République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

MAZRI Amira

Titre :

MODÈLES DE RISQUES COLLECTIFS

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**BRAHIMI Brahim**	UMK.Biskra	Président
Pr.	**YAHIA Djabrane**	UMK.Biskra	Encadreur
Dr.	**KHEIREDDINE Souraya**	UMK.Biskra	Examinateur (trice)

Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très honorables chers parents.

Ma famille, mes amis.

Et à tous ceux qui me connaissent de près ou de loin.

.

REMERCIEMENTS

La réalisation de cette thèse est l'aboutissement d'un parcours académique long, souvent laborieux et au cours duquel, malgré les embûches, j'ai toujours été animée par la volonté de finir, ou plutôt d'en finir.

*En premier lieu, je remercie "**Dieu**" de m'avoir venu en aide pour que je peux aboutir à la réussite.*

*L'accomplissement de ce travail n'aurait pu être réalisé sans le soutien et la collaboration de nombreuses personnes que je tiens à remercier sincèrement : Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse **Prof. YAHIA Djabrane** qui avec lequel l'enthousiasme et la générosité me donnèrent le goût de la recherche. Il a su m'encadrer en me laissant ma liberté puis ne pas perdre le contact, qui m'a amenée à découvrir l'avantage des Statistiques et qu'il soit remercié de sa patience, son indéfectible disponibilité pour écouter les questions et m'aider à trouver les réponses. Pour toutes ces raisons, je le remercie chaleureusement.*

*Je tiens à remercier le membre du jury d'être patients et d'avoir toléré d'évaluer et de juger mon travail préparé durant plusieurs jours et nuits que j'espère d'être fructueux. Qu'ils trouvent ici toute la reconnaissance : Monsieur **BRAHIMI Brahim**, président de jury et Madame **KHEIREDDINE Souraya**, examinatrice, je les exprime ma profonde gratitude.*

*J'éprouve aussi une grande reconnaissance à l'égard de mes parents, qui m'ont supporté tout au long de mes études universitaires. Ils savent combien ils comptent pour moi : **Maman**, **Papa** ; ils m'ont redonné confiance au moment où j'en avais le plus besoin, ils m'ont permis de continuer ce travail sans jamais abandonner. Pour tout ça et bien plus encore, je ne les remercierai jamais assez. Votre support m'a été très précieux. J'espère leurs avoir rendu un petit peu de ce qu'ils m'ont apporté.*

*Je tiens aussi à remercier mes chers **Frères** et **Sœur**, avec qui j'ai pu m'aérer l'esprit par quelques discussions et quelques journées aventures ; à qui je dédie toutes ces heures de travail consacrées pour ma thèse au détriment du temps que j'aurais dû passer en leur compagne. Ils demeurent ma plus grande source de motivation et ceux à qui je dois, en premier lieu, la réalisation de cette thèse.*

*Je voudrais dire aussi un mot à tous ceux avec qui j'ai ou j'ai eu le plaisir de collaborer : mes **Amies**. Ce mot, quels qu'aient été les moments de tension, et pour tous les instants de jubilation, de joie ou toutes les digressions :*

"MERCI"

J'ai sans aucun doute oublié d'autres personnes. Mais je suis persuadé qu'elles me pardonneront et je suis sûre qu'elles partageront avec moi ce moment d'euphorie tant attendu.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

L'une des principales préoccupations actuarielles d'une compagnie d'assurance est le risque global lié au portefeuille de contrats d'assurance souscrits par une compagnie d'assurance. Le modèle collectif de risque est l'un des outils utilisés à cette fin, dont une des particularités est de ne pas prendre en compte le nombre de contrats. Un portefeuille représente ici un ensemble de contrats provenant d'une classe d'affaires telle que en retrouve dans la référence [10] :

1. Assurance automobile des particuliers.
2. Assurance habitation.
3. Assurance commerciale.
4. Assurance invalidité pour les accidentés du travail.
5. Assurance responsabilité (par exemple pour un médecin, un notaire, un avocat, etc.).
6. Assurance véhicules commerciaux.

Grâce à un tel modèle collectif, la compagnie d'assurance a la possibilité de déterminer le montant de la prime qu'elle devra demander pour un contrat et de déterminer la solvabilité de l'entreprise ou d'une de ses classes d'affaires (ex : assurance automobile des particuliers au Québec). Une compagnie d'assurance doit assumer les risques d'un très grand nombre d'individus et d'entreprises. De l'a vient l'importance de choisir un modèle approprié pour évaluer le risque global que représente cette prise en charge [10]. Lorsque celui-ci est trop grand, la compagnie peut alors choisir d'en transférer une partie à un tiers par l'entremise de la réassurance. Les principales compagnies de réassurance sont situées en Suisse, en Allemagne, aux États-Unis et en Grande-Bretagne [10].

Nous présentons dans ce mémoire un aperçu sur les modèles des risques collectifs et de mettre en lumière le rôle du modèle de risque collectif dans l'assurance mathématiques. Nos objectifs sont l'étude du modèle de risque collectif, déterminer ces différentes propriétés, exemples et applications. Dans le but d'arriver à la réalisation de ses objectifs, nous proposons un plan qui s'articule autour de 2 chapitres, comme suit : Dans le premier chapitre, je donne des généralités et les concepts de base de l'assurance et de la théorie des risques. Le deuxième chapitre, focalise sur les risques collectifs, leur modèle, la particularités de prise en charge du risque collectif, la base de la théorie de ruine et l'approximation de la probabilité de ruine ainsi que la mutualisation des risques.

Chapitre 1

Généralités sur les risques et l'assurance

Dans ce premier chapitre, nous présenterons les principes fondamentaux de l'assurance, et le lecteur y découvrira que les mathématiques et les modèles mathématiques sous-tendent les mécanismes constitutifs de l'assurance [11]. Il existe cependant des obstacles à la conceptualisation et à la systématisation d'un tel sujet, ils se manifestent dans la recherche d'une définition de l'assurance et dans la multiplicité des modèles mathématiques intervenant dans ce domaine. Pour atteindre l'objectif de ce premier chapitre en prenant en considération ces difficultés, les différents concepts présentés seront examinés au fur et à mesure afin d'identifier et de clarifier leur sens.

Pour commencer, on peut noter que le mot risque est étroitement lié à l'assurance lorsqu'il a la signification (Grand Robert de la Langue Française ([6])) : «Eventualité d'un événement futur, incertain ou d'un terme indéterminé, ne dépendant pas exclusivement de la volonté des parties et pouvant causer la perte d'un objet ou tout autre dommage.»

Historiquement, l'assurance est basée sur un mécanisme particulier coïncidant avec une mise en commun de primes pour se couvrir mutuellement de la réalisation de risques [11]. L'objectif de ce chapitre est donc de dégager ces principes qui fondent l'assurance.

Il est indéniable que c'est cette conception mathématique de l'assurance qui permet de mieux comprendre son unité.

1.1 Risque et assurance

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 (Risque en littérature) *Le risque est tout événement ou activité humaine susceptible de causer des pertes matérielles ou humaines [14]. Il est lié à l'assurance[11], comme la possibilité qu'un événement futur ou tout autre dommage survienne [6].*

Définition 1.1.2 (Risque en mathématiques) *Soit* (Ω, F) *un espace probabilisable telle que représente l'esemble de tous les scénarios possibles (éspace de résultats) et* F *est une tribu. Un risque est une variabe aléatoire* $(v.a)$ *définie sur* (Ω, F) *désigné par* X *telle que :* $X \in J$*. ou* J *est l'ensemble des* $(v.a)$ *de pertes réelles définies sur un espace probabilisable* (Ω, F) *[3].*

– Pour un scénario $\omega \in \Omega$, la position $X(\omega)$ s'interpréte comme une perte (si $X(\omega) < 0$, alors $[X(\omega)]$ s'interpréte comme un gain). Par exemple dans les opérations bancaires on utilise des $(v.a)$ de gain positives alors les résultats de la perte X seraient alors des $(v.a)$ négatives, mais dans le domaine de l'assurance, il est habituellement approprié (cependant non essentiel) de supposer que la perte X est positif [3].

Définition 1.1.3 (L'assurance) *l'assurance est le contrat par lequel la compagnie d'assurance s'engage à fournir un service à l'assuré en cas de risque en échanged'une prime ou d'une contribution financière, Il existe deux types d'assurance : les assurances de personnes (les assurance maladie, accident du travail, retraite), les assurances de biens et de responsabilités (les assurances automobiles,multirisques habitation, construction) [11].*

Définition 1.1.4 (La réassurance) *la réassurance est le contrat par lequel la compagnie d'assurance s'est engagée envers le réassureur, qui payait les primes d'assurance à cette compagnie, de l'indemniser pour la perte des biens qu'il assurait.la compagnie d'assurance paie ces primes à la compagnie de réassurance, qui en retour garantit elle une partie des pertes selon l'accord conclu entre ces deux compagnies[15], comme dans le cas des catastrophes naturelles [11].*

1.1.2 Mutualisation des risques et des primes

Le risque associé à un assuré est un variable aléatoire, généralement supposé presque surement positive et notée X, et le prime ou cotisation est un réel positif généralement noté Π [11]. Le cardinal d'un ensemble d'assurés noté k, ou k est un entier naturel strictement positive, $\{1, ..., k\}$ est l'ensemble d'assurés, et les risques associés à chacun des assurés notés $X_1, ..., X_k$, et $\Pi_1, ..., \Pi_k$ sont les primes payés par chacun des assurés [11].

Une mutualisation suffisante des risques s'interprète par l'inégalité :

$$X_1 + ... + X_k \leq \Pi_1 + ... + \Pi_k \tag{1.1}$$

et la compensation des risques se traduit par l'identité :

$$X_1 + ... + X_k = \Pi_1 + ... + \Pi_k.$$

1.2 Contraintes en assurance

Dans cette section, nous présentons les contraintes qui régissent la conception et la mise en œuvre des modèles mathématiques utilisés pour calculer les primes d'assurance [9].

1.2.1 Mutualisation et segmentation des risques

Deux principes fondamentaux apparaissent opposés en assurance. Le premier de ces principes est la mutualisation des risques. Afin de réduire le risque moyen, il y a besoin de les mutualiser pour faire face à une grande variabilité de la réalisation des risques. Le second principe est celui de la segmentation pour avoir des ensembles de risques homogènes. Ce besoin de segmentation découle du fait que les risques ne sont généralement pas homogènes et qu'ils doivent être regroupés afin d'appliquer une prime différenciée à chacun des groupes ayant un risque homogène.

Une activité importante dans les mathématiques de l'assurance contemporaines est la recherche de modèles probabilistes permettant une segmentation appropriée des risques. Il faut cependant noter que trop de segmentation entraîne des problèmes car les primes de certains assurés peuvent devenir trop importantes (c'est l'exemple de l'assurance automobile et de l'assurance médicale). Dans cette situation, il n'apparaît nulle part que l'assurance ait pour rôle de déterminer un équilibre entre ces deux objectifs opposés. Le rôle de l'actuaire est donc simplement d'évaluer sa loi de probabilité de la manière la plus précise possible pour un risque donné.

Modélisation en temps discret et continu

Nous discutons ici du choix entre la modélisation en temps discret et la modélisation en temps continu. Nous présentons plus précisément deux arguments qui soutiennent le choix d'une modélisation en temps discret.

Le premier argument concerne les délais qui apparaîssent souvent entre les sinistres et les indemnisations des assurés. Il semble difficile d'intégrer ces délais dans un modèle en temps continu qui ne mesure que des évolutions instantanées, car ces délais sont généralement mesués en unité de temps.

Le second argument est plutôt d'ordre réglementaire. En effet, la pratique de l'assurance doit être encadrée par des activités comptables visant à faire l'inventaire des actifs et passifs de la compagnie d'assurance. Cet inventaire est crucial car il révèle la santé financière de l'entreprise. Cette activité comptable utilise une unité de temps égale à une année pour mesurer l'évolution au cours du temps. Cette mesure en temps discret justifie également la mise en place de modèles de même nature pour calculer les primes d'assurance [9].

Assurance vie et assurance non-vie

L'assurance vie portant sur des durées plus longue est soumise au risque de taux. En effet, lorsque l'assureur verse des primes à ses assurées sur plusieurs années, le montant total payé dépend fortement de l'évolution des taux d'intérêt.

Le principal risque pour l'assureur dans l'assurance non-vie qui porte sur des risques à plus courte échéance est la grande variabilité des sinistres, appelée risque de variabilité.

Il faut cependant noter que les différences entre les assurances vie et non-vie tendent à s'estomper et que les outils mathématiques récemment développés vont dans ce sens [9].

1.2.2 Primes d'assurance

La prime pure est la moyenne $E[X]$ d'un risque X. L'assureur ajoute ensuite une quantité proportionnelle pour obtenir la prime chargée

$$(1+\eta)E[X],$$

où η est le chargement de sécurité. Ce chargement réduit la probabilité de ruine de l'assureur.

A ces deux notions, il faut ajouter une prime commerciale en ajoutant un deuxième chargement à la prime chargée. Ce deuxième chargement comprend les différents coûts et frais de l'assureur, tels que la rémunération du capital, les taxes, les frais de réassurance et les frais de gestion. De manière générale, chaque entreprise applique ses propres règles pour calculer le chargement commercial [9].

1.2.3 Primes d'assurance Stop-de perte

Définition 1.2.1 *Les primes d'assurance Stop-de perte (**Stop-loss insurance premium en anglais**) est définie comme suit : pour une perte X, supposée non négative [8]. L'assureur conserve un risque d, et laisse le réassureur payer le reste, donc la perte de l'assureur s'arrête à d. Le paiement par un réassureur en cas de réassurance stop-loss avec rétention d pour une perte X est égal à $(X-d)_+$ tel que :*

$$(X-d)_+ := max\{X-d, 0\} = \begin{cases} X-d & si \quad X > d \\ 0 & si \quad X \leq d \end{cases}$$

Notons que les expressions pour les primes stop-loss peuvent également être utilisées pour calculer les primes nettes d'excédent de perte. Si $\pi_X(d)$ est la prime nette tel que $\pi_X(d) := E[(X-d)_+]$ pour un contrat stop-loss. Tant dans le cas discret, où $F_X(x)$ est une fonction échelon avec un échelon $f_X(x)$ dans x, que dans le cas continu, où $F_X(x)$ a $f_X(x)$ comme dérivée, la prime stop-de perte est donnée par [8] :

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} (x-d)_+ f_X(x) = \int_d^{\infty} [1 - F_X(x)] dx.$$

Alors $\pi'_X(d) = F_X(d) - 1$. Ce fait peut être utilisé pour vérifier le expressions pour les primes stop-loss [8].

1.3 Modèle individuel et modèle collectif

Définition 1.3.1 *Le modéle individuel de risque est une suite finie de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $X_1, X_2, ...$ qui sont positives. Le mon-*

tant cumulé des sinistres de l'ensemble de risques est alors défini par la somme[11] :

$$S = X_1 + ... + X_K = \sum_{k=1}^{K} X_k \ . \tag{1.2}$$

où, $X_1, X_2, ...$ sont les montants des sinistres et K est le nombre de ces sinistres survenus sur la période considérée.

Définition 1.3.2 *Le modèle collectif de risque est une suite infinie de variables aléatoires $N, Y_1, Y_2, ...$ qui sont indépendantes, la variable N est à valeurs dans les entiers positifs et les variables $Y_1, Y_2, ...$ sont identiquement distribuées à valeurs positives. le montant cumulé des sinistres de l'ensemble de risques est alors défini par la somme avec un nombre aléatoire de termes[11] :*

$$S = Y_1 + ... + Y_N = \sum_{n=1}^{N} Y_n, \ avec, par\ convention, \ S = 0\ lorsque\ N = 0 \tag{1.3}$$

où, $Y_1, Y_2, ...$ sont les montants des sinistres et N est le nombre de ces sinistres survenus sur la période considérée.

Remarque 1.3.1 *le modèle collectif contient le modèle individuel et il a été introduit dans dans le cadre du temps continue.*

1.4 La base de la théorie de ruine

Définition 1.4.1 (Prime pure) *La prime pure est l'espérance mathématique $E[S]$ du montant cumulé des sinistres S [9].*

Définition 1.4.2 (Pirme chargé) *La prime chargé d'un ensemble de risques est la prime pure de cet ensemble augmenté d'un chargement qui lui est proportionel. Lorsque ce motant cumulé est noté noté S, que le taux de chargement est noté η, $\eta\ \epsilon]0, \infty[$, et* *que la prime chargé est notée* Π, *cette dernière vérifie [11] :*

$$\Pi = (1+\eta)\ E(S). \tag{1.4}$$

1.4.1 Critère de ruine

Définition 1.4.3 *Considérons un ensemble de risque cumulé* S *de fonction de répartition* F_S *et de prime pure* $E[S] \neq 0$. *Pour un chargement de sécurité* $\eta > 0$, *une réserve de solvabilité* $R > 0$ *et une réassurance de taux de rétention* $\alpha \in]0,1]$, *la probabilité de ruine* P_{ruine} *est donnée par [9] :*

$$P_{ruine} = P(\alpha S > \alpha(1+\eta)\ E[S] + R) = 1 - F_S((1+\eta)\ E[S] + \frac{R}{\alpha}). \tag{1.5}$$

Remarque 1.4.1 *Notons que cette définition est naturelle puisqu'elle correspond à la probabilité que les pertes cumulées à la charge de l'assureur* αS *dépassent les fonds dont il dispose. Ces fonds se décomposant en la somme des primes qu'il conserve* $\alpha(1+\eta)\ E[S]$ *et de sa réserve de solvabilité* R *[9].*

Supposons alors que le réassureur ne fait pas défaut lorsque l'assureur est ruiné. L'assureur n'ayant en charge qu'une proportion α des primes et des sinistres S, la proportion de coût restant à la charge des assurés vaut [9] :

$$\frac{E[\alpha S \mid \alpha S > \alpha(1+\eta)E[S] + R] - (\alpha(1+\eta)E[S] + R)}{(1+\eta)E[S] + \frac{R}{\alpha}}.$$

Ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition 1.4.4 *Fixons un ensemble de risque cumulé* S *de fonction de répartition* F_S *et de prime pure* $E[S] \neq 0$. *Pour un chargement de sécurité* $\eta > 0$, *une réserve de solvabilité* $R > 0$ *et une réassurance de taux de rétention* $\alpha \in]0,1]$, *la proportion de coût* *en excès à la ruine C_{ruine} est définie par [9] :*

$$C_{ruine} = \alpha(\frac{E[\alpha S \mid \alpha S > \alpha(1+\eta)E[S] + R]}{(1+\eta)E[S] + \frac{R}{\alpha}} - 1).$$

Définition 1.4.5 *Le taux de chargement total de la prime pure est définit par la quantité [9] :*

$$\eta + \frac{R}{\alpha E[S]}.$$

1.4.2 Processus de réserve et de surplus

Soit $\{R_t : t > 0\}$ le processus de réserve, et $u = R(0)$ la réserve initiale [12]. On fait les hypothèses suivantes :

- $(T_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a.positives i.i.d égales aux temps et instant d'occurence T_i du $i^{ème}$ sinistre.
- $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$.
- $N_t = max\{n \in \mathbb{N}; \sigma_n \leq\ t\}$ processus de comptage égale au nombre de sinistres jusqu'au temps t.
- $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suite de v :a positive i.i.d égales aux montants des sinistres.
- p flux de prime générée par le porteffeuille par unité de temps. Ce qui donne :

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

On définit également le processus de surplus $\{S(t) : t \geq\ 0\}$ comme suit :

$$S_t = u - R_t.$$

1.4.3 Probabilité de ruine

Définition 1.4.6 *On définit la probabilité de ruine à horizon infini [12], notée ψ, par :*

$$\psi(u) = P(inf_{t\geq 0}\ R_t < 0 : R_0 = u).$$

Propriété 1.4.1 *1. La probabilité complèmentaire ou probabilité de non ruine, noté ϕ, est :*

$$\phi(u) = 1 - \psi(u),\ \ \phi(u,T) = 1 - \psi(u,T).$$

2. L'instant de ruine, noté τ_u, associé à une réserve initiale u, est :

$$\tau_u = inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\} = inf\{t \geq 0;\ S(t) > u\}.$$

3. Les maxima du processus de surplus en temps fini et infini, respectivement notés M_T et M, sont :

$$M = sup_{t\geq 0}\ S(t), \quad M_T = sup_{t\in[0,T]}\ S(t).$$

La donnée de ces deux quantités permettent des définitions alternatives de la probabilité de ruine :

$$\psi(u) = P(\tau(u) < \infty) = \psi(M > u),\ \psi(u,T) = P(\tau(u) < T) = \psi(M_T > u).$$

1.4.4 Le chargement

Définition 1.4.7 *La chargement est la somme qui garantit à l'un des joueurs un gain certain. Toute entreprise commerciale spéculant sur le hazard (maisons de jeux, loteries, compagnies d'assurance), car le but de cette entreprise est de réaliser un bénéfice après avoir couvert ses frais généraux, le chargement est nécessaire [11].*

La tarification est liée au concept de chargement sécurité, car la prime inclut un chargement sécurité. Si la mutualisation des risques est idéale, une prime plus élevée est demandée [12].

Proposition 1.4.1 *Une mesure de risque R contient un chargement de sécurité si pour tout risque X, on a :*

$$R(X) \geq E[X].$$

1.5 Mesures de risques

Une mesure de risque est une manière spécifique d'évaluer le degré de risque dans le but de déterminer l'ampleur des pertes en fonction des types de risque. Il existe plusieurs manières de mesurer le risque, telles que : la variance, Value-at-Risk (VaR) [2].

Définition 1.5.1 *Une mesure de risque est une fonction définie sur l'éspace des variables aléatoires J, tel que, $J \subset L^{\infty}$,à valeur dans $\mathbb{R}$ et on la note par R [4] :*

$$R : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$J \longrightarrow R(X)$$

X est le montant de perte et $R(X)$ est le montant du capital à détenir pour faire face aux pertes X. $R(X)$ est grand $\Longrightarrow$ X est dangereux.

La définition générale utilisée par les praticiens est la suivante : La (VaR) correspond au montant des pertes qui ne devrait pas être dépassé pour un niveau de confiance donné et sur un horizon temporel fixé [3].

Définition 1.5.2 *((VaR) en mathématiques) : On appelle Value-at-Risk de niveau $\alpha \in (0,1)$ le quantile de niveau α (voir [4] et [7]) :*

$$R_{\alpha}(X) = VaR(X, \alpha) = x_{\alpha} \text{ où } F(x_{\alpha}) = P(X \leq x_{\alpha}) = \alpha$$

ou encore

$$\begin{aligned} VaR(X,\alpha) &= inf\{x : P(X \leq x) > \alpha\} = inf\{x : F(x) > \alpha\} \\ &= F_X^{-1}(\alpha) = Q(\alpha). \end{aligned}$$

Pour remédier à ces défauts de la (VaR), d'autre mesures ont été proposés, et parmi ces mesures : La "Tail Value-at-Risk" ou $(TVaR)$ et la moyenne des (VaR) de niveau supérieur à α.

Définition 1.5.3 $(TVaR)$ *: La Tail Value-at-Risk notée* $TVaR(X,\alpha)$ *est définie par [1] :*

$$TVaR(X,\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR(X,t)\ dt.$$

Donc la $(TVaR)$ *est la moyenne des* (VaR) *de niveau supérieur à* α. *Notons que la* $(TVaR)$ *est plus grande que la* (VaR) *correspondante.*

Chapitre 2

Modèle collectif

Les concepts clés des mathématiques de l'assurance présentés précédemment sont repris en les développant dans ce chapitre, principalement dans le contexte des temps discrets. Outre la présentation des caractéristiques fondamentales des modèles de risques individuels et collectifs, ainsi que des modèles paramétriques simples pouvant servir à approcher la loi du montant cumulé des sinistres d'un ensemble de risques. L'effet de la mutualisation des risques sera aussi illustré en considérant l'exemple spéculatif où les risques suivent des lois nomales, exemple pour lequel des calculs simples peuvent être conduits..

2.1 Modèle collectifs et loi composée

Définition 2.1.1 *Le modèle collectif de risque est une suite infinie de variables aléatoires $N,\ Y_1,\ Y_2,\ ...$ qui sont indépendantes, la variable N est à valeurs dans les entiers positifs et les variables $Y_1,\ Y_2,\ ...$ sont identiquement distribuées à valeurs positives. Le montant cumulé des sinistres de l'ensemble des risques est alors défini par la somme aléatoire [11] :*

$$S = Y_1 + ... + Y_N = \sum_{n=1}^{N} Y_n,\ avec,\ par\ convention,\ S = 0\ lorsque\ N = 0. \qquad (2.1)$$

Ce modèle a été introduit dans le cadre du temps continue. Où, $Y_1,\ Y_2,\ ...$ *sont les montants des sinistres et* N *est le nombre de ces sinistres survenus sur la période considérée.*

Exemple 2.1.1 *On supposons que* $Y_{i,i=1...n}$ *v.a suit une loi lognormale, avec* $S = Y_1 + ... + Y_n$ *. Nous avons la distibution de S :*

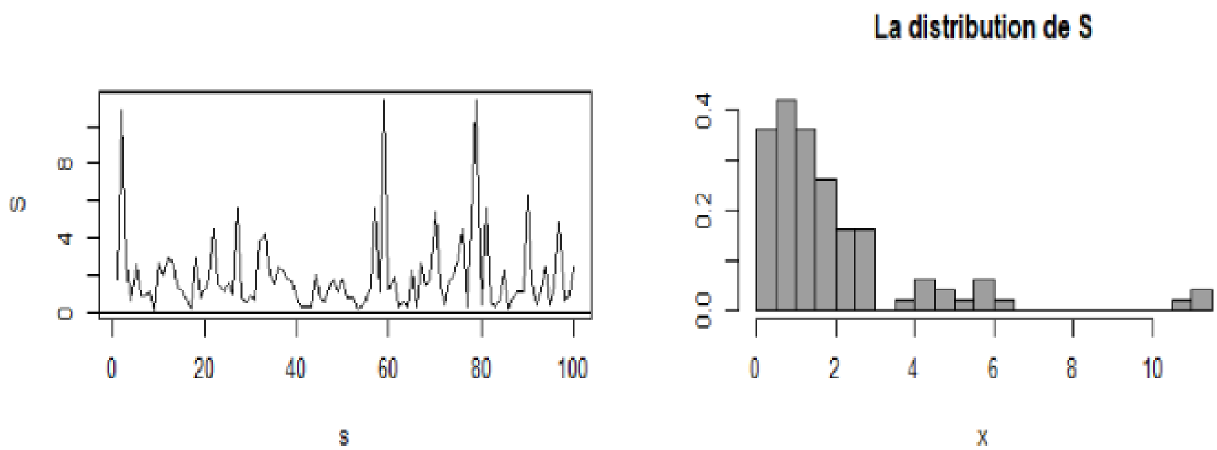

Fig. 2.1 – représentation graphique de S et distribution de S

Définition 2.1.2 *Une somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, quand le nombre aléatoire est indépendant des variables sommées, est appelée somme aléatoire et la loi d'une somme aléatoire est appelée loi composée [11].*

2.1.1 Exemples de risques collectifs

1. **Risques de trafic :** train, avion, La voiture : Par exemple, la voiture est exposée à des risques, son propriétaire doit donc l'assurer. Il existe deux types d'assurance automobile : l'assurance obligatoire et l'autre complémentaire. L'assurance obligatoire est la nécessité d'une assurance pour la responsabilité civile résultant des accidents des véhicules de transport rapide. Pour les cas de décès et de blessures

corporelles, ainsi que les dommages matériels aux biens. Tandis que l'assurance complémentaire couvre tout dommage total ou partiel survenu à la voiture résultant d'un accident, d'un vol total ou partiel ou d'un incendie total ou partiel, pour plus de détatilles voir [16].

2. **Risques naturels :** Glissement de terrain, feu de forêt, inttempéries excessives, forte chaleur (canicule), grand froid, rupture barrage, séisme.
3. **Risques industriels :** industrie chimique à Château Arnoux, industris pharmacologique à Sisteron, réserve de gaz et de pétrole près de Manosque.
4. **Risques alimentaires :** intoxications collectives.
5. **Risques transport de matières dangereuses :** route (radiologique, chimique), gazoduc, oléoduc.
6. **Risques sociaux :** mouvements de foule, émeutes destructrices paniques en lieux publics, stades, agressions collectives par armes à feu, explosifs et incendies, prises d'otages.
7. **Risques épidémiques :** épidémies, gastoentérite, bronchiolite, grippe...

2.1.2 Particularités de prise en charge du risque collectif

Parmis les particularités de prise en charge du risque collectif, on a [5] :

- Possible dégats matériels de grande envergure.

- Difficulté de communication, réseau GSM inopérant.

- Difficulté d'accés routier (route coupées).

- Difficulté d'accés aux blessés (ensevelis).

- Destruction, désorganisation d'un quartier, d'une ville (eau, edf, gdf, réseau informatique).

- Grands nombres de victimes.

2.2 Loi composée

Définition 2.2.1 *Une loi P sur $[0, +\infty[$, de fonction de répartition F est une loi composée si elle vérifie [9] :*

$$F = \sum_{n \geq 1} p_n F_X^{\otimes n}$$

pour deux variables aléatoires N et X, avec $F_X^{\otimes n}$ est la fonction de répartition par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Cette loi est alors notée $LC(P_N, P_X)$.

Nous considérons maintenant une composition particulière faisant intervenir la loi de Poisson. Nous notons dans la suite $PC(\lambda, P_X)$ pour $LC(P(\lambda), P_X)$ [9].

Définition 2.2.2 (Loi de Poisson composée) *Si $N \sim P(\lambda)$ et si les $X_1,\ X_2,$ ... admettent F comme fonction de répartition, S suit une loi de Poisson composée $PC(\lambda, F)$. Dans ce cas, on a [13] :*

$$G(s) = Pr(S \leq\ s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k\,|} F^{*(k)}(s),\ \ s \geq\ 0,$$

$$E[S] = \lambda\ E[X], \qquad Var[S] = \lambda\ Var[X] + \lambda\ E^2[X] = \lambda\ E[X^2].$$

Ainsi, le montant cumulé des sinistres S suit une loi composée dans le modèle collectif de risque [11].

Remarque 2.2.1 *Considérant deux v.a. positives X et Y et ℓ un strictement positif, puisque :*

$$E[(X+Y)^\ell] \leq E[2^\ell (X^\ell + Y^\ell)] =\ 2^\ell (E[X^\ell] + E[Y^\ell]), \tag{2.2}$$

il en résulte que l'implication suivante est toujours vraie :

$$E[X^\ell] <\ \infty \text{ et } E[Y^\ell] <\ \infty \implies\ E[(X+Y)^\ell] <\ \infty. \tag{2.3}$$

Proposition 2.2.1 *Dans le modèle collectif de risque N, $(Y_k)_{k\geq 1}$ avec montant cumulé* *des sinistres* $S = Y_1 + ... + Y_N$ *nous avons :*

$$E[S] = E[N]\ E[Y] \qquad si\ E[Y] < +\infty\ et\ E[N] < +\infty. \tag{2.4}$$

$$Var[S] = \ E[N]Var[Y] + Var[N]E[Y]^2 \qquad si\ E[|Y|^2] < +\infty\ et\ E[|N|^2] < +\infty. \tag{2.5}$$

$$F_S = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n F_Y^{*n}. \tag{2.6}$$

Preuve. Le montant cumulé S est une v.a. positive, $E[S]$ existe donc toujours à valeurs dans $[0, \infty]$. De plus, comme les évènements $\{N = n\}$ forment une partition de Ω lorsque n décrit $\mathbb{N}$, il en résulte, notons $1_{(A)}$ la fonction indicatrice de l'ensemble A, que les égalités suivantes sont vraies, les quantités intervenant appartenant à $[0, \infty]$ [11] :

$$E[S] = E[S\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{(N=n)}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} E[S1_{(N=n)}] = \sum_{n\in\mathbb{N}} E[(Y_1 + ... + Y_N)1_{(N=n)}] \tag{2.7}$$

où, la deuxième égalité provient, par exemple, du théorème de Fubini. Maintenant, lorsque les v.a. Y_n sont d'espérance finie, il vient, pour $n \in \mathbb{N}$

$$E[(Y_1 + ... + Y_N)1_{(N=n)}] \leq E[(Y_1 + ... + Y_N)] = nE[Y] < \infty,$$

et par indépendance entre la v.a. N et les v.a. Y_n ainsi que par la linéarité de l'espérance :

$$E[(Y_1 + ... + Y_N)1_{(N=n)}] = E[(Y_1 + ... + Y_N)]E[1_{(N=n)}] = n\ E[Y]p_n = np_nE[Y]. \tag{2.8}$$

En combinant alors (2.7) avec (2.8), les propriétés des séries à termes positifs impliquent les égalités :

$$E[S] = \sum_{n\in\mathbb{N}}(np_nE[Y]) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} n\ p_n)E[Y] = E[N]E[Y]. \tag{2.9}$$

Ce qui permet alors de complélter la preuve de (2.4). Suivant la même démarche, le moment d'ordre deux de la variable S se calcule aisémant. Ainsi, le théorème de Fubini implique que

$$E[S^2] = E[S^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(N=n)}] = \sum_{n \in \mathbb{N}} E[S^2 1_{(N=n)}] = \sum_{n \in \mathbb{N}} E[(Y_1 + ... + Y_N)^2 1_{(N=n)}] \quad (2.10)$$

ces identités ayant lieu que les quantités intervenant soient finies ou infinies. Maintenant, losque les v.a. Y_n vérifient $E[Y_n^2] = E[Y^2] < \infty$, il vient, par un raisonnement par récurance utilisant (2.3), pour $n \in \mathbb{N}$:

$$E[(Y_1 + ... + Y_N)^2 \; 1_{(N=n)} \;] \; \leq \; E[(Y_1 + ... + Y_N)^2] \; < \; \infty \; ,$$

et par indépendance entre la v.a. N et les v.a. Y_n :

$$E[(Y_1 + ... + Y_N)^2 \; 1_{(N=n)} \;] \; = \; E[(Y_1 + ... + Y_N)^2] \; E[1_{(N=n)}] \; = \; p_n \; E[(Y_1 + ... + Y_N)^2].$$

Or, du développement du carré $(Y_1 + ... + Y_N)^2$ il résulte n termes de la forme Y_ℓ^2, d'espérance $E[Y_\ell^2] = E[Y^2]$, ainsi $n(n-1)$ termes de la forme $Y_k Y_\ell$, $k \neq \ell$, d'espérance égales à $E[Y_k] \; E[Y_\ell] = (E[Y])^2$ puisque Y_k et Y_ℓ sont des v.a. indépendantes. Ce qui par linéarité de l'espérance, conduit aux identités :

$$E[(Y_1 + ... + Y_N)^2] \; = \; n \; E[Y^2] \; + \; n(n-1) \; (E[Y])^2,$$

et

$$E[(Y_1 + ... + Y_N)^2 \; 1_{(N=n)} \;] \; = \; n \; p_n \; E[Y^2] \; + \; n(n-1) \; p_n \; (E[Y])^2. \quad (2.11)$$

En combinant alors (2.10) avec (2.11), les propriétés des séries à termes positifs impliquent les égalités

$$\begin{aligned} E[S^2] \; &= \; \sum_{n \in \mathbb{N}} n \; p_n \; E[Y^2] \; + \; \sum_{n \in \mathbb{N}} n(n-1) \; p_n \; (E[Y])^2 \\ &= \; E[N] \; E[Y^2] \; + \; E[N(N-1)] \; (E[Y])^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ce qui implique, lorsque la v.a. N vérifie $Var[N] < \infty$, que

$$\begin{aligned} E[S^2] &= E[N]\ Var[Y] + E[N^2]\ (E[Y])^2 \\ &= E[N]\ Var[Y] + Var[N]\ (E[Y])^2\ +\ (E[N])^2\ (E[Y])^2 \\ &= E[N]\ Var[Y] + Var[N]\ (E[Y])^2\ +\ (E[S])^2, \end{aligned}$$

complétant ainsi la preuve de (2.5). Enfin, toujours en usant de l'argument que les évènements $\{N = n\}$ forment une partition de Ω lorsque n décrit $\mathbb{N}$, il s'ensuit les identités, pour $s \in \mathbb{R}$ [11] :

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P(S \leq s) = P((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{N = n\}\ ) \cap \{S \leq s\}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\{N = n\} \cap \{S \leq s\}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\{N = n\} \cap \{\sum_{\ell=1}^{n} Y_\ell \leq s\}). \end{aligned}$$

L'indépendance entre les v.a. N et les v.a. $Y_1,\ Y_2, ...$ et l'expression comme un produit de convolution de la fonction de répartition de la somme $Y_1 + ... + Y_n$ impliquent alors, pour $s \in \mathbb{R}$

$$F_S(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(N = n)\ P(\sum_{\ell=1}^{n} Y_\ell \leq s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\ F_Y^{*n}(s).$$

Ce qui démontrer (2.6) et termine la preuve de la Proposition 2.2.1. ■

2.3 Critère de ruine

Définition 2.3.1 *Considérons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S et de prime pure $E[S] \neq 0$. Pour un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance de taux de rétention $\alpha \in]0,1]$, la* *probabilité de ruine P_{ruine} est donnée par [9], comme suit :*

$$P_{ruine} = P(\alpha S > \alpha(1+\eta)\ E[S] + R) = 1 - F_S((1+\eta)E[S] + \frac{R}{\alpha}). \tag{2.13}$$

Remarque 2.3.1 *Notons que cette définition est naturelle puisqu'elle correspond à la probabilité que les pertes cumulées à la charge de l'assureur αS dépassent les fonds dont il dispose. Ces fonds se décomposant en la somme des primes qu'il conserve $\alpha(1 + \eta)\ E[S]$ et de sa réserve de solvabilité R [9].*

Supposons alors que le réassureur ne fait pas défaut lorsque l'assureur est ruiné. L'assureur n'ayant en charge qu'une proportion α des primes et des sinistres S, la proportion de coût restant à la charge des assurés vaut [9] :

$$\frac{E[\alpha S \mid \alpha S > \alpha(1+\eta)E[S] + R] - (\alpha(1+\eta)E[S] + R)}{(1+\eta)E[S] + \frac{R}{\alpha}.}.$$

Ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition 2.3.2 *Fixons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S et de prime pure $E[S] \neq 0$. Pour un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance de taux de rétention $\alpha \in]0,1]$, la proportion de coût en excès à la ruine C_{ruine} est définie par [9] :*

$$C_{ruine} = \alpha(\frac{E[\alpha S \mid \alpha S > \alpha(1+\eta)E[S] + R]}{(1+\eta)E[S] + \frac{R}{\alpha}} - 1). \tag{2.14}$$

Définition 2.3.3 *Le taux de chargement total de la prime pure est définit par la quantité [9] :*

$$\eta + \frac{R}{\alpha E[S]}.$$

2.4 Approximation de la probabilité de ruine

En général, l'assureur ne connaît pas précisément la loi déterminant sa probabilité de faire défaut. Il est intéressant pour lui d'approcher cette loi. Considérons une famille de lois de probabilité $\{P_\theta \ : \ \theta \ \in \ \Theta\}$ sur $\mathbb{R}$ à laquelle sera associée la famille de fonctions de répartition $\{F_\theta \ : \ \theta \ \in \ \Theta\}$ définie par :

$$F_\theta(x) \ = \ P_\theta(]-\infty, x]), \ x \in \mathbb{R}.$$

Lorsqu'elles existent la moyenne et la variance de P_θ seront respectivement notées m_θ et σ_θ^2.

Etant donnée une fonction de répartition F et une classe de fonction H, il est naturel de recherché l'élément de la famille $\{F_\theta \ : \ \theta \ \in \ \Theta\}$ le plus proche de F au sens où il est solution du problème :

$$inf_{\theta\in\Theta} \ (sup_{h\in H} \ \ | \int_{\mathbb{R}} h(x)dF(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)dF(x) \ |) \tag{2.15}$$

Dans le cas où $\Theta \subset \mathbb{R}^2$, F est la fonction de répartition d' une loi de probabilité admettant un moment d'ordre 2 et H est l'ensemble des polynômes de degrés 2, ce problème se ramène à un calcul de moment comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.4.1 ([9]) *Soit une fonction de répartition F de moyenne m et de variance σ^2 finie et non nulle. Pour H l'ensemble des fonctions polynômes de degré 2, le problème (2.15) admet une solution unique telle que l'infimum est nul si et seulement si le système $m_\theta = m$ et $\sigma_\theta^2 = \sigma^2$ admet une unique solution.*

Preuve. Fixons une fonction h de la forme

$$h(x) \ = \ ax^2 + bx + c, \ x \in \mathbb{R},$$

avec a, b et c des constantes réelles, comme pour $\theta \in \Theta$,

$$\int_{\mathbb{R}} x dF(x) \ = \ m, \ \int_{\mathbb{R}} x \ dF_\theta(x) \ = \ m_\theta,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \ dF(x) = m^2 + \sigma^2, \qquad \int_{\mathbb{R}} x^2 \ dF_\theta(x) = m_\theta^2 + \sigma_\theta^2,$$

Nous avons alors [9] :

$$\begin{aligned} &\inf_{\theta \in \Theta}(\sup_{h \in H} \mid \int_{\mathbb{R}} h(x) dF_\theta(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x) dF(x) \mid) \\ &\qquad = \inf_{\theta \in \Theta}(\sup_{a,b \in \mathbb{R}} \mid a(\sigma_\theta^2 - \sigma^2 + m_\theta^2 - m^2) + b(m_\theta - m) \mid). \end{aligned}$$

En prenant $a = 0$ et $b = 1$ puis $a = 1$ et $b = 0$, cette quantité est nulle si et seulement si $m = m_\theta$ et $\sigma_\theta^2 = \sigma^2$. ■

Nous sous intéressons maintenant à deux approximations par des familles de lois particulières : la loi normale et la loi gamma.

2.4.1 Approximation normale

Pour un réel m et σ^2un réel strictement positif, la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la loi de fonction de répartition $F_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}$ donnée par

$$F_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Toujours dans le cas où la famille H est l'ensemble des polynômes de degré 2, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.4.2 ([9]) *Pour la famille de lois normale $\{F_{\mathcal{N}(\mu,\nu^2)} : (\mu, \nu^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\}$, le système $m_\theta = m$ et $\sigma_\theta^2 = \sigma^2$ admet une unique solution dès que $\sigma^2 > 0$.*

Cette solution est donnée par

$$\mu = m \quad et \quad \nu^2 = \sigma^2.$$

L'approximation obtenue est appelée ***approximation normale de la fonction de répartition*** F**.**

Preuve. Il suffit d'appliquer la Proposition precidente au cas d'une famille de lois normales. Cette approximation est alors utile pour approcher la probabilité de ruine. ■

Définition 2.4.1 *Pour une loi de probabilité de fonction de répartition F_S, de moyenne m et de variance σ^2 finie et non null, l'approximation normale de la fonction de répartition F_S est la fonction de répartition $F_{\mathcal{N}(0,1)}(\frac{-m}{\sigma})$, se qui sera écrit $F_S \approx F_{\mathcal{N}(0,1)}\ (\frac{-m}{\sigma})$.*

Définition 2.4.2 *Considérons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S, de prime pure $E[S]$ et de variance $\sigma^2(S)$ finie et non nulle. Lorsqu'un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance proportionnelle de taux de rétention $\alpha \in]0, 1]$ sont appliqués, l'approximation normale de la probabilité de ruine est donnée par*

$$P_{ruine} \approx 1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(\frac{E[S]}{\sigma(S)}(\eta + \frac{R}{\alpha E[S]})),$$

où $F_{\mathcal{N}(0,1)}$ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

En effet, comme $E[S] > 0$, puisque par hypothèse $S \geq 0$ p.s et $\sigma^2(S) > 0$, 2.4.2 :

$$\begin{aligned} P_{ruine} &= P(\alpha S \ > \ \alpha(1+\eta)\ E[S] \ + \ R) \\ &= 1 - F_S((1+\eta)\ E[S] \ + \ \frac{R}{\alpha}). \end{aligned}$$

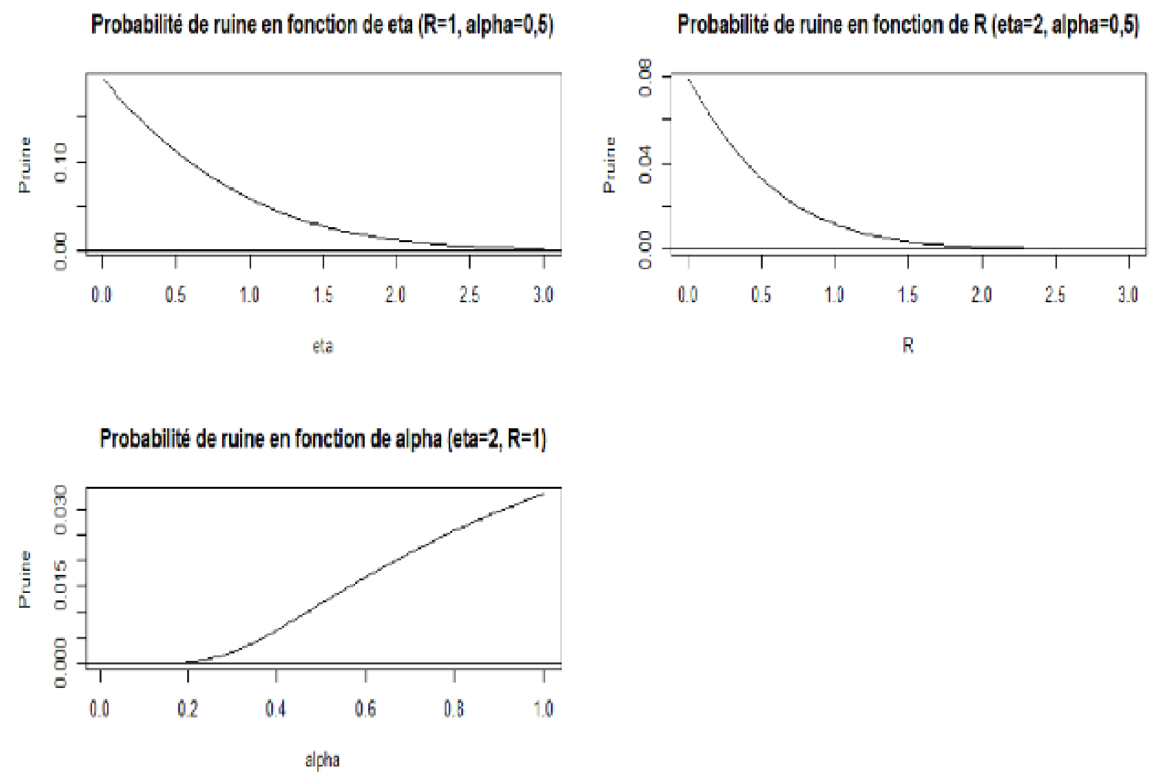

FIG. 2.2 – Approximation normale de la probabilité de ruine

Combinée avec 2.4.1 :

$$F_S((1+\eta)E[S]+\frac{R}{\alpha}) \approx F_{\mathcal{N}(0,1)}(\frac{(1+\eta)E[S]+\frac{R}{\alpha}-E[S]}{\sigma(S)})$$
$$= F_{\mathcal{N}(0,1)}(\frac{E[S]}{\sigma(S)}(\eta \ + \frac{R}{\alpha E[S]}).$$

Exemple 2.4.1 *On supposons que $Y_{i,i=1...n}$ v.a suit une loi lognormale, avec $S = Y_1 + ... + Y_n$ et $\eta > 0$, $R > 0$, $\alpha \in]0,1]$. Nous avons trois cas pour l'approximation normale de probabilité de ruine :*

1- P_{ruine} en fonction $R > 0$: posons α =0, 5 et η =2.

2- P_{ruine} en fonction $\alpha \in]0,1]$: prenons R =1 et η =2.

3- P_{ruine} en fonction $\eta > 0$: supposons α =0, 5 et R =1.

2.4.2 Approximation gamma

Pour deux réels a et b strictement positifs la loi gamma $\gamma(a,b)$ est la loi de fonction de répartition donnée par

$$F_{\gamma(a,b)}(x) = \int_0^x \frac{b^a}{F_{\gamma(a,b)}(a)} y^{a-1} e^{-by} dy, \quad si\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad et \quad F_{\gamma(a,b)}(x) = 0, \quad si\ x \in \mathbb{R}_-,$$

$$où \quad F_{\gamma(a,b)}(a) = \int_0^{\infty} y^{a-1}\ e^{-y}\ dy.$$

Toujours dans le cas où le famille H est l'ensemble des polynômes de degré 2, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.4.3 ([9]) *Pour la famille de lois gamma* $\{\gamma(a,b) : (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*\}$, *le système* $m_\theta = m$ *et* $\sigma_\theta^2 = \sigma^2$ *admet une unique solution dès que* $m > 0$ *et* $\sigma^2 > 0$. *Cette solution est donnée par :*

$$a = \frac{m^2}{\sigma^2} \quad et \quad b = \frac{m}{\sigma^2}.$$

L'approximation obtenue est appelée approximation gamma de la fonction de répartition F.

Preuve. En utilisant 2.4.1 et les expressions de la moyenne et de la variance d'une loi $\gamma(a,b)$, nous obtenons $\frac{a}{b} = m$ et $\frac{a}{b^2} = \sigma^2$ ce qui donne le résultat. ■

Nous déduisons également de cette approximation une approximation de la probabilité de ruine.

Définition 2.4.3 *Pour une loi de probabilité de fonction de répartition* F_S, *de moyenne* m *strictement positive et de variance* σ^2 *finie et non null, l'approximation gamma de la fonction de répartition* F_S *est la fonction de répartition* $F_{\gamma(\frac{(E[S])^2}{\sigma^2(S)}, \frac{E[S]}{\sigma^2(S)})}$, *se qui sera écrit* $F_S \approx F_{\gamma(\frac{(E[S])^2}{\sigma^2(S)}, \frac{E[S]}{\sigma^2(S)})}$.

Définition 2.4.4 *Considérons un ensemble de risque cumulé S de fonction de répartition F_S, de prime pure $E[S]$ et de variance $\sigma^2(S)$ finie et non nulle. Lorsqu'un chargement de sécurité $\eta > 0$, une réserve de solvabilité $R > 0$ et une réassurance proportionnelle de taux de rétention $\alpha \in]0,1]$ sont appliqués, l'approximation gamma de la probabilité de ruine est donnée par*

$$P_{ruine} \approx 1 - F_{\gamma(\frac{(E[S])^2}{\sigma^2(S)}, \frac{E[S]}{\sigma^2(S)})}((1+\eta)E[S] + \frac{R}{\alpha}).$$

Nous nous concentrons dans la suite sur l'approximation normale. Nous présentons un résultats permettant de mesurer la qualité de cette approximation.

En effet, comme $E[S] > 0$, puisque par hypothèse $S \geq 0$ p.s et $\sigma^2(S) > 0$, 2.4.3 :

$$P_{ruine} = P(\alpha S > \alpha(1+\eta)vE[S] + R) = 1 - F_S((1+\eta)\ E[S] + \frac{R}{\alpha})$$

combinée avec 2.4.3 :

$$F_S((1+\eta)E[S] + \frac{R}{\alpha}) \approx F_{\gamma(\frac{(E[S])^2}{\sigma^2(S)}, \frac{E[S]}{\sigma^2(S)})}((1+\eta)E[S] + \frac{R}{\alpha}).$$

Exemple 2.4.2 *On supposons que $Y_{i,i=1...n}$ v.a suit une loi lognormale, avec $S = Y_1 + ... + Y_n$ et $\eta > 0$, $R > 0$, $\alpha \in]0,1]$. Nous avons trois cas pour l'approximation gamma de probabilité de ruine :*

1- P_{ruine} en fonction $R > 0$: posons α =0, 5 et η =2.

2- P_{ruine} en fonction $\alpha \in]0,1]$: prenons R =1 et η =2.

3- P_{ruine} en fonction $\eta > 0$: supposons α =0, 5 et R =1.

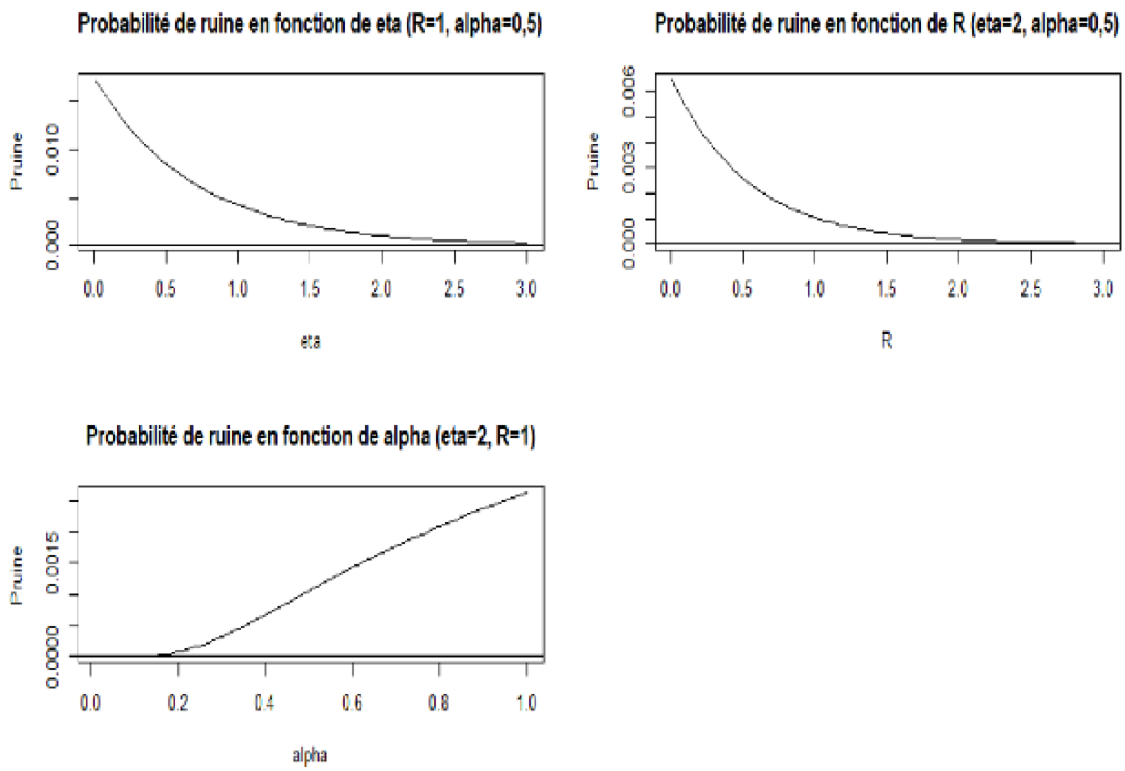

Fig. 2.3 – Approximation gamma de la probabilité de ruine

2.5 Modèle normal et mutualisation des risques

La fonction $\varphi = \Phi'$ désigne la densité de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$, cette fonction vérifie

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad pour \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement croissante d'image $]0,1[$, elle est inversible et d'inverse Φ^{-1} est définie de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, tandis que le rapport $(1-\Phi)/\varphi$ est le rapport de Mills de la loi normale.

Pour des paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\nu^2 \in]0,\infty[$, la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\nu^2)$ définie par sa fonction de répartition $\Phi((\cdot - \mu)/\ \nu)$ admet donc la fonction $\Phi((\cdot-\mu)/\nu)/\nu$ comme densité.

Enfin, l'expression de la fonction de répatition de la loi $\mathcal{N}(\mu,\nu^2)$ traduit le fait pour que X v.a. de loi $\mathcal{N}(\mu,\nu^2)$, alors la v.a. $(X-\mu)/\nu$ suit la loi normale standard. En effet,

$$\begin{aligned} P((X-\mu)/\nu \le x) &= P(X \le \mu + \nu x) \\ &= \Phi((\mu + \nu x - \mu)/\nu) = \Phi(x), \quad pour\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lemme 2.5.1 ***(rapport de Mills pour la loi normale)****, L'encadrement du rapport de Mills est donner par [11] :*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} < \frac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)} < \frac{1}{x}, \quad pour\ x \in]0,\infty[.$$

De plus si $\mu \in \mathbb{R}$ et $\nu^2 \in]0,\infty[$ et $X \sim \mathcal{N}(\mu,\nu^2)$, alors

$$E[X/X > x] = \mu + \nu \frac{\varphi((x-\mu)/\nu)}{1 - \Phi((x-\mu)/\nu)}, \quad pour\ x \in \mathbb{R}.$$

Preuve. voir [11] page 66. ■

Maintenant, pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $\nu^2 \in]0,\infty[$ et la v.a. S suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\nu^2)$, il existe une autre expression pour la probabilité de ruine P_{ruine} et la proportion de coût en excès à la ruine C_{ruine}, elles sont respectivement [11] :

$$P_{ruine} = P(S > s) = 1 - \Phi((s-\mu)/\nu),$$

$$C_{ruine} = \frac{E[S/S > s]}{s} - 1 = \frac{1}{s}(\mu + \nu\frac{\varphi((x-\mu)/\nu)}{1-\Phi((x-\mu)/\nu)}) - 1.$$

2.5.1 Conséquences provenant du regroupement de deux ensembles de risques

Considérons deux ensembles de risques de montants cumulés S_1 et S_2 de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_1, \nu_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \nu_2^2)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et s_1 et s_2 deux seuils tels que les probabilités de ruines associées respectivement pour S_1 et S_2 soient fixées à ε. Ces seuils sont donc donnés par

$$s_1 = \mu_1 + \nu_1\Phi^{-1}(1-\varepsilon) \quad et \quad s_2 = \mu_2 + \nu_2\Phi^{-1}(1-\varepsilon).$$

Nous supposons dans la suite que le montant cumulé $S = S_1 + S_2$ suit une loi normale. Sa moyenne μ et sa variance ν^2 sont alors données par :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \quad et \quad \nu^2 = \nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2.$$

Deux possibilités s'offrent à l'assureur pour profiter de l'effet de mutualisation [9].

- **Réduction du seuil :** L'assureur peut choisir d'utiliser l'effet de mutualisation afin de réduire le seuil s correspondant à une probabilité de ruine ε pour S. Dans ce cas, ce seuil est donné par

$$s = E[S] + \sqrt{\sigma^2(S)}\,\Phi^{-1}(1-\varepsilon) = \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2}\Phi^{-1}(1-\varepsilon).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on remarque que $\nu^2 \leq \nu_1^2 + \nu_2^2 + 2\sqrt{\nu_1^2\nu_2^2} =$

$(\nu_1+\nu_2)^2$, ce qui conduit à un seuil réduit :

$$s \leq s_1 + s_2.$$

– **Réduction de la probabilité de ruine :** L'assureur peut également utiliser le seuil $s = s_1 + s_2$ afin de réduire la probabilité de ruine de l'ensemble des risques [9]. En effet, nous distinguons les deux cas suivants :

Cas 1 :

$$\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2 = 0,$$

dans ce cas

$$v^2 = \sigma^2(S_1 + S_2) = 0 \quad \text{ et } \quad P(S_1 + S_2 = \mu_1 + \mu_2) = 1.$$

Comme

$$s_1 + s_2 = \mu_1 + \mu_2 + \Phi(1-\varepsilon)(\nu_1 + \nu_2) > \mu_1 + \mu_2,$$

nous obtenons

$$P(S_1 + S_2 > s_1 + s_2) = 0 < \varepsilon$$

et la probabilité de ruine est diminuée.

Cas 2 :

$$\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2 > 0,$$

dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned}
P(S_1 + S_2 > s_1 + s_2) &= 1 - \Phi\Big(\frac{s_1 + s_2 - (\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2}}\Big) \\
&= 1 - \Phi\Big(\frac{\nu_1 + \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2}}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\Big) \\
&\leq 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité provenant de fait que Φ est une fonction croissante et de l'inégalité $\nu^2 \leq (\nu_1 + \nu_2)^2$:

$$\frac{\nu_1 + \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + 2cov(S_1, S_2) + \nu_2^2}} \geq \ 1$$

En suivant ce raisonnement on peut montrer le résultat plus général suivant :

Proposition 2.5.1 ([9]) *Soient un entier I strictement positif et I ensembles de risques de montant cumulés respectifs $S_1, ..., S_I$ tels que les S_i et $S := S_1 + ... + S_I$ suivent des lois normales avec $\sigma^2(S_i) > 0$ pour tout $i \leq I$. Pour des seuils $s_1 > E[S_1], ..., s_I > E[S_I]$, nous avons*

$$P(S > S_1 + ... + S_I) \leq max_{1 \leq i \leq I}(1 - \Phi(\frac{s_i - E[S_i]}{\sigma(S_i)})).$$

Preuve. La v.a. $S = S_1 + ... + S_I$ suit la loi normale $\mathcal{N}(E[S], \sigma^2(S))$ avec la linéarité de l'espérance :

$$E[S] = E(S_1 + ... + S_I) = E[S_1] + ... + E[S_I],$$

et

$$\begin{aligned}\sigma^2(S) = \sigma^2(S_1 + ... + S_I) &= E[[\sum_{i=1}^{I} S_i - E[S_i]]^2] \\ &= E[\sum_{i=1}^{I}[S_i - E[S_i]]^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq I} [S_i - E[S_i]][S_j - E[S_j]]] \\ &= \sum_{i=1}^{I} \sigma^2(S_i) + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq I} Cov(S_i, S_j).\end{aligned}$$

En appliquant l'négalité de Cauchy-Schwarz à tous les termes de double somme, il en résult la majoration :

$$\sigma^2(S) \leq \sum_{i=1}^{I} \sigma^2(S_i) + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq I} \sigma(S_i)\sigma(S_j) = (\sum_{i=1}^{I} \sigma(S_i))^2.$$

Maintenant, le cas $\sigma^2(S) = 0$ est trivial. Suppossant $\sigma^2(S) > 0$, la probabilité de ruine de réunion des I ensembles, quand elle est calculée pour le seuil $s_1 + ... + s_I$ est donnée par

$$P(S_1 + ... + S_I > s_1 + ... + s_I) = 1 - \Phi(\frac{s_1 + ... + s_I - E[S]}{\sigma(S)}),$$

elle vérifie donc, la fonction Φ étant croissante :

$$\begin{aligned}
P(S_1 + ... + S_I > s_1 + ... + s_I) &\leq 1 - \Phi(\frac{s_1 + ... + s_I - E[S]}{\sum\limits_{i=1}^{I} \sigma(S_i)}) \\
&= 1 - \Phi(\sum_{i=1}^{I} \frac{\sigma(S_i)}{\sum\limits_{j=1}^{I} \sigma(S_j)} \frac{s_i - E[S_i]}{\sigma(S_i)}) \\
&\leq 1 - \Phi(\min_{1 \leq i \leq I} \frac{s_i - E[S_i]}{\sigma(S_i)}) \\
&= max_{1 \leq i \leq I}(1 - \Phi(\frac{s_i - E[S_i]}{\sigma(S_i)}).
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de 2.5.1. ■

Exemple 2.5.1 *On supposons que $Y_{i,i=1...n}$ v.a suit une loi lognormale, avec $S = Y_1 + ... + Y_n$. Nous avons la probabilité de ruine en fonction de seuil :*

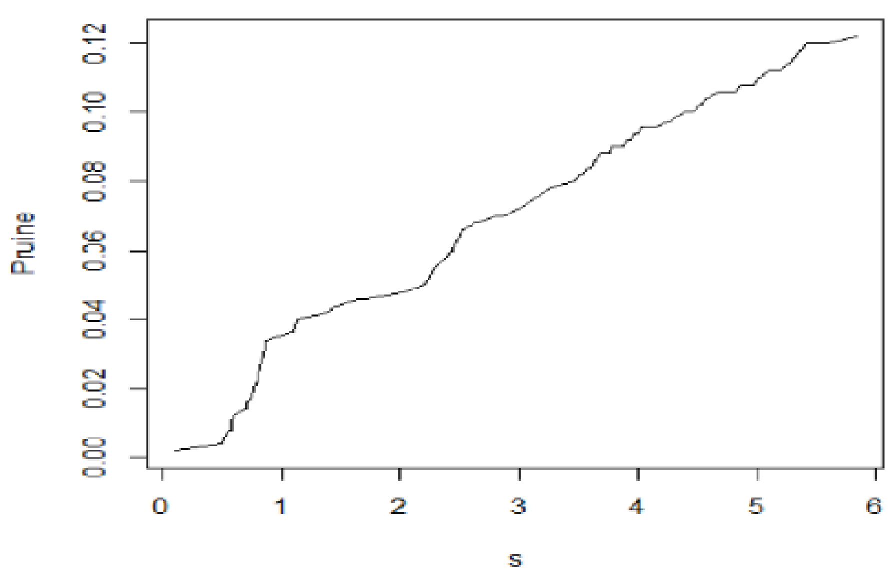

FIG. 2.4 – La probabilité de ruine en fonction de seuil

2.6 Exemple d'un modèle de versement d'un capital décès

Considérons le modèle de risque suivant, extrait de la référence [9] :

– Les variables aléatoires X_k sont données par $X_1 = cB_1, ..., X_k = cB_k$, où c est une constante, $c \in]0, \infty[$ de $\mathbb{R}_+^*$ et $B_1, ..., B_K$ sont des variables aléatoires iid de loi de Bernoulli $B(q)$ de paramètre $q \in]0, 1[$:

$$P(B_k = 1) = q, \ P(B_k = 0) = 1 - q.$$

Le cumul des sinistres $S = X_1 + ... + X_K$ est un modèle individuel paticulièrement simple. Ce modèle correspond au versement d'un capital de montant c au décès d'individus tous de même caractéristique vis-à-vis de la probabilité de décès qui est égale à q. Ce modèle avec ses extensions est utilisé dans le domaine de l'assurance vie collective, où les contrats concernant un ensemble d'individus sont négociés chaque année, voir [11], pour plus de détailles.

– la variable $S/c = B_1 + ... + B_K$ suit une loi binomiale $B(K, q)$ de paramètres K et q :

$$P(S/c = k) = C_K^k q^k (1 - q)^{K-k}, \ pour \ k \in \{0, ..., K\}.$$

Le paramètre q représentant la mortalité d'un individu est déterminé en fonction des tables de mortalité. A titre d'exemple, il varie entre 10^{-4} et 10^{-3} pour des individus entre 5 et 60 ans.

– Ainsi la variable S suit la loi binomiale $B(1000, 0, 001)$ dans le premier cas et la loi binomiale $B(10000, 0, 001)$ dans le deuxième cas. Ces loi sont respectivement de moyennes $Kcq = 1$ et 10, et de variance $Kcq(1 - q) = 0, 999$ et $9, 990$ [11].

– Pour les deux cas, les valeurs de la fonction de répartition F_S de S sont présentées dans les deux tableaux suivants [11] :

n	0	1	2	3	4	5
$F_S(n)$	0, 3676954	0, 7357589	0, 9197907	0, 9810732	0, 9963631	0, 9994119
n	6	7	8	9	10	11
$F_S(n)$	0, 9999180	0, 9999900	0, 9999989	0, 9999999	1, 0000000	1, 0000000

TAB. 2.1 – Fonction de répartition de la B(1000,0,001)

n	0	1	2	3	4	5
$F_S(n)$	0, 0000452	0, 0004974	0, 0027603	0, 0103096	0, 0291959	0, 0669914
n	6	7	8	9	10	11
$F_S(n)$	0, 1300153	0, 2200855	0, 3327070	0, 4578671	0, 5830398	0, 6968331
n	12	13	14	15	16	17
$F_S(n)$	0, 79116513	0, 8645739	0, 9166457	0, 9513464	0, 9730235	0, 9857670
n	18	19	20	21	22	23
$F_S(n)$	0, 9928418	0, 9965624	0, 9984211	0, 9993052	0, 9997067	0, 9998810
n	24	25	26	27	28	29
$F_S(n)$	0, 9999536	0, 9999825	0, 9999937	0, 9999978	0, 9999992	0, 9999998

TAB. 2.2 – Fonction de répartition de la B(10000,0,001)

- Les valeurs de ces tableaux ont été facilement calculées en partant de l'expression des probabilités $B(K,q)(n)$, $n \in \mathbb{N}$, et en travaillant par récurence sur n, les valeurs de n d'intérêt étant peu nombreuses. Ces valeurs de F_S sont évidement des valeurs approchées (à $0,5 \quad 10^{-7}$ près) [11].
- Nous nous intéressons dans la suite à l'effet que peut avoir la mutualisation dans un tel modèle. Prenons les valeurs $q = 10^{-3}$ et $c = 1$. Nous observons que l'intervalle de confiance pour S associé à une certaine probabilité dépend fortement de K. Par exemple pour une probabilité $1 - 10^{-4} = 0.9999\%$ [9], pour $K = 1000$ [11] :

$$P(S \in [0,6]) = F_S(6) \approx 0,9999,$$

alors, l'intervalle de confiance pour S est $[0,6]$, pour $K = 10000$ [11] :

$$P(S \in [0,24]) = F_S(24) - F_S(0) \approx 0,9999,$$

alors que cet intervalle de confiance est $[0,24]$.

- Autrement dit si un assureur gère un portefeuille de 10000 risques i.i.d, de loi de bernoulli B(0,001), et si il veut connaître avec une probabilité supérieure à 0,9999 la somme qu'il peut avoir débourser pour faire face à ses engagements, il est obligé de prévoir entre 1 et 24, alors que la prime pure vaut 10 [11].

- Il est également possible de calculer la probabilité de ruine. Fixons par exemple $R = 1$, $\alpha = 0,5$ et $\eta \in]0,1[$. En utilisant la formule

$$P_{ruine} \;=\; P(S \;>\; (1+\eta)\; E[S] \;+\; \frac{R}{\alpha}) = P(S > s) = 1 - F_S(s),$$

avec,

$$s = (1+\eta)\; E[S] \;+\; \frac{R}{\alpha}$$

nous obtenons les résultats suivants de la probabilité de ruine pour le nombre de risques :

K	η	P_{ruine}
1000	$\eta \in]0,1[$	$1,89 \times 10^{-2}$
10000	$0,1$	$1,35 \times 10^{-1}$
10000	$0,5$	$1,42 \times 10^{-2}$
10000	$0,9$	$6,94 \times 10^{-4}$

TAB. 2.3 – Probabilité de ruine pour le nombre de risques

- On constate donc que pour un nombre plus élevé d'assurés, il est possible de controller plus finement cette probabilité de ruine. Notons cependant que la décroissance de la probabilité de ruine avec K n'est pas vérifiée pour les petites valeurs de η. Cela vient de l'effet de la valeur R/α. En effet, pour garder une probabilité stable avec K, il faut que cette quantité évolue proportionnellement à K. C'est ce que font en pratique les assureurs.

- Il faut également noter qu'en admettant un certain niveau différent de 0 pour la probabilité de ruine, cette dernière est susceptible de se produire. Il faut donc calculer quel sera le montant non indemnisé par l'assureur C_{ruine}.

En utilisant la formule [11] :

$$\begin{aligned} C_{ruine} &= C_{ruine}(s) \\ &= \ \alpha(\frac{E[S/S > \ s]}{s} - 1) \\ &= \alpha(\frac{1}{s}\frac{E[S\ 1(S > \ s)]}{P(S > s)} - 1) \\ &= \alpha(\frac{1}{s}\frac{E[S] - E[S\ 1(S \leq \ s)]}{1 - F_S(s)} - 1 \end{aligned}$$

Cette quantité s'évaluer numériquement presque aussi facilement que la fonction de répartition F_S puisque, en notant n la partie entière de s, il vient l'expression [11] :

$$E[S\ 1(S \leq \ s) = \sum_{\ell=0}^{n} B(K,q)(\ell),$$

nous obtenons les valeurs suivantes qui représentent les valeurs de la proportion de coût en excès à la ruine pour le nombre de risques :

K	s	α	C_{ruine}
1000	3, 5	0, 5	$1,04 \times 10^{-1}$
10000	17	0, 5	$5,70 \times 10^{-2}$

TAB. 2.4 – Proportion de coût en excès à la ruine pour le nombre de risques

– Nous constatons dans ce cas que pour $\eta = 0,5$ par exemple, le seuil est donné par [9] :

$$\begin{aligned} s &= (1+\eta)\ Kcq + R/\alpha \\ &= 1,5 \times 1000 \times 10^{-3} + 1/0,5 = 3,5. \end{aligned}$$

La ruine peut donc se produire avec une probabilité de l'ordre de $1,9\%$ et lorsqu'elle se produit en moyenne, plus de 10% de l'indemnisation n'est pas remboursée.

Conclusion

On a vu dans ce mémoire que le modèle collectif de risque est un outil fort pour les actuaires. Il offre la possibilité de mesurer un risque global auquel est confrontée une compagnie d'assurance, en tenant compte du portefeuille dans son ensemble plutôt que des contrats individuels.

A l'aide de ce modèle collectif, il est possible d'évaluer le risque global du portefeuille, de déterminer la solvabilité d'une ou de plusieurs classes d'affaires et de fixer la prime de réassurance stop-loss.

Même si le modèle collectif classique basés sur les sommes aléatoires, et considère que les variables sont iid, cette hypothèse n'est pas toujours réaliste, ce qui offre une nouvelle piste de recherches future.

Bibliographie

[1] Aurby. H., Lotfi. B. (1999). Au delà de la VaR, vers une nouvelle mesure du risque en gestion de portefeuille. Rapport de recherche.

[2] Benbraika. G. (2009). Dependance des risques et application. Mémoire de Magistère, Universite Biskra.

[3] Bouchareb S. (2019). Risque et mesure de risque. Mémoire master en mathématiques, Université de Biskra.

[4] Charpentier, A. (2010). Mesures de risque, Journées d'études Statistique, Luminy, Université Rennes 1, France.

[5] Coulon, Y. (2004). Risques collectifs. A.F.G.S.U. Niveau 1. https ://www.cesu04.fr

[6] Grand Robert de la Langue Française

[7] Hervé, F.D. (2004). La VaR comme instrument de mesure des risques de marché ?. Crédit Local.

[8] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. (2008). Modern actuarial risk theory : using R (Vol. 128). Springer Science & Business Media.

[9] Kharroubi, I. Actuariat Introduction. Université Paris Dauphine.

[10] Le Blanc, R. (2000). Study of the effect of dependence in the collective risk model. Essay. Laval University.

[11] Pierre-Loti-Viaud, D., Boulongne, P. (2014). Mathématique et assurance : premiers éléments. Ellipses.

[12] Pierre-Olivier, G. Introduction à la théorie de la ruine.

[13] Therond, P.E. The collective model.

[14] https ://www.undrr.org.

[15] https ://ar.m.wikipedia.org.

[16] https ://www.asjp.cerist.dz.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$E(.)$	:	Espérence mathématique.
$V(.)$	:	Variance mathématique.
$Cov(X,Y)$	:	Covariance mathématique du couple (X,Y).
n	:	$Nombre\ entier.$
$\mathbb{R}$	:	$Ensemble\ des\ valeurs\ réelles.$
$\mathbb{N}$	:	$Ensemble\ des\ valeurs\ naturels.$
$v.a$	:	$Varaible\ alétoire.$
VaR	:	$Value - at - Risk.$
$TVaR$	:	$Tail - Value - at - Risk.$
L^{∞}	:	$\{u : \Omega \ \to \mathbb{R}\ mesurable,\ \sup\ \lvert u(t) \rvert\ <\ \infty\}$
X	:	$Le\ risque\ associé\ à\ un\ assuré.$
Π	:	$La\ prime\ chargé.$
k	:	$Le\ cardinal\ d\prime un\ ensemble\ d\prime assurés.$
$\{1,...,k\}$	:	$L\prime ensemble\ d\prime assurés.$
$X_1,...,X_k$	:	$Les\ risques\ associés\ à\ chacun\ des\ assurés.$
$\Pi_1,...,\Pi_k$	:	$Les\ primes\ payés\ par\ chacun\ des\ assurés.$
η	:	$Un\ chargement\ de\ sécurité.$
(Ω,F)	:	$Un\ espace\ probabilisable.$

S	:	*Le montant cumulé des sinistres.*
C_{ruine}	:	*La proportion de coût en excès à la ruine.*
R_t	:	*Le processus de réserve avec* $t > 0$.
u	:	*La réserve initiale.*
$(T_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$	:	*Le temps et instant d'occurence* T_i *du* $i^{ème}$ *sinistre.*
N_t	:	*Processus de comptage.*
$(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$	:	*Les montants des sinistres.*
p	:	*Flux de prime.*
S_t	:	*Le processus de surplus avec* $t \geq 0$.
ψ	:	*La probabilité de ruine à horizon infini.*
ϕ	:	*La probabilité complèmentaire ou probabilité de non ruine.*
τ_u	:	*L'instant de ruine associé à une réserve initiale* u.
M_T	:	*Les maxima du processus de surplus en temps fini.*
M	:	*Les maxima du processus de surplus en temps infini.*
R	:	*Une mesure de risque.*
$F_X^{\otimes n}$	:	*La fonction de répartition par rapport à la mesure de comptage sur* $\mathbb{N}$.
$LC(P_N, P_X)$	:	*Une loi composée.*
$PC(\lambda, P_X)$	:	*Une loi de Poisson composée Si* $N \sim P(\lambda)$.
P	:	*Une loi.*
$1_{(A)}$	:	*La fonction indicatrice de l'ensemble* A.
J	:	*L'éspace des variables aléatoires.*
m_θ	:	*La moyenne de* P_θ *avec* $\theta \in \Theta$ *sur* $\mathbb{R}$.
σ_θ^2	:	*La variance de* P_θ *avec* $\theta \in \Theta$ *sur* $\mathbb{R}$.
H	:	*Une classe de fonction* H.
F	:	*La fonction de répartition.*
m	:	*La moyenne* m *de la fonction de répartition* F.
σ^2	:	*La variance finie et non nulle de la fonction de répartition* F.
$\gamma(a, b)$	:	*La loi gamma de paramètres* a *et* b.
$\mathcal{N}(\mu, \nu^2)$	:	*Loi normale de moyenne* μ *et de variance* ν^2.

$F_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}$	:	*La fonction de répartition de la loi normale.*
φ	:	*La fonction de densité de la loi normale standard* $\mathcal{N}(0,1)$.
Φ	:	*La fonction de répartition de la loi normale standard* $\mathcal{N}(0,1)$.
s	:	*Le seuil.*
I	:	*Les ensembles de risques de montant cumulés des sinistres.*
$B_1, ..., B_K$	:	*Les variables aléatoires iid de loi de Bernoulli* $B(q)$ *de paramètre* $q \in]0,1[$.
$B(K,q)$	:	*Une loi binomiale de paramètres* K *et* q.
iid	:	*Indépendantes et identiquement distribuées.*
d	:	*Un risque.*
$\pi_X(d)$	:	*La prime nette.*
$F_X(x)$	:	*La fonction de répatition de* X.
$f_X(x)$	:	*La fonction devdensité de* X.
$X_1, ..., X_K$	:	*Les montants des sinistres.*
K	:	*Le nombre de ces sinistres survenus sur la période considérée.*
$Y_1, ..., Y_N$	:	*Les montants des sinistres.*
N	:	*Le nombre de ces sinistres survenus sur la période considérée.*
$E[S]$	:	*La prime pure.*
F_S	:	*La fonction de répartition d'un ensemble de risque cumulé* S.
R	:	*Une réserve de solvabilité.*
α	:	*Une réassurance de taux de rétention.*
P_{ruine}	:	*La probabilité de ruine.*

ملخـــــص

هدفنا في هذه المذكرة هو إعطاء لمحة عامة عن نماذج المخاطر الجماعية وأهميتها في التأمين الرياضياتي. نهدف إلى دراسة نموذج المخاطر الجماعية، تحديد خصائصه وتطبيقاته المختلفة. كما نعطي أهم المفاهيم والنتائج الأساسية اللازمة لتحديد وتقريب احتمالية الافلاس المقابلة لهذا النموذج. تم إعطاء أمثلة عن طريق المحاكاة باستخدام برنامج المعالجة الإحصائية R لتوضيح مختلف النتائج النظرية المقدمة.

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire de master un aperçu sur les modèles des risques collectifs et leurs importances en assurance mathématiques. Nos objectifs sont l'étude du modèle de risque collectif, la détermination de ces différentes propriétés et applications. Nous donnons aussi les principales notions et résultats nécessaires pour la détermination et l'approximation de la probabilité de ruine correspondante à ces modèles. Des exemples à l'aide du logiciel de traitement statistique **R**, sont donnés pour illustrer les différents résultats théoriques.

Abstract

In this master's dissertation, we present an overview of collective risk models and their importance in mathematical insurance. Our objectives are the study of the collective risk model, the determination of its different properties and applications. We also give the main concepts and results necessary for the determination and approximation of the ruin probability corresponding to these models. Examples by simulation using the **R** statistical software are given to illustrate the different theoretical results.