République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Mansoul Reguia

Titre

Modèle Stochastique de Type Mean-field et Contrôle Optimal

Membres du Comité d'Examen

Pr.	**Naceur Rahmani**	**U.Biskra**	**Président**
Pr.	**Hafayed Mokhtar**	**U.Biskra**	**Encadreur**
Dr.	**Abba Abedelmajid**	**U.Biskra**	**Examinateur**

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce humble travail

À mes chèrs parents

qui ont travaillé dur pour moi et m'ont donné tout ce que je voulais

Qu'ALLAH les protège À mes très chers frères, mes très chères Sœurs qui m'ont encouragé sur le long de mon parcours universitaire, et à leurs enfants surtout à l'adorable ma petite nièce Aridj À mes amis durant mes années d'études qui ma beacoup encouragé. À toutes mes profeseurs que j'ai connus durant mes études.

À tous ceux et celle que me souhaitent la réussite pour toute ma vie

À tout la promotion de deusième Master mathématique de toutes spécialité

2019-2024

À tous ceux que j'ai oublié de mentionner leurs noms.

MansoulReguia ©2024

Remeciements

Avant tout, je remercie d'abord **ALLAH** qui je aide et je donné la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Je tiens à mes remerciement Mes parents.

*Je voudrais remercier mon encadreur le professur **Mr. Hafayed Mokhtar** pour sa disponibilité, son aide sa patience avec moi et surtout ses jidicieuse conseils qui sont contribué à alimenter ma réflexion. Mes remerciements s'adressent aussi à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande*

*patience dont ils ont su faire preuve malgré leur charges académiques et professionnelles. Je tiens à remercier **Mr .Rahmani Naceur**, maître de conférence à l'université de Biskra, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury et d'avoir accepté d'évaluer mon mémoire. Je remercie très vivement **Mr. Abba Abedelmajid**, maître de conférence à l'université de Biskra, d'avoir accepté d'examiner ce travail. Je tiens également à remerci spécialement mes chers amies* Zineb Said,Asma Kabot, Djihan Gouissem *Louiza Ayach*

qui toujours été la pour moi ,leur soutien inconnditionnel et leurs encourgements ont été d'une grand aide.

MansoulReguia ©2024

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous étudions le contrôle stochastique optimal des systèmes gouvernés par une équation différentielle stochastique de type mean-filed, l'objectif est d'étude le principe du maximum stochastique de type mean-field pour l'optimalité (Conditions nécessaires d'optimalité).

Nous considérons le problème de contrôle stochastique en mean-field du type suivant

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, E(X_t), u_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t, E(X_t), u_t\right) dB_t \\ X_0 = \xi, \end{cases} \tag{1}$$

où $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ est une mouvement Brownien standard définit sur une espace probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ qui satisfait aux conditions usuelles.soient b , $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, et X_0 est une variable aléatoire.

Le coût attendu à minimiser sur la classe des contrôles admissibles est également de type mean-field , qui a la forme :

$$J\left(u(\cdot)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(t, X_t, E(X_t), u_t)dt + g(X_T, E(X_T))\right] \tag{2}$$

Les systèmes de McKean-Vlasov, également appelés systèmes stochastiques de champ moyen, ont été étudiés pour la première fois par *Kac* dans le cadre de son étude de l'équation de *Boltzmann* pour la densité de particules dans les gaz monoatomiques dilués et dans le modèle stochastique de jouet pour l'équation cinétique de *Vlasov* du *plasma*. Les problèmes de contrôle stochastique pour le système de champ moyen, où les coefficients dépendent de l'état du processus de solution ainsi que de sa valeur d'espérence, ont été étudiés par de nombreux auteurs. Voir [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] . Le principe du maximum stochastique pour le contrôle optimal des équations différentielles stochastiques de champ moyen (EDS), sous information partielle, a été étudié dans le travail de *Wang* et al. Le principe du maximum pour les EDSs de type champ moyen.

Dans cette étude nous exposons qutres chapitres :

Le premier chapitre de cette thèse constitue une étude sur quelques rappels concernant les définitions, propositions, théorèmes et résultats de base en calcul stochastique, tels que les processus stochastiques, les filtrations, le mouvement brownien, le calcul stochastique et les équations différentielles stochastiques.

Dans le second chapitre, l'attention se porte sur la problématique du contrôle stochastique,et représentons la structure fondamentale d'une problème et quelques classes des contrôles stochastiques.

Au troisième chapitre,nous exposons le principe du maximum stochastique de Bensoussan.Appliqué à un système gouverné par une équation différentielle stochastique controllé,supposant que le domaine de contrôle est convexe.

Le dernier chapitre, se concentre sur l'établissement des conditions nécessaires pour l'optimalité de type champ moyen (Principe de maximum stochastique de type mean-field) dans le cas convexe. Et nous nous appuyons pour cela sur l'approche de la perturbation convexe du contrôle optimal.

Chapitre 1

Généralités sur processus stochastiques

Dans ce chapitre nous concentrés sur quelques définition de base et certains résultat que nous utilisons dans la suite du mémoire,appuyés sur les réferences suivantes [[4],[1], [3] ,[6],[7],[8]].

1.1 Définitions des concepts fondamanaux

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilitè.

1.1.1 Filtration

Définition1.1.1.1

Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille croissante $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$de sous tribus de $\mathcal{F}$c'est-à-dire $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$pour tout $0 \leq s \leq t$ dans $\mathbb{T}$.

On dit qu'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ satisfait les conditions habituelles si elle est continue à droite, i.e. :

$$\mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t, \ \forall t \in \mathbb{T}$$

et si elle est compléte c'est-à-dire .$\mathcal{F}_0$ contient les ensembles négligeables

$(\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0)$.

On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilitè filtré satisfait les conditions habituelles.

Définition 1.1.1.2

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$un processus stochastique dèfnie sur un espace de probabilitè $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un filtration naturelle à X est la filtration dèfnie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(t), 0 \leq s \leq t), \forall t \in \mathbb{T}$$

1.1.2 Processus stochastique

Définition 1.1.2.1

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t dèfnie sur un même espace de probabilitè $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexé par un ensemble $\mathbb{T}$.

$$\begin{cases} X: & \mathbb{T}\times\Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, \omega) & \rightarrow & X_t(\omega) \end{cases}$$

En général $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{T} = [0, T]$ et on considère que le processus est indexé par le temps $t \in \mathbb{T}$.Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

-pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variables aléatoires sur l'espace de probabilitè $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

-Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \rightarrow X_t(\omega)$ est une trajectoire du processus.

Définition 1.1.2.2 (Ègalités des processus)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ deux processus :

1) Deux processus X et Y ont même loi s'ils ont même loi fini-dimensionnelles,pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, ..., t_p \in \mathbb{T}$.

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_p}) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(Y_{t_1}, ..., Y_{t_p}\right)$$

2) On dit que $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$est une modification (ou une version) du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.

3) Deux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$et $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont dit indistingable si leurs trajectoires coincident $p.s$, $P(X_t = Y_t, \forall t) = 1$.

Proposition 1.1.2.1

$$indistinguable \Rightarrow modification \Rightarrow mêmeloisfini - dimensionnelles$$

Définition 1.1.2.3 (Processus continues)

On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \rightarrow X_t(\omega)$sont continues pour presque tout ω.

Définition 1.1.2.4 (Processus càdlàg et càglàd)

•Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.

•Un processus est dit càglàd(continu à gauche, pourvu de limites à droit)si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droit.

Définition 1.1.2.5 (Processus adapté)

Un processus stochastique $X = (X_t, t \in \mathbb{T})$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si $X_t$est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout$t$.

Définition 1.1.2.6 (Processus mesurable**)**

Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit mesurable si l'application suivante mesurable :

$$\begin{cases} X: & (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, \omega) & \rightarrow & X_t(\omega) \end{cases}$$

Définition 1.1.2.7 (Processus progressif**)**

Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour tout $t \geq 0$,l'application $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

$$\begin{cases} X: & ([0, t] \times \Omega, \mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (s, \omega) & \rightarrow & X_s(\omega) \end{cases}$$

Remarque

1) Un processus progressivement mesurable est adapté.

2) Un processus adapté et trajectoire continues à droite (ou à gauche) est progrissivement mesurable.

3) Un processus mesurable et adapté admet une version progrissive.

1.1.3 Temps d'arrêt

Définition 1.1.3.1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité filtré.

Une variable aléatoire τ: $\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, est un temps aléatoire, est appelé temps d'arrêt (par rapport à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$) si pour tout $t \in \mathbb{T}$:

$$\{\tau \leq \mathfrak{t}\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Etant donné un temps d'arrêt τ , on mesure l'information accumulée jusqu'en τ par :

$$\mathcal{F}\tau = \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{\tau \leq \mathfrak{t}\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \in \mathbb{T}\}$$

1.1.4 Mouvement Brownien

Mouvement Brownien 1-dimensionnel :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilitè, le processus $B = (B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un mouvement Brownien (standard) si :

a) $B_0 = 0$.

b) $\forall 0 \leq s \leq t,\ B_t - B_s \sim N(0, t-s) \sim B_{t-s}$.

c) $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 ... \leq t_n$, les accroissements $\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}\right)$ sont indépendantes.

d) Pour $\omega \in \Omega$ fixé,$t \to B_t(\omega)$ est continue.

On définit $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$ pour $t \geq 0$, $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ s'appelle la filtration naturelle générée par (B_t).On dit$(B_t)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}-$M.B.

▶**Remarque :**

La filtration brownienne $(\mathcal{F}_t^B)_{t\in\mathbb{T}}$ est continue à droite.

Proposition 1.1.4.1

Le processus B est un processus gaussien, sa loi est caractérisée par son espérance nulle $E(B_t) = 0$ et sa covariance $Cov(B_t, B_s) = \min\{s, t\} = s \wedge t$.

Mouvement Brownien n-dimensionnel :

Soit $B = (B_t^{(1)}, ..., B_t^{(n)})^*$ un processus n-dimensionnel.On dit que B est un Brownien multidimenionnel si les processus $\left(B^{(i)}, i \leq n\right)$ sont des Browniens indépendantes.C'est un processus à accroissements indépendantes.

1.1.5 Martingales continues et Variation quadratique

Définition 1.1.5.1 (Martingale)

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si :

-X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable(i.e $E(|X_t|) < +\infty$)pour tout t.

- $E(X_t \setminus \mathcal{F}_s) = X_s, \forall s \leq t.$

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$,s'il existe une suite croissente $\{\tau_k\}_{k\geq 1}$ de temps d'arrêts,avec $\tau_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$ $p.s$,telle que tout $\{X_{t\wedge\tau_k} - X_0\}$soit tout martingale.

Définition 1.1.5.2 (Surmartingale et sous- martingale)

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une surmartingale (resp. sous- martingale) par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$si :

- X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et intégrable(i.e $E(|X_t|) < +\infty$) pour tout t.

- $E(X_t \setminus \mathcal{F}_s) \leq X_s, \forall s \leq t$ (resp $E(X_t \setminus \mathcal{F}_s) \geq X_s$).

Définition 1.1.5.3 (La Variation)

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. On définit la α-variation de f par :

$$Var(f, \alpha) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\{t_k\}:\rho(\{t_k\})\leq\delta} \sum_k |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^\alpha .$$

où $\rho(\{t_k\}) = \max_{1\leq k\leq p} |t_k - t_{k-1}|$ est le pas de la subdivision de $[0, 1]$ et le sup est pris sur l'ensemble de ces subdivisions.Pour $\alpha = 1$,on parle de la variation. On dit que f est à variations bornées si $Var(f,1) < +\infty$.Pour $\alpha = 2$, on parle de la variation quadratique.

1.2 Le calcul stochastique d'itô

1.2.1 L'intégrale d'ito

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un M.B sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} =(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$.

L'intégrale stochastique (ou l'intégrale d'itö) est un processus stochastique sous forme suivante :

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s,\ t \in \mathbb{T}$$

avec $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.

Propriétés

1) Linéarité : soit a ,$b \in \mathbb{R}$ et $(\theta^i, i = 1, 2)$ deux processus ,alors :

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2)dB_s = a\int_0^t \theta_s^1 dB_s + b\int_0^t \theta_s^2 dB_s$$

2) Aditivité :pour $0 \leq s \leq u \leq t$,Alors :

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \int_0^u \theta_s dB_s + \int_u^t \theta_s dB_s. \tag{1.1}$$

3) Isométrie :

$$E\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

4) $(I_t)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}-$measurabl et tajectoires continues.

5) Propriétés de martingale $E\left[I_t(\theta)\setminus\mathcal{F}_s^B\right]=I_s(\theta)$.

6) $E\left[I_t(\theta)\right]=0$.

7) Variation quadratique : $\langle I(\theta)\rangle_t=\int_0^t|\theta_s|^2\,ds$.

Définition 1.2.1.1 (Processus d'itô)

On appelle processus d'itô $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ a valeur dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$X_t= X_0+\int_0^t b_s ds+\int_0^t\sigma_s dB_s, t\in\mathbb{T} \tag{1.2}$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$measurable et b_t et σ_t sont des processus progrissivement mesurable tels que $\int_0^t b_s ds<+\infty$ et $\int_0^t\sigma_s ds<+\infty,\mathbb{P}-p.s.$

On écrira souvent 1.2 sous forme différentielle :

$$dX_t=b_tdt+\sigma_tdB_t$$

Le coefficient b est le la dérive (ou le drift), σ est le coefficient de diffusion.

1.2.2 Formules d'itö

X est un processus d'itö :

Théoréme 1.2.2.1

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,de classe C^2alors :

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\sigma_s^2 ds.$$

Sous forme différentielle,

$$df\left(X_t\right) = f^{'}\left(X_t\right) dX_t + \frac{1}{2} f^{''}\left(X_t\right) \sigma_t^2 dt$$

Théoréme 1.2.2.2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^{1,2}$on a :

$$f\left(t, X_t\right) = f\left(0, X_0\right) + \int_0^t f_t^{'}\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t f_x^{'}\left(s, X_s\right) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}^{''}\left(s, X_s\right) \sigma_s^2 ds.$$

Ce que l'on note,

$$df\left(t, X_t\right) = f_t^{'}\left(t, X_t\right) dt + f_x^{'}\left(t, X_t\right) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}\left(X_t\right) d\left\langle X \right\rangle_t$$

avec $d\left\langle X \right\rangle_t = \sigma_t^2 dt$.

Théoréme 1.2.2.3 (Cas multidimensionnel)

Soit $(X_i, i = 1, 2)$ deux processus d'Itö ,et f fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.On a

$$\begin{aligned} df\left(X_1\left(t\right), X_2\left(t\right)\right) &= f_1^{'}\left(X_1\left(t\right), X_2\left(t\right)\right) dX_1(t) + f_2^{'}\left(X_1\left(t\right), X_2\left(t\right)\right) dX_2(t) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{11}^{''}\sigma_1^2(t) + 2 f_{12}^{''}\sigma_1\left(t\right)\sigma_2\left(t\right) + f_{22}^{''}\sigma_2^2(t)\right)\left(X_1\left(t\right), X_2\left(t\right)\right) dt. \end{aligned}$$

Où $f_i^{'}$ désigne la dérivée par rapport à $x_i, i = 1, 2$ et $f_{ij}^{''}$ la dérivée seconde par rapport à x_i ,x_j.

Théoréme 1.2.2.4 (Intégration par parties)

Si f est une fonction de classeC^1 ,alors

$$\int_0^t f(s)\,dB_s = f(t)\,B(t) - \int_0^t f'(s)\,B_s ds$$

1.3 Equations différentielles stochastiques

soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien.

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = \xi \end{cases}$$

avec $\xi \in \mathbb{R}^n$ est la condition initial et les coefficients b et σ sont des fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données.

Solution forte d'EDS :

Une solution forte de l'EDS est une processus X_t est $\mathcal{F}_t-$adapté et continu,$\forall t \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait :

$$\int_0^t |b(s, X_s)|\,ds + \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2\,ds < \infty, p.s, \forall t \geq 0.$$

et que les relations :

$$X_t = \ \xi + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s, \forall t \in [0, T] \ \ , p.s.$$

1.3.1 Théoréme d'existence et d'unicité

On suppose que :

a) Les fonctions b et σ sont continues.

b) Condition Lipschitz :il existe une constante $L > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - b(t,y)| \leq L|x - y|$$

c) Condition croissance :l existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq C(1 + |x|)$$

d) La condition initiale X_0 est indépendant de $(B_t, t \geq 0)$ et est de carré intégrable$\left(i.e.E[|X_0|^2] < \infty\right)$.

Alors l'EDS admet une solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$ vérifie $E(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t|^2) < \infty$.L'unicité se traduit par ,si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ sont deux solutions de l'EDS alors $\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \in [0, T]$, $X_t = Y_t$.

Chapitre 2

Contrôle optimal stochastique

Le problème de contrôle implique la manipulation d'un système pour atteindre un objectif spécifique. Cet objectif peut être de maximiser les bénéfices, de minimiser les risques, d'optimiser les performances. Par exemple Dans le contexte des mathématiques financières, cela pourrait impliquer la maximisation du rendement d'un portefeuille d'investissement tout en minimisant le risque.Nous reprèsentons dans ce chapitre la structure de base d'un problème de controle et qeulques classes de contrôle. Voir sur [[1],[3],[5],[6],[7],[8],[?],[14],,[?]].

2.1 Introduction au contrôle stochastique

Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions usuelles. On défnit un MB standard $B(.)$ de dimension d sur ce même espace. Considérons l'équation différentielle contrôle stochastique suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma\left(t, X_t, u_t\right)dB_t \\ X_0 = \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$$
$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n \times d}$$

Avec X_t est un **état du système** qui caractérise le système dynamique dont l'état varie en fonction du temps,avec ce dernier pouvant être discret où continue.L'horizon temporel évolue dans des conditions d'incertitude.Létat du système est représenté par un ensemble de variables quantitatives,constituant une description du système.Ces variables sont nombre fini et prennent des valeurs réelles. L'objectif est de décrire les lois d'évolution de cet état en fonction du temps.Cette évolution est modéliseé par une application probabiliste.

Ce dernier est influencée par un **contrôle stochastique** que nous modélisons comme processus $(u_t)_{t \geq 0}$ est adapté par rapport filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} - adapté$,c'est-à-dire que le contrôle est pris dans l'ensemble,

$$\mathcal{U}[0, T] := \left\{ u \colon [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U} | u(.) \, est \, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} - adapté \right\}$$

Le but du problèm de contrôle stochastique est minimiser (ou maximiser) **critère de coût** définit comme suit :

$$J(u(.)) = E\left[\int_0^T \ell(t, X_t, u_t)\, dt + g(X_T)\right] \tag{2.2}$$

La fonction ℓ est **la fonction de coût** intégral et g est le coût final.

Pour minimiser la fonctionnelle $J(u(.))$ dans l'ensemble $u \in \mathcal{U}$ c'est-à-dire que nous trouvons le contrôle optimal u^* :

$$J\left(u^*\left(.\right)\right) = \inf_{\mathrm{u}\in\ \mathcal{U}} J\left(u\left(.\right)\right)$$

2.2 Classes des contrôles stochastique

2.2.1 Contrôle optimal :

Un contrôle $u^*\left(.\right)$ optimal si et seulement s'il minimiser la fonction de coût $J\left(u\left(.\right)\right)$ permi tous les contrôles admissibles, tel que :

$$J\left(u^*\left(.\right)\right) = \inf_{\mathrm{u}\in\ \mathcal{U}} J\left(u\left(.\right)\right).$$

2.2.2 Contrôle *arrêt optimal :*

Dans les modèles présentés ci-dessus, l'horizon du problème est fixé, soit fini, soit infini. Il existe de nombreuses applications où le "contrôleur" a aussi la possibilité de décider l'horizon de son objectif. La décision de stopper le processus est modélisée par un temps d'arrtê et le problème d'optimisation associé est appelé problème d'arrêt optimal. Dans la formulation générale de tels problèmes, le contrôle est mixte, constitué du couple (u, τ) et la fonctionnelle à optimiser s'écrit :

$$J\left(u\left(.\right), \tau\right) = E\left[\int_0^\tau \ell\left(t, X_t, u_t\right) dt + g(X_\tau).\right]$$

2.2.3 Contrôle admissible :

Soit $\mathbb{U}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.Un contrôle admissible est un processus $(u_t)_{t\geq 0}$ mesurable à valeur dans $\mathbb{U}$,adapté la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$,tel que $\mathbb{P}-$p.s $u(t) \in \mathbb{U}$ pour tout $t \geq 0$.On not $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble de tout les contrôles admissibles

$$\mathcal{U}_{ad}[0,T] := \left\{ u\colon [0,T] \times \Omega \to \mathbb{U}, \mathbb{E} \int_0^T |u_t|^2 \, dt < \infty \right\}$$

2.2.4 *Contrôle Impulsif :*

Ici, on est autorisé à réinitialiser la trajectoire au temp d'arrêt τ_i de X_{τ_i} (la valeur immédiatement avant i,) à une nouvelle valeur (non-anticipative) X_{τ_i} resp,avec le coût associé $L\left(X_{\tau_{i-}}, X_{\tau_i}\right)$.Le but de contrôle est minimiser le coût fonctionel :

$$\begin{aligned} J(u(.)) = \mathbb{E} \int_0^T \exp\left[-\int_0^t C(X_s, u_s) ds \right] K(X_t, u_t) \\ + \sum_{\tau_i < T} \exp\left[-\int_0^{\tau_i} C(X_s, u_s) ds \right] g\left(X_\tau, X_{\tau_{i-}}\right) \\ + \exp\left[-\int_0^{\tau_i} C(X_s, u_s) ds \right] g(X_T). \end{aligned}$$

2.2.5 Contrôle singulier :

Soit $\mathbb{U}_1$ un sous-ensemble covexe fermé de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{U}_2 := [0, \infty)$. Soit $\mathcal{U}_1$la class des processus mesurables $\mathcal{F}_t-adapt\acute{e}$ $u(.) : [s,T] \times \Omega \to \mathbb{U}_1$, et $\mathcal{U}_2$ la class des processus mesurables $\mathcal{F}_t - adapt\acute{e}$ $\eta(.) : [s,T] \times \Omega \to \mathbb{U}_2$. Pour $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.La partie singulière $\eta(.)$ d'un contrôle est définit comme la partie du processus de contrôle qui $d\,\eta(.)$ peut être singulière par rapport à la mesure de Lebesgue dt .

2.2.6 Contrôle Quasi-optimal :

Pour ε >0 ,le processus $u^{\varepsilon}(.)$ est dit $\varepsilon-$optimal (ou quasi-optimal) si :

$$J(u^{*}) - J(u^{\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

2.2.7 Contrôle feed-Back :

On dit que $u(.)$ est un contrôle par feed-Back si $u(.)$ dépend de la variable d'état $X(.)$. Si $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle générée par le processus $X(.)$,alors $u(.)$ est un contrôle par feed-Back si $u(.)$, est $\mathcal{F}_t^X - adapté$.

Chapitre 3

Principe de maximum stochastique

Ce chapitre se concentre sur l'étude du principe du maximum stochastique de Pontryagin connue sous le nom "conditions nécessaires d'optimalité",Pontryagin a présenté cette notion en 1956. Appliqué à un système gouverné par une équation différentielle stochastique controllé. Les coefficients de cette équation sont permis de dépendre à la fois du processus d'état et d'un contrôle, en supposant que le domaine de contrôle est convexe. Cette théorie a été développée par Bensoussan en 1982.voir [[2],[8],[11]].

3.1 Présentation du problème et hypothèses

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré qui satisfait aux conditions usuelles.On défnit un MB standard $B(.)$-unidimensionnel sur ce même espace.Soient $\mathbb{U}$ un sous-ensemble convex fermé dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble des processus $\mathcal{F}_t-$adapté $u(.) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U}$.

Considérons l'équation différentielle stochastique contrôlé suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma\left(t, X_t, u_t\right) dB_t. \\ X_0 = \xi. \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le coût à minimiser sur la classe de contrôles admissibles, qui a la forme :

$$J\left(u\left(.\right)\right) = E\left[\int_0^T \ell\left(t, X_t, u_t\right) dt + g(X_T)\right]. \tag{3.2}$$

Où

$$\ell : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

On dit que $\mathcal{U}_{ad}$ désigne la classe de tous les contrôles admissibles,définis comme suit :

$$\mathcal{U}_{ad}\left[0, T\right] := \left\{u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{U},\ \mathbb{E}\int_0^T \left|u_t\right|^2 dt < \infty\right\}.$$

Pour minimiser la fonctionnelle $J\left(u\left(.\right)\right)$ dans l'ensemble $u \in \mathcal{U}_{ad}$ c'est-à-dire que nous recherchons u^* tel que :

$$J\left(u^*\left(.\right)\right) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J\left(u\left(.\right)\right). \tag{3.3}$$

Tout contrôle $u^* (.)$ admissible qui attient le minimum est un contrôle optimal.La trajectoire correspondant de cet $u^* (.)$ est noté par $X^* (.)$.

Les conditions.

Soient les fonctions b, σ, g et ℓ tel que :

C1) Les fonctions b, σ, g et ℓ sont continûment différentiables par rapport à (X, u).

C2) Les dérivées $b_x, b_{\mathrm{u}}, \sigma_x, \sigma_{\mathrm{u}}, \ell_x, \ell_{\mathrm{u}}, g_x, g_{\mathrm{u}}$ sont bornées et continues.

C3) Condition de croissance linéaire : il existe une constante K_1 et K_2 telle que :

$$|b(t, X_t, u_t| \leq K_1 (1 + |X| + |u|).$$
$$|\sigma t, X_t, u_t| \leq K_2 (1 + |X| + |u|).$$

Sous les hypothèses ci-dessus, l'EDS (3.1) admet une solution forte unique donnée par :

$$X(t) = \xi + \int_0^t b(s, X_s, u_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, u_s)\, dB_s.$$

De plus, cette solution est continue et vérfiée pour tout $p > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} |X_t|^p\right] < C_p.$$

On dit que u_t^ε le controle perturbé de u_t^*, tel que pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}$ on a

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon &= u_t^* + \varepsilon [u_t - u_t^*] \\ &= (1 - \varepsilon) u_t^* + u_t. \end{aligned}$$

où ε est plus petit , X_t^ε est trajectoire correspondant de cet contrôle admissible u_t^ε.

Nous dérivons **l'inégalité variationnelle 3.13** en plusieurs étapes, à partir du fait que :

$$J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right) - J\left(u^{*}(\cdot)\right) \geq 0. \tag{3.4}$$

3.2 Résultats préliminaires

3.2.1 Convergence des trajectoires perturbées

Lemme 3.2.1 :Soient X_t^{ε} est trajectoire correspondant de cet contrôle admissible u_t^{ε}.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X_t^{\varepsilon} - X_t^{*}\right|^2\right) = 0. \tag{3.5}$$

Où on dit aussi que X_t^{ε} converge en moyenne quadratique vers X_t^{*} :

$$\mathbb{E}(\left|X_t^{\varepsilon} - X_t^{*}\right|^2) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

Preuve :

D'aprés l'équation 3.1 on trouver :

$$X_t^{*} = X_0^{*} + \int_0^t b\left(s, X_s^{*}, u_s^{*}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{*}, u_s^{*}\right) dB_s.$$

$$X_t^{\varepsilon} = X_0^{\varepsilon} + \int_0^t b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) dB_s.$$

Donc

$$\begin{aligned} X_t^{\varepsilon} - X_t^{*} &= X_0^{\varepsilon} + \int_0^t b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) dB_s \\ &\quad - \left[\int_0^t b\left(s, X_s^{*}, u_s^{*}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{*}, u_s^{*}\right) dB_s\right], \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant le terme $[\int_0^t b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right) dB_s]$,nous obtenons.

$$\begin{aligned} X_t^{\varepsilon} - X_t^{*} &= \int_0^t [b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) - b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right)] ds \\ &\quad + \int_0^t [b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right) - b\left(s, X^{\varepsilon}\left(s\right), u^{\varepsilon}\left(s\right)\right)] ds \\ &\quad + \int_0^t [\sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) - \sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right)] dB_s \\ &\quad + \int_0^t [\sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right) - \sigma\left(s, X_s^{*}, u_s^{*}\right)] dB_s \end{aligned}$$

Sur la base des inégalités $(x+y+z+s)^2 \leq 4(x^2+y^2+z^2+s^2)$, et en prenant l'espérance des deux côtés de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|X_t^{\varepsilon} - X_t^{*}\right|^2 &\leq 4\mathbb{E}\left|\int_0^t [b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) - b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right)] ds\right|^2 \\ &\quad + 4\mathbb{E}\left|\int_0^t [b\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right) - b\left(s, X_s^{*}, u_s^{*}\right)] ds\right|^2 \\ &\quad + 4\mathbb{E}\left|\int_0^t [\sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) - \sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right)] dB_s\right|^2 \\ &\quad + 4\mathbb{E}\left|\int_0^t [\sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, u_s^{*}\right) - \sigma\left(s, X_s^{*}, u_s^{*}\right)] dB_s\right|^2, \end{aligned}$$

D'aprés l'isométrié et la condition de lipschitzienne pour les fonction b et σ ,on a :

$$\mathbb{E}\left|X_t^\varepsilon - X_t^*\right|^2 \leq 8K\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}\left|X_t^\varepsilon - X_t^*\right|^2 ds + 8K\varepsilon^2 \int_0^t \mathbb{E}\left|u^\varepsilon(s) - u^*(s)\right|^2 ds,$$

$$\mathbb{E}\left|X_t^\varepsilon - X_t^*\right|^2 \leq 8K\mathbb{E}\int_0^t \mathbb{E}\left|X_t^\varepsilon - X_t^*\right|^2 ds + K\varepsilon^2,$$

En appliquons *lemme de Gronwall*,on conclut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|X_t^\varepsilon - X_t^*\right|^2 &\leq K\varepsilon^2 \int_0^t \exp(8Ks)\, ds, \\ &\leq K\varepsilon^2 \frac{1}{8K}(8KT-1) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.\end{aligned}$$

ce qui complete la preuve de 3.5.

3.2.2 L'équation Linéairisée

Soit Z_t la solution du EDSR linéaire suivant :

$$\begin{cases} dZ_t = \left\{b_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t + b_u(t, X_t^*, u_t^*)(u_t - u_t^*)\right\} dt \\ \qquad + \left\{\sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t + \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*)(u_t - u_t^*)\right\} dB_t. \\ Z_0 = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

Lemme 3.2.2 :

Soient X_t^ε et X_t^* les trajéctoires associées réspectivement aux contrôles $u^\varepsilon(t)$ et $u^*(t)$ on pose :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X_t^\varepsilon - X_t^*}{\varepsilon} - Z_t\right|^2\right) = 0. \tag{3.7}$$

Preuve :

On pose $\mathcal{O}_t^\varepsilon = \frac{X_t^\varepsilon - X_t^*}{\varepsilon} - Z_t$, $t \in [0,T]$ ce implique $X_t^\varepsilon = X_t^* + \varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right)$.

$$\begin{aligned} d\mathcal{O}_t^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\left[b\left(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right) - b\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\right]dt - \left[b_x\left(t, X_t^*, u_t^*\right) Z_t + b_u\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\upsilon_t\right]dt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma\left(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right) - \sigma\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\right]dB_t - \left[\sigma_x\left(t, X_t^*, u_t^*\right) Z_t + \sigma_u\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\upsilon_t\right]dB_t, \end{aligned} \tag{3.8}$$

On notons $\upsilon_t = (u_t - u_t^*)$.

En utilisant le développement de Taylor d'ordre 1 avec un reste intégral, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}b\left(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right) - b\left(t, X_t^*, u_t^*\right) &= \int_0^1 [b_x\left(t, X_t^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right), u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_t\right)\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right) \\ &+ b_u\left(t, X_t^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right), u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_s\right)\upsilon_t]d\mu. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\sigma\left(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right) - \sigma\left(t, X_t^*, u_t^*\right) &= \int_0^1 [\sigma_x\left(t, X_t^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right), u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_t\right)\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right) \\ &+ \sigma_u\left(t, X_t^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right), u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_t\right)\upsilon_t]d\mu. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En substituant les équations 3.9 et 3.10 dans l'équation 3.8 , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_t^{\varepsilon} = & \int_0^t \left(\int_0^1 b_x \left(s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s \right) \mathcal{O}_s^{\varepsilon} d\mu \right) ds \\
& + \int_0^t \left(\int_0^1 \sigma_x \left(s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s \right) \mathcal{O}_s^{\varepsilon} d\mu \right) dB_s \\
& + \int_0^t \left(\int_0^1 [b_x (s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s) - b_x \left(s, X_s^*, u_s^* \right)] Z_s d\mu \right) ds \\
& + \int_0^t \left(\int_0^1 [b_u (s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s) - b_u \left(s, X_s^*, u_s^* \right)] \upsilon_s d\mu \right) ds \\
& + \int_0^t \left(\int_0^1 [\sigma_x (s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s) - \sigma_x \left(s, X_s^*, u_s^* \right)] Z_s d\mu \right) dB_s \\
& + \int_0^t \left(\int_0^1 [\sigma_u (s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s) - \sigma_u \left(s, X_s^*, u_s^* \right)] \upsilon_s d\mu \right) dB_s
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\eta_{\varepsilon} = & \int_0^t \left(\int_0^1 [b_x (s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s) - b_x \left(s, X_s^*, u_s^* \right)] Z_s d\mu \right) ds \\
& + \int_0^t \left(\int_0^1 [b_u (s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s) - b_u \left(s, X_s^*, u_s^* \right)] \upsilon_s d\mu \right) ds \\
& + \int_0^t \left(\int_0^1 [\sigma_x (s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s) - \sigma_x \left(s, X_s^*, u_s^* \right)] Z_s d\mu \right) dB_s \\
& + \int_0^t \left(\int_0^1 [\sigma_u (s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\mathcal{O}_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s) - \sigma_u \left(s, X_s^*, u_s^* \right)] \upsilon_s d\mu \right) dB_s
\end{aligned}$$

Maintenant, puisque les dérivées de b et σ par rapport à (X, u) sont Lipschitz continues par rapport à (X, u) , nous obtenons :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,T]} |\eta_s^{\varepsilon}|^2 \right] = 0$$

Comme les dérivées de b et σ par rapport à (X, u) sont bornées $\forall t \in [0.T]$,on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\mathcal{O}_s^{\varepsilon}|^2\right]\leq k(t)\left\{\mathbb{E}\int_0^t|\mathcal{O}_s^{\varepsilon}|^2 ds+\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\eta_s^{\varepsilon}|^2\right]\right\}$$

En appliquant maintenant le *lemme de Gronwall,* nous obtenons que $\forall t\in[0.T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\mathcal{O}_s^{\varepsilon}|^2\right]\leq k(t)\,\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}|\eta_s^{\varepsilon}|^2\right]\exp\left(\int_0^t k(s)\,ds\right)\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Ceci conclut la démonstration de 3.7.

Lemme 3.2.3

la fonctionnelle J est Gâteaux différentiable et la formule suivante est valable

$$\left.\frac{dJ(u^{\varepsilon}(.))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\mathbb{E}\int_0^T\left[\ell_x(t,X_t^*,u_t^*)Z(t)-\ell_u(t,X_t^*,u_t^*)v_t\right]dt+\mathbb{E}\left[g_x(X_T^*)Z(T)\right]$$

Preuve

La dérivée de Gâteaux de J définit comme suit :

$$\left.\frac{dJ(u^{\varepsilon}(.))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(u^{\varepsilon}(.))-J(u^*(.))}{\varepsilon}$$

En déduit que la valeur :

$$\frac{J(u^{\varepsilon}(.))-J(u^*(.))}{\varepsilon}=\mathbb{E}\left[\frac{g(X_T^{\varepsilon})-g(X_T^*)}{\varepsilon}\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\frac{1}{\varepsilon}\left(\ell(t,X_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon})-\ell(t,X_t^*,u_t^*)\right)dt\right].$$

En appliquant le développement de Taylor avec reste intégral au point X_t^* et à l'ordre 1 de les fonction $\ell(t,X_t^{\varepsilon},u_t^{\varepsilon})$ et $g(X_T^{\varepsilon})$ nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\ell\left(t, X_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right) - \ell\left(t, X_t^*, u_t^*\right)\right) dt\right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[\int_0^T \int_0^1 [\ell_x(t, X_t^* + \mu\left(X_t^\varepsilon - X_t^*\right), u_t^* + \mu\varepsilon\left(u_t^\varepsilon - u_t^*\right))]\left(X_t^\varepsilon - X_t^*\right) d\mu dt] \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[\int_0^T \int_0^1 [\ell_u(t, X_t^* + \mu\left(X_t^\varepsilon - X_t^*\right), u_t^* + \mu\varepsilon\left(u_t^\varepsilon - u_t^*\right))]\varepsilon\left(u_t^\varepsilon - u_t^*\right) d\mu dt] \\
&= \mathbb{E}[\int_0^T \int_0^1 [\ell_x(t, X_t^* + \mu\left(X_t^\varepsilon - X_t^*\right), u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_t)]\frac{\left(X_t^\varepsilon - X_t^*\right)}{\varepsilon} d\mu dt] \\
&+ \mathbb{E}[\int_0^T \int_0^1 [\ell_u(t, X_t^* + \mu\left(X_t^\varepsilon - X_t^*\right), u_t^* + \mu\varepsilon\left(u_t^\varepsilon - u_t^*\right))]\upsilon_t d\mu dt] \\
&= \mathbb{E}[\int_0^T \int_0^1 [\ell_x(t, X_t^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right), u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_t)]\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right) d\mu dt] \\
&+ \mathbb{E}[\int_0^T \int_0^1 [\ell_u(t, X_t^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right), u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_t)]\upsilon_t d\mu dt]
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[g\left(X_T^\varepsilon\right) - g\left(X_T^*\right)\right] &= \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x\left(X_T^* + \mu\left(X_T^\varepsilon - X_T^*\right)\right)\left(X_T^\varepsilon - X_T^*\right) d\mu\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x\left(X_T^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right)\right)\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right) d\mu\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x\left(X_T^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right)\right)\mathcal{O}_t^\varepsilon d\mu\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x\left(X_T^* + \mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_t^\varepsilon + Z_t\right)\right) Z_t d\mu\right]
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{J\left(u^{\varepsilon}\left(.\right)\right)-J\left(u^{*}\left(.\right)\right)}{\varepsilon} &= \mathbb{E}\left[\int_{0}^{1} g_{x}\left(X_{T}^{*}+\mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_{t}^{\varepsilon}+Z_{t}\right)\right)\mathcal{O}_{t}^{\varepsilon}d\mu\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_{0}^{1} g_{x}\left(X_{T}^{*}+\mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_{t}^{\varepsilon}+Z_{t}\right)\right)Z_{t}d\mu\right] \\ &+\mathbb{E}[\int_{0}^{T}\int_{0}^{1}[\ell_{x}(t,X_{t}^{*}+\mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_{t}^{\varepsilon}+Z_{t}\right),u_{t}^{*}+\mu\varepsilon\upsilon_{t})]\left(\mathcal{O}_{t}^{\varepsilon}+Z_{t}\right)d\mu dt] \\ &+\mathbb{E}[\int_{0}^{T}\int_{0}^{1}[\ell_{x}(t,X_{t}^{*}+\mu\varepsilon\left(\mathcal{O}_{t}^{\varepsilon}+Z_{t}\right),u_{t}^{*}+\mu\varepsilon\upsilon_{t})]\upsilon_{t}d\mu dt]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J\left(u^{\varepsilon}\left(.\right)\right)-J\left(u^{*}\left(.\right)\right)}{\varepsilon} &= \mathbb{E}\int_{0}^{T}\ell_{x}(t,X_{t}^{*},u_{t}^{*})Z_{t}dt+\mathbb{E}\int_{0}^{T}\ell_{u}(t,X_{t}^{*},u_{t}^{*})\upsilon_{t}dt \\ &+\mathbb{E}\left[g_{x}\left(X_{T}^{*}\right)Z_{t}\right]\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\left.\frac{dJ\left(u^{\varepsilon}\left(.\right)\right)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \mathbb{E}\int_{0}^{T}\ell_{x}(t,X_{t}^{*},u_{t}^{*})Z_{t}dt+\mathbb{E}\int_{0}^{T}\ell_{x}(t,X_{t}^{*},u_{t}^{*})\upsilon_{t}dt \\ &+\mathbb{E}\left[g_{x}\left(X_{T}^{*}\right)Z_{t}\right]\end{aligned}$$

Lemme 3.2.4

Pour tout $u\in\mathcal{U}_{ad}$ nous avons :

$$\begin{aligned}0\leq\mathbb{E}\{&\int_{0}^{T}[\ell_{x}\left(t,X_{t}^{*},u_{t}^{*}\right)Z_{t} \\ &+\ell_{u}\left(t,X_{t}^{*},u_{t}^{*}\right)\upsilon_{t}]dt+g_{x}\left(x^{*}(T)\right)Z_{t}\}\end{aligned} \tag{3.11}$$

Preuve :

La démonstration de lemme 3.11 voir ([11]).

3.3 Principe du maximum stochastique

Le but du principe de maximum stochastique est trouver les conditions nécessaires d'optimalité par un contrôle optimal.Puisque le domaine de contrôle est convexe, la preuve de notre théorème repose sur une **perturbation convexe** de contrôle optimal.

3.3.1 L'équation adjointe et le processus adjoint

Défnition 3.1.1

Nous présentons **l'équation adjointe** associée au principe du maximum stochastique pour notre problème de contrôle. Il s'avère que l'équation adjointe prend la forme d'une EDSR . Ainsi, pour tout$(u(\cdot)) \in \mathcal{U}_{ad}$ et la trajectoire d'état correspondante X_t, nous considérons l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} dp_t = -\left\{b_x\left(t, X_t, u_t\right) p_t + \sigma_x\left(t, X_t, u_t\right) q_t \right. \\ \qquad\qquad \left. + \ \ell_x\left(t, X_t, u_t\right)\right\} dt + q_t dB_t, \\ p_T = g_x\left(X_T\right). \end{cases} \tag{3.12}$$

Comme on sait que sous les hypothèses précédentes,l'équation adjoint 3.12 admit une paire solution $(p_t, q_t) - \mathcal{F}_t-$adapté et $(p_t, q_t) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T]\,;\mathbb{R}\right) \times \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T]\,;\mathbb{R}\right).$

Défnition 3.1.2

Nous définissons **l'hamiltonien** habituel associé au problème de contrôle stochastique (3.1-3.2) comme suit :

$$H : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$H(t, X_t, u_t, p_t, q_t) = p_t b(t, X_t, u_t) + q_t \sigma(t, X_t, u_t) + \ell(t, X_t, u_t).$$

Théorème (Principe du maximum stochastique de contrôle optimal)

On suppose les hypothèses précédentes sont vérifie.Alors la solution de l'équation adjoint (3.13) corespond à (u_t^*, X_t^*) est un unique couple de processus $\mathcal{F}_t-$adapté (p_t^*, q_t^*), tel que pour tout $u \in \mathbb{U}$,on a :

$$\mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)(u_t - u_t^*)dt \geq 0. \tag{3.13}$$

Pour prouver le théorème,nous avons besoin des résultats et les lemmes précédent.

La démonstration du Théorème consiste à appliquer la formule d'Itô à $p_T^* Z_T$ et à prendre l'espérance. des calculs simples permettent de montrer que :

$$p_T^* Z_T = p_0^* Z_0 + \int_0^T p_t^* dZ_t + \int_0^T Z_t dp_t^* + \int_0^T d\langle p^*, Z\rangle_t$$

De puis 3.12 et 3.6, et $\int_0^T d\langle p^*, Z\rangle_t = \int_0^T q_t^* \sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t dt + \int_0^T q_t^* \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*) \upsilon_t dt$.on a :

$$\begin{aligned}
p_T^* Z_T = & \int_0^T p_t^* [\{b_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t + b_u(t, X_t^*, u_t^*) \upsilon_t\} dt \\
& + \{\sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t + \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*) \upsilon_t\} dB_t] \\
& + \int_0^T Z_t [- \{b_x(t, X_t^*, u_t^*) p_t^* + \sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) q_t^* \\
& + \ell_x(t, X_t^*, u_t^*)\} dt + q_t^* dB_t] \\
& + \int_0^T q_t^* \sigma_x(t, X_t^*, u_t^*) Z_t dt \\
& + \int_0^T q_t^* \sigma_u(t, X_t^*, u_t^*) \upsilon_t dt,
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(p_T^* Z_T) = \mathbb{E} \int_0^T p_t^* b_u(t) \upsilon_t dt + \mathbb{E} \int_0^T q_t^* \sigma_u(t) \upsilon_t dt \\
- \mathbb{E} \int_0^T \ell_x(t) Z_t dt.
\end{aligned}$$

Nous savons que $p_T^* = h_x(X_T^*)$,on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{h_x(X_T^*) Z_T\} = \mathbb{E} \int_0^T p_t^* b_u(t) \upsilon_t dt + \mathbb{E} \int_0^T q_t^* \sigma_u(t) \upsilon_t dt \\
- \mathbb{E} \int_0^T \ell_x(t) Z_t dt.
\end{aligned}$$

D'aprés3.11 on trouve :

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T p_t^* b_u(t)\upsilon_t dt + \mathbb{E}\int_0^T q_t^* \sigma_u\left(t\right)\upsilon_t dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \ell_u\left(t\right)\upsilon_t dt. \\
&= \mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)\upsilon_t dt
\end{aligned}
$$

Ceci termine la preuve du théorème.

Chapitre 4

Principe de maximum stochastique de type mean-field :cas convex

Dans ce chapitre, nous étudions le contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de type champ moyen. Les paramètres du système dépendent de l'état du processus de résolution ainsi que de ses valeurs d'esperence et du contrôle. La fonction de coût est également de type mean-field. L'objectif dans ce chapitre est de présenter le principe du maximum appliqué à ce système. Le domaine de contrôle est supposé être convexe. Voir[[8],[11]].

4.1 Formulation de problème

Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ qui satisfait aux conditions usuelles. On défnit un MB standard $(B_t)_{t\ \geq 0}$-unidimensionnel sur ce même espace. Soient $\mathbb{U}$ un sous-ensemble convex fermé dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble des processus

$\mathcal{F}_t-$adapté $u(.):[0,T]\times\Omega\rightarrow\mathbb{U}$.

Nous considérons le problème de contrôle stochastique de type champ moyen suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, \mathbb{E}\left(X_t\right), u_t\right)dt + \sigma\left(t, X_t, \mathbb{E}\left(X_t\right), u_t\right)dB_t \\ X_0 = \xi, \end{cases} \tag{4.1}$$

Notation :$\mathbb{E}\left(X_t\right) = \mathcal{Y}_t$.

La fonction de coût à minimiser sur la classe des contrôles admissibles est égalément de type champ moyen, qui a la forme :

$$J\left(u(\cdot)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \ell(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t)dt + g(X_T, \mathcal{Y}_T)\right] \tag{4.2}$$

Le probléme de contrôle optimal est de minimiser le coût $J\left(u(\cdot)\right)$, on introduit la fonction valeur :

$$J\left(u^*(\cdot)\right) = \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad}} J\left(u(\cdot)\right),$$

Supposons les hypothèses suivantes, soient les fonctions $b:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{U}\rightarrow\mathbb{R}, \sigma:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{U}\rightarrow\mathbb{R}$, $\ell:[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{U}\rightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tel que :

C1) Les fonctions b,σ, ℓ et g sont continûment différentiables par rapport à $\left(X, \mathcal{Y}, u\right)$.

C2) Les dérivées de b,σ, ℓ et g sont continues de lipschtz et bornées par $c\left(1+|X|+|\mathcal{Y}|+|u|\right)$.

Sous les hypothèses ci-dessus, l'EDS 4.1 admet une solution forte unique donnée par :

$$X_t = \xi + \int_0^t b\left(s, X_s, \mathcal{Y}_s, u_s\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s, \mathcal{Y}_s, u_s\right)dB_s.$$

Supposons maintenant que u^* soit une contrôle optimal et X^* la trajectoire optimal associée, définie par l'EDS 4.1 . En suite, nous définissons le contrôle perturbée comme suit :

$$u^{\varepsilon}(t) = u^{*}(t) + \varepsilon\left[u(t) - u^{*}(t)\right]$$

Où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit $(0 < \varepsilon < 1)$. Nous désignons par X^{ε} la solution de 4.1 du système associé à le contrôle u^{ε}. À partir de l'optimalité de u^{*}, l'inégalité variationnelle sera dérivée du fait que :

$$J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right) - J\left(u^{*}(\cdot)\right) \geq 0 \tag{4.3}$$

4.1.1 Les estimations des solutions

Lemme 4.1.1

D'après les hypothèses énoncées précédemment concernant les coefficients, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X_t^{\varepsilon} - X_t^{*}\right|^2\right) = 0 \tag{4.4}$$

Preuve :

En utilisant les estimations standards et *l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy*, nous parvenons à déduire qu'il existe certains $C > 0$, et des coefficients de lipschitz de b et σ, tels que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} \left|X_t^{\varepsilon} - X_t^{*}\right|^2) \\
&\leq \mathbb{E}[\int_0^t \left|b\left(s, X_s^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) - b\left(s, X_s^{*}, \mathcal{Y}_s^{*}, u_s^{*}\right)\right|^2 ds \\
&+ \int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_s^{\varepsilon}, u_s^{\varepsilon}\right) - \sigma\left(s, X_s^{*}, \mathcal{Y}_s^{*}, u_s^{*}\right)\right|^2 ds],
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{\varepsilon}-X_t^{*}|^2)\\
&\leq C\mathbb{E}\int_0^t|X_s^{\varepsilon}-X_s^{*}|^2\,ds+C\varepsilon^2\mathbb{E}\int_0^t|u_s^{\varepsilon}-u_s^{*}|^2\,ds,
\end{aligned}$$

En utilisant *le lemme de Gronwall*, nous obtenons :

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{\varepsilon}-X_t^{*}|^2)\leq C\varepsilon^2\mathbb{E}\int_0^t\exp\left(Cs\right)ds\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0.$$

Lemme 4.1.2

Soit Z_t la solution d'EDS de type champ moyen linéaire suivant :

$$\begin{cases}
dZ_t=\{b_x\left(t,X_t^*,\mathcal{Y}_t^*,u_t^*\right)Z_t+b_y\left(t,X_t^*,\mathcal{Y}_t^*,u_t^*\right)\mathbb{E}(Z_t)\\
+\,b_u(t,X_t^*,\mathcal{Y}_t^*,u_t^*)v_t\}\,dt\\
+\{\sigma_x\left(t,X_t^*,\mathcal{Y}_t^*,u_t^*\right)Z_t+\sigma_y\left(t,X_t^*,\mathcal{Y}_t^*,u_t^*\right)\mathbb{E}(Z_t)\\
+\,\sigma_u\left(t,X_t^*,\mathcal{Y}_t^*,u_t^*\right)\left(u_t-u_t^*\right)\}\,dB_t\\
Z_0=0,
\end{cases}\tag{4.5}$$

Pour chaque t dans l'intervalle $[0,T]$, nous observons la convergence suivante :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X_t^{\varepsilon}-X_t^{*}}{\varepsilon}-Z_t\right|^2\right)=0.\tag{4.6}$$

Preuve :

Nous posons : $\eta_t^\varepsilon = \frac{X_t^\varepsilon - X_t^*}{\varepsilon} - Z_t$, $t \in [0,T]$ et $\upsilon_t = u_t - u_t^*$.

$$\begin{aligned}
\eta_t^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[b\left(s, X_s^\varepsilon, \mathcal{Y}_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon\right) - b\left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^*\right)\right] ds \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left[\sigma\left(s, X_s^\varepsilon, \mathcal{Y}_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon\right) - \sigma\left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^*\right)\right] dB_s \\
&- \int_0^t [b_x\left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^*\right) Z_s + b_y\left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^*\right) \mathbb{E}\left(Z_s\right) \\
&+ b_u\left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^*\right) \upsilon_s] ds - \int_0^t [\sigma_x\left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^*\right) Z_s \\
&+ \sigma_y\left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^*\right) \mathbb{E}\left(Z_s\right) + \sigma_u\left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^*\right) \upsilon_s] dB_s
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\eta_t^\varepsilon|^2\right] = C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \left[(|b_y\left(s, X_s^\varepsilon, \mathcal{Y}_s^* + \mu\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_s^\varepsilon + Z_s\right), u_s^\varepsilon\right) \mathbb{E}\left(\eta_s^\varepsilon\right)|^2\right] d\mu ds \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
&+ C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \left[|b_x\left(s, X_s^* + \mu\varepsilon\left(\eta_s^\varepsilon + Z_s\right), \mathcal{Y}_s^*, u_s^\varepsilon\right) \eta_s^\varepsilon|^2\right] d\mu ds \\
&+ C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \left[|\sigma_y\left(s, X_s^\varepsilon, \mathcal{Y}_s^* + \mu\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_s^\varepsilon + Z_s\right), u_s^\varepsilon\right) \mathbb{E}\left(\eta_s^\varepsilon\right)|^2\right] d\mu ds \\
&+ C\mathbb{E}\int_0^t \int_0^1 \left[|\sigma_x\left(s, X_s^* + \mu\varepsilon\left(\eta_s^\varepsilon + Z_s\right), \mathcal{Y}_s^*, u_s^\varepsilon\right) \eta_s^\varepsilon|^2\right] d\mu ds \\
&+ C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\alpha_t^\varepsilon|^2\right].
\end{aligned}$$

Où

$$
\begin{aligned}
\alpha_t^{\varepsilon} &= \int_0^t \int_0^1 \left[\left(b_y \left(s, X_s^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_s^* + \mu\varepsilon \mathbb{E} \left(\eta_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^{\varepsilon} \right) - b_y \left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^* \right) \right) \mathbb{E} \left(Z_s \right) \right] d\mu ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left[\left(b_x \left(s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\eta_s^{\varepsilon} + Z_s \right), \mathcal{Y}_s^*, u_s^{\varepsilon} \right) - b_x \left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^* \right) \right) Z_s \right] d\mu ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left[\left(b_u \left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s \right) - b_u \left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^* \right) \right) \upsilon_s \right] d\mu ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left[\left(\sigma_y \left(s, X_s^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_s^* + \mu\varepsilon \mathbb{E} \left(\eta_s^{\varepsilon} + Z_s \right), u_s^{\varepsilon} \right) - \sigma_y \left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^* \right) \right) \mathbb{E} \left(Z_s \right) \right] d\mu dB_s \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left[\left(\sigma_x \left(s, X_s^* + \mu\varepsilon \left(\eta_s^{\varepsilon} + Z_s \right), \mathcal{Y}_s^*, u_s^{\varepsilon} \right) - \sigma_x \left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^* \right) \right) Z_s \right] d\mu dB_s \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \left[\left(\sigma_u \left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^* + \mu\varepsilon \upsilon_s \right) - \sigma_u \left(s, X_s^*, \mathcal{Y}_s^*, u_s^* \right) \right) \upsilon_s \right] d\mu dB_s
\end{aligned}
$$

Par la suite, en utilisant 4.4, l'équation $\eta_t^{\varepsilon} = \frac{X_t^{\varepsilon} - X_t^*}{\varepsilon} - Z_t$ et d'aprés hypothèse **C2** , nous obtenons :$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \left[\sup\limits_{t \in [0,T]} \left| \alpha_t^{\varepsilon} \right|^2 \right] = 0.$

En outre, étant donné que les dérivées de b et σ sont bornées, l'équation 4.7 conduit à :

$$
\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,T]} \left| \eta_t^{\varepsilon} \right|^2 \right] \leq C \mathbb{E} \int_0^t \left| \eta_s^{\varepsilon} \right|^2 ds + C \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,T]} \left| \alpha_t^{\varepsilon} \right|^2 \right].
$$

Nous appliquons *le lemme de Gronwall,* on obtenons 4.6.

Lemme 4.1.3

Pour toute contrôle u^* optimal et sa trajectoire correspondante X^* optimal, pour chaque $u \in \mathcal{U}_{ad}$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E} \left\{ \left[g_x \left(X_T^*, \mathcal{Y}_T^* \right) + \mathbb{E} \left(g_y \left(X_T^*, \mathcal{Y}_T^* \right) \right) \right] Z_T \right. \\
&+ \int_0^T \left[\ell_x \left(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^* \right) Z_t + \mathbb{E} \left(\ell_y \left(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^* \right) \right) Z_t \right. \\
&\left. \left. + \ell_u \left(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^* \right) \upsilon_t \right] dt \right\}.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Preuve :

À partir de 4.2 et 4.3, nous déduisons :

$$\begin{aligned} 0 &\leq J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right) - J\left(u^{*}(\cdot)\right) \\ &= \mathbb{E}\left[g(x_T^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_T^{\varepsilon}) - g(X_T^{*}, \mathcal{Y}_T^{*})\right] \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_t^{\varepsilon}, u_t^{\varepsilon}) - \ell(t, X_t^{*}, \mathcal{Y}_t^{*}, u_t^{\varepsilon})\right] dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^{*}, \mathcal{Y}_t^{*}, u_t^{\varepsilon}) - \ell(t, X_t^{*}, \mathcal{Y}_t^{*}, u_t^{*})\right] dt \\ &= \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1 &= \mathbb{E}\left[g(X_T^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_T^{\varepsilon}) - g(X_T^{*}, \mathcal{Y}_T^{\varepsilon})\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[g(X_T^{*}, \mathcal{Y}_T^{\varepsilon}) - g(X_T^{*}, \mathcal{Y}_T^{*})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y(X_T^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_T^{*} + \mu\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_T + Z_T\right))\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_T + Z_T\right) d\mu\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^{*} + \mu\varepsilon\left(\eta_T + Z_T\right), \mathcal{Y}_T^{*})\varepsilon\left(\eta_T + Z_T\right) d\mu\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2 &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_t^{\varepsilon}, u_t^{\varepsilon}) - \ell(t, X_t^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_t^{*}, u_t^{\varepsilon})\right] dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_t^{*}, u_t^{\varepsilon}) - \ell(t, X_t^{*}, \mathcal{Y}_t^{*}, u_t^{\varepsilon})\right] dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_y(t, X_t^{\varepsilon}, \mathcal{Y}_t^{*} + \mu\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_t + Z_t\right), u_t^{\varepsilon})\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_t + Z_t\right) d\mu\right] dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_x(t, X_t^{*} + \mu\varepsilon\left(\eta_t + Z_t\right), \mathcal{Y}_t^{*}, u_t^{\varepsilon})\varepsilon\left(\eta_t + Z_t\right) d\mu\right] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_3 &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\ell(t, X_t^* \mathcal{Y}_t^*, u_t^\varepsilon) - \ell(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^*))\right] dt \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_u(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_t)\varepsilon\upsilon_t d\mu\right] dt.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'équation 4.8, nous obtenons :

$$\begin{aligned}0 \leq\ & \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y(X_T^\varepsilon, \mathcal{Y}_T^* + \mu\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_T + Z_T\right))\mathbb{E}\left(Z_T\right) d\mu\right] \qquad (4.10) \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x\left(X_T^* + \mu\varepsilon\left(\eta_T + Z_T\right), \mathcal{Y}_T^*)\right) Z_T d\mu\right] \\ & + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_y(t, x^\varepsilon(t), \mathcal{Y}_T^* + \mu\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_t + Z_t\right), u_t^\varepsilon)\mathbb{E}\left(Z_t\right) d\mu\right] dt \qquad (4.11) \\ & + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_x(t, X_t^* + \mu\varepsilon\left(\eta_t + Z_t\right), \mathcal{Y}_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) Z_t d\mu\right] dt \\ & + \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_u(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^* + \mu\varepsilon\upsilon_t)\upsilon_t d\mu\right] dt + \beta_t^\varepsilon.\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\beta_t^\varepsilon &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_y(X_T^\varepsilon, \mathcal{Y}_T^* + \mu\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_T + Z_T\right))\mathbb{E}\left(\eta_T\right) d\mu\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^1 g_x(X_T^* + \mu\varepsilon\left(\eta_T + Z_T\right), \mathcal{Y}_T^*)\eta_T d\mu\right] \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_y(t, x^\varepsilon(t), \mathcal{Y}_T^* + \mu\varepsilon\mathbb{E}\left(\eta_t + Z_t\right), u_t^\varepsilon)\mathbb{E}\left(\eta_t\right) d\mu\right] dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\int_0^1 \ell_x(t, X_t^* + \mu\varepsilon\left(\eta_t + Z_t\right), \mathcal{Y}_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon)\eta_t d\mu\right] dt.\end{aligned}$$

En se référant à 4.6, on constate que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T}|\beta_t^\varepsilon|^2\right) = 0$. De plus, comme les dérivées de g et ℓ sont bornées, nous avons $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\beta_t^\varepsilon = 0$.

En conclusion, en se basant sur les équations 4.4 et 4.10 , avecu_t^ε tendant vers u_t^*

(quand ε tend vers 0), et en raison de la continuité lipschitz des dérivées de g et ℓ, nous obtenons le résultat 4.8.

4.1.2 l'équations adjointes

Nous présentons les équations adjointes qui sont impliquées dans le principe du maximum stochastique pour notre problème de contrôle de champ moyen. Il se trouve que l'équation adjointe prend la forme d'une EDSR linéaire de type de champ moyen. Pour tout u_t appartenant à l'espace $\mathcal{U}_{ad}$ et la trajectoire d'état correspondante X_t , nous considérons l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} dp_t = [b_x(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t)\, p_t + \mathbb{E}(b_y(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t)\, p_t) \\ +\sigma_x(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t)\, q_t + \mathbb{E}(\sigma_y(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t)\, q_t) \\ +\ell_x(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t) + \mathbb{E}(\ell_y(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t))]dt \\ -q_t dB_t, \\ p_T = g_x(X_T, \mathcal{Y}_T) + \mathbb{E}\left[g_y(X_T, \mathcal{Y}_T)\right]. \end{cases} \tag{4.12}$$

À partir des hypothèses précédentes l'équation 4.12 , admet une et une seule paire de solution $(p(\cdot), q(\cdot))$ est $\mathcal{F}_t-$adapté dans $\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})\ \times \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})$, nous avons :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|p_t|^2 + \int_0^T |q_t|^2\, dt\right] \leq C.$$

4.2 Principe du maximum de champ moyen

Théoreme (Principe du maximum de champ moyen pour le contrôle optimal**)**

Si u^* le contrôle optimal de problème 4.1-4.2. X^* trajectoire optimal associée. Alors il exist au processus adjoint $(p_t^*, q_t^*)\,, \mathcal{F}_t-$adapté solution de EDSR 4.12, telle que :

$$\mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)\upsilon_t dt \geq 0. \tag{4.13}$$

Où,nous établissons la définition conventionnelle de l'hamiltonien lié au problème de contrôle stochastique de champ moyen 4.1 et 4.2 comme suit :

$$H\left(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t, p_t, q_t\right) = p_t b\left(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t\right) + q_t \sigma\left(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t\right) + \ell\left(t, X_t, \mathcal{Y}_t, u_t\right),$$

Preuve

On notons $f_\alpha\left(t\right) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^*)$ pour$f = b, \sigma, \ell$ et g, et $\alpha = x, y, u$.

En utilisant la formule d'itô pour $p_t^* Z_t$ et en prenant l'espérance, avec $Z_0 = 0$, un calcul direct démontre que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(p_t^* Z_t) = \mathbb{E}\int_0^T p_t^* dZ_t + \mathbb{E}\int_0^T Z_t dp_t^* \\ &+\mathbb{E}\int_0^T q_t^* \left[\sigma_x\left(t\right) Z_t + \sigma_y\left(t\right) \mathbb{E}(Z_t)\right. \\ &\left. + \sigma_u\left(t\right) \upsilon_t\right] dt. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous savons que $p_T^* = \left[g_x(X_T^*, \mathcal{Y}_T^*) + \mathbb{E}\left[g_y\left(X_T^*, \mathcal{Y}_T^*\right)\right]\right.$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left\{\left[g_x(X_T^*, \mathcal{Y}_T^*) + \mathbb{E}\left[g_y\left(X_T^*, \mathcal{Y}_T^*\right)\right] Z_t\right\}\right. \\ &= \mathbb{E}\int_0^T p_t^* b_u(t) \upsilon_t dt + \mathbb{E}\int_0^T q_t^* \sigma_u\left(t\right) \upsilon_t dt \\ &- \mathbb{E}\int_0^T Z_t \ell_x\left(t\right) dt - \mathbb{E}\int_0^T Z_t \mathbb{E}\left(\ell_y\left(t\right)\right) dt, \end{aligned}$$

Finalement, à partir de 4.8, nous obtenons.

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T p_t^* b_u(t)\upsilon_t dt + \mathbb{E}\int_0^T q_t^* \sigma_u(t)\,\upsilon_t dt + \mathbb{E}\int_0^T \ell_u(t)\,\upsilon_t dt, \\
&= \mathbb{E}\int_0^T H_u(t, X_t^*, \mathcal{Y}_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*)\upsilon_t dt
\end{aligned}
$$

Cela complète la preuve du Théorème.

Conclusion

Dans ce mémoire, notre étude porte sur les conditions nécessaires pour le contrôle optimal (principe du maximum optimal de Pontryagin) pour des systems differentielle gouvernés par des équation différentielle stochastique de type McKean-Vlasov contrôllés. En supposant un domaine de valeur de contrôle covexe, en nous basant sur la méthode de perturbation convexe d'un contrôle optimal donné.

L'étude du modèle stochastique de type "champ moyen" en conjonction avec le contrôle optimal a révélé des perspectives de recherche passionnantes et des outils puissants pour comprendre et améliorer le comportement des systèmes dynamiques stochastiques EDSs dans des environnements incertains. Ce domaine continue d'attirer l'attention des chercheurs en raison de son importance théorique et de ses nombreuses applications pratiques.

Bibliographie

[1] Bensoussan A (1983), Lectures on stochastic contr.In Lect.Notes in Math.972,Springer Varlag, pp.1-62.

[2] Borkar, V. S. (2005). Controlled diffusion processes.

[3] Hafayed, M. (2013). A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal singular stochastic control. *Communications in Mathematics and Statistics*, 1(4), 417-435.

[4] Hafayed, M. (2013). A mean-field maximum principle for optimal control of forward–backward stochastic differential equations with Poisson jump processes. *International Journal of Dynamics and Control*, 1(4), 300-315.

[5] Hafayed, M., Tabet, M., & Boukaf, S. (2015). Mean-Field Maximum Principle for Optimal Control of Forward–Backward Stochastic Systems with Jumps and its Application to Mean-Variance Portfolio Problem. *Communications in Mathematics and Statistics*, 3(2), 163-186.

[6] Hafayed M, Abbas S.(2013) : *On Stochastic Near-optimal Singular Controls for Jumps Diffusions : Necessary and Sufficient Conditions* , Journal of Dynamical and Control Systems, Springer 19(4), 503-517.

[7] Hafayed M. Abbas S. : (2014) *On Near-optimal Mean-field stochastic singular controls : necessary and sufficient conditions for near-optimality.*

Journal of Optimization Theory and Applications, Springer Vol 160, 778–808.

[8] Hafayed, M. (2013). A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal singular stochastic control. Communications in Mathematics and Statistics, 1(4), 417-435.

[9] Hafayed, M., Meherrem, S., Eren, Ş., & Guçoglu, D. H. (2018). On optimal singular control problem for general Mckean-Vlasov differential equations : Necessary and sufficient optimality conditions. Optimal Control Applications and Methods, 39(3), 1202-1219.

[10] Jenblac, M. (2006).Cours de calcul stochastique.Master 2IF EVRY,Lecture Notes,University of Évry.

[11] Li, J. (2012). Stochastic maximum principle in the mean-field controls. Automatica, 48(2), 366-373.

[13] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[14] Vivek S. Borkar.(1986).The Probabilistic Structure of Controlled Diffusion Processes.

[16] Yong, J., & Zhou, X. Y. (2012). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations Vol. 43. Springer

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Lemme 4.2.1 *(*Lemme de Gronwall)

Soit f une fonction positive continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$f(t) \leq h(t) + c\int_0^t f(s)\,ds.\ 0 \leq t \leq T.$$

où c est une constante positive et h est une fonction intégrable sur $[0,T]\,, T > 0$. Alors

$$f(t) = h(t) + c\int_0^t h(s)\exp(c-(t-s))\,ds.0 \leq t \leq T.$$

Theoréme 4.2.1 *(*l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy)

Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives $c_p$et C_p telles que pour toute martingale locale continue $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $\bar{\mathbb{T}}$

, on ait

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\tau^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup|M_t|\right]^p \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\tau^p\right].$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$	:	espace de probabilité filtré.
EDS	:	équatuion différentielle stochastique.
$EDSR$	:	EDS-rétrograde.
$\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})$	:	l'espace des variables aléatoires carrées intégrables de sur $\mathcal{F}$ lintervalle $[0,T]$.
$s\wedge t$	:	min (s,t).
$\langle . \rangle_t$	:	crochet stochastique.
$(.)\otimes(.)$	:	produit tensoriel.
$\mathcal{N}$	:	la famille des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.
$p.s$	:	presque surement.
$\mathbb{P}{-}p.s.$	:	presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$	:	la tribus boriliénne sur $\mathbb{R}_+$.
$\mathbb{R}^d$	:	est l'espace réel euclidien de dimension d.
$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$	:	la filtration.

الملخص

نهتم في هذه المذكرة بدراسة المعادلات التفاضلية لأنظمة تحكمها معادلات تفاضلية عشوائية من الحقل المتوسط التي تعتمد على المعاملات المتمثلة في عملية الحالة وتوقعها. حيث نهتم بانشاء الشروط الضرورية للأمثلية في شكل المبدأ الحد الأقصى. باعتبار أن قيم التحكم تأخذ في مجال محدب.

الكلمات المفتاحية

التحكم الأمثل, مبدأ الحد الأقصى للحقل المتوسط, المعادلات التفاضلية من نوع الحقل المتوسط, مبدأ الحد الأقصى.

Résumé

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie d'optimisation stochastique et le contrôle optimal stochastique pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques de type mean-field. Le thème central est d'établir des conditions nécessaires d'un contrôle optimal sous forme du principe du maximum stochastique de type de Pontryagin. Dans ce mémoire de fin d'étude de Master, notre but est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un principe de maximum stochastique de Pontryagin, pour des systèmes gouverné par l'équations différentielles stochastiques de type mean-field. Plus précisément, on s'intéresse par des systèmes stochastique avec des diffusions contrôlée, (c'est à dire, le coefficient de la diffusion contient la variable de contrôle), et le domaine de contrôle est supposé convexe.

Mots-clés

Equations différentielles stochastiques de type mean-field, équations adjoints, contrôle optimal, le principe de maximum stochastique. Perturbation convexe.

Abstract

In our work , we study a convex stochastic optimization control problem, where the systems is drien by nonlinear controlled Ito-stochastic differential equations of mean-field type. We establish a set of necessary conditions for optimal stochastic control of systems driven by stochastic differential equations in the form of stochastic maximum principle. This type of control problems which has potential applications in mathematical finance becomes naturally, In this work, the control domain is assumed to be convex. Convex variational approach, Ito formula and convex perturbations have been applied to derive our result.

Keywords

Stochastic optimal control, stochastic differential equation, mean-field systems, necessary conditions of optimality. Ito-formula. variational method, convex perturbations.