{R}^d), \rho(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{\nabla\rho}{\rho} C_b(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d).$$

Si en plus, nous supposons que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$,alors nous pouvons considérer $\nu$ comme la distribution de $X^u(0)$ et $\mathbb{E}[\mathcal{L}(X^u(t,x), u(X^u(t,x)))]$ et $\mathbb{E}[\mathcal{G}(X^u(T,x))]$ comme des espérances conditionnelles.

Les fonctions $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d.n}$, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathcal{G} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x,u) = (f_1(x,u), f_2(x,u), ..., f_d(x,u))^T$, $\sigma(x) = (\sigma_{il}(x))_{i=1,2....,d,\ l=1,2,...n}$, $q(x) = (q_{ij}(x))_{i=1,2....,d\ ,j=1,2...,d} = \sigma(x)\sigma(x)^T$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^m$,satisfait

**(H2)** $f\left|_{\mathbb{R}^d\times\hat{U}_0}\right.$ est bornée et continue Lpschitzienne sur $\mathbb{R}^d\times\hat{U}_0$,où $\hat{U}_0$ est un voisinage ouvert de $U_0$;

**(H3)** $\sigma$ est bornée et continue Lpschitzienne, et il existe une constante$\gamma>0$ telle que

$$q_{ij}(x)y_iy_j=\sigma(x)\sigma(x)^Ty.y\geq\gamma\left|y\right|_d^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^d.$$

ici "." désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ tout au long ce chapitre, nous allons utiliser la convention de sommation d'Einstein ;

**(H4)** $\mathcal{L}\left|_{\mathbb{R}^d\times\hat{U}_0}\right.\in C_b(\mathbb{R}^d\times\hat{U}_0)$ et $\mathcal{G}\in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Il est bien connu que pour tout $u\in\mathcal{M}_{c,}$3.1 admet une solution unique (forte) $X^u$.

Nous utiliserons une nouvelle approche pour étudier le problème $(Ps)$, l'idée est de réduire l'étude à un problème de contrôle optimal déterministe pour une équation de Kolmogorov connexe

Pour tout $u\in\mathcal{M}_c$ on a que $\mathcal{L}(\cdot,u(\cdot)),\mathcal{G}\in C_b(\mathbb{R}^d)$ et que les fonctions $\varphi_1^u,\varphi_2^u$ : $[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_1^u(t,x)&=\mathbb{E}[\mathcal{L}(X^u(t,x),u(X^u(t,x))],\\ \varphi_2^u(t,x)&=\mathbb{E}[\mathcal{G}(X^u(t,x))],\qquad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\end{aligned}\tag{3.2}$$

sont les solutions faibles uniques (dans le sens définie dans le paragraphe suivant) de

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,x)=f(x,u(x))\cdot\nabla\varphi_1(t,x)+\frac{1}{2}q_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i\partial x_j}, & x\in\mathbb{R}^d,t\in[0,T]\\ \varphi_1(0,x)=\mathcal{L}(x,(u(x))=\varphi_{01}^u(x), & x\in\mathbb{R}^d\end{cases}\tag{3.3}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) = f(x,u(x)) \cdot \nabla \varphi_2(t,x) + \frac{1}{2} q_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_i \partial x_j}, & x \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T] \\ \varphi_2(0,x) = \mathcal{G}(x) = \varphi_{02}(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.4}$$

respectivement.

Notons que sous des hypothèses plus restrictives sur $f, \sigma, \mathcal{L}, \mathcal{G}$, les fonctions $\varphi_1^u, \varphi_2^u$ par 3.2 sont également des solutions classiques à 3.3 et 3.4,respectivement.

On a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(X^u(t,x), u(X^u(t,x))) d\nu(x) dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{G}(X^u(T,x)) d\nu(x)\right] \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x) d\nu(x) dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x) d\nu(x), \end{aligned}$$

et que ($\mathbf{P}$s) est équivalent au problème de contrôle optimal déterministe suivant avec des contrôles "open loop"

$$(\mathbf{P_D}) \qquad \underset{u \in \mathcal{M}_c}{Minimiser} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x) d\nu(x) dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x) d\nu(x) \right\},$$

où $\varphi_1^u$ et $\varphi_2^u$ sont les solutions faibles uniques à 3.3 et 3.4,respectivement.

Il est pratique de considérer un plus grand ensemble de contrôles

$$\mathcal{M} = \left\{ v \in L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m); v(x) \in U_0 a.e\ x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

pour tout $u \in \mathcal{M}$ que $\varphi^u$ soit l'unique solution faible pour

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = f(x,u(x)) \cdot \nabla \varphi(t,x) + \frac{1}{2} q_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \\ \qquad +\mathcal{L}(x,(u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T] \\ \varphi_2(0,x) = \mathcal{G}(x) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.5}$$

Nous prouverons que pour tout $u \in \mathcal{M}$, les problèmes 3.3 3.4, et **3.5** admettent des solutions faibles uniques $\varphi_1^u, \varphi_2^u$,et $\varphi^u$,respectivement. De plus, elles satisfont que

$$\varphi^u(t,x) = \int_0^t \varphi_1^u(t-s,x)ds + \varphi_2^u(t,x), \quad \text{p.p.} \quad x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0,T] \tag{3.6}$$

et, par conséquent, nous avons

$$\varphi^u(T,x) = \int_0^t \varphi_1^u(t,x)dt + \varphi_2^u(T,x), \quad \text{p.p.} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

par conséquent, problem($\mathbf{P}_D$) peut être écrit de la manière suivante :

$$(\mathbf{P}_D) \qquad \underset{u \in \mathcal{M}_c}{Minimiser} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^u(T,x)d\nu(x).$$

Considérer le problème de contrôle optimal déterministe suivant :

$$(\mathbf{P}) \qquad \underset{u \in \mathcal{M}}{Minimiser} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^u(T,x)d\nu(x)$$

où $\varphi^u$ est l'unique solution faible de 3.5.

Nous soulignerons qu'il existe une relation profonde entre ($\mathbf{P}$s) et ($\mathbf{P}$) et ceci est dû au fait que $\mathcal{M}_c$ est dense dans $\mathcal{M}$ par rapport à la métrique induite par la norme de $L^2(\mathbb{R}^d; v)$ (voir paragraphe précédent).

De plus, en résolvant le problème de contrôle optimal déterministe ($\mathbf{P}$), on trouve des contrôles optimaux de Markov approximatifs pour ($\mathbf{P}$s).

## 3.2 Relation entre les problèmes (Ps) et (P)

Considérons les espaces vectoriels réels suivants

$$H = L^2(\mathbb{R}^d;\nu) = \left\{\psi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d); \sqrt{\rho}\psi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)\right\}$$

(où $L^2(\mathbb{R}^d)$ est l'espace $L^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue)

$$V = W^{1,2}(\mathbb{R}^d;\nu) = \left\{\psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^d); \psi\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d;v), i = 1, 2, ...., d\right\}$$

par $(H1)$ il s'ensuit que $V = \left\{\psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^d); \sqrt{\rho\psi} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)\right\}$ ainsi (où $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ sont les espaces de Sobolev correspondant à la mesure de Lebesgue).

De plus, il existe deux constantes positives $m_0, M_0$ telles que

$$m_0 \left\|\varphi\right\| v \leq \left\|\varphi\sqrt{\rho}\right\| w^{1,2(\mathbb{R}^d)} \leq M_0 \left\|\varphi\right\| v, \forall\varphi \in V$$

Notons que que $(H, \langle.,.\rangle_H)$ et $(V, \langle.,.\rangle_V)$ sont des espaces de Hilbert,où

$$\langle\varphi,\psi\rangle_H = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\psi dv(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\psi\rho\ d(x)$$

et

$$\langle\varphi,\psi\rangle_V = \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi\psi + \nabla_\varphi \cdot \nabla\psi] d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi\psi + \nabla_\varphi \cdot \nabla\psi] d\rho(x)$$

Sont leurs produits scalaires.

Nous identifions le dual de $H$ (i.e. $H^*$) avec $H$ et on désigne par $V^*$ le dual de $V$ avec le crochet de dualité désigné par par $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V,V^*}$ ou $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*,V}$.

De plus, $\langle\varphi,\psi\rangle_{V,V^*} = \langle\varphi,\psi\rangle_H$ pour tout $\varphi \in V, \psi \in H$. Ceci donne que $V \subset H \subset V^*$ avec des injections continues et denses.

Examinons maintenant le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt}(t) = \mathcal{A}_0\phi(t) + g(t), \quad t \in (0,T) \\ \phi(0) = \phi_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

où $\mathcal{A}_0 \in L(V, V^*)$ est donné par $\langle \mathcal{A}_0 v_1, v_2\rangle_{V^*,V} = -a^0(v_1, v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$, $a^0 : V \times V \to \mathbb{R}$ est bilinéaire et bornée et $g \in L^2(0,T;V^*)$.

**Définition 3.2.1** *On dit que $\phi$ est une solution / solution faible à 3.7 il*

*(i)* $\phi \in L^2(0,T;V) \cap C(([0,T]);H)$, $\exists \frac{d\phi}{dt} \in L^2(0,T;V^*)$;

*(ii)* $\frac{d\phi}{dt}(t) = \mathcal{A}_0\phi(t) + g(t)$ *dans* $V^*$, *p.p.* $t \in (0,T)$

*(i.e.* $\langle \frac{d\phi}{dt}(t), \psi\rangle_{V^*,V} + a^0(\phi, \psi) = \langle g(t), \psi\rangle_{V^*,V}$, *p.p.* $t \in (0,T)$, $\forall \psi \in V$*)*

*(iii)* $\phi(0) = \phi_0$

Par le théorème d'existence de Lions voir [6], nous obtenons que si $\phi_0 \in H$ et $a^0$ satisfait en plus que

$$\exists \alpha^0 > 0,\ \beta^0 \geq 0 : \quad a^0(v,v) \geq \alpha^0 \|v\|_V^2 - \beta^0 \|v\|_H^2 \qquad \forall v \in V$$

Alors 2.1 admet une unique solution faible.

De plus, soit $\mathcal{A}_0^*$, être l'adjoint de $\mathcal{A}_0$ c'est-à-dire $\mathcal{A}_0^* \in L(V,V^*)$ est donnée par $\langle \mathcal{A}_0 v_1, v_2\rangle_{V^*,V} = \langle v_1, \mathcal{A}_0^* v_2\rangle_{V,V^*}$, $\forall v_1, v_2 \in V$, et considèrons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt}(t) = -\mathcal{A}_0^* p(t) + g(t), \quad t \in (0,T) \\ p(T) = p_T \end{cases} \tag{3.8}$$

**Définition 3.2.2** *On dit que $p$ est une solution / solution faible à 3.7 si*

*(i)** $p \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T]);H)$, $\exists \frac{dp}{dt} \in L^2(0,T;V^*)$;

*(ii)** $\frac{dp}{dt}(t) = \mathcal{A}_0^* p(t) + g(t)$ *dans* $V^*$, *p.p.* $t \in (0,T)$ *(i.e.* $\langle \frac{dp}{dt}(t), \psi\rangle_{V^*,V} - a^0(p(t), \psi) = \langle g(t), \psi\rangle_{V^*,V}$, *p.p.*$t \in (0,T), \forall \psi \in V$*)*

*(iii)** $p(T) = p_T$.

Si $p_T \in H$ et $a^0$ satisfait en plus 3.7, alors 3.8 admet une solution faible unique. Cette dernière existence s'ensuit immédiatement en prenant $\phi(t) = p(T-t)$, $\phi_0 = p_T$, $g(t) = -g(T-t)$, $t \in (0,T)$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^*$.

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dX(t) = F^0(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), & t \in [0,T] \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.9}$$

et l'équation de Kolmogorov suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = F^0(x) \cdot \nabla\phi(t,x) + \frac{1}{2} q_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), & x \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T] \\ \phi(0,x) = L^0(x) = \phi_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.10}$$

Si $F^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, $L^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors 3.10 admet une soution faible unique. En effet, il est évident que $L^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $a^0 : V \times V \to \mathbb{R}$ définie par

$$a^0(\varphi,\psi) = -\int_{\mathbb{R}^d} F^0(x) \cdot \nabla\varphi(x)\psi(x)\rho(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \frac{\partial (q_{ij}\psi\rho)}{\partial x_i}(x)dx, \quad \varphi,\psi \in V$$

est bilinéaire et bornée , d'autre part en utilisant (**H1**) et (**H3**),nous obtenons qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour toute $\psi \in V$ :

$$\begin{aligned} a^0(\psi,\psi) &\geq -\left\|F^0(x)\right\|_\infty \|\psi\| V \|\psi\|_H + \frac{\gamma}{2}\|\psi\|_V^2 - \frac{\gamma}{2}\|\psi\|_H^2 - C\|\psi\| V \|\psi\|_H \\ &\geq \frac{\gamma}{2}\|\psi\|_V^2 - \frac{\gamma}{8}\|\psi\|_V^2 - \frac{2\left\|F^0(x)\right\|_\infty^2}{\gamma}\|\psi\|_H^2 - \frac{\gamma}{8}\|\psi\|_V^2 - \frac{2C^2}{\gamma}\|\psi\|_H^2 - \frac{\gamma}{2}\|\psi\|_H^2 \\ &= \alpha^0\|\psi\|_V^2 - \beta^0\|\psi\|_H^2 \end{aligned}$$

($C$ dépend de $\sigma$ et $\rho$ et est indépendante de $F^0$ ), où $\alpha^0 = \frac{\gamma}{4}$ et $\beta^0 = \frac{2(\left\|F^0(x)\right\|_\infty^2 + C^2)}{\gamma} + \frac{\gamma}{2}$.

Par le théorème d'existence et d'unicite de Lions s'ensuit l'existence et l'unicité d'une solution faible à 3.10

**Théorème 3.2.1** *Si $F^0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est bornée et continue Lipschitzienne, alors il existe une solution unique $X$ à 3.9. de plus, si $L^0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $t \in [0,T]$ :*

$$\phi(t,x) = \mathbb{E}[L^0(X(t,x))] \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^d \tag{3.11}$$

*où $\phi$ et est l'unique solution faible pour 3.10.*

Notons que $\mathbb{E}[L^0(X)] \in C([0,T];H)$ et que 3.11 est équivalente à dire que $\phi = \mathbb{E}[L^0(X)]$ dans $C([0,T];H)$.

**Preuve.** Si $F^0 \in C_b^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, $L^0 \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et (en plus de $(H3)$) $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d.n})$, alors 3.9 admet une solution unique $X$, et d'autre part la fonction $(t,x) \to \mathbb{E}[L^0(X(t,x))]$ est une solution classique à l'équation de Kolmogorov 3.10, c'est-à-dire $\phi = \mathbb{E}[L^0(X)]$ satisfait

$$\begin{cases} \phi \in C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = F^0(x) \cdot \nabla \phi(t,x) + \frac{1}{2} q_{ij}(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), \quad \forall (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d \\ \phi(0,x) \to L^0(x) = \phi_0(x) \qquad \text{quand } t \to 0+,\ \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\phi = \mathbb{E}[L^0(X)]$ est l'unique solution faible à 3.10.

Supposons maintenant que $\sigma$ vérifie $(H3)$ et $F^0$, $L^0$satisfont les hypothèses plus faibles dans le théorème précédent. Soit $\rho_0$ soit un "(régulasateur)" dans $\mathbb{R}^d$, i.e ,$\rho_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,supp$(\rho_0) \subset B(0_d;1)$, $\rho_0(x) > 0$, $\forall x \in \overline{B(0_d;1)}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)dx = 1$

Pour tout $\varepsilon > 0$ nous considérons $F_\varepsilon^0$, $\sigma_\varepsilon$, $L_\varepsilon^0$ les versions régularisées de $F^0$, $\sigma$,et $L^0$

i.e.

$$F^0_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F^0(x-\varepsilon y)\rho_0(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{\mathbb{R}^d} F^0(z)\rho_0\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)dz,$$
$$\sigma_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x-\varepsilon y)\rho_0(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{\mathbb{R}^d} \sigma(z)\rho_0\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)dz,$$
$$L^0_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} L^0(x-\varepsilon y)\rho_0(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{\mathbb{R}^d} L^0(z)\rho_0\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)dz,$$

$x \in \mathbb{R}^d$.

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ : $F^0_\varepsilon \in C^2_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, $\sigma_\varepsilon \in C^2_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d.n})$, $L^0_\varepsilon \in C^2_b(\mathbb{R}^d)$,

- $F^0$sont uniformément bornés et uniformément Lipschitz continu avec respect $\varepsilon > 0$
- $\sigma_\varepsilon$sont uniformément bornés et uniformément Lipschitz continu avec respect $\varepsilon > 0$
- et il existe un costant $C^0 \geq 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\left|F^0_\varepsilon(x) - F^0(x)\right|_d + |\sigma_\varepsilon(x) - \sigma(x)|_{d.n} \leq C^0\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

De plus, il existe $\gamma_0 > 0$ telle que

$$\sigma_\varepsilon(x)\sigma_\varepsilon(x)^T y \cdot y \geq \gamma_0 \left|y\right|^2_d, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

D'une autre manière si $x_\varepsilon \to x$ dans $\mathbb{R}^d$, quand $\varepsilon \to 0+$,alors

$$L^0_\varepsilon(x_\varepsilon) \to L^0(x)$$

Notons qu'on a une sous-suite (également indexée par $\varepsilon$)

$$\nabla\sigma_\varepsilon(x) \to \nabla\sigma(x) \qquad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^d \text{ (dans } \mathbb{R}^{d.d.n})$$
$$\Longrightarrow \nabla q^\varepsilon_{ij}(x) \to \nabla q_{ij}(x) \qquad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^d \text{ (dans } \mathbb{R}^d),\ \forall i,j = 1,2,...,d,$$

quand $\varepsilon \to 0+$.

Ici $q^\varepsilon(x) = (q^\varepsilon_{ij}(x))_{i,j=1,2.....,d} = \sigma_\varepsilon(x)\sigma_\varepsilon(x)^T$

Si on utilise le théorème de dépendance par rpport aux paramètres on obtient que

$$\mathbb{E}\left[\max_{t\in[0,T]} |X^\varepsilon(t,x) - X(t,x)|_d^2\right] \to 0, \qquad \text{quand } \varepsilon \to 0+,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

où $X^\varepsilon$ est la solution à 3.9 correspondant à $F^0 := F^0_\varepsilon$, $\sigma := \sigma_\varepsilon$.

Ceci implique que pour tout $(t,x)\in [0,T]\times\mathbb{R}^d : \mathbb{E}[L^0_\varepsilon(X(t,x))] \to \mathbb{E}[L^0(X(t,x))]$,quand $\varepsilon \to 0+$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient que

$$\mathbb{E}[L^0_\varepsilon(X^\varepsilon)] \to \mathbb{E}[L^0(X)] \quad \text{dans } L^2(0,T;H), \text{quand } \varepsilon \to 0+ \tag{3.12a}$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ ,soit $\phi^\varepsilon$ soit l'unique solution faible à

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) = F^0_\varepsilon(x)\cdot\nabla\psi(t,x) + \frac{1}{2}q^\varepsilon_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}(t,x), & x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T) \\ \psi(0,x) = L^0_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.13}$$

En prenant la différence de 3.13 et 3.10, nous obtenons que $z_\varepsilon = \phi^\varepsilon - \phi$ (où $\phi$ est la solution faible à 3.10) est la solution faible unique à

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(t,x) = F^0_\varepsilon(x)\cdot\nabla z(t,x) + \frac{1}{2}q^\varepsilon_{ij}(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_j}(t,x), + (F^0_\varepsilon(x) - F^0(x))\cdot\nabla\phi(t,x) \\ \qquad + \frac{1}{2}(q^\varepsilon_{ij}(x) - q_{ij}(x))\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(t,x) \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T) \\ z(0,x) = L^0_\varepsilon(x) - L^0 \qquad x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Si nous prenons le couplage avec $z_\varepsilon = \phi^\varepsilon - \phi$ (i.e. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*,V}$) et en intégrant sur $[0, t]$ nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|z_\varepsilon(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\left\|L_\varepsilon^0 - L^0\right\|_H^2 = & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F_\varepsilon^0(x) \cdot \nabla z_\varepsilon(s,x) z_\varepsilon(s,x)\rho(x)dx\ ds \\
& - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_j}(s,x)[q_{ij}^\varepsilon(x)\rho(x)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_i}(s,x) + \frac{\partial q_{ij}^\varepsilon}{\partial x_i}(x)\rho(x)z_\varepsilon(s,x) \\
& + q_{ij}^\varepsilon(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}(x)z_\varepsilon(s,x)]dx\ ds \\
& + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (F_\varepsilon^0(x) - F^0(x)) \cdot \nabla\phi(s,x)z_\varepsilon(s,x)\rho(x)dx\ ds \\
& - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(s,x)[(q_{ij}^\varepsilon(x) - q_{ij}(x))\rho(x)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_i}(s,x) \\
& + \frac{\partial(q_{ij}^\varepsilon(x) - q_{ij}(x)}{\partial x_i}(x)\rho(x)z_\varepsilon(s,x) \\
& + (q_{ij}^\varepsilon(x) - q_{ij}(x))\frac{\partial \rho}{\partial x_i}(x)z_\varepsilon(s,x)]dxds
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de $F_\varepsilon$, $\sigma_\varepsilon$ il s'ensuit qu'il existe $\alpha_0 > 0$, $M_1, M_2, ..., M_6 \geq 0$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\|z_\varepsilon(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\left\|L_\varepsilon^0 - L^0\right\|_H^2 \\
& \leq M_1 \int_0^t \|z_\varepsilon\| V \|z_\varepsilon\|_H ds - \alpha_0 \int_0^t \|z_\varepsilon\|_V^2 ds + \alpha_0 \int_0^t \|z_\varepsilon\|_H^2 ds \\
& + M_2 \int_0^t \|z_\varepsilon\| V \|z_\varepsilon\|_H ds + M_3 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 \left|F_\varepsilon^0 - F^0\right|_d^2 \rho dx\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|z_\varepsilon\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& + M_4 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 |q^\varepsilon - q|_{d.d}^2 \rho dx\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|z_\varepsilon\|_V^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& + M_5 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 |\nabla q^\varepsilon - \nabla q|_{d.d}^2 \rho\ dx\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|z_\varepsilon\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& + M_6 \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 |q^\varepsilon - q|_{d.d}^2 \rho dx\ ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|z_\varepsilon\|_H^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

On obtient que pour tout $t \in [0,T]$ :

$$\begin{aligned}\|z_\varepsilon\|_H^2 + \alpha_0 \int_0^t \|z_\varepsilon(s)\|_V^2\, ds \leq \left\|L_\varepsilon^0 - L^0\right\|_H^2 + M_7[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 \left|F_\varepsilon^0 - F^0\right|_d^2 \rho dx\ ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 \left|q^\varepsilon - q\right|_{d.d}^2 \rho dx\ ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 \left|\nabla q^\varepsilon - \nabla q\right|_{d.d}^2 \rho dx\ ds] \\ + M_8 \int_0^t \|z_\varepsilon\|_H^2\, ds\end{aligned}$$

(où $M_7, M_8$ sont des constantes positives, indépendantes de $\varepsilon$) ,par l'inégalité de Gronwall nous obtenons que

$$\|z_\varepsilon\|_H^2 \leq [\left\|L_\varepsilon^0 - L^0\right\|_H^2 + M_7(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 \left|F_\varepsilon^0 - F^0\right|_d^2 \rho dx\ ds + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|_d^2 \left|\nabla q^\varepsilon - \nabla q\right|_{d.d}^2 \rho dx ds)] \, \mathrm{ex} \tag{3.14}$$

il s'ensuit que $z_\varepsilon \to 0$ dans $C([0,T];H]$ (sur une sous-suite, également désignée par $\{z_\varepsilon\}$) et par conséquent

$$\phi^\varepsilon \to \phi \text{ dans } C([0,T];H) \text{ quand } \varepsilon \to 0+ \tag{3.15}$$

Puisque $\phi^\varepsilon = \mathbb{E}[L_\varepsilon^0(X^\varepsilon)]$ dans $C([0,T];H]$,par (3.15) (3.12a)nous obtenons que 3.11 est vérifiée. ■

**Remarque 3.2.1** *Notons que par 3.14, nous obtenons également que*

$$z_\varepsilon = \phi^\varepsilon - \phi \to 0 \text{ in } L^2(0,T;V), \text{ quand } \varepsilon \to 0+$$

**Remarque 3.2.2** *Supposons que $F^0$ et $L^2$ satisfont les hypothèses plus faibles suivantes :*

$$F^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d), \qquad L^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

En suivant les étapes de la preuve du théorème, il s'ensuit que sur une sous-suite (également indexée avec indice $\varepsilon$) :

$$\phi^{\varepsilon} \to \phi \text{ dans } C([0,T);H], \text{ quand } \varepsilon \to 0+ \tag{3.16}$$

(en fait, les hypothèses plus fortes de Théoreme ont été utilisées uniquement pour obtenir les propriétés à $X_{\varepsilon}, X, \mathbb{E}[L^0_{\varepsilon}(X^{\varepsilon})]$ et $\mathbb{E}[L^0(X)]$).

De plus, si $L^0(X) \geq 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}^d$, alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\phi^{\varepsilon}(t,x) = \mathbb{E}[L^0_{\varepsilon}(X^{\varepsilon}(t,x))] \geq 0 \quad \text{p.p} \quad x \in \mathbb{R}^d$$

et en utilisant 3.16, nous obtenons que pour tout $t \in [0,T]$ : $\phi(t,x) \geq 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}^d$.

Revenons au problème de contrôle optimal stochastique (**Ps**) et au problème de contrôle optimal déterministe connexe (**P).**

Pour tout $u \in \mathcal{M}$, nous définissons les fonctions $f^u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\mathcal{L}^u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $a_u =: V \times V \to \mathbb{R}$, par

$$f^u(x) = f(x,u(x)),\ x \in \mathbb{R}^d,\quad \mathcal{L}^u(x) = \mathcal{L}(x,u(x)),\ x \in \mathbb{R}^d,$$
$$a_u(\varphi,\psi) = -\int_{\mathbb{R}^d} f^u \cdot \nabla\varphi\psi\rho dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(q_{ij}\psi\rho)dx,\ \forall\varphi,\psi \in V$$

Soit $\varphi_1^u$la solution faible de 3.16, c.-à-d. la solution faible de 3.10 correspondant à $F^0 := f^u$, $L^0 := \mathcal{L}^u$, et $\varphi_2^u$ la solution faible de 3.4, c.-à-d. la solution faible de 3.10 correspondant à $F^0 := f^u$, $L^0 := \mathcal{G}$.

Il est évident que pour tout $u \in \mathcal{M}$ nous avons $F^0 := f^u$ (et donc $a^0 := a_u$), $L^0 := \mathcal{L}^u$, et ($L^0 := \mathcal{G}$) satisfont les hypothèses du théorème. donc 3.1 admet une solution unique $X^u$ et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(X^u(t,x), u(X^u(t,x)))d\nu(x)\ dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{G}(X^u(T,x))d\nu(x)\right]$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x)d\nu(x)\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x)d\nu(x).$$

Cela signifie que (**Ps**) est equivalent au problème de contrôle optimal déterministe avec les contrôles open-loop ($\mathbf{P}_D$)

Nous pouvons facilement vérifier que le membre de droite de 3.6 est une solution faible de 3.5.

Nous concluons que 3.6 est vérifiée et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(X^u(t,x), u(X^u(t,x)))d\nu(x)\ dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{G}(X^u(T,x))d\nu(x)\right]$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^u(T,x)d\nu(x)$$

Notons maintenant qu'il s'ensuit de la même manière que dans la preuve du théorème que pour tout $u \in \mathcal{M}$ il existe une suite $\{u_k\}_{k\in N^*} \subset \mathcal{M}_c$ telle que $u_k \to u$ dans $H^m$ (où nous construisons $\{u_k\}_{k\in N^*}$ comme une suite de versions "régularisées" de $u$), et $\varphi_1^{u_k} \to \varphi_1^u$, $\varphi_2^{u_k} \to \varphi_2^u$ et $\varphi^{u_k} \to \varphi^u$ dans $C([0,T];H)$.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\inf_{u\in\mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^u(T,x)d\nu(x) \\
&= \inf_{u\in\mathcal{M}} \left\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x)d\nu(x)dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x)d\nu(x)\right\} \\
&= \inf_{u\in\mathcal{M}_c} \left\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x)d\nu(x)dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x)d\nu(x)\right\} \\
&= \inf_{u\in\mathcal{M}_c} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^u(T,x)d\nu(x) = m^*.
\end{aligned}$$

Nous avons que $m^*$ est un nombre réel parce que $\mathcal{G}$ est bornée et $\mathcal{L}(\cdot, u(\cdot))$ est uniformément bornée par rapport à $u \in \mathcal{M}$. De plus, si $u^*$ est un contrôle optimal pour (**P**) et $m^*$ est la valeur minimale du coût fonctionnel correspondant à (**P**), alors il existe une suite $\{u_k\}_{k \in N^*} \subset \mathcal{M}_c$ telle que $u_k \to u^*$ dans $H^m$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^u(T,x)d\nu(x) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^{u_k}(t,x)d\nu(x)dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^{u_k}(T,x)d\nu(x) \to m^*$$

Par conséquent, même s'il n'est pas certain que le problème (**Ps**) (ou($\mathbf{P}_D$)) admet un contrôle optimal, il existe cependant une borne inférieure du coût fonctionnel pour (**Ps**),qui est égal au minimum pour (**P**).

Nous formulons maintenant un résultat qui s'avérera utile dans ce qui suit

**Lemme 3.2.1** *Pour tout* $u \in \mathcal{M}$ *et pour tout* $h \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d$, *de sorte que* $h_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *a.e.* $h(t,x)$ *a.e.* $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d$,$h_0(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ *le problème suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = f^u(x) \cdot \nabla\varphi(t,x) + \frac{1}{2}q_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + h(t,x), & x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T) \\ \varphi(0,x) = h_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.17}$$

*admet une solution faible unique* $\varphi$ *et pour tout* $t \in [0,T] : \varphi(t,x) \geq 0$, *p.p.* $x \in \mathbb{R}^d$.

## 3.3 le principe maximum pour le problème (P)

Pour tout $u \in \mathcal{M}$ nous considérons l'opérateur linéaire et continu $\mathcal{A}_u : V \to V^*$, $\mathcal{A}_u\varphi = f^u \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{2}q_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}$,l'adjoint formel de cet opérateur,$\mathcal{A}_u^* : V \to V^*$ est donnée par

$$\langle \mathcal{A}_u^*\varphi, \psi\rangle_{V^*,V} = \langle \varphi, \mathcal{A}_u\psi\rangle_{V,V^*}, \qquad \forall\varphi,\psi \in V$$

(ou formellement, $\mathcal{A}_u^*\psi = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot (f^u\psi\rho) + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(q_{ij}\psi\rho), \forall\psi \in V$) Supposons que $u^*$ est un contrôle optimal du problème (**P**).

Soit $p^*$ la seule solution faible (au sens de la définition) de l'équation rétrograde suivante

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt}(t) = -\mathcal{A}^*_{u^*}p(t), & t \in (0,T) \\ p(T) = -1 \end{cases} \tag{3.18}$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy dans $V^*$.

L'existence et l'unicité de la solution faible $p^*$ de 3.18 ont été établie dans le pragraphe précédent.

Etablissons d'abord un principe maximum. Nous allons utiliser utiliser un ensemble particulier de contrôles approximatifs. L'idée d'utliser de telles variations du contrôle optimal est dû à L. Pontryagin.

**Théorème 3.3.1** *(Le Principe Maximum) Si $u^*$ est un contrôle optimal pour le problème ($\boldsymbol{P}$),alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(x, u^*(x)) \int_0^T p^*(t,x)dt + f(x, u^*(x)) \cdot \int_0^T p^*(t,x)\nabla\varphi^{u^*}(t,x)dt \\ &= \max_{u_0 \in U_0} \left\{ \mathcal{L}(x, u_0) \int_0^T p^*(t,x)dt + f(x, u_0) \cdot \int_0^T p^*(t,x)\nabla\varphi^{u^*}(t,x)dt \right\} \end{aligned}$$

**Preuve.** Considérons un élément arbitraire $u_0 \in U_0$ et un élément arbitraire $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $\varepsilon > 0$ considérons le contrôle variationnel (variational spike control) suivant

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} u_0, & x \in B(x_0;\varepsilon) \\ u^*(x), & x \in \mathbb{R}^d \backslash B(x_0;\varepsilon) \end{cases}$$

il est évident que $u^\varepsilon \in \mathcal{M}$ et que $u^\varepsilon(x) \to u^*(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^d$ et $u^\varepsilon \to u^*$ dans $H^m$ quand $\varepsilon \to 0$.

Soit $z^\varepsilon = \varphi^{u^\varepsilon} - \varphi^{u^*}$, qui est la solution faible de

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt}(t) = \mathcal{A}_{u^*} z(t) + (f^{u^\varepsilon} - f^{u^*}) \cdot \nabla \varphi^{u^\varepsilon}(t) + \mathcal{L}^{u^\varepsilon} - \mathcal{L}^{u^*}, \qquad t \in (0,T) \\ z(0) = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

L'existence et l'unicité de la solution faible ont été établies dans le pragraphe précédent.

Puisque $u^*$ est un contrôle optimal du problème $(P)$,nous avons que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} z^\varepsilon(T,x) d\nu(x) \tag{3.20}$$

par 3.18 nous obtenons que

$$\int_0^T \langle \frac{dp^*}{dt}(t), z^\varepsilon(t) \rangle_{V^*,V} dt = - \int_0^T \langle \mathcal{A}^*_{u^*} p^*(t), z^\varepsilon(t) \rangle_{V^*,V} dt$$

si nous intégrons par parrties et par en utilisant 3.19 nous obtenons que

$$\langle p^*(T), z^\varepsilon(T) \rangle_H - \langle p^*(0), z^\varepsilon(0) \rangle_H - \int_0^T \langle p^*(t), \mathcal{A}^*_{u^*} z^\varepsilon(t) + (f^{u^\varepsilon} - f^{u^*}) \cdot \nabla \varphi^{u^\varepsilon}(t) + \mathcal{L}^{u^\varepsilon} - \mathcal{L}^{u^*} \rangle_{V,V^*} dt$$
$$= - \int_0^T \langle \mathcal{A}^*_{u^*} p^*(t), z^\varepsilon(t) \rangle_{V^*,V} dt$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} z^\varepsilon(T,x) dv(x) = &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (f^{u^\varepsilon} - f^{u^*})(x) \cdot \nabla \varphi^{u^\varepsilon}(t,x) p^*(t,x) dv(x) dt \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{L}^{u^\varepsilon} - \mathcal{L}^{u^*})(x) p^*(t,x) dv(x) dt. \end{aligned}$$

Par 3.20 nous concluons que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f^{u^\varepsilon} - f^{u^*})(x) \cdot \int_0^T p^*(t,x) \nabla \varphi^{u^\varepsilon}(t,x) dt \ \rho(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{L}^{u^\varepsilon} - \mathcal{L}^{u^*})(x) \int_0^T p^*(t,x) dt \rho(x) dx \leq 0$$

$$\Longrightarrow \int_{B(x_0;\varepsilon)} (f^{u^\varepsilon} - f^{u^*})(x) \cdot \int_0^T p^*(t,x)\nabla\varphi^{u^*}(t,x)dt\rho(x)dx$$
$$+ \int_{B(x_0;\varepsilon)} (f^{u^\varepsilon} - f^{u^*})(x) \cdot \int_0^T p^*(t,x)\nabla z^{u^\varepsilon}(t,x)dt\rho(x)dx$$

$$+ \int_{B(x_0;\varepsilon)} (\mathcal{L}^{u^\varepsilon} - \mathcal{L}^{u^*})(x) \int_0^T p^*(t,x)dt\rho(x)dx \leq 0$$

nous avons que

$$\frac{1}{meas(B(x_0;\varepsilon))} \int_{B(x_0;\varepsilon)} (f^{u^\varepsilon} - f^{u^*})(x) \cdot \int_0^T p^*(t,x)\nabla\varphi^{u^*}(t,x)dt\ \rho(x)dx \tag{3.21}$$
$$\to (f(x_0,u_0) - f(x_0,u^*(x_0))) \cdot \int_0^T p^*(t,x_0)\nabla\varphi^{u^*}(t,x_0)dt\ \rho(x_0)dx$$

quand $\varepsilon \to 0+$ ,pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (en fait pour n'importe quel point de Lebesgue pour la fonction $x \to \rho(x)\int_0^T p^*(t,x)\nabla\varphi^{u^*}(t,x)dt$ et pour la fonction $x \to \rho(x)f(x,u^*(x))\int_0^T p^*(t,x)\nabla\varphi^{u^*}(t,x)dt$.

Nous allons désigner par $meas(C)$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble $C$.

De même manière

$$\frac{1}{meas(B(x_0;\varepsilon))} \int_{B(x_0;\varepsilon)} (\mathcal{L}^{u^\varepsilon} - \mathcal{L}^{u^*})(x) \int_0^T p^*(t,x)dt\ \rho(x)dx \tag{3.22}$$
$$\to (\mathcal{L}(x_0,u_0) - \mathcal{L}(x_0,u^*(x_0))) \int_0^T p^*(t,x_0)dt\ \rho(x_0),$$

quand $\varepsilon \to 0+$ ,pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (en fait pour tout point de Lebesgue pour la fonction $x \to \rho(x)\int_0^T p^*(t,x)dt$ et pour la fonction $x \to \rho(x)\mathcal{L}(x,u^*(x))\int_0^T p^*(t,x)dt$).

D'autre part, démontrons que

$$\frac{1}{meas(B(x_0;\varepsilon))} \int_{B(x_0;\varepsilon)} (f^{u^\varepsilon} - f^{u^*})(x) \cdot \int_0^T p^*(t,x)\nabla z^\varepsilon(t,x)dt\ \rho(x)dx \to 0,$$

quand $\varepsilon \to 0+$ ,pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. En effet, nous avons que

$$\frac{1}{meas(B(x_0;\varepsilon))}\left|\int_{B(x_0;\varepsilon)}(f^{u^\varepsilon}-f^{u^*})(x)\cdot\int_0^T p^*(t,x)\nabla z^\varepsilon(t,x)dt\rho(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{2\left\|f\right\|_\infty}{meas(B(x_0;\varepsilon))}\left(\int_0^T\int_{B(x_0;\varepsilon)}\left|p^*(t,x)\right|^2\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^T\int_{B(x_0;\varepsilon)}\left|\nabla z^\varepsilon(t,x)\right|_d^2\rho(x)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ici $\left\|\cdot\right\|_\infty$ est la norme de $L^\infty(\mathbb{R}^d\times\tilde{U}_0;\mathbb{R}^k)$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

Puisque

$$\frac{1}{meas(B(x_0;\varepsilon))}\int_{B(x_0;\varepsilon)}\int_0^T\left|p^*(t,x)\right|^2 dt\rho(x)dx \to \int_0^T\left|p^*(t,x_0)\right|^2 dt\rho(x_0)$$

quand $\varepsilon \to 0+$ ,p.p. $x_0\in\mathbb{R}^d$ (en fait pour tout point de Lebesgue pour la fonction $x\to\rho(x)\int_0^T\left|p^*(t,x)\right|^2dt$), il suffit de prouver que

$$\frac{1}{meas(B(x_0;\varepsilon))}\int_{B(x_0;\varepsilon)}\int_0^T\left|\nabla z^\varepsilon(t,x)\right|_d^2 dt\rho(x)dx\to 0$$

quand $\varepsilon\to 0+$ ,p.p. $x_0\in\mathbb{R}^d$.

En effet, puisque $z^\varepsilon$ est la solution faible de

$$\begin{cases}\frac{dz}{dt}(t)=\mathcal{A}_{u^\varepsilon}z(t)+(f^{u^\varepsilon}-f^{u^*})\cdot\nabla\varphi^{u^*}(t)+\mathcal{L}^{u^\varepsilon}-\mathcal{L}^{u^*}, t\in(0,T)\\ z(0)=0,\end{cases}$$

alors on obtient après que pour tout $t\in[0,T]$

$$\frac{1}{2}\left\|z^\varepsilon(t)\right\|_H^2+\alpha^0\int_0^t\left\|z^\varepsilon(t)\right\|_V^2ds\leq\beta^0\int_0^t\left\|z^\varepsilon(t)\right\|_H^2ds$$

$$+\int_0^t \int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|f^{u^\varepsilon}(x) - f^{u^*}(x)\right|_d \left|\nabla \varphi^{u^*}(t,x)\right|_d |z^\varepsilon(t,x)| \rho(x) dx\ dt \tag{3.23}$$

$$+\int_0^t \int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\mathcal{L}^{u^\varepsilon}(x) - \mathcal{L}^{u^*}(x)\right| |z^\varepsilon(t,x)| \rho(x) dx\ dt \tag{3.24}$$

où $\alpha^0 > 0$ et $\beta^0 \geq 0$ sont deux constantes (indépendantes de $\varepsilon$). Mais pour presque tout $t \in (0,T)$ :

$$\int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|f^{u^\varepsilon}(x) - f^{u^*}(x)\right|_d \left|\nabla \varphi^{u^*}(t,x)\right|_d |z^\varepsilon(t,x)| \rho(x) dx\ dt$$

$$\leq 2\left\|f\right\|_\infty \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\nabla \varphi^{u^*}(t,x)\right|_d^2 \rho(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} |z^\varepsilon(t,x)|_d^2 \rho(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2\left\|f\right\|_\infty \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\nabla \varphi^{u^*}(t,x)\right|_d^2 \rho(x)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} |z^\varepsilon(t,x)|^{q^*} \rho(x)^{\frac{q^*}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} [meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}}$$

(où $q^* > 2$ est tel que $W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \subset L^{q^*}(\mathbb{R}^d)$ (injection continue), et$\frac{q^*}{2}$ et $r^*$ satisfont $\frac{1}{\frac{q^*}{2}} + \frac{1}{r^*} = 1$)

$$\leq 2\left\|f\right\|_\infty \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\nabla \varphi^{u^*}(t,x)\right|_d^2 \rho(x)\right)^{\frac{1}{2}} [meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}} \left\|z^\varepsilon(t)\sqrt{\rho}\right\|_{L^{q^*}(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq \frac{\alpha^0}{4} \left\|z^\varepsilon(t)\right\|_V^2 + \theta_0 [meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}} \int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\nabla \varphi^{u^*}(t,x)\right|_d^2 \rho(x) dx$$

(où $\theta_0$ est une constante positive).

D'autre part

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\mathcal{L}^{u^\varepsilon}(x)-\mathcal{L}^{u^*}(x)\right| |z^\varepsilon(t,x)|\,\rho(x)dx \\
&\leq 2\,\|\mathcal{L}\|_\infty \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} |z^\varepsilon(t,x)|_d^2\,\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} \rho(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) \\
&\leq 2\,\|\mathcal{L}\|_\infty \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} |z^\varepsilon(t,x)|^{q^*}\,\rho(x)^{\frac{q^*}{2}}dx\right)^{\frac{1}{2}} [meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}} \left(\int_{B(x_0;\varepsilon)} \rho(x)^{\frac{1}{2}}dx\right) \\
&\leq \frac{\alpha^0}{4}\,\|z^\varepsilon(t)\|_V^2 + \tilde{\theta}_0[meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}} \int_{B(x_0;\varepsilon)} \rho(x)dx
\end{aligned}$$

(où $\tilde{\theta}_0$ est une constante positive).

Par 3.23, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|z^\varepsilon(t)\|_H^2 + \frac{\alpha^0}{2}\int_0^t \|z^\varepsilon(t)\|_V^2\,ds \\
&\leq \beta^0\int_0^t \|z^\varepsilon(t)\|_H^2\,ds + \theta_0[meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}} \int_0^T\int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\nabla\varphi^{u^*}(t,x)\right|_d^2\rho(x)dxdt \\
&+ \tilde{\theta}_0[meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}} \int_0^T\int_{B(x_0;\varepsilon)} \rho(x)dxdt
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons que pour tout $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}
\|z^\varepsilon(t)\|_H^2 &\leq meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}}[2\theta_0\int_0^T\int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\nabla\varphi^{u^*}(t,x)\right|_d^2\rho(x)dxdt \\
&+ 2\tilde{\theta}_0\int_0^T\int_{B(x_0;\varepsilon)} \rho(x)dxdt]\exp(2\beta^0 t) \\
&\Longrightarrow \int_0^t \|z^\varepsilon(t)\|_H^2\,ds \leq \theta_1 meas(B(x_0;\varepsilon))]^{\frac{1}{2r^*}}[\int_0^T\int_{B(x_0;\varepsilon)} \left|\nabla\varphi^{u^*}(t,x)\right|_d^2\rho(x)dxdt \\
&+ \int_0^T\int_{B(x_0;\varepsilon)} \rho(x)dxdt],
\end{aligned}$$

(où $\theta_1$ est une constante positive). Ceci implique que

$$\frac{1}{meas(B(x_0;\varepsilon))}\int_{B(x_0;\varepsilon)}\int_0^T |\nabla z^\varepsilon(t,x)|_d^2\,dt\rho(x)dx \to 0$$

quand $\varepsilon \to 0+$ ,p.p. $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (en fait pour tout point de Lebesgue pour la fonction $x \to \rho(x) \int_0^T |p^*(t,x)|^2 \, dt$). En utilisant maintenant 3.21 et 3.22 nous obtenons que

$$(\mathcal{L}(x_0,u_0) - \mathcal{L}(x_0,u^*(x_0))\int_0^T p^*(t,x_0)dt \ \rho(x_0)$$

$$+(f(x_0,u_0) - f(x_0,u^*(x_0)) \cdot \int_0^T p^*(t,x_0)\nabla\varphi^{u^*}(t,x_0)dt \ \rho(x_0)dx \leq 0,$$

p.p. $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et la conclusion du théorème. ■

**Lemme 3.3.1** *Pour tout $u \in \mathcal{M}$, la solution faible $p$ à*

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt}(t) = -\mathcal{A}_u^* p(t), t \in (0,T) \\ P(T) = -1 \end{cases} \tag{3.25}$$

*satisfait $\int_0^T p(t,x)dt < 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}^d$*

# Bibliographie


[1] Aniţa, Ş. L. (2023). Optimal control for stochastic differential equations and related Kolmogorov equations. Evolution Equations & Control Theory, 12(1).

[2] Aniţa, Ş. L. (2022). A stochastic optimal control problem with feedback inputs. International Journal of Control, 95(3), 589-602.

[3] El Karoui, N., & Mazliak, L. (1997). Backward Stochastic Differential Equations. Pitman Research Notes in Mathematics Series 364. El-Karoui and S. Mazliak edts.

[4] Evans, L. C. (2012). An introduction to stochastic differential equations (Vol. 82). American Mathematical Soc..

[5] Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (2012). Deterministic and stochastic optimal control (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

[6] Lions, J. L. (1969). " Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires,". Dunod.

[7] Ludvigsson, G. (2013). Kolmogorov equations. Uppsala Universitet.

[8] Oksendal, B. (2013). Stochastic differential equations : an introduction with applications. Springer Science & Business Media.

# Annexe A : Rappel de quelques résultats

## Lemme de Gronwall

Soient $\varphi$, $\psi$ et $y$ trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifient l'inégalité

$$\forall t \in [a, b], \qquad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \qquad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds.$$

## Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour $\mu$-presque partout $x \in E$. Supposons de plus qu'il existe une fonction intégrable $g : E \longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu$-presque partout. Alors $f$ est intégrable et

$$\int_E f_n(x) d\mu \longrightarrow \int_E f(x) d\mu.$$

## Points de Lebesgue d'une fonction $L^1$

Un poit $x$ du domaine de définition d'une application $f$ Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^n$ est appelé point de Lebesgue lorsque $f$ varie "très peu" au voisinage de $x$ ou de manière plus générale si les moyennes des applications $t \longmapsto |f(t) - f(x)|$ sur les boules centrées sur $x$ sont très petites.

Plus précisement, on dit que $x$ est un point de Lebesgue de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(t) - f(x)| \, d\lambda(t) = 0,$$

où $B(x,r)$ désigne la boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en $x$ et de rayon $r$ et $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue.

## Espace de Sobolev

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m, \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

où $\alpha$ est un multi-indice et $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de $u$ au sens faible (au sens des distributions).

On munit $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme suivante

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

qui en fait un espace de Banach.

On note souvent $H^m(\Omega)$ l'espace $W^{m,2}$ qui est un espace de Hilbert.

# Inégalité de Doob-Kolmogorov

Soit M une martingale de carré intégrable, continue. Pour tout $t > 0$, $\lambda > 0$

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t}|M(s)| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}E\left(M(t)^2\right).$$

# Formule d'Itô

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus d'Itö qui s'écrit, $\forall t \geq 0$

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$f'(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)H_s dB_s + \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t f'^{\prime}(X_s)H_s^2 ds.$$

Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$f'(X_t) = f(X_0, 0)+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)H_s dB_s+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)K_s ds+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, s)ds+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s)H_s^2 ds$$

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

| | | |
|---|---|---|
| $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ | : | Espace de probabilité |
| $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ | : | Une filtration |
| $\mathbf{P} - p.s$ | : | Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ |
| $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ | : | Epace de probabilité filtré |
| $EDS$ | : | Èquation differentielle stochastique |
| $EKP$ | : | Èquation de Kolmogorov progressive |
| $\grave{E}KR$ | : | Èquation de Kolmogorov retrograde. |
| i.e | : | C'est à dire |
| $\nabla$ | : | les gradient |
| $C_0^2$ | : | Espace de fonctions deux fois continûment differentiables |
| $\mathbb{R}^d$ | : | Espace réel euclidien de dimension $d$. |
| $\mathbb{L}^2$ | : | Espace des fonctions mesurables de carré intégrable |
| $\mathbb{C}^1$ | : | Espace des fonctions continûment differentiables |
| $\lvert\cdot\rvert_k$ | : | La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\|\cdot\|_\infty$ | : | La norme $L^\infty$ |
| $\mathbf{I}_B$ | : | Fonction indicatrice de l'ensemble $B$ |
| $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ | : | Esapce de Sobolev |

## Résume

***Le mémoire de master concerne l'étude d'un contrôle optimal stochastique de type Markovien, le problème est réduit a un problème de contrôle optimal déterministe pour une équation de Kolmogorov. Un principe de maximum et de conditions nécessaires d'optimalité de premier ordre pout obtenus***

## Abstract

***The master's thesis concerns the study of a stochastic optimal control of Markovian type, the problem is reduced to a deterministic optimal control problem for a Kolmogorov equation. A principle of maximum and necessary conditions of first-order optimality obtained***

## ملخص

***تتعلق المذكرة بدراسة التحكم العشوائي الأمثل للنوع ماركو فيان، حيث يتم اختزال المشكلة إلى مشكلة تحكم أمثل حتمية لمعادلة كولموغوروف. مبدأ للحدود القصوى و الشروط الضرورية للأفضل من الدرجة الأولى الذي تم الحصول عليه***