République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Oumaima Slama

Titre :

Équations différentielles stochastiques rétrogrades : cas non lipschitz

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**Berouis Nassima**	UMKB	Président
Dr.	**Chaouchkhouane Nassima**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Korichi Fatiha**	UMKB	Examinateur

Juin 2024

Dédicace

Louange à **"Allah"** jusqu'à ce que la louange atteigne sa limite.

Je tiens à dédier ce travail à :

À mon cher père, que je manque à chaque étape de ma vie et dont je sens la présence avec moi dans chaque accomplissement, je prie Allah de l'envelopper de Sa vaste miséricorde et de lui accorder une place dans les vastes jardins du paradis.

À ma chère mère, la femme qui se sacrifie pour moi tout le temps, le soleil qui éclaire mon chemin et symbolise l'amour dans ma vie. Elle est toujours dans mon cœur "**Youb Djamila**".

À mes étoiles les plus brillantes, mes sœurs qui m'ont encouragée. :

"**Soumai, Asma, Nadia".**

À l'homme le plus fort et le plus courageux, mon frère : "**Slama Brahim",** qui m'a toujours assistée pour persévérer dans mes études, et Je le remercie pour ses efforts et ses sacrifices

À les enfants de mon coeur : "**Tadje, Mazen , Nazim, Taime, Mohamed".**

À toute ma famille.

À chères amies.

À l'homme le plus cher à mon cœur.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **"Allah"** qui ma donnè le courage pour faire ce travail.

Tout d'abord je tiens à exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance envers mon encadreur madame **"Chaouchkhouane Nassima"**, pour son exigence de clartè et de rigueur qui m'a beaucoup apportè, pour la confiance qu'il m'a tèmoignèe lors des moments dècisifs ainsi que pour son soutien tout au long temps de ce projet.

Mes vifs remerciements aux membres du jury madame "**Berouis Nassima**", et madame "**Korichi Fatiha**". Merci sincèrement du temps et de l'ènergie que vous avez consacrès à la lecture de mon travail.

Mes remerciements vont ègalement à tous les enseignants de dèpartement de mathèmatique à l'universitè de Biskra, qui m'ont apportè leur aide au bon acheminement de parcours èducatif et qui ont contribuè à la rèalisation de ce travail.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide, ainsi que tous ce qui m'ont soutenu et m'ont aidè tout le long de cette ètude et toutes les personnes qui ontcontribuè directement ou indirectement à ce travail.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé) ont été introduites pour la première fois dans le cas linéaire dans un travail de **Bismut en 1973** [1], lorsqu'il a étudié l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal. **Pardoux et Peng** [15], ont obtenu le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas non-linéaire. Cela découle principalement de multiples applications qu'elles ont pu apporter dans différents domaines de mathématiques tels que les EDP et l'homogénéisation, le contrôle optimal, les jeux différentiels et la géométrie différentielle, etc. Cependant, dans de nombreuses applications pratiques, ces conditions de Lipschitz peuvent être trop restrictives, cela amène à étudier les EDSR dans le cadre non Lipschitz. Nous citons par exemple quelque cas. **S. Hamadene** [5] a étudié le cas lorsque les coefficients peuvent être seulement localement Lipschitz, ou même continus dans le travail de **Lepeltier, J.P**. et **San Martin**(1997) [10], etc..

Dans ce mémoire, nous essayons d'étudier l'existence et l'unicité de la solution dans le cas non Lipschitz ce résultat est obtenu par **Ying Wang** et **Zhen Huang** [21], pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades de type suivante :

$$\begin{cases} -dY_t &= g(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \qquad 0 \leq t \leq T \\ Y_T &= \xi. \end{cases} \tag{1}$$

À cet effet nous travaillons sous les conditions suivantes :

$(H1)$ pour tout : $(Y,Z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, $\;g(.,Y,Z) \in \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$.

$(H2)$ Pour tout $t \in [0,T]$ et $(Y_1,Z_1),(Y_2,Z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, g satisfont :

$$|g\left(t,Y_1,Z_1\right) - g\left(t,Y_2,Z_2\right)|^2 \leq \rho\left(t,|Y_1-Y_2|^2\right) + c|Z_1-Z_2|^2.$$

Où $c > 1$ et $\rho\left(t,u\right)$ satisfait :

- pour t fixé dans $[0,T]$, $\rho\left(t,.\right)$ est une fonction continue, concave et non décroissant tel que $\rho\left(t,0\right) = 0$.
- L'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} u' & = & -\rho\left(t,u\right). \\ u\left(T\right) & = & 0. \end{cases}$$

  admet une unique solution $u\left(t\right) = 0$, $t \in [0,T]$.
- Il existe $a\left(t\right) \geq 0, b\left(t\right) \geq 0$ tel que $\rho\left(t,u\right) \leq a\left(t\right) + b\left(t\right)u$, et $\int_0^T a\left(t\right)dt < +\infty$, $\int_0^T b\left(t\right)dt < +\infty$.

  Ce travail est une génération des travaux de **Mao**(1995) [14] et **Wang et Wang** (2003) [20].

Ce mémoire se décompose en trois chapitres. Nous commencerons par un chapitre introductif dans lequel on va présenter une foule de définitions, propositions et théorèmes faits sans démonstration car ce chapitre a pour but de mettre le lecteur dans le cadre théorique de notre étude.

Dans le deuxième chapitre, on abordera les EDSR standards par la présentation du théorème de **Pardoux et Peng** et le théorème de comparaison. Finalement, le dernier chapitre est sur les EDSR de générateur non lipschitz dont l'objectif est de démontrer l'existence et d'unicité de la solution.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions et notions de base du calcul stochastique qui nous utiliserons dans les prochains chapitres.

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Dans la suite $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ un espace probabilisé

Définition 1.1.1 (Processus srochastique) *Un processus stochastique à valeurs réelles, défini sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$, est une famille de v.a(s) noté $X := (X_t, t \in I)$,(ou $(X_t)_{t\in I}$ ou $(X(t))_{t\in I}$), où I est une partie de $\mathbb{R}_+$. X est donc une fonction de deux variables qui fait correspond à $(t, \omega) \in I \times \Omega$, l'image $X_t(\omega) \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.1.2 (Processus continu) *un processus stochastique $X = \{X_t, t \geq 0\}$ sur $(\Omega; \mathcal{F}; \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}; \mathbb{P})$ on dit que X est continu si les applications $t \longmapsto X_t(w)$ sont continues pour presque tout w.*

Définition 1.1.3 (Filtration) *Une filtration est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, telle que : $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

Définition 1.1.4 (Filtration naturelle) *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique défini sur un espace de probabilité* $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$*. Une filtration naturelle associée à* X *est la filtration définie par*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X_s, s \leq t\right), \forall t \geq 0.$$

Définition 1.1.5 (Processus mesurable) *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit mesurable si l'application suivante est mesurable :*

$$\begin{array}{rcl} X \ : (\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) & \rightarrow & \mathbb{R}. \\ (t, \omega) & \longmapsto & X_t(\omega). \end{array}$$

Définition 1.1.6 (Processus adapté) *Soit* $(\Omega; \mathcal{F}; \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}; \mathbb{P})$ *est un espace de probabilité filtré. Une famille* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *de v.a. sur* Ω *est appelée un processus stochastique. On dit que le processus* X *est* $\{\mathcal{F}_t\}$*-adapté si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable pour tout* $t \geq 0$.

Définition 1.1.7 (Processus progressivement mesurable) *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour tout* $t \geq 0$ *l'application suivante est mesurable :*

$$\begin{array}{rcl} X \ : ([0, t] \times \Omega; \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) & \rightarrow & \mathbb{R}. \\ (s, \omega) & \longmapsto & X_s(\omega). \end{array}$$

Définition 1.1.8 (Modification) *Soit* $(X_t)_{t\leq T}$ *et* $(Y_t)_{t\leq T}$ *deux processus aléatoires indexés par le même ensemble* T *et à valeurs dans le même espace* E*. On dit que* Y *est une modification de* X *si :*

$$\forall t \in T;\ \mathbb{P}[Y_t = X_t] = 1.$$

1.1.1 Martingale

Définition 1.1.9 (Martingale) $(X_t)_{t\in[0,+\infty[}$ *une famille de v.a est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si :*

i) $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ *; pour tout* t *(intégrable).*

ii) X_t *est mesurable pour tout* t*.*

iii) $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s; \forall s \leq t.$

Théorème 1.1.1 *Une famille de v.a* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une sur-martingle (resp sous-martingle) par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$ *si :*

i) X_t *est integrable pour tout* t*.*

ii) X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

iii) $\forall s \leq t; \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ *(resp* $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$*).*

- *Si* $(X_t)_{t\geq 0}$*est une martingale* : $\mathbb{E}(X_t) = X_0, \forall t \geq 0.$

- Inégalité de Doob *: si* X *est une martingale continue, on a pour* $t \geq 0$ *:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X_t^2\right|\right) \leq 4\mathbb{E}(\left|X_T^2\right|).$$

Définition 1.1.10 (Semi martingale continue) *. On appelle semi-martingale continue un processus réel* X *qui peut s'exprimer comme somme :*

$$X = V + M.$$

Tel que :

$\cdot M$ *est une martingale locale* $(M_0 = 0)$*.*

$\cdot V$ *est un proessus à variation finie* $\left(\forall \omega : \int_{s\in[0;+\infty[} |dV_s(\omega)| < +\infty\right)$.

1.1.2 Mouvement brownien

- On se donne un espace $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ et un processus $(W_t;\, t \geq 0)$ défini sur cet espace .

- Le processus $(W_t;\, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si :

a) $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).

b) $\forall s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.

c) $\forall n\,;\, \forall t_i;\; t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n\,;$ les variables $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}; \cdots; W_{t_1} - W_{t_0}; W_{t_0})$ sont indépendantes.

Remarque 1.1.1 1) *La propriété* (b) *est la stationnarité des accroissements du mouvement brownien.*

2) *La propriété* (c) *est à accroissements indépendants.*

1.2 Intégrale stochastique

On se donne un espace de probabilité $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ et un mouvement Brownien W sur cet espace, on note par $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s, s \leq t\right)$ sa filtration naturelle.

Définition 1.2.1 (Intégrale stochastique) *L'intégrale stochastique oú l'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme :*

$$\int_0^t \theta_s dW_s,$$

où $\{\theta_s, s \geq 0\}$ *est un processus stochastique.*

Définition 1.2.2 *On dit que* $\{\theta_s, t \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $\mathcal{F}_t^W-$*adapté, càdlàg et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty, \forall t \geq 0.$$

1.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

Soit $I_T\left(\theta\right) = \int_0^t \theta_s dW_s$:

Propriétés 1.2.1 *1-**Linéarite :*** $\forall t \geq 0$, $a_1,a_2 \in \mathbb{R}$ *et* θ^1 *et* θ^2 *des bon processus :*

$$I_T\left(a_1\theta^1 + a_2\theta^2\right) = a_1 I_T\left(\theta^1\right) + a_2 I_T\left(\theta^2\right).$$

*2-**Propriété de martingale :*** $\forall\ \theta$ *un bon processus, alors les processus :*

$$t \longmapsto I_T(\theta)\,, et\ t \longmapsto I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds,$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\geq 0}$*-martingales.*

On a pour $s \leq t$ *:*

$$\mathbb{E}\left[I_T(\theta)\,|\mathcal{F}_s^W\right] = I_s(\theta)\,,$$

soit

$$\mathbb{E}\left[I_T(\theta) - I_s(\theta)\,|\mathcal{F}_s^W\right] = 0.$$

On montre que

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t(\theta) - I_s(\theta)\right)^2|\mathcal{F}_s^W\right] = \mathbb{E}\left[\left(I_T(\theta)\right)^2 + \left(I_s(\theta)\right)^2|\mathcal{F}_s^W\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_u^2 du|\mathcal{F}_t^W\right].$$

En conséquence du théorème de Doob on a : $\forall\ \left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\geq 0}$ *−temps d'arrêt* τ *et* $\forall\ \theta$ *un bon processus tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \theta_s^2 ds\right] < +\infty,$$

on a :

$$\mathbb{E}\left[I_\tau(\theta)\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left(I_\tau^2(\theta)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \theta_s^2 ds\right],$$

d'après inégalité LP et si $p = q = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\sup_{s\leq t} I_s(\theta)\right)^2\right) &\leq 4\mathbb{E}\left(I_\tau(\theta)^2\right) \\ &= 4\int_0^t \mathbb{E}\left(\theta_u^2\right) du.\end{aligned}$$

*3-**Propriété d'isométrie :** $\forall\theta$, ς des bons processus, on a* $\forall s, t \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[I_s(\varsigma)\, I_t(\theta)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{s\wedge t} \theta_u \varsigma_u du\right],$$

de plus

$$I_s(\varsigma)\, I_t(\theta) - \int_0^{s\wedge t} \theta_u \varsigma_u du,$$

est une $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\geq 0}$-martingale.

1.2.2 Calcul d'Itô

Processus d'Itô

Définition 1.2.3 *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \qquad \mathbb{P}-p.s \ \ (0 \leq t \leq T).$$

Où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}-p.s$:

$$\int_0^t |b_s| ds < \infty \ \ et \ \ \int_0^t \|\sigma_s\|^2 < \infty.$$

Formule d'Itô

Soit X un processus d'Itô réel

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma dW_s,$$

et soit f une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; suffisamment régulière. La formule d'Itô vise à donner une formule de changement de variable pour le processus $f(X_t)$ qui sera un processus d'Itô.

1^{er} formule

Supposons que $f \in \mathcal{C}^2$ alors on a :

$$f\left(X_t\right) = f\left(x\right) + \int_0^t f'\left(X_s\right) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s ds.$$

Si

$$X_t = x + \int_0^t b_{sds} + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

Où

$$\begin{cases} dX_t &= b_t dt + \sigma_t dW_t. \\ X_0 &= x. \end{cases}$$

Si f admet des dérivées bornés, le processus

$$f(X_t) = \int_0^t f'\left(X_s\right) b_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''\left(X_s\right) \sigma_s^2 ds,$$

est une martingale.

Cette formule s'écrit sous forme difféǹretielle :

$$df\left(X_t\right) = f\left(X_t\right)dX_t + \frac{1}{2}f\left(X_t\right)d\langle X\rangle_t.$$

2eme formule

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}\times\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$. De classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x on a :

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(s,X_s\right)d\langle X\rangle_s.$$

Sous forme defferentielle

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}\left(t,X_t\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}\left(t,X_t\right)dY_t + \frac{1}{2}\times\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t,X_t\right)d\langle X\rangle.$$

$f\left(0,X_0\right) = f(0,x)$.

Proposition 1.2.1 (Formule d'intégration par parties) *La formule d'Itô montre que :*

$$d\left[X_1X_2\right](t) = X_1(t)\,dX_2(t) + X_2(t)\,dX_1(t) + \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties. La quantité $\sigma_1(t)\,\sigma_2(t)$ correspond au crochet de $X_{1,}X_2$ noté $\langle X_1,X_2\rangle$ tel que

$$\langle X_1,X_2\rangle = \int_0^t \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,ds.$$

1.3 Résultats et inégalités utiles

Théorème 1.3.1 (Théorème de représentation des martingales Brouniennes) *Soit M une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\in[0,T]}$. Alors il existe un processus adapté $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$, tel que*

$$\mathbb{P}-p.s, \qquad \forall t \in [0,T], \qquad M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s,$$

Théorème 1.3.2 (Théorème du point fixe de Picard) *Soient (E,d) un espace métrique complet et $\Psi : E \to E$ une application contractante c'est à dire il existe $k \in [0,1[$ tel que :*

$$d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq kd(x,y), \forall x, y \in E.$$

Alors il existe un unique point $a \in E$ tel que $\Psi(a) = a$.

Théorème d'Ascoli-Arzela

Dans ce théorème $\mathcal{C}(E,F)$ est un espace des fonctions continues.

Théorème 1.3.3 (Théorème d'Ascoli-Arzela) *Soit (E,d) un espace métrique compact, (F,δ) un espace métrique complet. Une partie A de $\mathcal{C}(E,F)$ est relativement compacte si et seulement si :*

1- A est équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0; \exists \eta > 0. \forall f \in A, \forall y \in E, (d_E(x,y) \leq \eta) \Longrightarrow (d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

2- Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans F.

Théorème 1.3.4 (Théorème de Fubini) *Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur $[a,b]\times[c,d]$ à valeurs dans un ensemble E. Alors*

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Lemme 1.3.1 (Lemme de Granwal) *Soit $f\ :[0,T]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t :*

$$f\left(t\right)\leq a+b\int_0^t f\left(s\right)ds;\ \ a\in\mathbb{R},b\geq 0.$$

Alors pour tout t :

$$f\left(t\right)\leq a\exp\left(bt\right).$$

Théorème 1.3.5 (Inégalités de Burkholder- Davis -Gaundy) *Soit $p\in\left]0,+\infty\right[$. Il existe deux constantes c_p, C_p telles que, pour toute martingale continue M, null en 0.*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle M,M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]\leq\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|M_t|^p\right]\leq C_p\mathbb{E}\left[\langle M,M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Définition 1.3.1 (Inégalité de Hölder) *L'inégalité de Hölder dit que si p et $q>0$ sont conjugués (i.e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), alors*

$$\int_D(f(x)g(x))d\mu(x)\leq\left(\int_D|f(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.\int_D|g(x)|^pd\mu(x).$$

Théorème 1.3.6 (Inégalité de young) *Soit p et q des exposants conjugués avec $p,q>1$. Alors, pour $x,y\geq 0$, on trouve que :*

$$xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

Théorème 1.3.7 (Inégalité de jensen) *Si* φ *une fonction convexe alors :*

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\varphi\left(X\right)|\mathcal{G}\right).$$

Théorème 1.3.8 (Inégalité de LP) *Soit* $p \geq 1$ *et* X *une martingale rélle continue telle que* $X_t \in L^p, \forall t \geq 0,$ *alors :*

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathbb{E}\left(\sup_{s \leq t} |X_s|^p\right) \leq q^p \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right],$$

où q *est le conjuge de* p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans ce chapitre, nous présentons le résultat d'existence et d'unicité de la solution dans le cas lipschitzienne ce résultat est introduit par **E. Pardoux et S.peng** en 1990 [2].

2.1 Introduction

Soient $\left(\Omega; \mathcal{F}; (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}; \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré, une $v.a$ $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$, et un processus Y qui est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\frac{dY_t}{dt} = g(Y_t), t \in [0, T], \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Considérons l'exemple le plus simple oú $g \equiv 0$, dans ce cas la solution est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$: Si on trouvaille avec la filtration naturelle d'un **M.B** et

$\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Le théorème de représentation des martingales browniennes, permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dWs \qquad i.e: \ -dY_t = -Z_t \ dW_t, \qquad \text{avec : } Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à g de dépendre du processus Z ; l'équation devient donc :

$$-dY_t = g(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t \qquad avec \quad Y_T = \xi.$$

2.2 Notations

Dans ce chapitre, on va utiliser les termes suivent :

- $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet.
- W un **M.B** d-dimensionnel sur cet espace.
- $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du **M.B** W.
- $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus Y progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$:

$$||Y^2||_{\mathcal{S}^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

  et $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$ les sous-espace formé par les processus continus.
- $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui formé par les processus Z progressivement mesurables à valeurs

dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ tels que :

$$||Z||^2_{\mathcal{M}^2} := \mathbb{E}\left[\int_0^T ||Z||^2 dt\right] < \infty,$$

avec :

$\cdot$si $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$; $||Z||^2 = trace(Z \times Z^*)$.

- $\mathcal{B}^2$: Espace de Banach $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)\times \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, muni de la norm :

$$\| (Y,Z) \|_{\mathcal{B}^2} = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T ||Z_s||^2 ds\right).$$

Remarque 2.2.1 *Les espaces $\mathcal{S}^2$, $\mathcal{S}^2_c$, $\mathcal{M}^2, \mathcal{B}^2$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment.*

2.3 Équations différentielles stochastiques rétrogrades

L'équation différentielle stochastique rétrograde est définie sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -dY_t &= g(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dW_t, \qquad 0 \leq t \leq T \\ Y_T &= \xi. \end{cases}$$

Où sous la forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dW_s \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

telle que :

- g s'appelle le générateur de l'EDSR.

- ξ est la condition terminale.

2.3.1 Solution de EDSR

Définition 2.3.1 *Pour dite que le couple des processus* $\{(Y_t; Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de* ***l'EDSR****. Il faut vérifiant les trois conditions suivantes :*

- Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeur respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$.
- $\int_0^T \{|g(s;Y_s;Z_s)| + ||Z_s||^2\}ds < \infty$; $\mathbb{P}-p.s.$
- *Pour* $0 \leq t \leq T$ *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T g\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s; \quad (0 \leq t \leq T) \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Remarque 2.3.1 $\lhd$ *Toutes les intégrales de l'équation (2.1) étant bien définies.*

$\lhd$ Y *est une semi-martingale continue.*

$\lhd$ Y *est une quantité déterministe car* Y *est progressivement mesurable (*Y *est adapté).*

Proposition 2.3.1 *Supposons qu'il un processus* $\{g_t\}_{0\leq t\leq T}$ *positif, avec* $g_t \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \geq 0$ *tels que :*

$$\forall\left(t, y, z\right) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \qquad \left|g\left(t, y, z\right)\right| \leq g_t + \lambda\left(|y| + ||Z||\right).$$

Si $\{(Y_t; Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de* ***l'EDSR*** *telle que* $Z \in \mathcal{M}^2$ *alors* Y *appartient* $\mathcal{S}_c^2$.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du **lemme de Gronwall** et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a pour tout $t \in [0;T]$;

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Et par suite, utilisant l'hypothèse sur g,

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T (g_s, \lambda||Z_s||)\, ds + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_s dW_s| + \lambda \int_0^t |Y_s| ds.$$

Posons

$$C = |Y_0| + \int_0^T (g_s, \lambda||Z_s||)\, ds + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_s dW_s|.$$

Par hypothèse, Z appartient à $\mathcal{M}^2$ et donc, via **l'inégalité de Doob**, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{g_t\}_{0\leq t\leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable. Comme Y est un processus continu, **le lemme de Gronwall** fournit l'inégalité :

$$\sup_{0\leq t\leq T} |Y_0| \leq Ce^{\lambda T}.$$

qui montre que Y appartient à $\mathcal{S}^2$. ■

Remarque 2.3.2 *Le résultat est encore valable lorsque $||g||_1$ est une variable aléatoire de carré intégrable.*

Finissons par un résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprises.

Lemme 2.3.1 *Soient $Y \in \mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z \in \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s Z_s dW_s ; t \in [0;T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

2.3.2 Existence et unicité des solutions

Soit ξ est la condition terminale et est une v.a $\mathcal{F}_T-$mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et on rappelle que :

$$\begin{array}{lcl} g : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} & \rightarrow & \mathbb{R}^k. \\ (Y,Z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} & \mapsto & \{g\left(t,Y,Z\right)\}_{0\leq t\leq T} \text{ soit progressivement mesurable.} \end{array}$$

Sous certaines hypothèses spécifiques sur le coefficient g, **L'EDSR**(2.1) possède une unique solution.

Les hypothèses standards sont les suivantes :

$$(H)\begin{cases} (i)\ \mathbb{E}\left[|\xi|^2+\int_0^T|g(s,0,0)|^2ds\right]<\infty \ \text{ i.e : } (g(t,0,0))_{t\leq T}\in\mathcal{M}^2. \\ (ii)\ \text{ Pour tout } (t),(Y),(Y'),(Z),(Z') \text{ et } \exists\ \lambda \text{ constante :} \\ |g(t,Y,Z)-g(t,Y',Z')|\leq\lambda\left(|Y-Y'|+||Z-Z'||\right). \end{cases}$$

Remarque 2.3.3 $\triangleleft$ *La condition* (i) *est la condition d'intégrabilité.*

$\triangleleft$ *La condition* (ii) *est la condition de lipschitz en le point* (Y,Z) *.*

Un cas simple : Nous commençons par un cas très simple, celui où g ne dépend ni de Y ni de Z. On se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{G_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution de **l'EDSR** :

$$Y_t=\xi+\int_t^T G_s ds-\int_t^T Z_s dW_s. \qquad 0\leq t\leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.3.2 *Soient* $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{G_t\}_{0\leq t\leq T}\in\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$*. L'EDSR (2.2) possède une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z\in\mathcal{M}^2$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y,Z) soit une solution vérifiant $Z\in\mathcal{M}^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t=\mathbb{E}\left(\xi+\int_t^T G_s ds|\mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'après **le théorème de Fubini**, comme G est progressivement mesurable, $\left(\int_0^t G_s ds\right)$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, en fait dans $\mathcal{S}_c^2$

puisque G est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T G_s ds | \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t G_s ds := M_t - \int_0^t G_s ds.$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus Z appartenant à $\mathcal{M}^2$ tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t G_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t G_s ds.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de **l'EDSR** étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t G_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T G_s ds\right) \\ &= \int_t^T G_s ds - \int_t^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in \mathcal{M}^2$. ■

Cas ou g dépond de y et de z

Nous montrons à présent le théorème d'existence de **Pardoux et Peng**.

Théorème 2.3.1 (Pardoux-Peng) *Sous l'hypothèse (H), **l'EDSR** (2.1) possède une unique solution (Y, Z) tels que $Z \in \mathcal{M}^2$.*

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de **l'EDSR** (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Pour (U, V) élément de $\mathcal{B}^2$, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de **l'EDSR** :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, U_s, V_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s; \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière **EDSR** possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$.

Etape 1 : Montrons que Ψ dans lui même est bien définie :

Posons $G_s = g(s, U_s, V_s)$, ce processus appartient à $\mathcal{M}^2$ puisque, g étant Lipschitz,

$$|g(s, U_s, V_s) - g(s, U'_s, V'_s)| \leq \lambda \left(|U_s - U'_s| + \|V_s - V'_s\|\right),$$

pour $U'_s = V'_s = 0$, on obtient

$$|G_s| \leq |g(s, 0, 0)| + \lambda |U_s| + \lambda ||V_s||,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (2.3.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$. (Y, Z) appartient à $\mathcal{B}^2$: l'intégralité de Z est obtenue par construction et λ, d'après la Proposition (2.3.1), Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$. L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ $dans$ lui-même est donc bien définie.

Etape 2 : Soient (U, V) et (U', V') deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et

$$(Y, Z) = \Psi(U, V), (Y', Z') = \Psi(U', V').$$

Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$. On a, $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\left\{g(t, U_t, V_t) - g(t, U'_t, V'_t)\right\} dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d\left(e^{\alpha t}|y_t|^2\right) &= \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t . \left\{g(t, U_t, V_t) - g\left(t, U'_t, V'_t\right)\right\} dt \\ &\quad + 2e^{\alpha t} y_t z_t dW_t + e^{\alpha t}||z_t||^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}||z_s||^2 ds &= \int_t^T e^{\alpha s} \left(-\alpha|y_s|^2 + 2y_s.\left\{g\left(s, U_s, V_s\right) - g\left(s, U_s', Vs'\right)\right\} ds\right) \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dW_s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}||z_s||^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s} \left(-\alpha|y_s|^2 + 2\lambda|y_s|.|u_s| + 2\lambda|y_s|.||v_s||\right) ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dW_s. \end{aligned}$$

Pour tout $\gamma > 0$, on a $2ab \leq \frac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne et comme g est Lipschitz, il vient, notant u et v pour $U - U'$ et $V - V$' respectivement,

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}||z||^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s} \left(-\alpha + 2\frac{\lambda^2}{\gamma}\right) |y_s|^2 ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dW_s + \zeta \int_t^T e^{\alpha s} \left(|u_s|^2 + ||v_s||^2\right) ds; \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\gamma}$, on a, notant $R_\gamma = \gamma \left(\int_t^T e^{\alpha s}|u_s|^2 + ||v_s||^2\right) ds$

$$\forall t \in [0, T], e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}||z_s||^2 ds \leq R_\gamma - 2\int_t^T e^{\alpha s} y_s.z_s dW_s. \tag{2.3}$$

D'après le Lemme (2.3.1), la martingale locale $\left\{\int_0^t e^{\alpha s} y_s.z_s dW_s\right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à $\mathcal{S}^2$ et Z, Z' appartiennent à $\mathcal{M}^2$.

En particulier, prenant l'espérance ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}||z_s||^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\gamma\right]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), **les inégalités BDG** fournissent avec C universelle,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] &\le \mathbb{E}\left[R_\gamma\right]+C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha s}|y_s|^2.||z_s||^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],\\ &\le \mathbb{E}\left[R_\gamma\right]+C\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\frac{\alpha t}{2}}|y_t|\left(\int_0^T e^{\alpha s}||z_s||^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],\end{aligned}$$

puis, comme $ab\le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right]\le \mathbb{E}\left[R_\gamma\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}||z_s||^2ds\right].$$

Prenant en considération l'inégalité (2.4), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_0^T e^{\alpha s}||z_s||^2ds\right]\le \left(3+C^2\right)\mathbb{E}\left[R_\gamma\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_γ,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_0^T e^{\alpha s}||z_s||^2ds\right]\\ &\le \gamma\left(3+C^2\right)(1\vee T)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|u_t|^2+\int_0^T e^{\alpha s}||v_s||^2ds\right].\end{aligned}$$

Prenons γ tel que $\gamma(3+C^2)(1\vee T)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme :

$$||\left(U,V\right)||_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|U_t|^2+\int_0^T e^{\alpha s}||V_s||^2ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de **l'EDSR** (2.1) dans $\mathcal{B}^2$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z\in\mathcal{M}^2$ puisque la Proposition

(2.3.1) implique qu'une telle solution appartient à $\mathcal{B}^2$. ■

2.4 EDRS linéaire

Dans cette cas Z est une matrice de taille $(1 \times d)$, c'est à dire Z un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 2.4.1 *Soit $(\beta; \mu)$ une valeur bornée $(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ (processus progressivement mesurable), $\{\varphi\}_{t\in[0,T]}$ être un élément de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et $\xi \in L^2(\mathbb{R})$. Nous considérons **l'EDSR** linéaire suivant :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T (\varphi_s + Y_s\beta_s + Z_s u_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) possède une unique solution, qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T], \quad Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left[\xi\Gamma_T + \int_t^T \Gamma_s\varphi_s ds|\mathcal{F}_t\right], \tag{2.6}$$

Pour tout $t \in [0,T]$

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t u_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |u_s|^2\, ds + \int_0^t \beta_s ds\right\}.$$

Preuve. voir [2]. ■

2.5 Théorème de comparaison

Théorème 2.5.1 *Supposons que $k = 1$ et que (ξ, g), (ξ', g') vérifient l'hypothèse (H). On note (Y,Z) et (Y',Z') les solutions des **EDSR** correspondantes. On suppose également que $\mathbb{P}-p.s.$ $\xi \leq \xi'$ et que $g(t, X_t, Z_t) \leq g'(t, X_t, Z_t)$ $n \otimes \mathbb{P}-p.p.$ (n mesure* *de Lebesgue). Alors,*

$$\mathbb{P}-p.s \qquad \forall t \in [0,T], \qquad Y_t \leq Y'_t.$$

Si de plus, $Y_0 = Y'_0$, *alors* $\mathbb{P}$*–p.s.,* $Y_t = Y'_t$, $0 \leq t \leq T$ *et* $g(t, Y_t, Z_t) \leq g'(t, Y_t, Z_t)$ $n \otimes \mathbb{P}$*–p.p. En particulier, dès que* $\mathbb{P}(\xi < \xi') > 0$ *ou* $g(t, Y_t, Z_t) < g'(t, Y_t, Z_t)$ *sur un ensemble de* $n \otimes \mathbb{P}$*–mesure strictement positive alors* $Y_0 < Y'_0$.

Preuve. voir [2]. ■

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques rétrogrades :cas non-lipschitz

L'objectif de ce chapitre, est de présenter le résultat d'existence et d'unicité de la solution dans le cas non-lipschitz.

ce résultat est introduit par **Ying Wang** et **Zhen Huang** [21].

Voici les conditions sous lesquelles nous allons travailler :

• pour tout : $(Y, Z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$

$$g(., Y, Z) \in \mathcal{M}^2 \left(0,\ T;\ \mathbb{R}^k\right). \tag{3.1}$$

• Pour tout $t \in [0, T]$ et $(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, g satisfont :

$$|g(t, Y_1, Z_1) - g(t, Y_2, Z_2)|^2 \leq \rho\left(t, |Y_1 - Y_2|^2\right) + c|Z_1 - Z_2|^2. \tag{3.2}$$

Où $c > 1$ et $\rho(t, u)$ satisfait :

– pour t fixé dans $[0,T]$, $\rho(t,.)$ est une fonction continue, concave et non décroissant telle que $\rho(t,0)=0$.

– L'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} u' & = & -\rho(t,u). \\ u(T) & = & 0. \end{cases}$$

admet une unique solution $u(t)=0$, $t\in[0,T]$.

– Il existe $a(t)\geq 0, b(t)\geq 0$ tel que $\rho(t,u)\leq a(t)+b(t)u$, et $\int_0^T a(t)\,dt<+\infty$, $\int_0^T b(t)\,dt<+\infty$.

Exemple 3.1 : Si g satisfait l'hypothèse (H) de chapitre 2, alors il satisfait l' hypothèse (3.2). On peut choisir $\rho(t,u)=2c^2u$.

Exemple 3.2 : Si $g(t,Y,Z)=\frac{y}{\sqrt{t}}+cZ$, alors il est facile de vérifier que g satisfait (3.2), avec $\rho(t,u)=\frac{2u}{\sqrt{t}}$.

3.1 Existence et l'unicité de la solution :

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *Soit $\xi\in L^2(\Omega;\mathcal{F}_T;\mathbb{P})$ et supposons que les hypothèses (3.1) et (3.2) sont satisfaites, alors l'EDSR (2.1) admet une unique solution* $(Y_t,Z_t)_{t\in[0,T]}$,

Nous pouvons construire la suite des approximations successives de Picard de l'équation (2.1) comme suit :

$$\begin{cases} Y_t^0 & = & 0; \\ Y_t^n & = & \xi+\int_t^T g\left(s,Y_s^{n-1},Z_s^n\right)ds-\int_t^T Z_s^n dW_s,\ 0\leq t\leq T. \end{cases} \tag{3.3}$$

Le théorème (2.3.1) implique que, pour chaque n, l'équation (3.3) possède une unique solution $(Y_t^n, Z_t^n)_{t\in[0,T]}$.

Pour prouver le théorème (3.1.1) , nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 3.1.1 *Sous les hypothèses du théorème* (3.1.1) *pour tout* $0 \leq t \leq T$, n, $m \geq 1$, *on a :*

$$\mathbb{E}|Y_t^{n+m} - Y_t^n|^2 \leq \frac{1}{c}e^{c(T-t)} \int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^{n+m-1} - Y_s^{n-1}|^2\right) ds.$$

Preuve. En appliquant **la formule d'Itô** à $|Y_t^{n+m} - Y_t^n|^2$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|Y_t^{n+m} - Y_t^n\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |Z_s^{n+m} - Z_s^n|\, ds \\
&= 2\mathbb{E}\int_t^T Y_s^{n+m} - Y_s^n, g\left(s, Y_s^{n+m-1}, Z_s^{n+m}\right) \\
&-g\left(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n\right))ds. \\
&\leq \tfrac{1}{\theta}\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^{n+m} - Y_s^n|^2 ds + \theta\mathbb{E}\int_t^T |g\left(s, Y_s^{n+m-1}, Z_s^{n+m}\right) \\
&-g\left(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n\right)|^2 ds. \\
&\leq \tfrac{1}{\theta}\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^{n+m} - Y_s^n|^2 ds + \theta\int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^{n+m-1} - Y_s^{n-1}|^2\right) ds \\
&+\theta c\mathbb{E}\int_t^T |Z_s^{n+m} - Z_s^n|^2 ds.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est dû à (3.2) et l'inégalité de Jensen. Soit $\theta = \frac{1}{c} > 0$, d'après **le lemme de Gronwall**, nous avons :

$$\mathbb{E}|Y_t^{n+m} - Y_t^n|^2 \leq \frac{1}{c}e^{c(T-t)} \int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^{n+m-1} - Y_s^{n-1}|^2\right) ds.$$

■

Lemme 3.1.2 *Soit* $\xi \in L^2(\Omega; \mathcal{F}_T; \mathbb{P})$ *et supposons que les hypothèses* (3.1) *et* (3.2) *sont satisfaites, alors, il existe* $T_1 \in [0, T)$ *et une constante* $M \geq 0$ *telle que pour tout* $t \in [T_1, T]$, $n \geq 1$: $\mathbb{E}|Y_t^n|^2 \leq M$ *et* T_1 *ne dépend pas de la condition terminale* ξ.

Preuve. Pour tout $n \geq 1, t \in [0,T]$, on applique la formule d'Itô à $|Y_t^n|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y_t^n|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |Z_s^n|^2 ds &\leq \mathbb{E}|\xi|^2 + \tfrac{1}{\theta}\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^n|^2 ds + \theta\mathbb{E}\int_t^T |g(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n)|^2 ds. \\ &\leq \mathbb{E}|\xi|^2 + \tfrac{1}{\theta}\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^n|^2 ds + 2\theta\mathbb{E}\int_t^T |g(s,0,0)|^2 ds \\ &+ 2\theta c\mathbb{E}\int_t^T |Z_s^n|^2 ds + 2\theta\int_t^T \rho(s, \mathbb{E}|Y_s^{n-1}|^2)\, ds.\end{aligned}$$

Nous choisissons $\theta = \frac{1}{2c} > 0$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|y_t^n|^2 &\leq \mathbb{E}|\xi|^2 + 2c\mathbb{E}\int_t^T |y_s^n|^2 ds \\ &+ \tfrac{1}{c}\mathbb{E}\int_t^T |g(s,0,0)|^2 ds + \tfrac{1}{c}\int_t^T \rho(s, \mathbb{E}|y_s^{n-1}|^2)\, ds.\end{aligned}$$

En utilisant **le lemme de Gronwall**, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|y_t^n|^2 &\leq e^{2c(T-t)}\left[\mathbb{E}|\xi|^2 + \tfrac{1}{c}\mathbb{E}\int_t^T |g(s,0,0)|^2 ds\right] \\ &+ \tfrac{1}{c}e^{2c(T-t)}\int_t^T \rho(s, \mathbb{E}|y_s^{n-1}|^2)\, ds.\end{aligned}$$

Soit $\bar{T}_1 = \max\left\{T - \frac{1}{2c}\ln c, 0\right\}$, alors nous avons :

$$\mathbb{E}|Y_t^n|^2 \leq u_t + \int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^{n-1}|^2\right) ds, \qquad t \in [T_1, T]. \tag{3.4}$$

Où $u_t = c\mathbb{E}|\xi|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |g(s,0,0)|^2 ds$.

Soit :

$$\begin{aligned}M &= 2u_0 + 2\int_0^T a(s)\, ds \\ &= 2c\mathbb{E}|\xi|^2 + 2\mathbb{E}\int_0^T |g(s,0,0)|^2 ds + 2\int_0^T a(s)\, ds \geq 0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nous choisissons $\hat{T}_1$ tel que :

$$u_0 + \int_t^T \rho(s, M) \leq M, \qquad t \in [T_1, T]. \tag{3.6}$$

Soit $T_1 = \max\left\{\bar{T}_1, \hat{T}_1\right\}$, puisque pour tout $t \in [T_1, T]$, $\rho(t,0)$ est non décroissante et $\rho(t,0) = 0$, d'après les inégalités (3.4) et (3.6) , on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y_t^1|^2 \le u_t \le M,\\
&\mathbb{E}|Y_t^2|^2 \le u_t + \int_t^T \varphi\left(s, \mathbb{E}|Y_s^1|^2\right) ds \le u_0 + \int_t^T \varphi(s, M)\, ds \le M,\\
&\mathbb{E}|Y_t^3|^2 \le u_t + \int_t^T \varphi\left(s, \mathbb{E}|Y_s^2|^2\right) ds \le u_0 + \int_t^T \varphi(s, M)\, ds \le M.
\end{aligned}$$

On peut prouver par l'induction que pour tout $n \ge 1$, $t \in [T_1, T]$,

$$\mathbb{E}|Y_t^n|^2 \le M.$$

Maintenant, nous montrons que $\hat{T}_1$ réellement existe et ne dépend pas de la valeur finale ξ. Notez que, selon l'hypothèse (3.2) , l'inégalité (3.6) est vérifiée si :

$$u_0 + \int_0^T a(s)\, ds + M \int_t^T b(s)\, ds \le M, \qquad t \in \left[\hat{T}_1, T\right].$$

Mais, selon (3.5), cela est vrai si :

$$\int_t^T b(s)\, ds \le \frac{1}{2}, \qquad t \in \left[\hat{T}_1, T\right],$$

comme $\int_0^T b(t)\, dt < \infty$, on peut trouver $\hat{T}_1$ tel que $\int_{\hat{T}_1}^T b(t)\, dt \le \frac{1}{2}$, la preuve est terminée. ■

Revenons maintenant à la démonstration de théorème (3.1.1).

Preuve. Existence

Fixons $n \geq 1$ et on définit une suite des fonctions $\{\varphi_n(t)\}_{n\geq 1}$ comme suit :

$$\varphi_0(t) = \int_t^T \rho(s, M)\, ds;$$
$$\varphi_{n+1}(t) = \int_t^T \rho(s, \varphi_n(s))\, ds.$$

Alors pour tout $t \in [T_1, T]$, à partir de la démonstration de lemme (3.1.2), on peut déduire que :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \textstyle\int_t^T \rho(s, M)\, ds \leq M \\
\varphi_1(t) &= \textstyle\int_t^T \rho(s, \varphi_0(s))\, ds \leq \int_t^T \rho(s, M)\, ds = \varphi_0(t) \leq M \\
\varphi_2(t) &= \textstyle\int_t^T \rho(s, \varphi_1(s))\, ds \leq \int_t^T \rho(s, \varphi_0(s))\, ds = \varphi_1(t) \leq M.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on peut prouver que pour tout $n \geq 1$ $\varphi_n(t)$ satisfait :

$$0 \leq \varphi_{n+1}(t) \leq \varphi_n(t) \leq \cdots \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_0(t) \leq M.$$

Alors, $\{\varphi_n(t),\ t \in [T_1, T]\}_{n\geq 1}$ est uniformément bornée.

D'autre part, $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ t_1,\ t_2 \in [T_1, T]$, on a :

$$|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| = |\int_{t_1}^{t_2} \rho(s, \varphi_{n-1}(s))\, ds| \leq |\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s, M)\, ds|.$$

D'après les hypothèses du théorème(3.1.1), pour u fixé $\int_0^T \rho(t, u)\, dt < +\infty$. Alors $\sup_n |\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| \to 0$, lorsque $|t_1 - t_2| \to 0$, ce qui signifie que : $\{\varphi_n(t),\ t \in [T_1, T]\}_{n\geq 1}$ est une famille de fonctions équicontinues.

Selon **le théorème d'Ascoli Arzela**, nous pouvons, définir $\varphi(t)$ comme la fonction limite de $(\varphi(t))_{n\geq 1}$. En vertu de (3.2), $\varphi(t) = 0$, $t \in [T_1, T]$.

Maintenant, pour tout t dans l'intervalle $[T_1, T]$, n, $m \geq 1$.

D'après les lemmes (3.1.1) et (3.1.2), nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y_t^n|^2 \leq M, \\
&\mathbb{E}|Y_t^{1+m} - Y_t^1|^2 \quad \leq \tfrac{1}{c}e^{c(T-t)} \textstyle\int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^m|^2\right) ds \leq \int_t^T \rho\left(s, M\right) ds = \varphi_0\left(t\right) \leq M, \\
&\mathbb{E}|Y_t^{2+m} - Y_t^2|^2 \quad \leq \tfrac{1}{c}e^{c(T-t)} \textstyle\int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^{1+m} - Y_s^1|^2\right) ds \leq \int_t^T \rho\left(s, \varphi_0\left(s\right)\right) ds = \varphi_1\left(t\right) \leq M, \\
&\mathbb{E}|Y_t^{3+m} - Y_t^3|^2 \quad \leq \tfrac{1}{c}e^{c(T-t)} \textstyle\int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^{2+m} - Y_s^2|^2\right) ds \leq \int_t^T \rho\left(s, \varphi_1\left(s\right)\right) ds = \varphi_2\left(t\right) \leq M.
\end{aligned}$$

Par l'induction, nous pouvons déduire que $\mathbb{E}|Y_t^{n+m} - Y_t^n|^2 \leq \varphi_{n-1}\left(t\right)$. Par conséquent, nous avons :

$$\sup_{T_1 \leq t \leq T} \mathbb{E}|Y_t^{n+m} - Y_t^n|^2 \leq \sup_{T_1 \leq t \leq T} \varphi_{n-1}\left(t\right) = \varphi_{n-1}\left(T\right) \to 0, n \to \infty.$$

On remarque que $\{Y_t^n\}_{n\geq 1}$ est **une suite de Cauchy** dans $\mathcal{M}^2\left(T_1,\ T;\ \mathbb{R}^k\right)$ et que $\{Z_t^n\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}^2\left(T_1,\ T;\ \mathbb{R}^k\right)$. Définissons leurs limites par $(Y_t)_{t\in[T_1,T]}$ et $(Z_t)_{t\in[T_1,T]}$respectivement, et en prenant la limite lorsque $n \to \infty$ dans (3.3) , nous obtenons :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad T_1 \leq t \leq T. \tag{3.7}$$

Par la condition (3.1) et $Z_t \in \mathcal{M}^2\left(T_1,\ T;\ \mathbb{R}^{k\times d}\right)$, nous avons :

$$\mathbb{E}\int_{T_1}^T |g\left(t, Y_t, Z_t\right)|^2 dt < \infty, \qquad \mathbb{E}\left(\sup_{T_1\leq t\leq T} |\int_{T_1}^t Z_s dW_s|^2\right) < \infty.$$

Avec les deux inégalités précédentes, il est facile d'obtenir à partir de l'équation (3.7) que $\mathbb{E}\left(\sup_{T_1\leq t\leq T} |Y_t|^2\right) < \infty$ et que Y_t est continu, c'est-a-dire $Y_t \in \mathcal{S}^2\left(T_1,\ T;\ \mathbb{R}^k\right)$.
En d'autres termes, nous avons démontré l'existence de la solution de l'équation (2.1) sur $[T_1, T]$. Remarquez que d'après le lemme (3.1.2), T_1 ne dépend pas de la valeur finale ξ. Donc, on peut déduire par itération l'existence sur $[T - l\left(T - T_1\right), T]$, pour chaque l, et donc l'existence sur tout l'intervalle $[0, T]$.

Unicité : Soit $(Y_t^i, Z_t^i)_{t\in[0,T]}$, $(i = 1, 2)$ deux solutions de l'équation (2.1). En appliquant la formule d'Itô à $|Y_t^1 - Y_t^2|$ nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds \\
&= \mathbb{E}\int_t^T \left(Y_s^1 - Y_s^2, g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right) ds. \\
&\leq \tfrac{1}{\theta}\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^1 - Y_s^2|^2 ds + \theta\int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^1 - Y_s^2|^2\right) ds \\
&+\theta c\mathbb{E}\int_t^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds.
\end{aligned}$$

Si on pose $\theta = \frac{1}{2c}$ on a :

$$\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds \tag{3.8}$$

$$\leq 2c\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^1 - Y_s^2|^2 ds + \frac{1}{2c}\int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^1 - Y_s^2|^2\right) ds. \tag{3.9}$$

Grâce au l**emme de Gronwall**, on peut déduire que :

$$\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 \leq \frac{1}{2c}e^{2c(T-t)}\int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^1 - Y_s^2|^2\right) ds.$$

Pour tout $t \in [T - \delta, T]$ avec $\delta = \frac{1}{2c}\ln 2c$ on a :

$$\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 \leq \int_t^T \rho\left(s, \mathbb{E}|Y_s^1 - Y_s^2|^2\right) ds.$$

D'aprés **le théorème de comparaison des EDO** on a :

$$\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 \leq r\left(t\right),$$

où $r(t)$ est la solution de décalage maximum vers la gauche de l'équation suivante :

$$\begin{cases} u' & = & -\rho\left(t, u\right); \\ u\left(T\right) & = & 0. \end{cases}$$

Par la condition (3.2) , nous savons que $r(t) = 0,\ t \in [T - \delta, T]$.

Donc $\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 = 0,\ t \in [T - \delta, T]$. Cela signifie que pour tout $t \in [T - \delta, T]$, $Y_1 = Y_2 \quad \mathbb{P} - p.s.$

À partir de l'inégalité (3.8), en déduire que pour tout $t \in [T - \delta, T]$, $Z_t^1 = Z_t^2$ $\mathbb{P} - p.s.$ Ensuite, on peut utiliser le même argument pour prouver que l'unicité de la solution est également valable sur $[T - 2\delta, T - \delta]$, $[T - 3\delta, T - 2\delta]$, et ainsi de suite. Nous obtenons donc le résultat d'unicité et la preuve de théorème (3.1.1) est alors complète. ■

Bibliographie

[1] Bismut, J.M. (1978). An approximation method in optimal stochastic control. SIAM Journal on Control and Optimization, 16(1), pp.122-130.

[2] Briand, P. (2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades.

[3] Breton, J. C. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.

[4] Gauthier, G. (2011). Calcul stochastique I (Les droits contingents accessibles et les stratègies de rèplication). HEC Montrèal.

[5] Hamadane, S. (1996). Équations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitzien Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, no 5, p. 645-659

[6] Hafsoui, C, Ladjel, F, Reggadi, A & Sahi, O.H. (2021). Las inégalités invers de Minkowski, Hardy et Hölder. (Doctoral dissertation, université Ibn Khaldown-Tiaret).

[7] HARIZI, H., & SLIMANE, L. (2022). Le théorème d'Arzelà-Ascoli pour un espace quasi-métrique.

[8] Hafayed, M. (2023). Cours de prob approf master 1. Universite mohamed khider.

[9] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[10] Lepeltier, J.P., Martin, J.S. (1997). Backward stochastic differential equations with continuous coefficients. Statist. Probab. Lett. 34, 425–430.

[11] Le Gall, J. F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique (Vol. 71). Heidelberg, Germany : Springer.

[12] Laaiadi, F & Slama, A. (2017). Le théorème de point fixe de krasnoselskii et ses applications au equation différentielle Impulsive (Doctoral dissertation, Université Ahmed Draïa-Adrar).

[13] Labed.B. (2024). Cours de Movement brawnien et calcul stochastic master 2. Universite mohamed khider.

[14] Mao, X. (1995). Adapted solution of backward stochastic differential equations with non-lipschitz coefficients. Stochastic. Proc. Appl. 58, 281–292.

[15] Pardoux, E, Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control. Lett. 14, 55–61.

[16] Parisé, P. O. (2017). De l'inégalité de Jensen à l'inégalité arithmético-géométrique.

[17] Rahmani, A. (2023). On stochastic optimization problems : stochastic maximum principle for stpchastic differential equations(Doctoral dissertation, université Kasdi-Merbah Ouargla).

[18] Schwartz, L. (1979). Les semi-martingales et la théorie de la mesure. Séminaire d'Analyse fonctionnelle (dit" Maurey-Schwartz"), 1-9.

[19] Sghir, A. (2022, May). Introduction aux Processus Stochastiques.

[20] Wang, Y, Wang, X. (2003). Adapted solutions of backward SDE with non-Lipschitz coefficients. Chinese J Appl. Probab. Statist. 19, 245–251 (in chinese).

[21] Wang, Y & Huang, Z. (2009). Backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients. Statistics & Probability Letters, 79(12), 1438-1443.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{E}(.)$	:	Espérance mathématique.
$\mathbb{E}(X\|\mathcal{F}_t)$	:	Espérance conditionnelle de La variable aléatoire X par apport a $\mathcal{F}_t$.
EDS	:	Équations différentielles stochastiques.
$EDSR$	:	Équations différentielles stochastiques rétrogrades.
EDO	:	Équation Différentielle Ordinaire.
etc	:	Et cetera.
$v.a$	:	Variable aléatoire.
$M.B$	:	Mouvement brownien.
$\mathbb{P}-p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathbb{P}$	:	La probabilité.
L^2	:	l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable.
L^p	:	l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ qui sont mesurables et qui vérifient : $\int_X \|f\|^p\, dm$
BDG	:	Inégalités de Burkholder-Davis-Gaundy.
$\mathbb{R}^{k\times d}$	:	Ensemble des matrices réelles $k \times d$.

Résumé

Les EDSRs sont des équations différentielles stochastiques avec une donnée terminale. Dans ce mémoire, on va étudier les équations différentielles stochastiques rétrogrades sous une forme d'hypothèses non-Lipschitz, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution dans ce cas.

Mots-clés : Equations différentielles stochastiques rétrogrades, Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec des coefficients non Lipschitziens, Existence et unicité de la solution.

Abstract

The BSDEs are stochastic differential equations with a terminal condition. In this memory, we will study nonlinear backward stochastic differential equations under a kind of non-Lipschitz assumptions. We prove the existence and uniqueness of the solution in this case.

Key -words: backward stochastic differential equations, backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, existence and uniqueness of the solution.

ملخـــــص

المعادلات التفاضلية العشوائية الرجعية هي معادلات تفاضلية مع معطى نهائي. في هذا المذكرة ، سندرس المعادلات التفاضلية العشوائية الرجعية في حالة عدم وجود الشرط الليبشيتزي ، و سنثبت وجود و وحدانية الحل في هذه الحالة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية الرجعية، المعادلات التفاضلية العشوائية الرجعية مع معاملات غير ليبشيزية، الوجود والوحدانية.